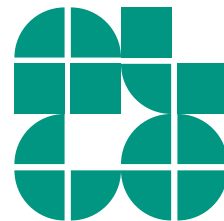


Vorlesung Algorithmische Kartografie

Punktbeschriftung in Dynamischen Karten: Rotieren

INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK · FAKULTÄT FÜR INFORMATIK

Benjamin Niedermann · **Martin Nöllenburg**
09.06.2015



Algorithmus 2

Input: Menge \mathcal{E} von quadratischen Labelpyramiden, verfügbare Intervalle $(0, S_{\max})$ für alle $E \in \mathcal{E}$

Output: aktive Intervalle $(0, A_E)$ für alle $E \in \mathcal{E}$

foreach $E \in \mathcal{E}$ **do** initialisiere E als inaktiv; $A_E \leftarrow 0$

for $i = 0$ **to** $\log_2 n$ **do** // Phase i

$s_i \leftarrow S_{\max}/2^i$

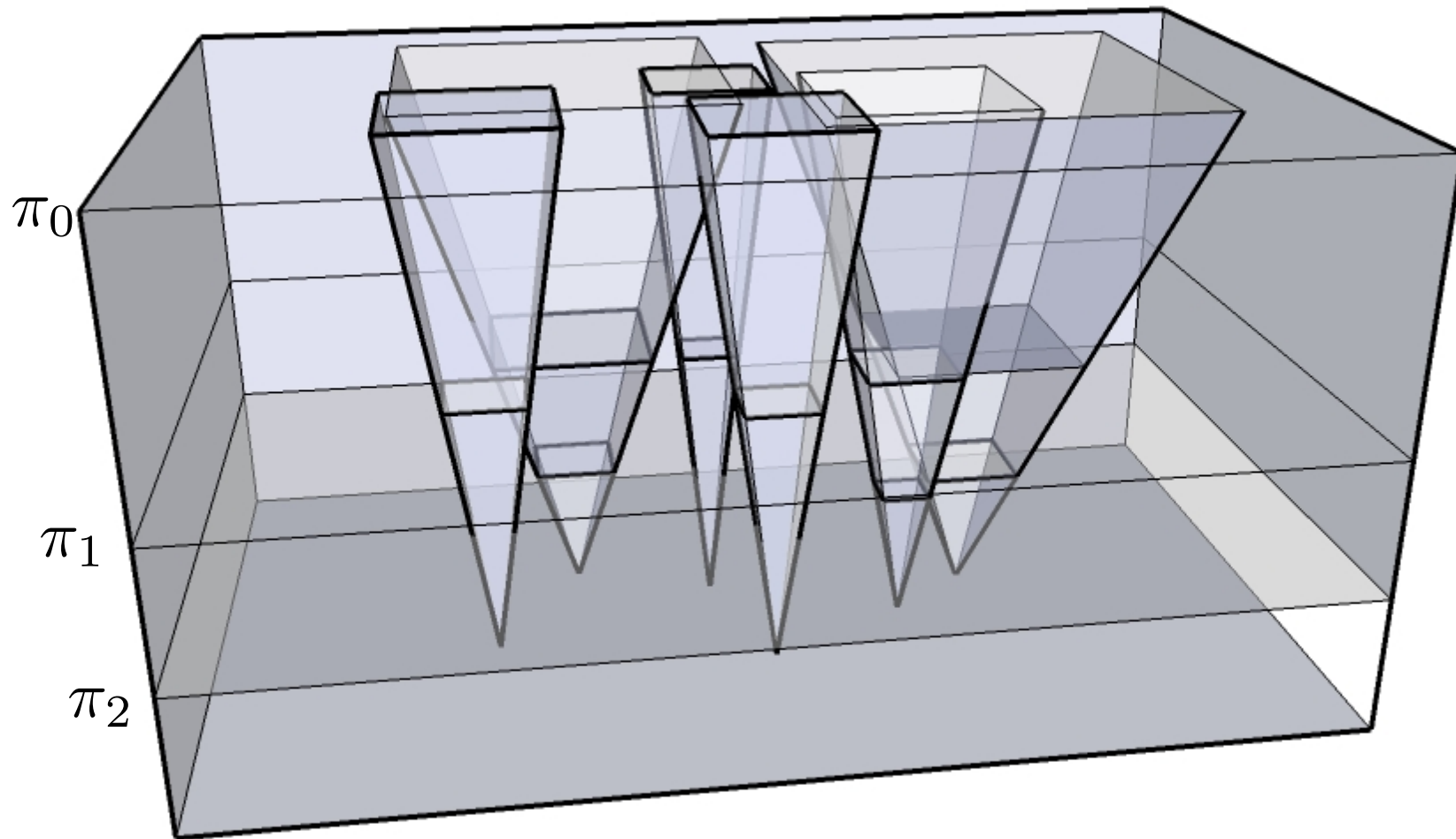
$\mathcal{C}_i \leftarrow$ Menge inaktiver Spuren in $\pi_i = \pi(s_i)$, die keine aktiven Spuren in π_i schneiden

