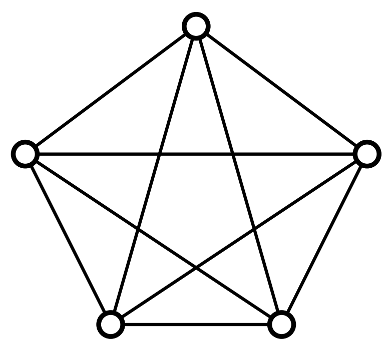
Karlsruher Institut für Technologie

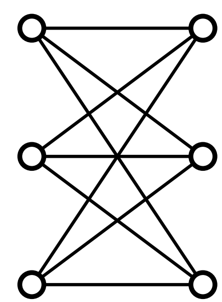
Der Satz von Kuratowski
Vorlesung am 15./21.04.2015

INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK · PROF. DR. DOROTHEA WAGNER

Satz von Kuratowski (1930):
Jeder nicht planare Graph enthält K_5 oder $K_{3,3}$ als Minor.



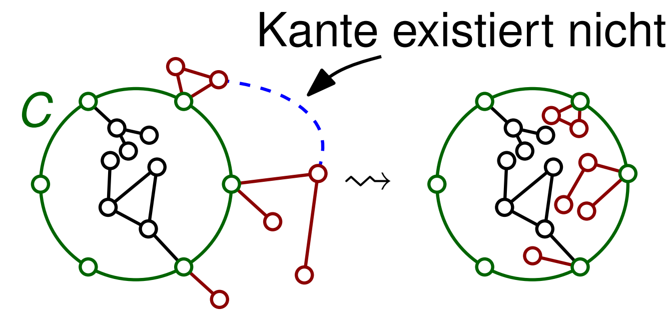
K_5



$K_{3,3}$

Grundlegende Definitionen + Aussagen

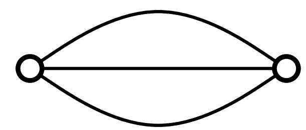
Bäume und Wälder besitzen nur eine Facette



Kreise als Facetten:

- G planarer Graph, C einfacher Kreis in G
- kein paar von Knoten in C ist in $G - E(C)$ verbunden

$\Rightarrow$ G besitzt planare Einbettung, bei der C eine Facette begrenzt

θ-Graph: beliebige Unterteilung des Graphen 

Facettenränder enthalten keinen θ-Graphen:

- G ein planarer Graph mit fester Einbettung, f Facette von G,
- F Teilgraph von G aus allen zu f inzidenten Knoten und Kanten

$\Rightarrow$ F enthält keinen θ-Graphen

Minor-Minimale Nicht-Planare Graphen

Graph G ist **minor-minimal nicht-planar** wenn

- G nicht planar ist, aber
- jeder Minor von G planar ist.

Es gelten folgende Eigenschaften: (warum?)

G nicht planar $\Rightarrow$ G enthält minor-minmalen nicht-planaren Graphen als Minor

Minor-minimale nicht-planare Graphen haben Minimalgrad 3

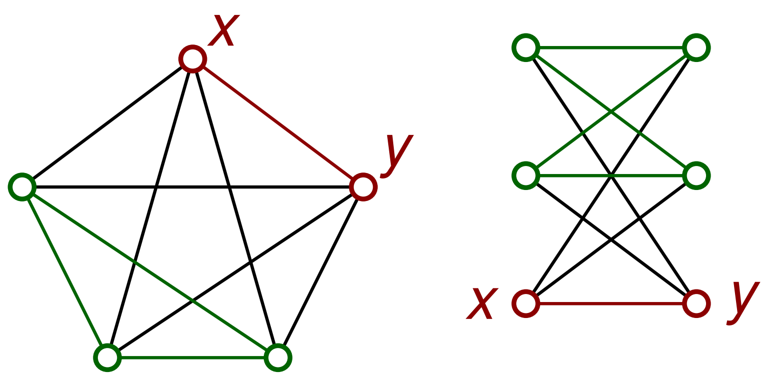
Beweis-Strategie

G nicht-planarer Graph, x, y zwei benachbarte Knoten von G

Zeige:

