Karlsruher Institut für Technologie

# Effizienter Planaritätstest
# Vorlesung am 30.06.2015

**Ignaz Rutter**

INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK · PROF. DR. DOROTHEA WAGNER

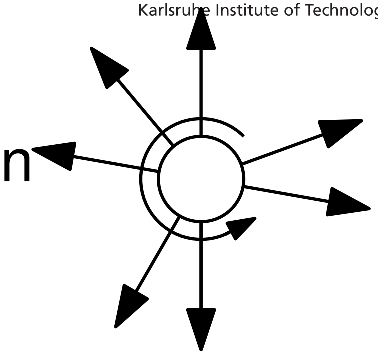
**Satz**

Gegebenen einen Graphen $G = (V, E)$ mit $n$ Kanten und $m$ Knoten, kann in $O(n + m)$ Zeit getestet werden, ob $G$ planar ist.

Ist dies der Fall, kann in derselben Zeit eine planare Einbettung berechnetwerden. Anderenfalls kann in derselben Zeit $K_5$ oder $K_{3,3}$ als Minor gefunden werden.

Wir zeigen polynomielle Laufzeit.

# Kantenordnungen und Einbettungen



Einbettung wird kodiert als Kantenordnung um jeden Knoten

$\rightsquigarrow$ Rotations-Schema

Beschreibt ein gegebenes Rotationsschema eine planare Einbettung?

Wie kann man das testen?

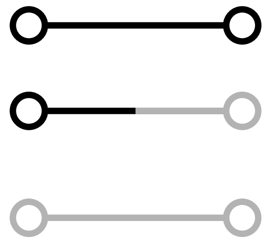


Institute of Theoretical Informatics
Prof. Dr. Dorothea Wagner

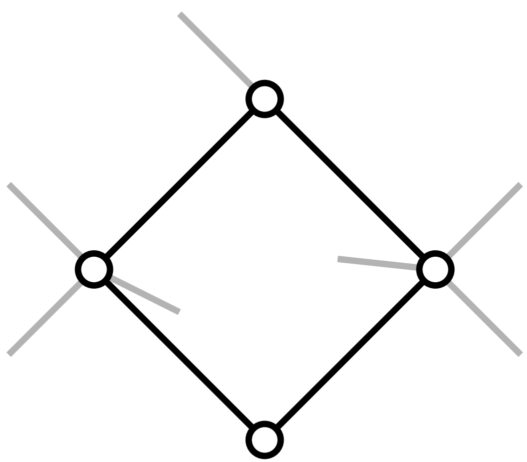
# Planaritätstest, 1. Ansatz

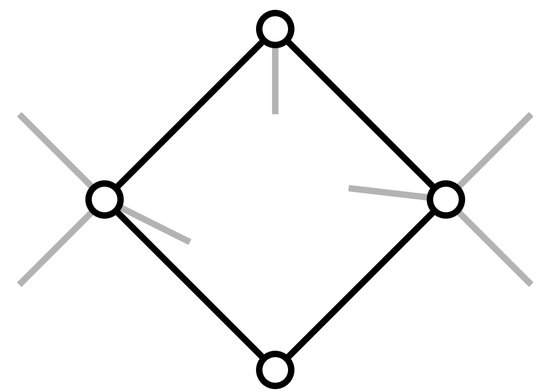
Füge Knoten schrittweise hinzu, drei Arten von Kanten:

- eingebettet
- halb eingebettet
- nicht eingebettet



Idee: Speichere alle möglichen Einbettungen (halb) eingebetteter Kanten.

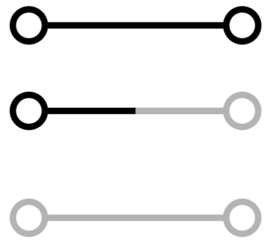




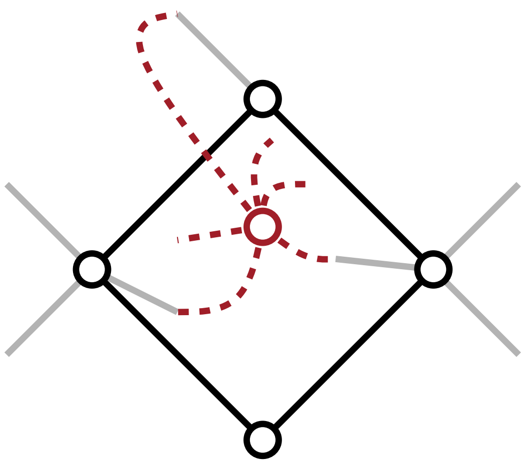
# Planaritätstest, 1. Ansatz

Füge Knoten schrittweise hinzu, drei Arten von Kanten:

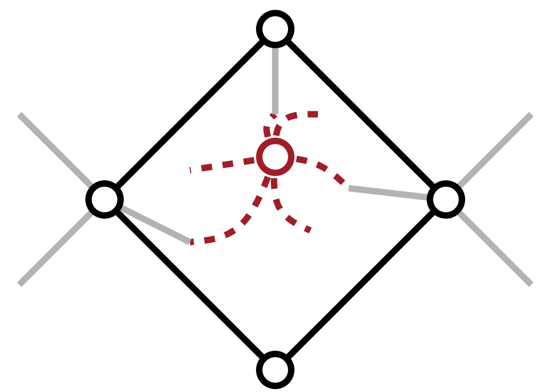
- eingebettet
- halb eingebettet
- nicht eingebettet



Idee: Speichere alle möglichen Einbettungen (halb) eingebetteter Kanten.



Erweiterung nicht möglich.

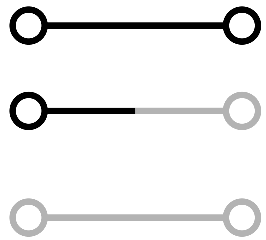


Erweiterung möglich, erzeuge alle Möglichkeiten.

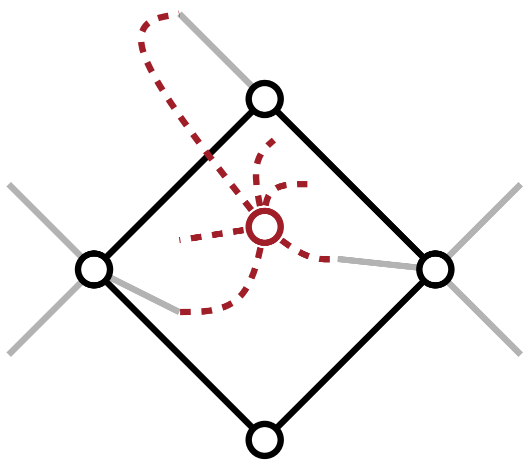
# Planaritätstest, 1. Ansatz

Füge Knoten schrittweise hinzu, drei Arten von Kanten:

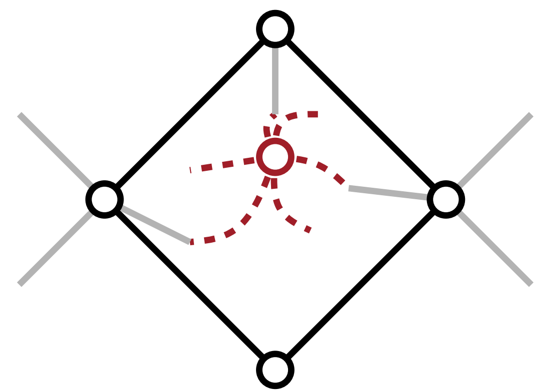
- eingebettet
- halb eingebettet
- nicht eingebettet



Idee: Speichere alle möglichen Einbettungen (halb) eingebetteter Kanten.



Erweiterung nicht möglich.



Erweiterung möglich, erzeuge alle Möglichkeiten.

$\rightsquigarrow$ Exponentielle Laufzeit & Speicher 

# Planaritätstest, weniger Möglichkeiten

Reduziere Anzahl Möglichkeiten: Wähle Einfüge-Reihenfolge so, dass nicht eingefügter Teilgraph zusammenhängend.

Geht das?

Was bringt das?

# Planaritätstest, weniger Möglichkeiten

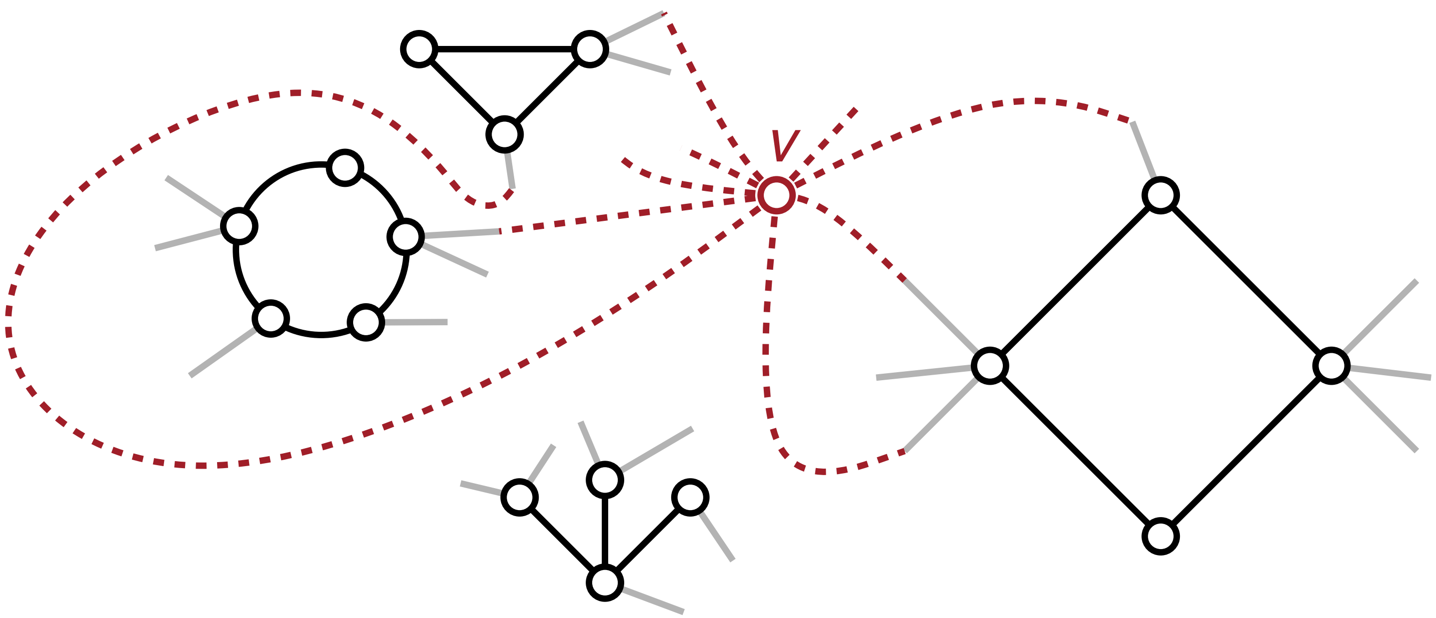
Reduziere Anzahl Möglichkeiten: Wähle Einfüge-Reihenfolge so, dass nicht eingefügter Teilgraph zusammenhängend.

Geht das?