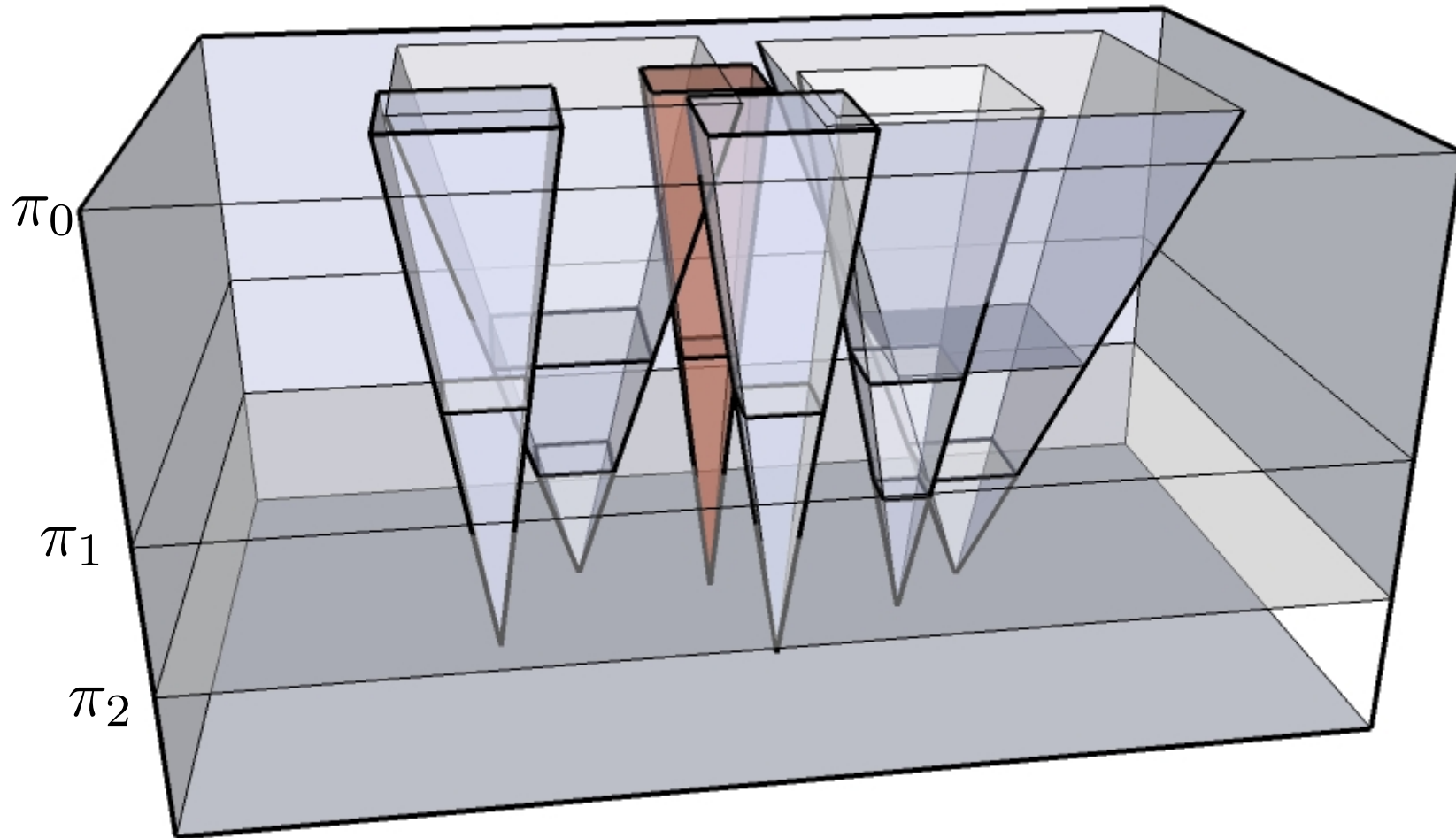
while $\mathcal{C}_i \neq \emptyset$ **do**