1. $G - x - y$ enhält keinen θ-Graphen
2. $G - x - y$ enthält höchstens einen Knoten mit Grad 1
3. $G - x - y$ ist ein Kreis

Beachte: K_5 bzw. $K_{3,3}$ ist Kreis + zwei benachbarte Knoten



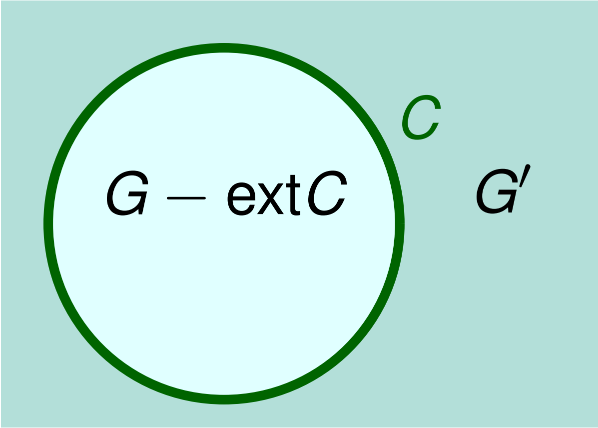
Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Schritt 1: $G - x - y$ enthält keinen θ-Graph

Betrachte (planaren!) Graph $G' := (G/xy) - (xy)$
f Facette von G' in der (xy) lag

- $F \subseteq G'$ sei Graph aus zu f inzidenten Knoten/Kanten.
- F enthält Kreis C, aber keinen θ-Graph

Strategie: Bette G wie folgt planar ein.



dafür nötig:

- $G - \text{ext}C$ planar und
- besitzt Einbettung bei der C Facette begrenzt.

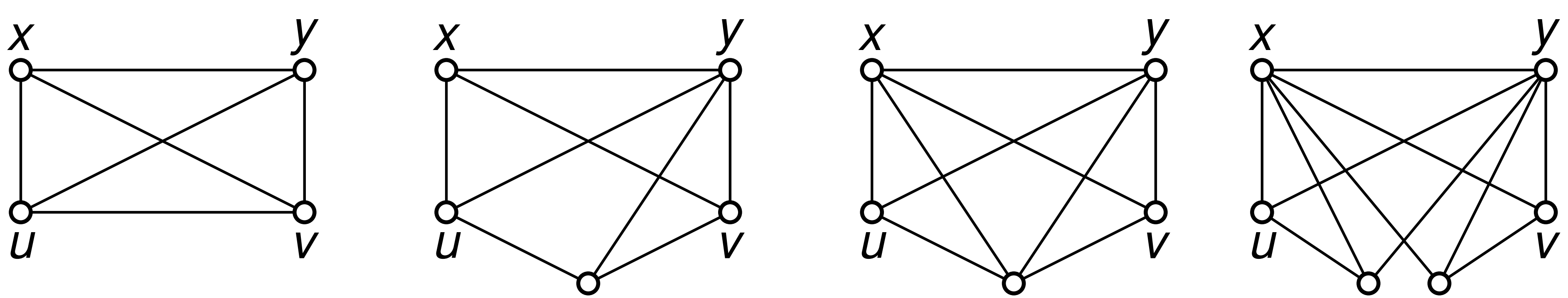
Schritt 2: $G - x - y$ hat max. einen Grad-1-Knoten

Annahme: u, v zwei Grad-1-Knoten

- Alle Knoten haben in G Grad 3
- Schritt 1 $\Rightarrow$ Jede Kante hat x, y, u oder v als Endpunkt

Mögliche Fälle für G:

- u, v sind (nicht) benachbart
- u, v besitzen (keinen) gemeinsamen Nachbarn



In allen Fällen ist G planar. Widerspruch!