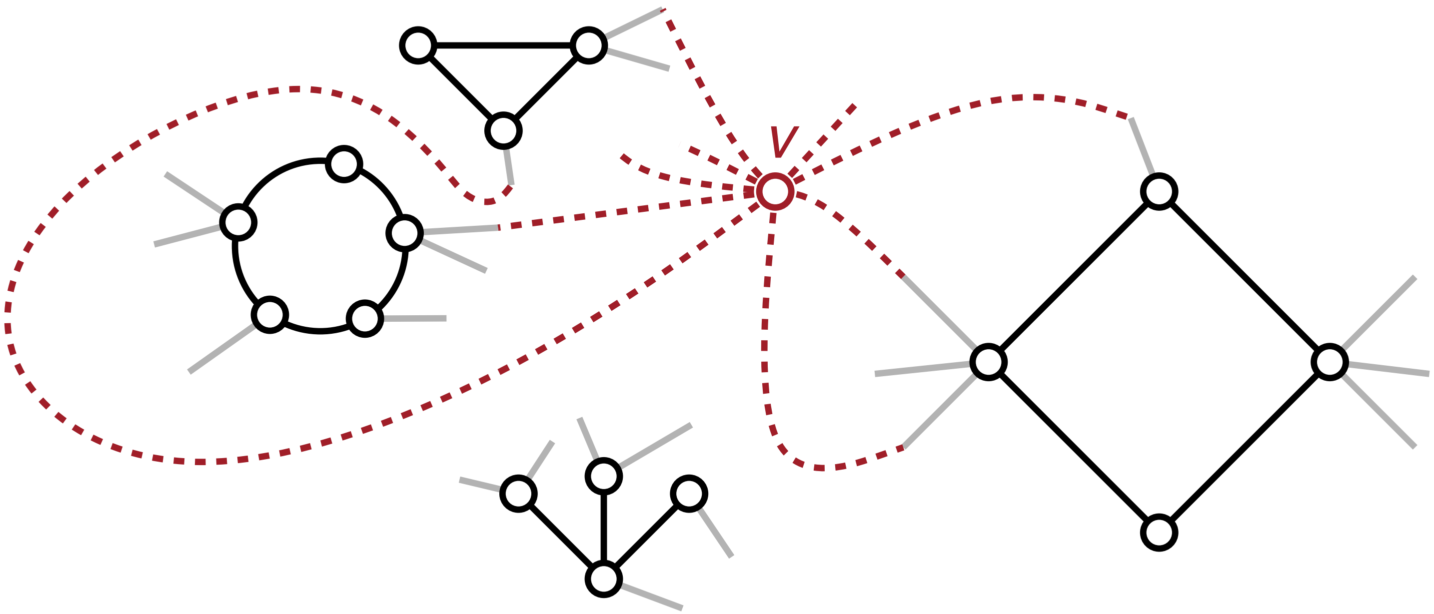
Was bringt das?

Ordnung von Blättern zur Wurzel bezüglich beliebigem Spannbaum.

Alle Halbkanten müssen in selbe (äußere) Facette eingebettet werden.

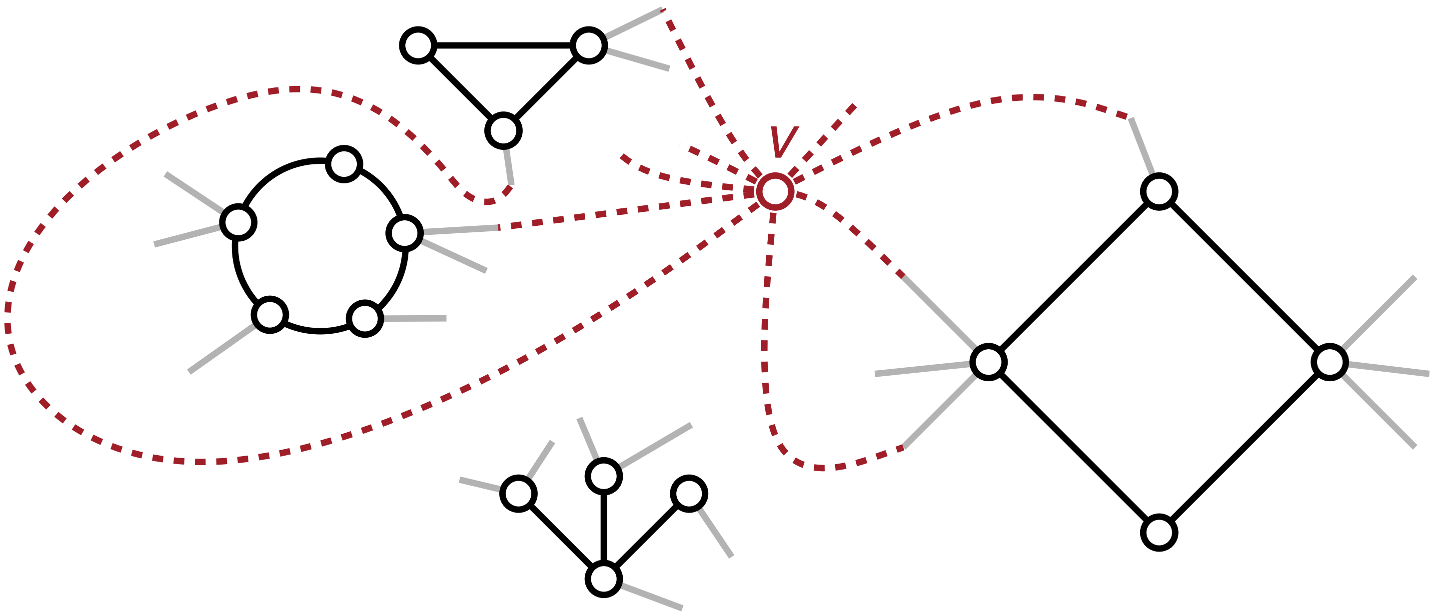


# Planaritätstest, Knoten einfügen




1. **Reduktion:** Halb-eingebettete Kanten inzident zu $v$, die zur selben Komponente gehören müssen konsekutiv sein.
2. **Kombination:** Lege Reihenfolge der Komponenten und Halbkanten inzident zu $v$ fest.

# Planaritätstest, Knoten einfügen

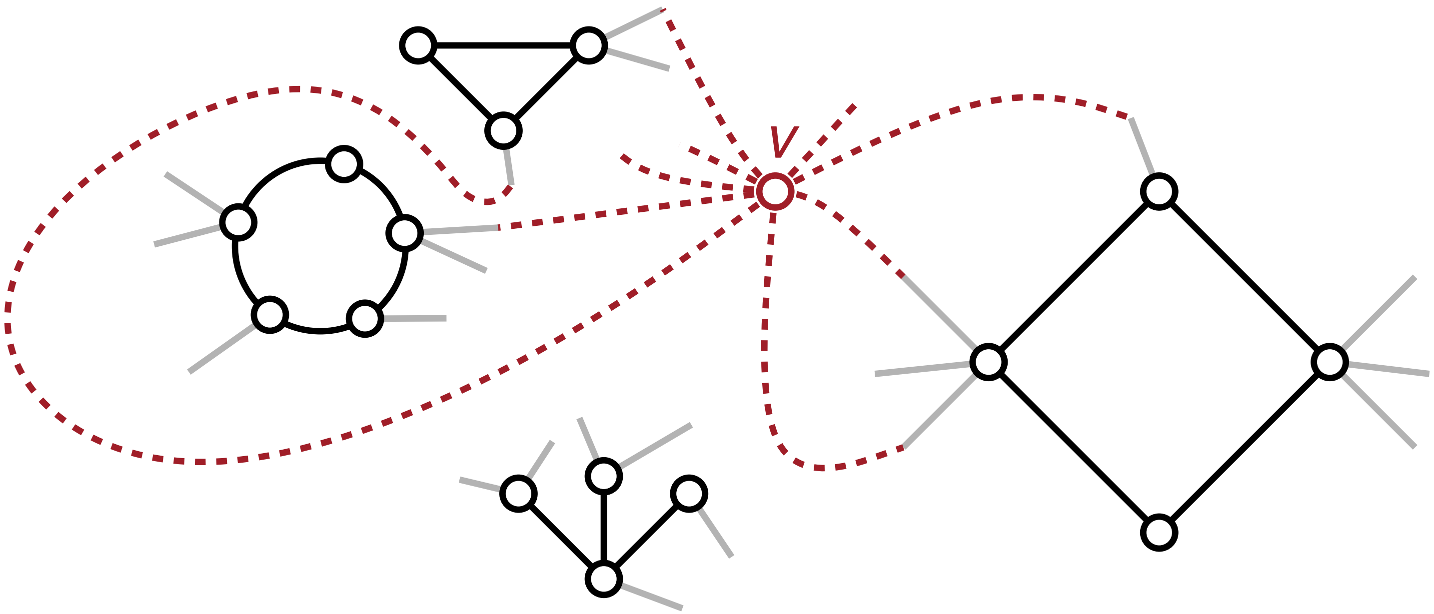



1. **Reduktion:** Halb-eingebettete Kanten inzident zu *v*, die zur selben Komponente gehören müssen konsekutiv sein.
2. **Kombination:** Lege Reihenfolge der Komponenten und Halbkanten inzident zu *v* fest.

Speichern aller Möglichkeiten noch immer zu teuer. ☹


Institute of Theoretical Informatics
Prof. Dr. Dorothea Wagner

# Planaritätstest, Knoten einfügen




1. **Reduktion:** Halb-eingebettete Kanten inzident zu $v$, die zur selben Komponente gehören müssen konsekutiv sein.
2. **Kombination:** Lege Reihenfolge der Komponenten und Halbkanten inzident zu $v$ fest.

Speichern aller Möglichkeiten noch immer zu teuer. 

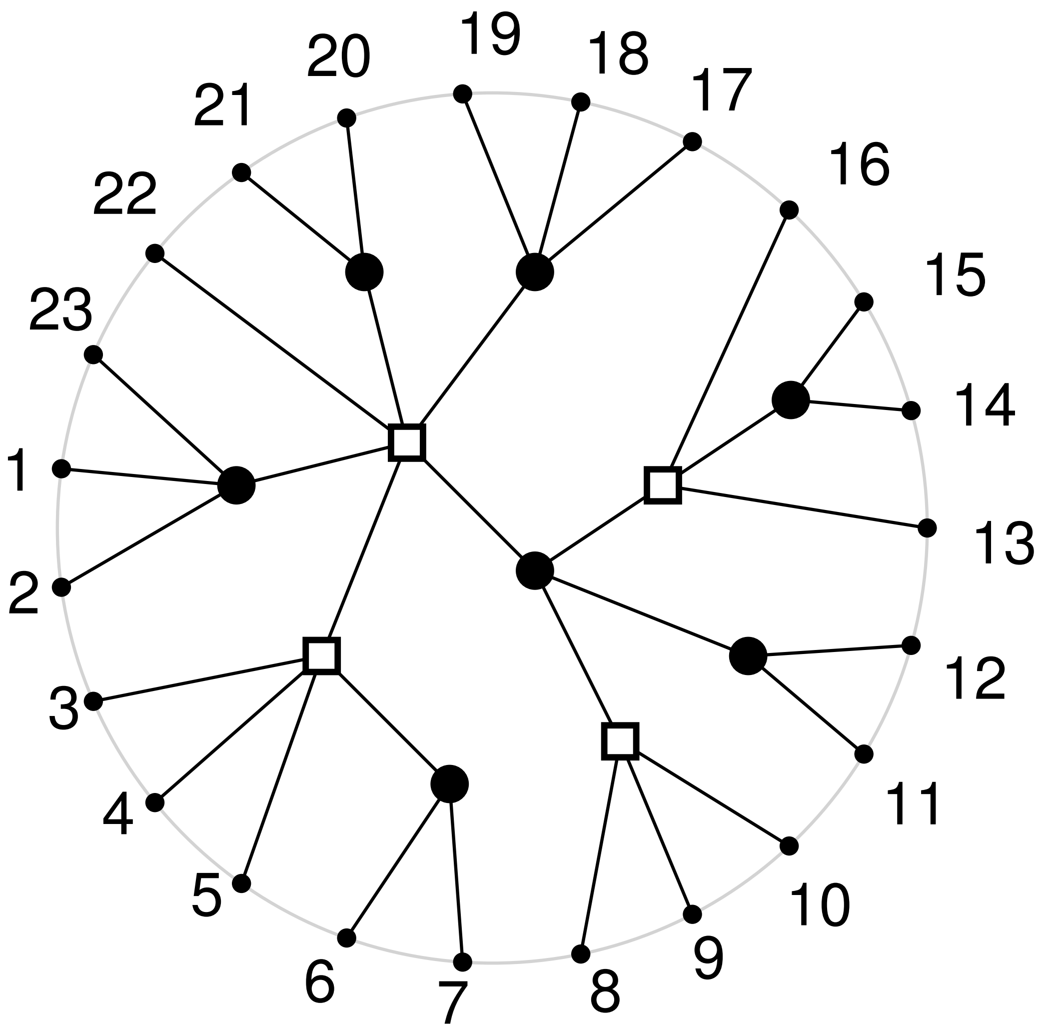
Konstruiere Datenstruktur, die solche Ordnungen kompakt repräsentiert. 

# PQ-Bäume



Institute of Theoretical Informatics
Prof. Dr. Dorothea Wagner

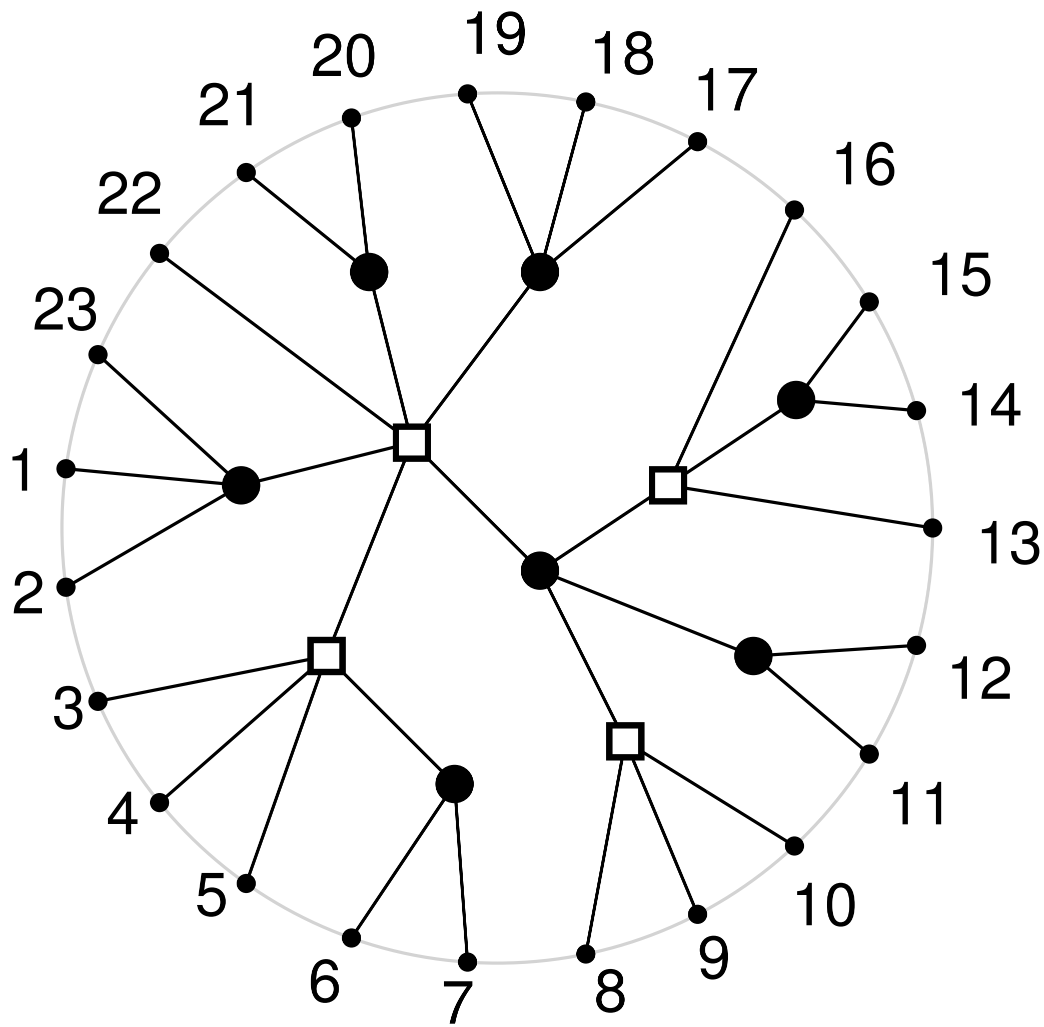
# PQ-Baum




- P-Knoten
  vertausche Kinder beliebig
- Q-Knoten
  nur Spiegeln erlaubt

PQ-Baum repräsentiert mögliche zirkuläre Ordnungen der Blätter

# PQ-Baum

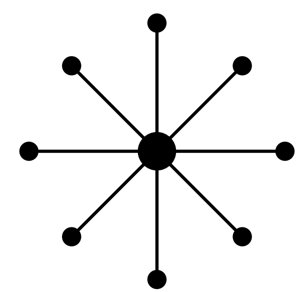



● **P-Knoten**

vertausche Kinder beliebig

□ **Q-Knoten**

nur Spiegeln erlaubt

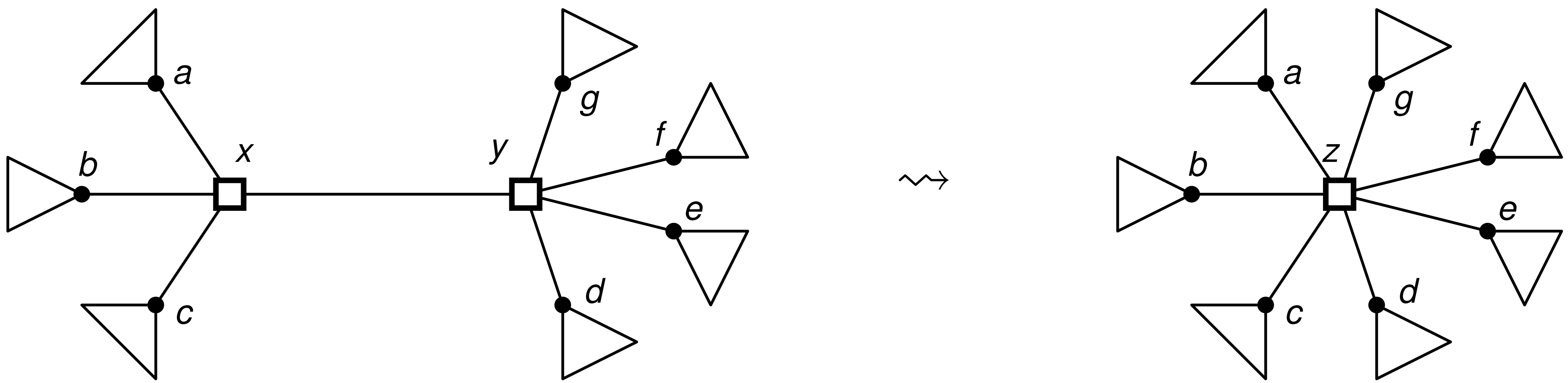


Einzelner P-Knoten repräsentiert alle möglichen Permutationen seiner Blätter

PQ-Baum repräsentiert mögliche zirkuläre Ordnungen der Blätter

# Ordnungserhaltende Kontraktion, Null-Baum

Ordnungserhaltende Kontraktion

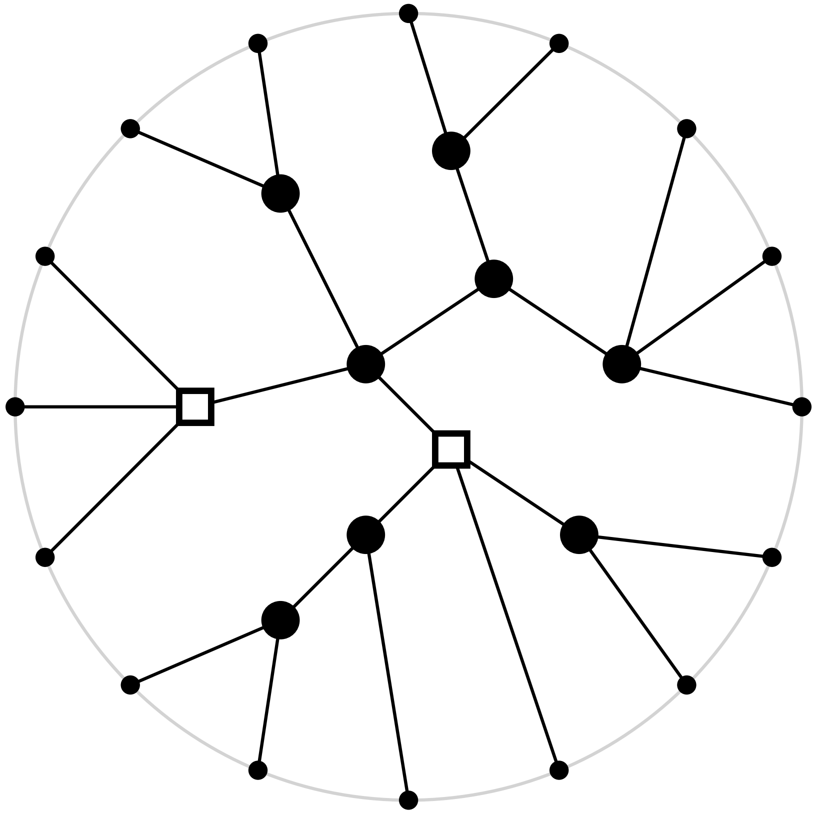



Achtung, dadurch gehen mögliche Ordnungen verloren.

Null-Baum: Repräsentiert formal die leere Menge an Permutationen

Achtung: Null-Baum $\neq$ leerer Baum (repräsentiert Permutationen der leeren Menge)