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

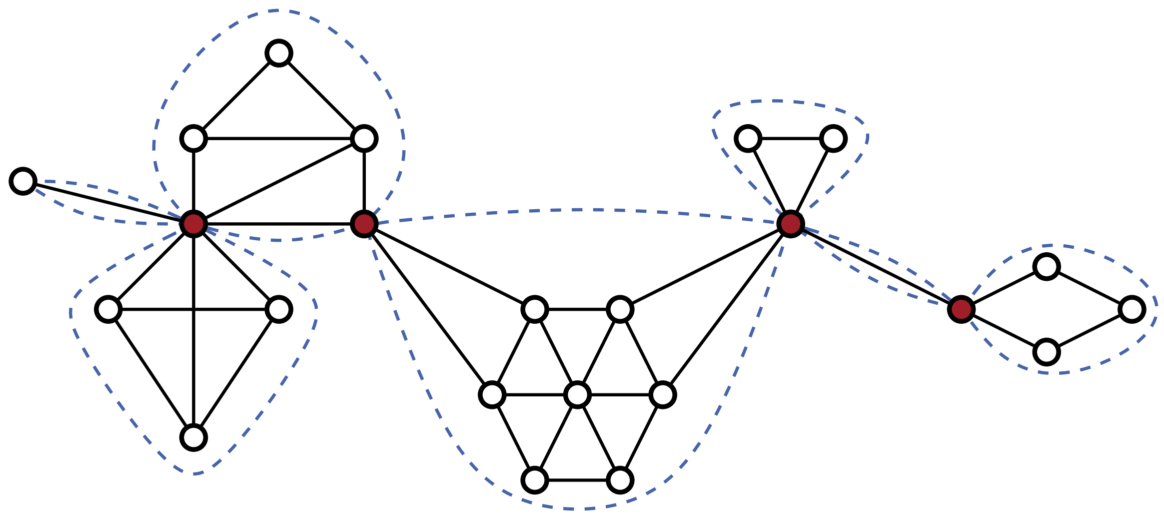
Zwischenschritt: Blockzerlegung

G beliebiger Graph

Äquivalenz-Relation auf Kanten:

$e_1 \sim e_2 \quad \Leftrightarrow \quad e_1 = e_2$ oder es gibt einfachen Kreis, der e_1 und e_2 enthält.

- Subgraph von G bestehend aus Äquivalenzklassen mit allen zugehörigen Knoten heißt Block.
- Jede Kante ist in genau einem Block.
- In mehreren Blöcken enthaltener Knoten ist Separatorknoten.



Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Zwischenschritt: Blockzerlegung