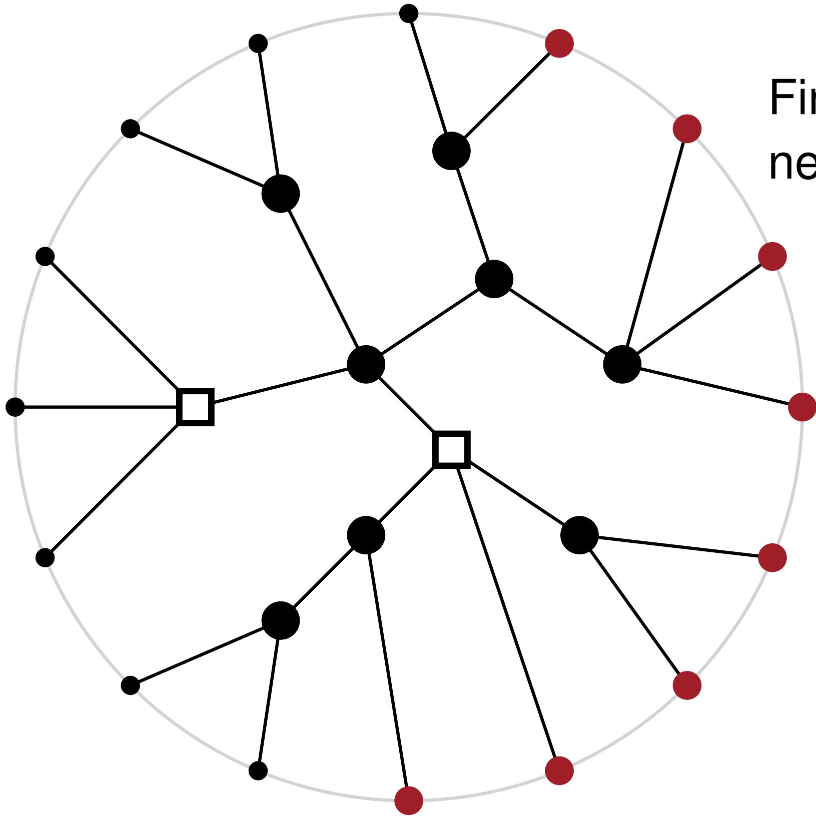
# Konsekutivität von Teilmengen





Institute of Theoretical Informatics
Prof. Dr. Dorothea Wagner

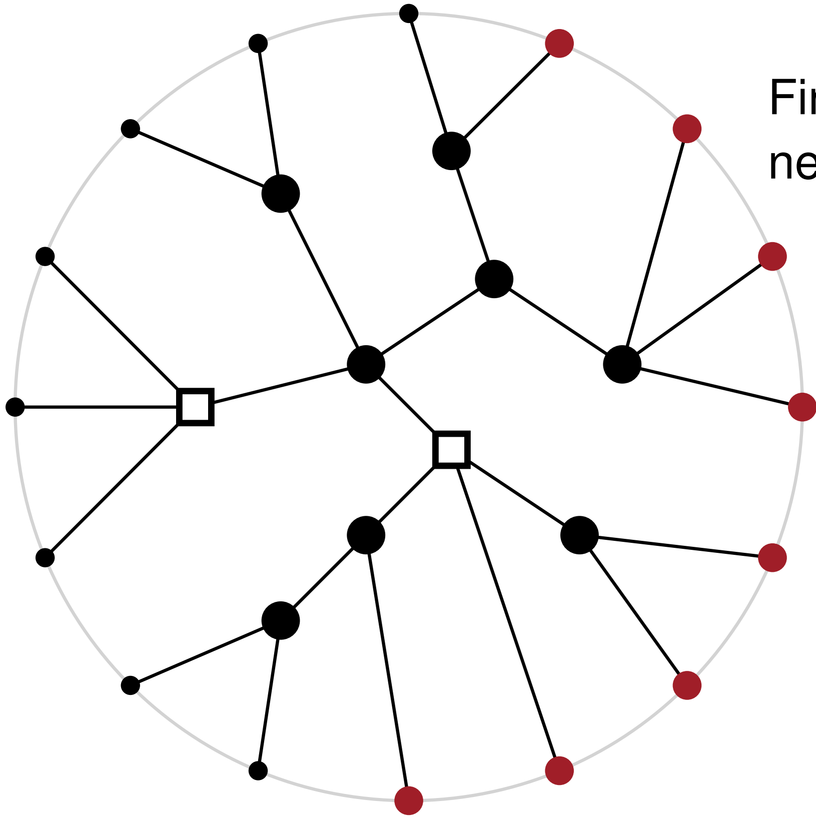
# Konsekutivität von Teilmengen



Finde neuen PQ-Baum, der genau diejenigen Permutationen repräsentiert, die

- der vorliegende Baum repräsentiert
- in denen die roten Blätter konsekutiv sind

# Konsekutivität von Teilmengen

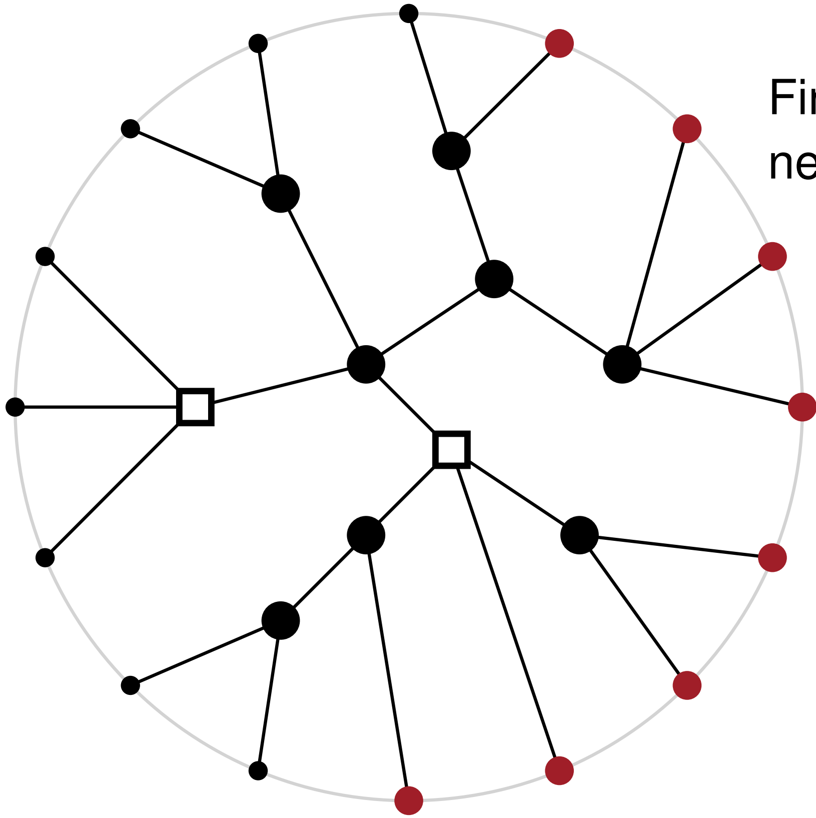


Finde neuen PQ-Baum, der genau diejenigen Permutationen repräsentiert, die

- der vorliegende Baum repräsentiert
- in denen die roten Blätter konsekutiv sind

Blätter lassen sich nicht so anordnen,
dass rote Knoten konsekutiv
$\Rightarrow$
Ergebnis ist Null-Baum

# Konsekutivität von Teilmengen



Finde neuen PQ-Baum, der genau diejenigen Permutationen repräsentiert, die

- der vorliegende Baum repräsentiert
- in denen die roten Blätter konsekutiv sind

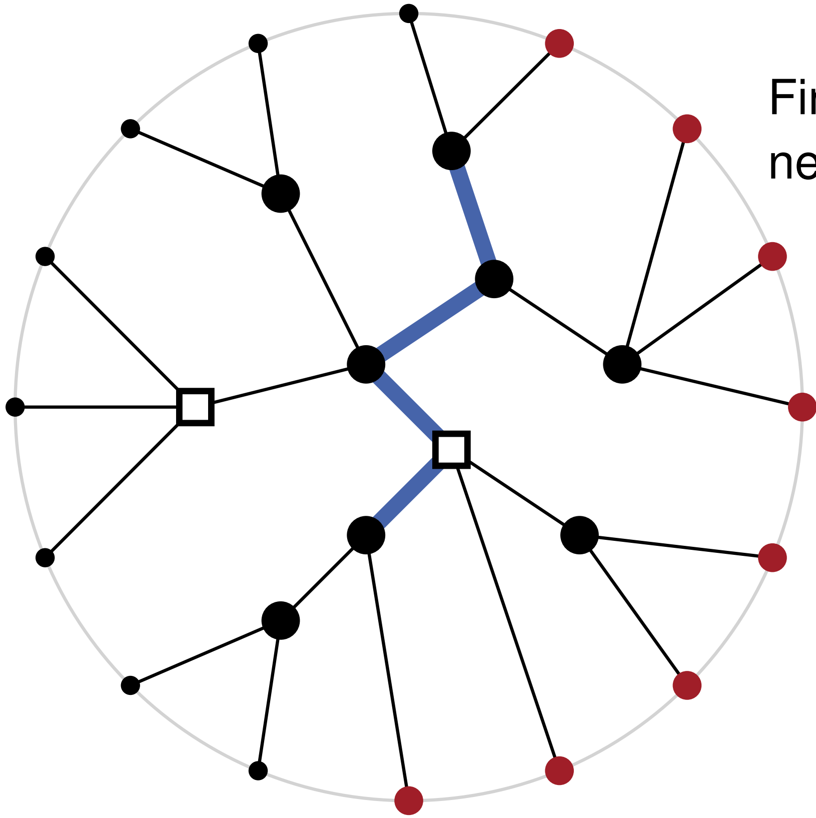
Blätter lassen sich nicht so anordnen, dass rote Knoten konsekutiv

$\Rightarrow$

Ergebnis ist Null-Baum

Kante ist defekt wenn beide Teilbäume sowohl rote und schwarze Blätter enthalten. $\rightsquigarrow$ defekte Kanten ermöglichen verbotene Permutationen

# Konsekutivität von Teilmengen



Finde neuen PQ-Baum, der genau diejenigen Permutationen repräsentiert, die

- der vorliegende Baum repräsentiert
- in denen die roten Blätter konsekutiv sind

Blätter lassen sich nicht so anordnen, dass rote Knoten konsekutiv

$\Rightarrow$

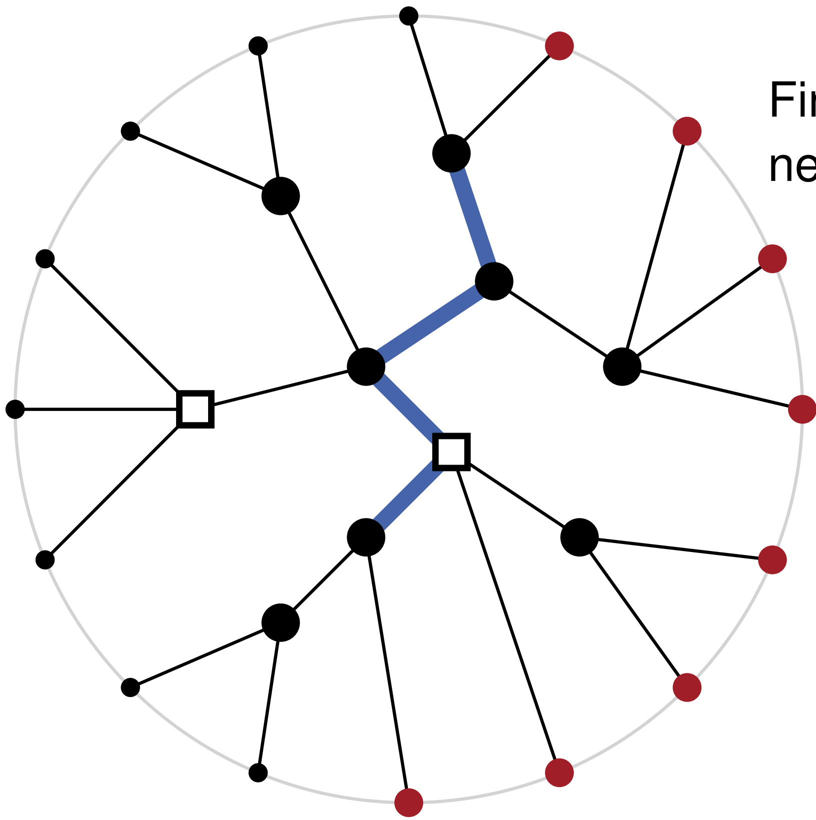
Ergebnis ist Null-Baum

Kante ist defekt wenn beide Teilbäume sowohl rote und schwarze Blätter enthalten. $\rightsquigarrow$ defekte Kanten ermöglichen verbotene Permutationen



Institute of Theoretical Informatics
Prof. Dr. Dorothea Wagner

# Konsekutivität von Teilmengen



Finde neuen PQ-Baum, der genau diejenigen Permutationen repräsentiert, die

- der vorliegende Baum repräsentiert
- in denen die roten Blätter konsekutiv sind

Blätter lassen sich nicht so anordnen, dass rote Knoten konsekutiv
$\Rightarrow$
Ergebnis ist Null-Baum

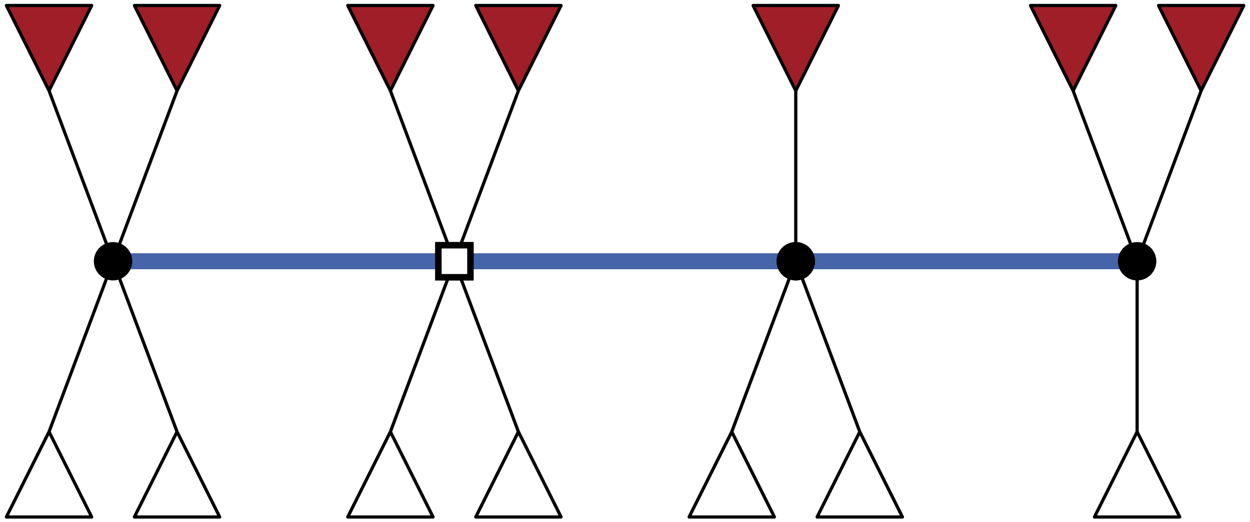
Kante ist defekt wenn beide Teilbäume sowohl rote und schwarze Blätter enthalten. $\rightsquigarrow$ defekte Kanten ermöglichen verbotene Permutationen

Lemma:
Gibt es eine Anordnung des PQ-Baums in der die roten Blätter konsekutiv sind, so bilden die defekten Kanten einen Pfad.


Institute of Theoretical Informatics
Prof. Dr. Dorothea Wagner

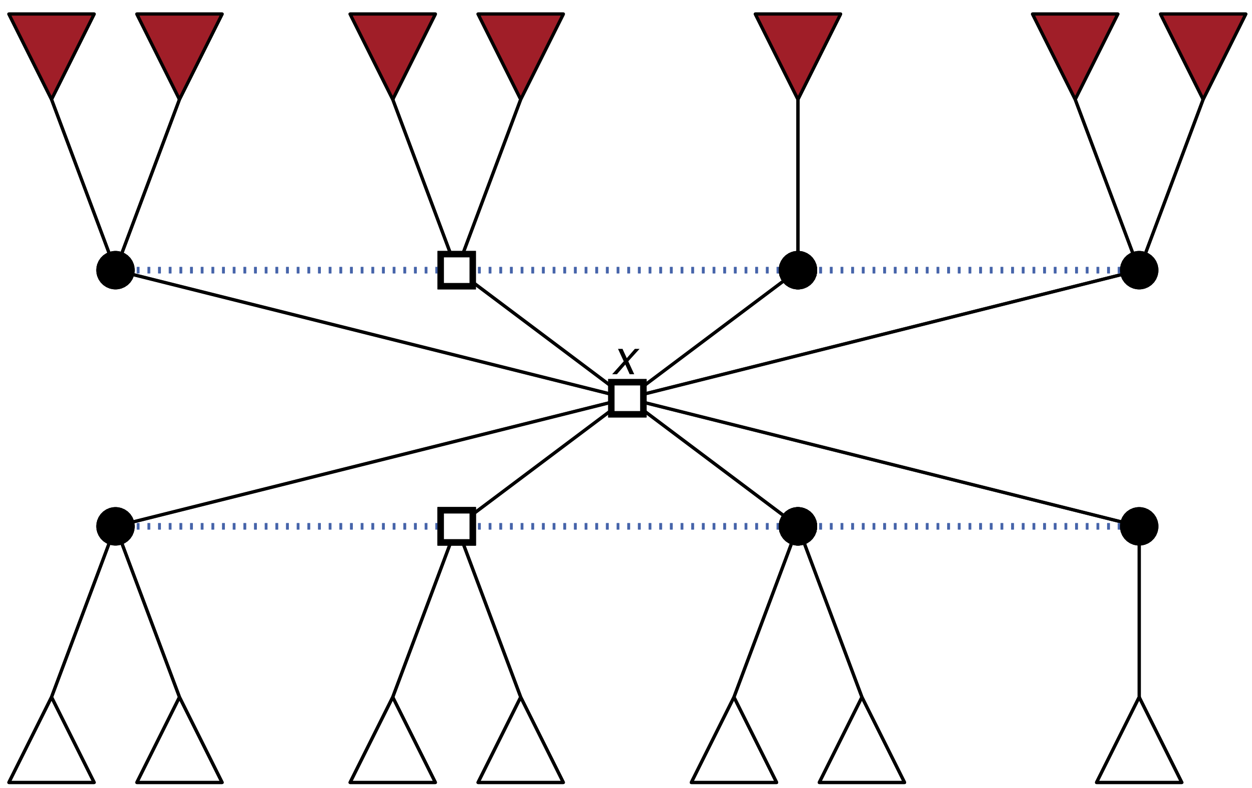
# Update des PQ-Baums

1. Bestimme Pfad der defekten Kanten, ordne Baum so an, dass rote und schwarze Blätter auf verschiedenen Seiten liegen.



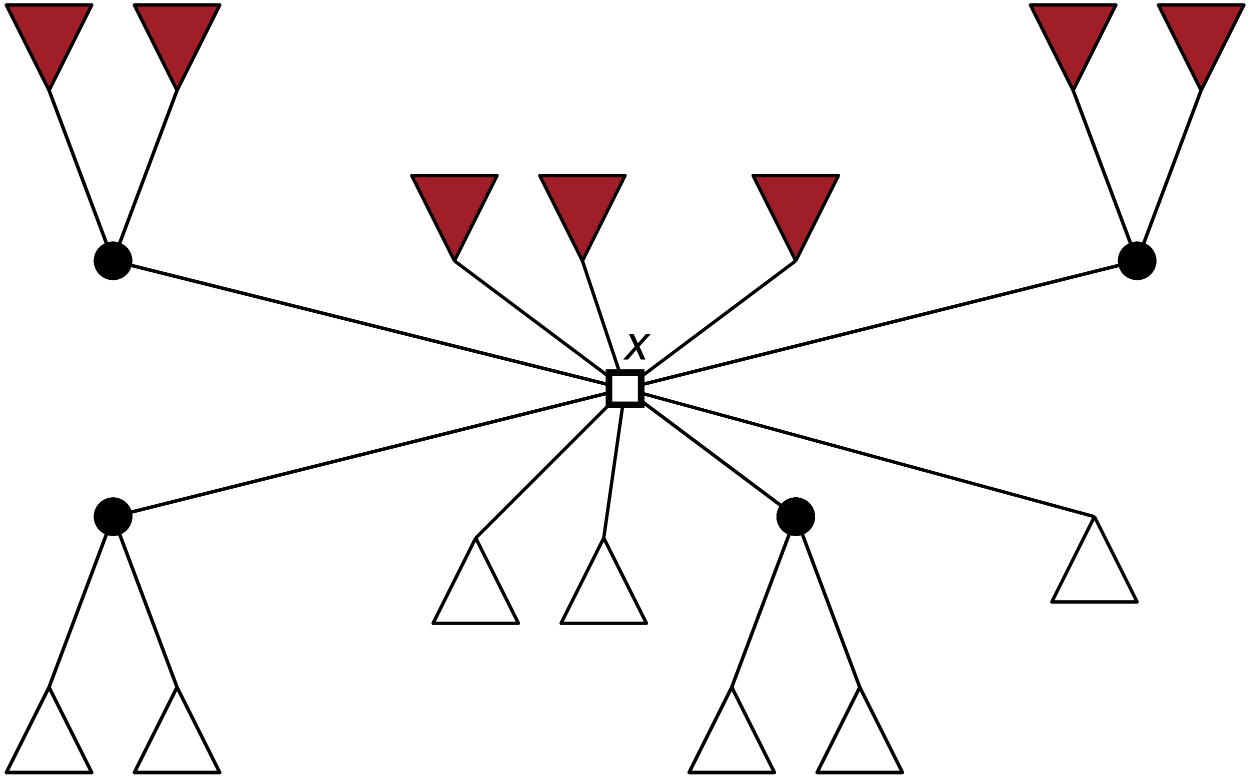
# Update des PQ-Baums

1. Bestimme Pfad der defekten Kanten, ordne Baum so an, dass rote und schwarze Blätter auf verschiedenen Seiten liegen.
2. Splitte defekten Pfad (*Terminalpfad*), füge neuen Q-Knoten $x$ ein.



# Update des PQ-Baums

1. Bestimme Pfad der defekten Kanten, ordne Baum so an, dass rote und schwarze Blätter auf verschiedenen Seiten liegen.
2. Splitte defekten Pfad (*Terminalpfad*), füge neuen Q-Knoten $x$ ein.
3. Kontrahiere Kanten von $x$ zu anderen Q-Knoten ordnungserhaltend, kontrahiere Kanten an inneren Knoten mit Grad 2



# Korrektheit

Satz:
Der Update-Algorithmus ist korrekt.

Beweis:

- Struktur des resultierenden Baums unabhängig von Ordnung.
- Andererseits: jede Ordnung des resultierenden Baums wird vom Startbaum repräsentiert.

# Korrektheit

Satz:
Der Update-Algorithmus ist korrekt.

Beweis:

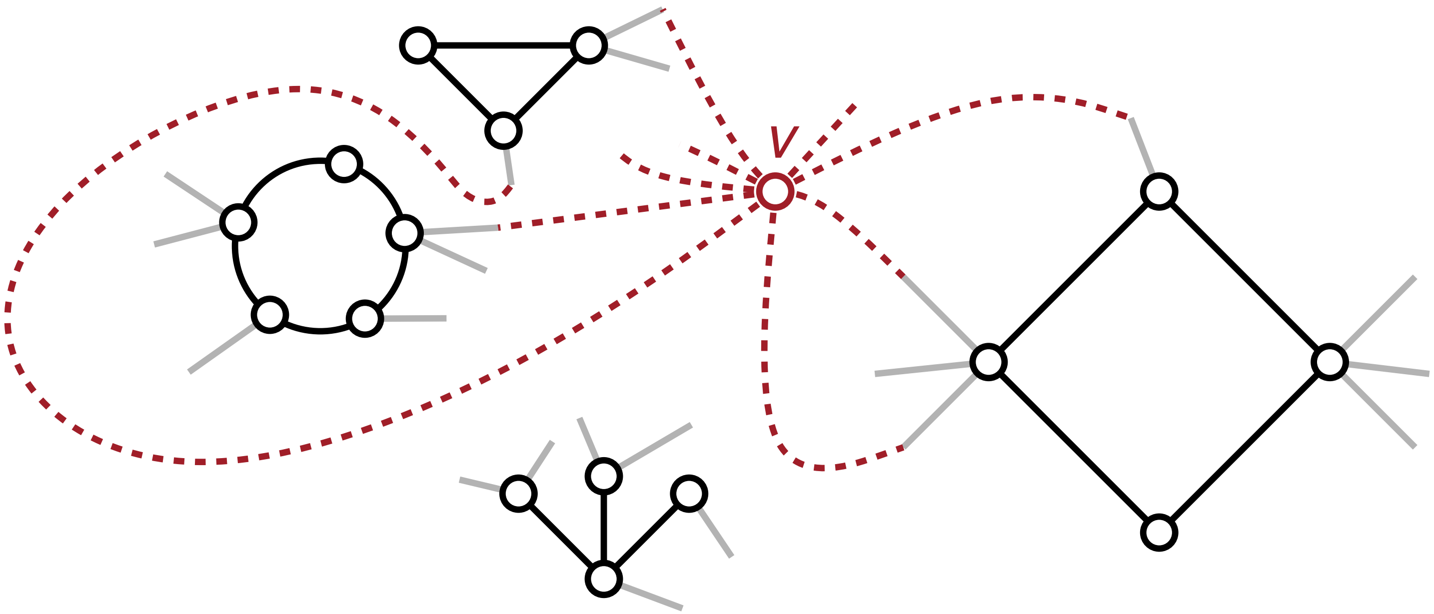
- Struktur des resultierenden Baums unabhängig von Ordnung.
- Andererseits: jede Ordnung des resultierenden Baums wird vom Startbaum repräsentiert.