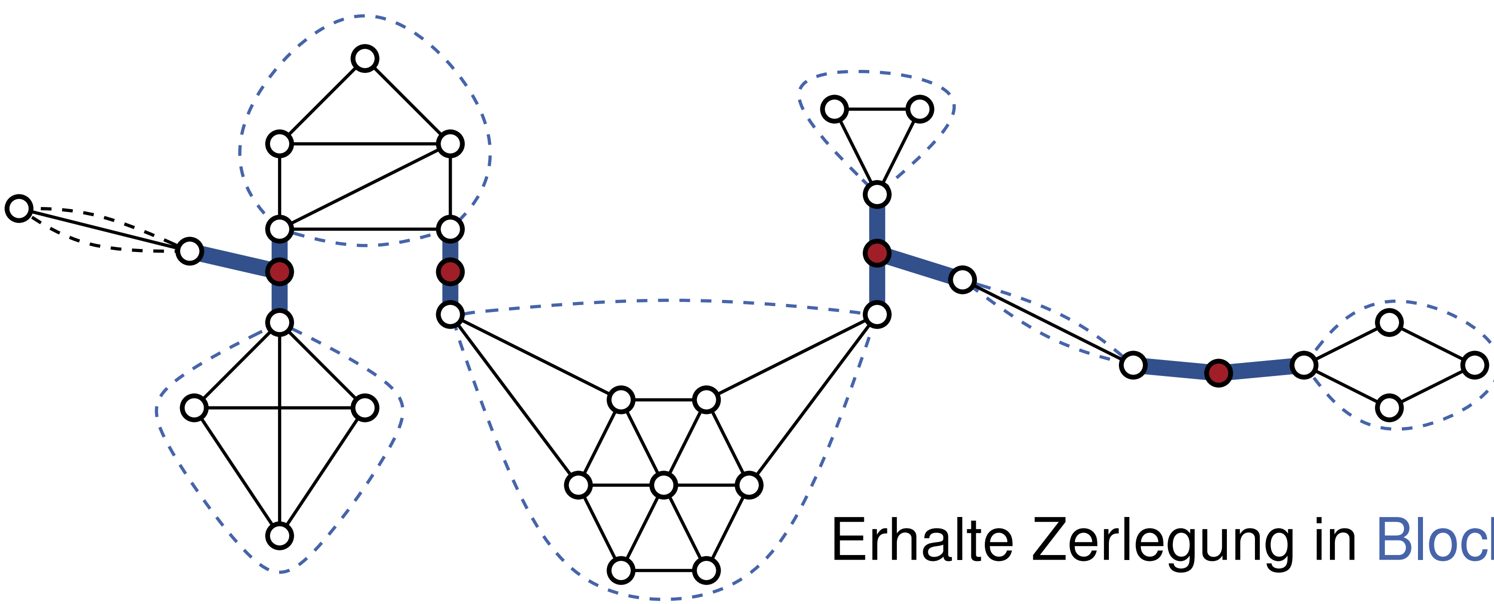
Karlsruher Institut für Technologie

G beliebiger Graph

Äquivalenz-Relation auf Kanten:

$e_1 \sim e_2 \quad \Leftrightarrow \quad e_1 = e_2$ oder es gibt einfachen Kreis, der e_1 und e_2 enthält.

- Subgraph von G bestehend aus Äquivalenzklassen mit allen zugehörigen Knoten heißt Block.
- Jede Kante ist in genau einem Block.
- In mehreren Blöcken enthaltener Knoten ist Separatorknoten.



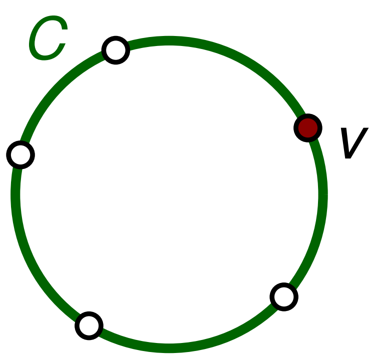
Erhalte Zerlegung in Block–Cutvertex-Baum

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Schritt 3: $G - x - y$ ist Kreis

Jeder Block von $G' := G - x - y$ ist Kreis oder Kante

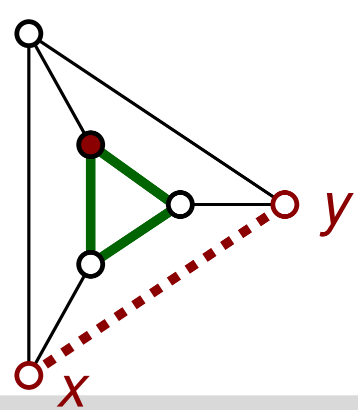
- Ein Block $\Rightarrow$ fertig!
- Mehrere Blöcke $\Rightarrow$ betrachte Blätter im BCT
- Einer der Blöcke ist ein Kreis C mit Separatorknoten v



Zeige:

- Alle restlichen Kanten inzident zu v (Schritt 1)
- Höchstens eine Kante inzident zu v (Schritt 2)

Gibt es eine solche Kante, so ist G ein 3-Prisma:



Beweis des Satzes

Satz von Kuratowski:
Jeder nicht planare Graph enthält K_5 oder $K_{3,3}$ als Minor.

- H nicht planar $\Rightarrow$ H enthält minor-minimalen nicht-planaren Graphen G
- x, y zwei benachbarte Knoten von $G \Rightarrow G - x - y$ ist Kreis C (Schritt 3)
- Jeder Knoten auf C ist zu einem der Knoten x,y benachbart.
- u, v benachbarte Knoten auf $C \Rightarrow u$,v beide zu x, y benachbart oder kein gemeinsamer Nachbar in $\{x, y\}$
- Knoten auf C sind entweder alle zu beiden Knoten x, y verbunden, oder abwechselnd zu x, y verbunden

Im ersteren Fall ergibt sich K_5, im Letzteren $K_{3,3}$.