Offensichtlich: Update implementierbar mit polynomieller Laufzeit.

Lineare Implementierung braucht mehr Arbeit.

# Zurück zum Planaritätstest

# Planaritätstest, Knoten einfügen



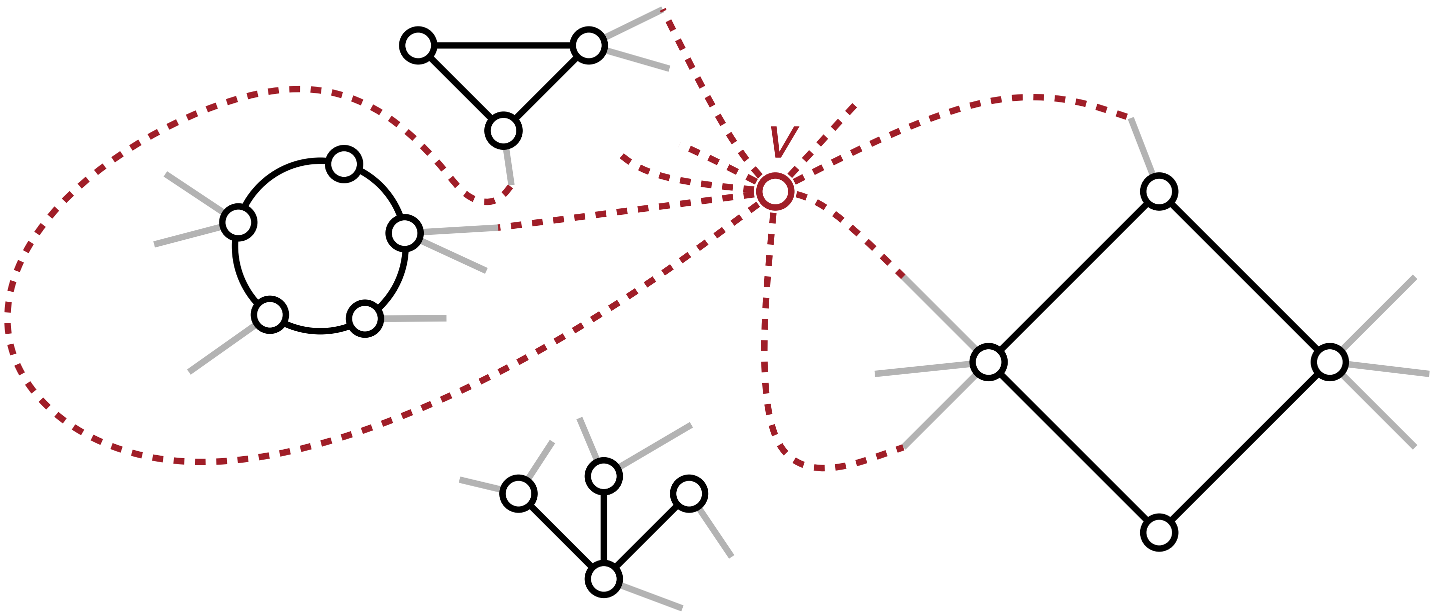

1. Reduktion: halb-eingebettete Kanten inzident zu $v$, die zur selben Komponente gehören müssen konsekutiv sein.
2. Kombination: Lege Reihenfolge der Komponenten und Halbkanten inzident zu $v$ fest.

Explizites Speichern aller Möglichkeiten noch immer zu teuer.



Institute of Theoretical Informatics
Prof. Dr. Dorothea Wagner

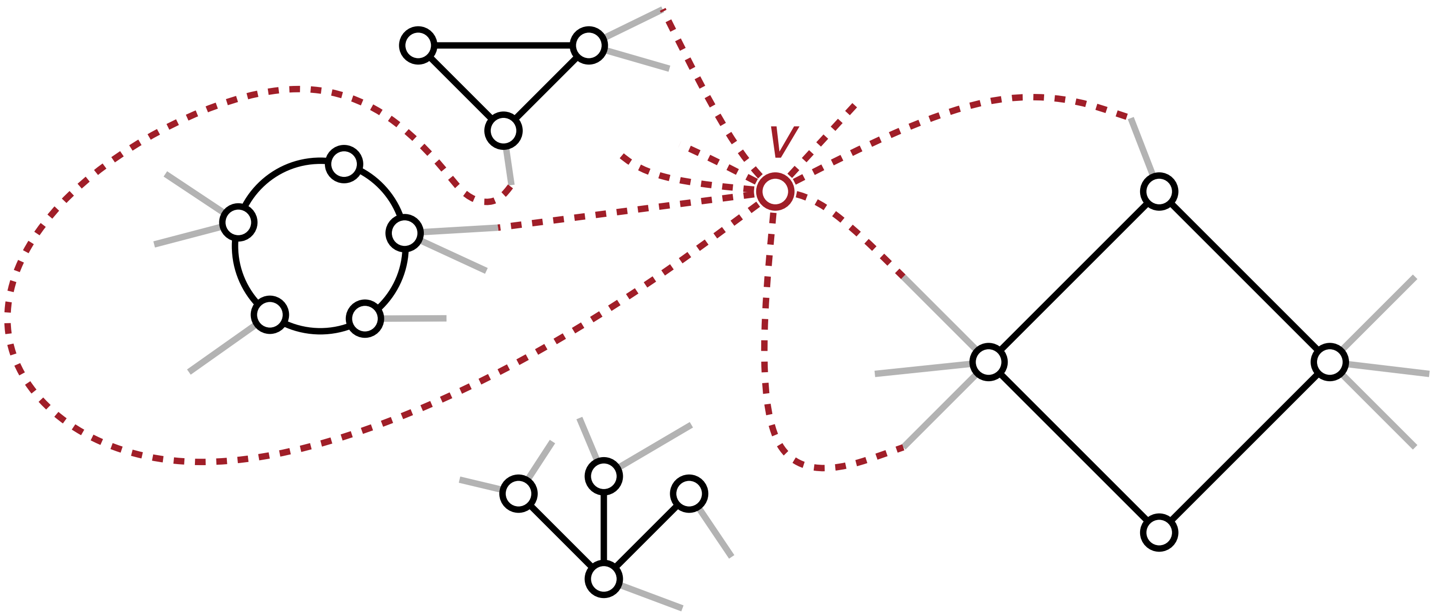
# Planaritätstest, Knoten einfügen

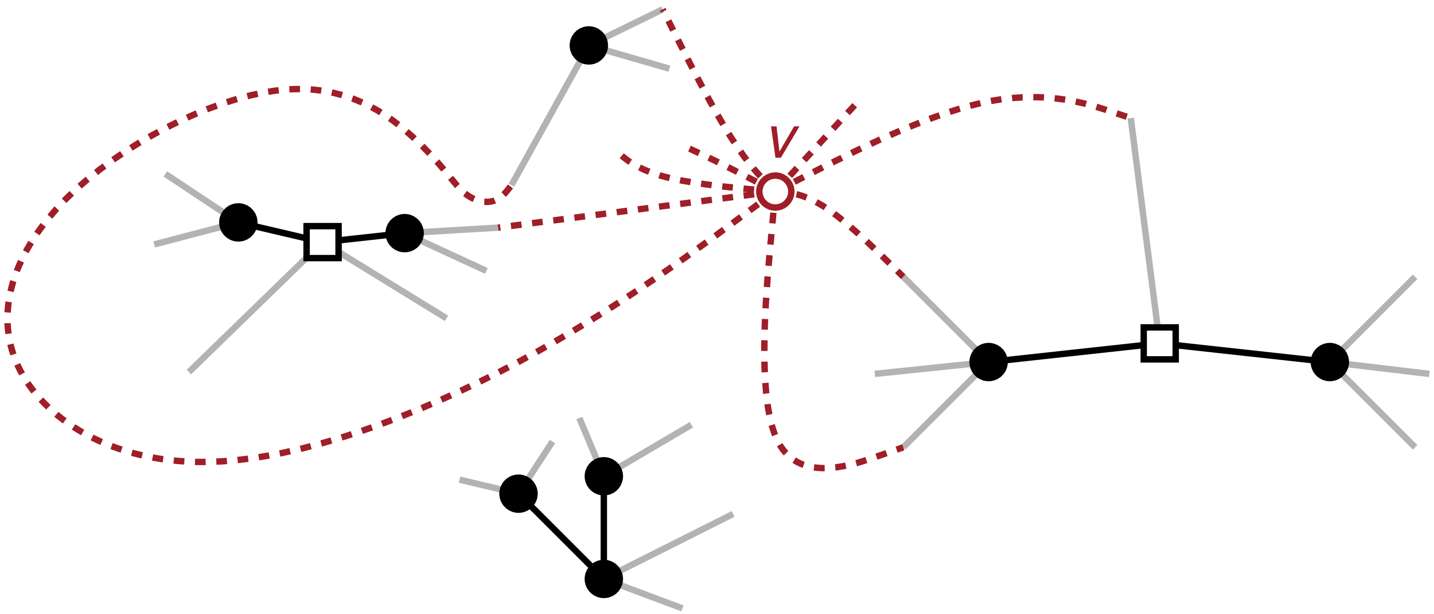



1. Reduktion: halb-eingebettete Kanten inzident zu *v*, die zur selben Komponente gehören müssen konsekutiv sein.
2. Kombination: Lege Reihenfolge der Komponenten und Halbkanten inzident zu *v* fest.

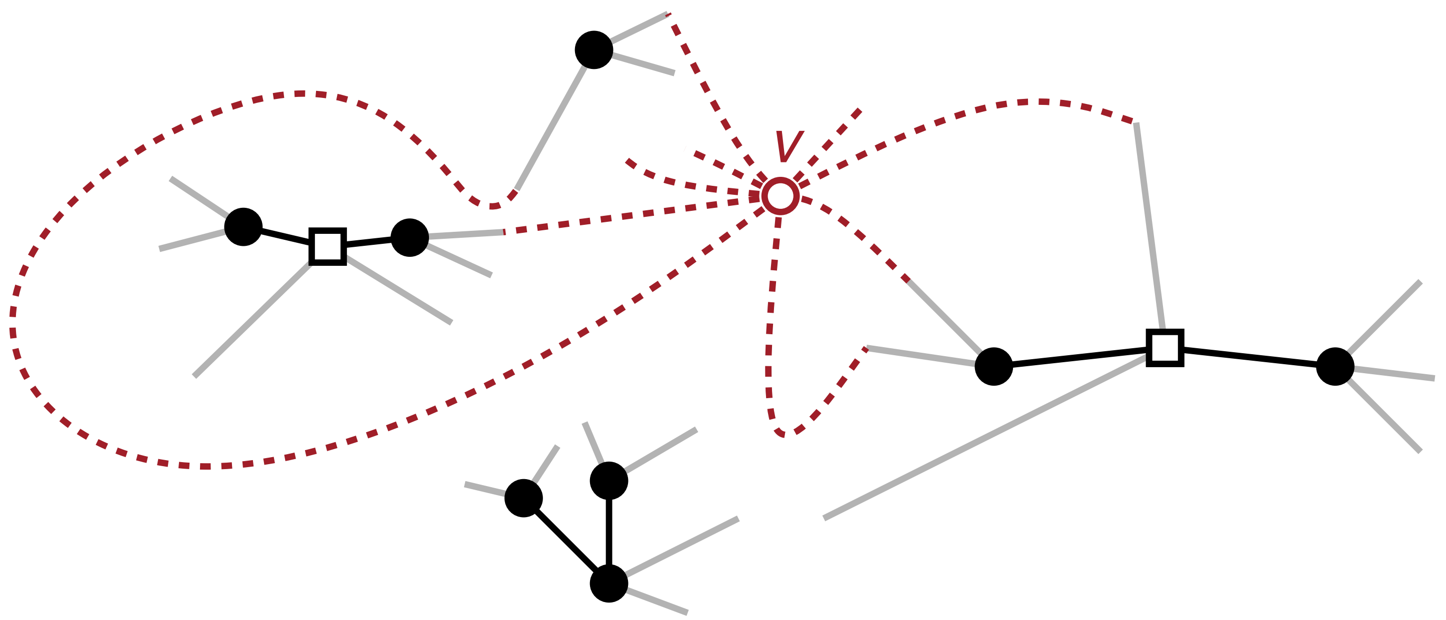
Explizites Speichern aller Möglichkeiten noch immer zu teuer.

$\rightsquigarrow$ Verwende PQ-Baum 


v



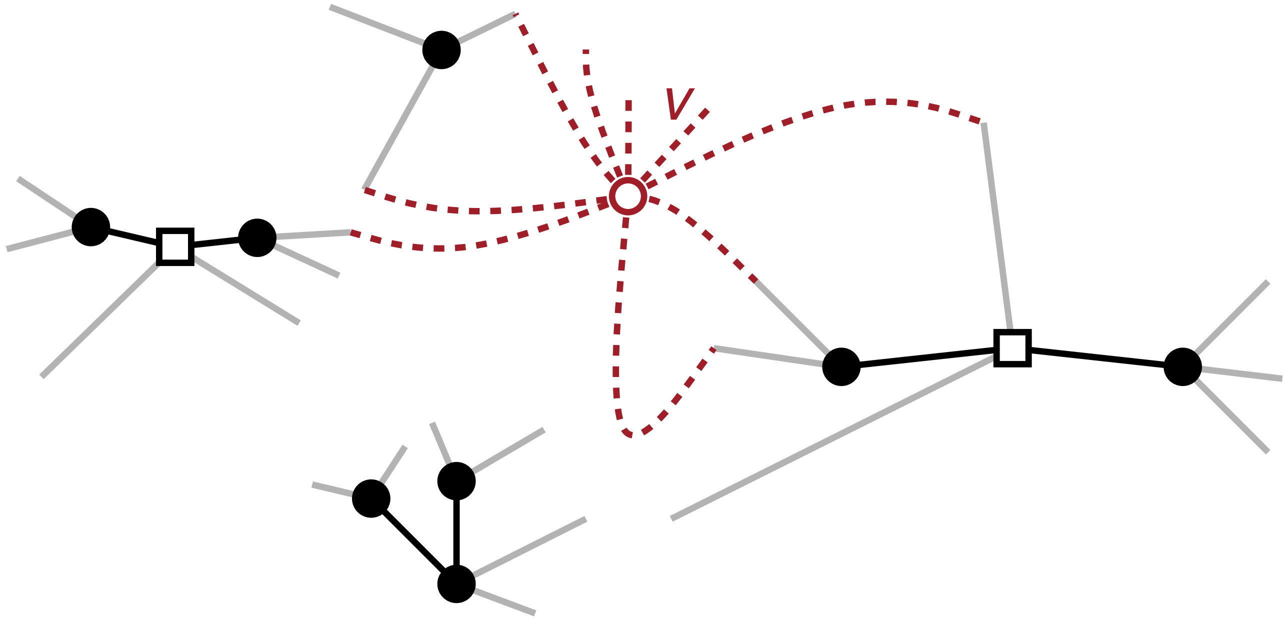

Verwalte PQ-Baum für jede Komponente




Verwalte PQ-Baum für jede Komponente

- Reduktion: mache Halbkanten zu $v$ in jeder Komponente konsekutiv


Institute of Theoretical Informatics
Prof. Dr. Dorothea Wagner

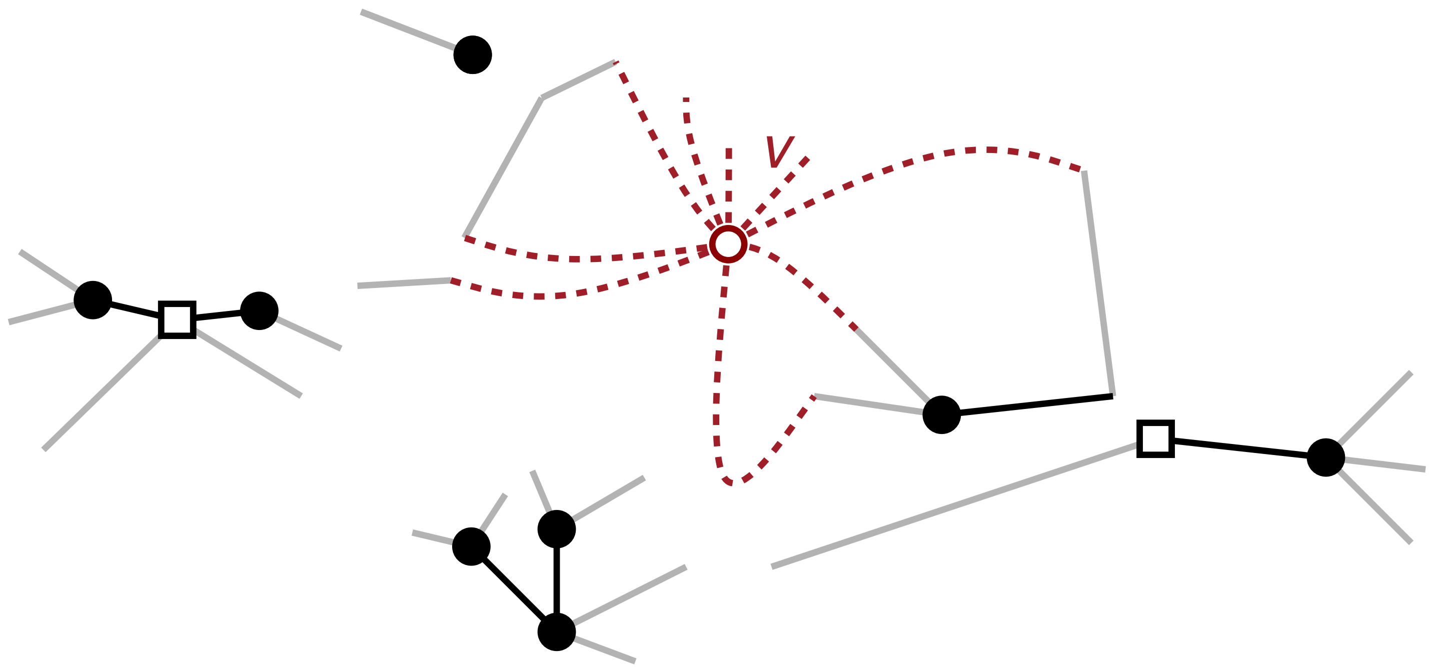



Verwalte PQ-Baum für jede Komponente

- Reduktion: mache Halbkanten zu $v$ in jeder Komponente konsekutiv
- Kombination: verschmelze zu einem PQ-Baum

$\rightsquigarrow$ neuer PQ-Baum für resultierende Zusammenhangskomponente

Kosten pro Knoten: amortisiert $O(\deg v)$

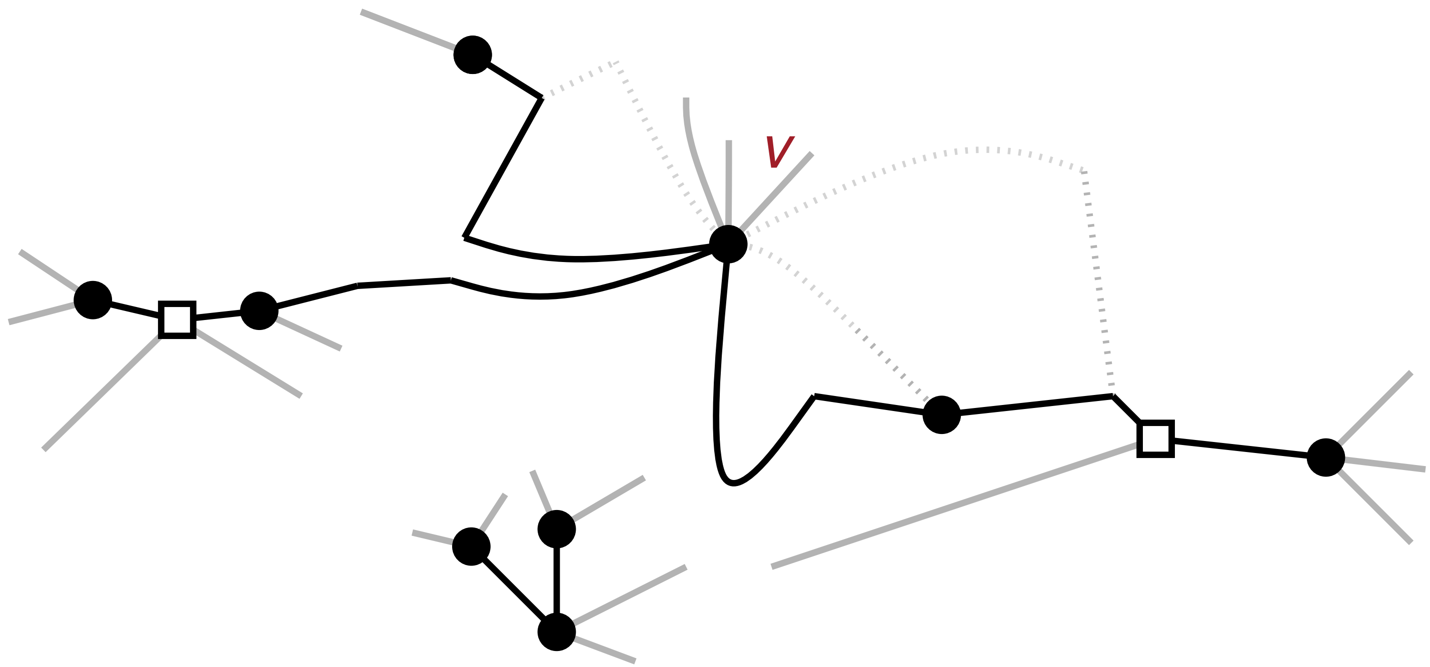



Verwalte PQ-Baum für jede Komponente

- Reduktion: mache Halbkanten zu $v$ in jeder Komponente konsekutiv
- Kombination: verschmelze zu einem PQ-Baum

$\rightsquigarrow$ neuer PQ-Baum für resultierende Zusammenhangskomponente

Kosten pro Knoten: amortisiert $O(\deg v)$

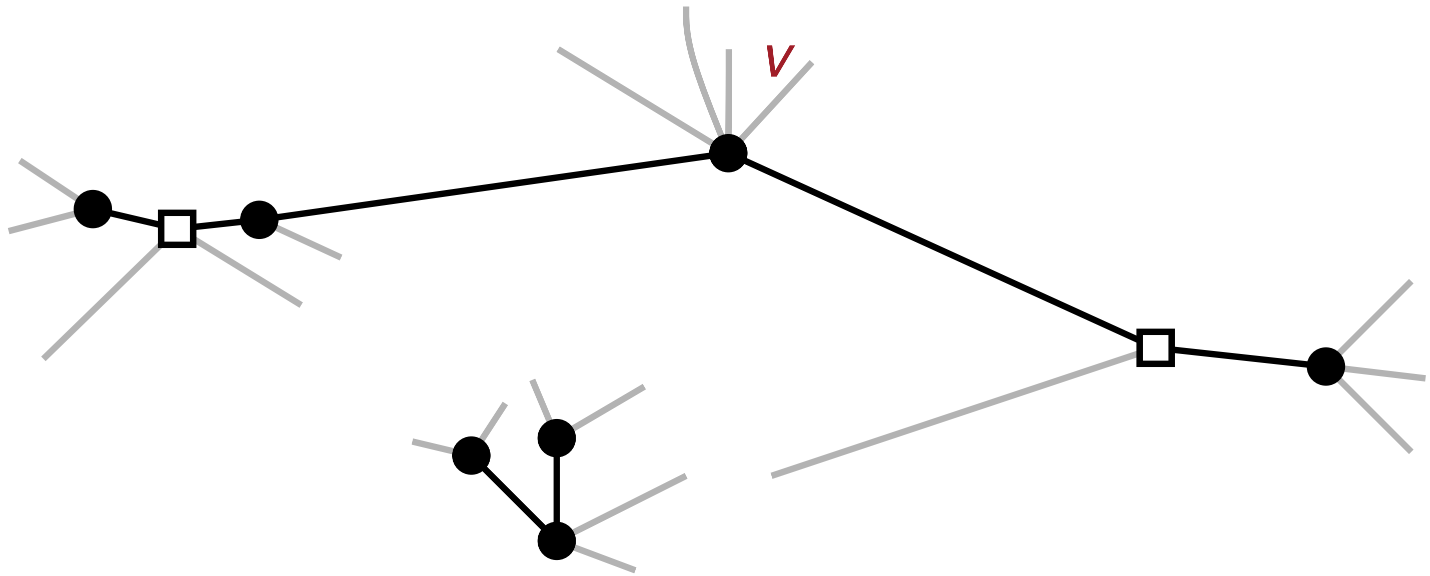



Verwalte PQ-Baum für jede Komponente

- Reduktion: mache Halbkanten zu $v$ in jeder Komponente konsekutiv
- Kombination: verschmelze zu einem PQ-Baum

$\rightsquigarrow$ neuer PQ-Baum für resultierende Zusammenhangskomponente

Kosten pro Knoten: amortisiert $O(\deg v)$




Verwalte PQ-Baum für jede Komponente

- Reduktion: mache Halbkanten zu $v$ in jeder Komponente konsekutiv
- Kombination: verschmelze zu einem PQ-Baum

$\rightsquigarrow$ neuer PQ-Baum für resultierende Zusammenhangskomponente

Kosten pro Knoten: amortisiert $O(\deg v)$

Graph ist genau dann planar, wenn keiner der Reduktionsschritte scheitert.

Einbettung kann gewonnen werden, indem Schritte nach und nach rückgängig gemacht werden. Dabei von PQ-Bäumen repräsentierte Ordnungen wählen/erweitern.


Institute of Theoretical Informatics
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Graph ist genau dann planar, wenn keiner der Reduktionsschritte scheitert.

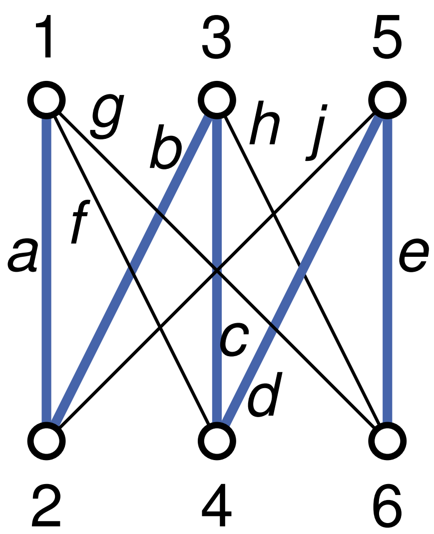
Einbettung kann gewonnen werden, indem Schritte nach und nach rückgängig gemacht werden. Dabei von PQ-Bäumen repräsentierte Ordnungen wählen/erweitern.

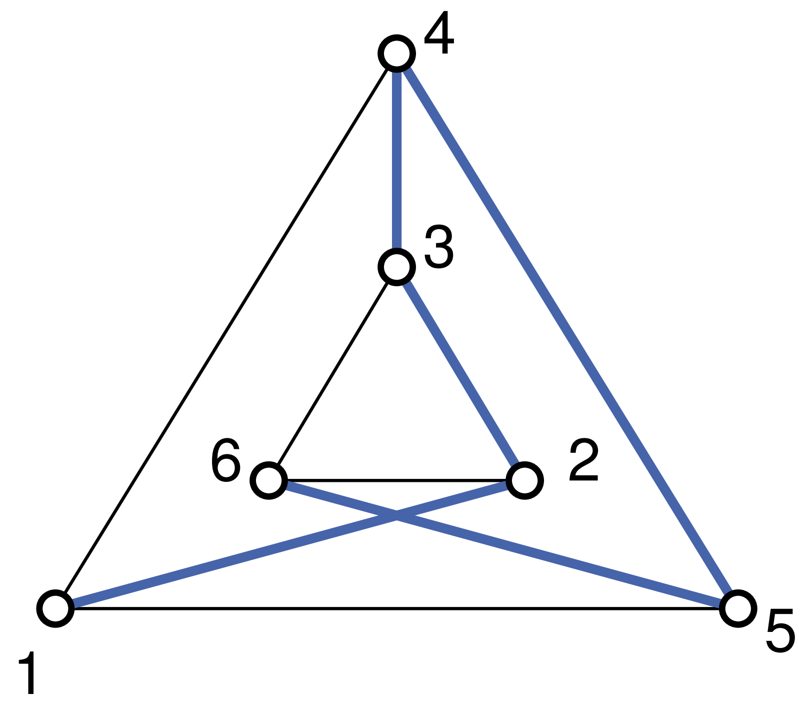
Vorsicht bei linearer Laufzeit: PQ-Bäume ”umwurzeln” ist teuer. Verschmelzen funktioniert nur effizient, wenn genau einer der Bäume seine Wurzel behält.

Zwei mögliche Ordnungen:

- $s$-$t$-Ordnung (zweifach zusammenhängende Graphen) (vgl. Vorlesung Graphvisualisierung) [Lempel, Even, Cederbaum ’67]
- Tiefensuche [Shih, Hsu ’99, Boyer, Myrvold ’04]

# Beispiele



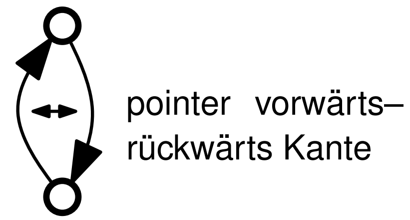
# Anhang: lineare Laufzeit bei PQ-Bäumen


Institute of Theoretical Informatics
Prof. Dr. Dorothea Wagner

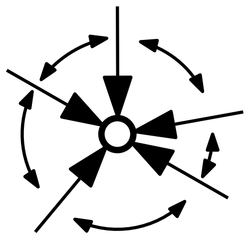
# Lineare Laufzeit bei PQ-Bäumen

Implementierung mit linearer Laufzeit:

- Wähle Wurzel
- speichere jede Kante doppelt gerichtet




- speichere eingehende Kanten an jedem Knoten in doppelt verketteter Liste



- Flag an jeder Kante ob sie vom Parent kommt
- P-Knoten haben Pointer auf Parent

Achtung: Eltern von Q-Knoten sind aufwendig zu berechnen.

# Berechnung des Terminalpfades

Lemma:

Länge des Terminalpfades

Anzahl der konsekutiven Elemente

Terminalpfad kann in $O(p + k)$ Zeit gefunden werden.

# Berechnung des Terminalpfades

Karlsruhe Institute of Technology

Länge des Terminalpfades    Anzahl der konsekutiven Elemente

**Lemma:**
Terminalpfad kann in $O(p + k)$ Zeit gefunden werden.

Klassifiziere Knoten des PQ-Baums:

- Blätter sind voll wenn sie ein rotes Element repräsentieren
- Innere Knoten sind voll wenn alle bis auf einen Nachbarn voll sind.
- Knoten sind teilweise voll wenn einer ihrer Nachbarn voll ist.

$\rightsquigarrow$ $O(k)$ Zeit bis alle Knoten gelabelt.

# Berechnung des Terminalpfades

Lemma: Länge des Terminalpfades  Anzahl der konsekutiven Elemente
Terminalpfad kann in $O(p + k)$ Zeit gefunden werden.

Klassifiziere Knoten des PQ-Baums:

- Blätter sind voll wenn sie ein rotes Element repräsentieren
- Innere Knoten sind voll wenn alle bis auf einen Nachbarn voll sind.
- Knoten sind teilweise voll wenn einer ihrer Nachbarn voll ist.

$\rightsquigarrow$ $O(k)$ Zeit bis alle Knoten gelabelt.

Teilweise volle Knoten sind potentielle Endknoten des Terminalpfades.

- Starte potenziellen Pfad an jedem Terminalknoten, suche zu Eltern.
- Stoppe Erweiterung eines Pfades wenn anderer Pfad getroffen wird.
- Pfade bilden schließlich Baum
- Höchster Knoten, der teilweise voll ist, oder zwei benachbarte Suchpfade hat ist höchster Punkt des Terminalpfades.

# Berechnung des Terminalpfades

Karlsruhe Institute of Technology

Lemma: Länge des Terminalpfades   Anzahl der konsekutiven Elemente
Terminalpfad kann in $O(p + k)$ Zeit gefunden werden.

Klassifiziere Knoten des PQ-Baums:

- Blätter sind voll wenn sie ein rotes Element repräsentieren
- Innere Knoten sind voll wenn alle bis auf einen Nachbarn voll sind.
- Knoten sind teilweise voll wenn einer ihrer Nachbarn voll ist.

$\rightsquigarrow$ $O(k)$ Zeit bis alle Knoten gelabelt.

Teilweise volle Knoten sind potentielle Endknoten des Terminalpfades.

- Starte potenziellen Pfad an jedem Terminalknoten, suche zu Eltern.
- Stoppe Erweiterung eines Pfades wenn anderer Pfad getroffen wird.
- Pfade bilden schließlich Baum
- Höchster Knoten, der teilweise voll ist, oder zwei benachbarte Suchpfade hat ist höchster Punkt des Terminalpfades.

Wie findet man schnell die Elternknoten?

# Update-Schritt

Splitte Terminal-Pfad indem neue Knoten für volle Nachbarn erstellt werden.

Einzelner Split:

- Merke Nachbarn auf Terminalpfad, entferne diese Kanten $O(1)$
- Erstelle Kopie, übertrage volle Nachbarn $O(\#\text{Anzahl volle Nachbarn})$

O(p+k)

Zentraler Q-Knoten in $O(p)$ Zeit

Kontraktionen in $O(1)$

# Gesamtlaufzeit



$X$ Grundmenge

$\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_\ell\}$ Menge von Teilmengen von $X$.

**Satz:**
PQ-Baum, der Permutationen repräsentiert, in denen $U_1, \dots, U_\ell$ konsekutiv sind kann in amortisierter Zeit $O(|X| + |U_1| + \dots + |U_\ell|)$ berechnet werden.

Beweis: Betrachte Potentialfunktion $\phi(\mathcal{U}, i) = u_i + |Q_i| + \sum_{x \in P_i} (\deg(x) - 1)$.

- $u_i = \sum_{j>i} |U_j|$
- $Q_i$ = Q-Knoten im Baum nachdem $U_1, \dots, U_i$ verarbeitet wurde.
- $P_i$ = P-Knoten im Baum ...

$\phi(\mathcal{U}, 0) = \Theta(|X|)$
Bezahle alle Operationen mit $\Phi$
$\phi$ bleibt $\geq 0$
$\rightsquigarrow$ behauptete Laufzeit.