$T \leftarrow$ kleinste Spur in \mathcal{C}_i ; $E \leftarrow$ Pyramide zu T

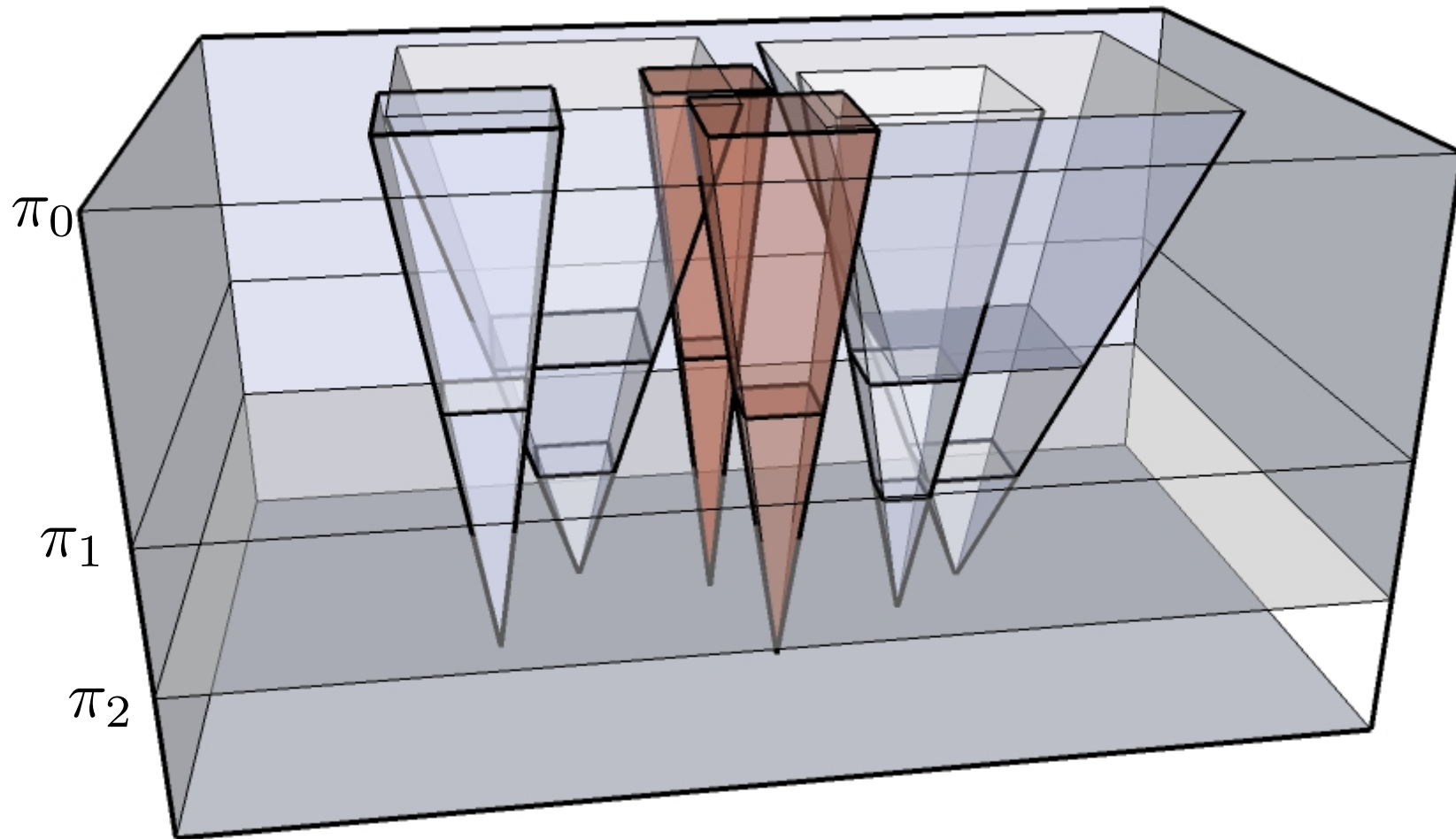
markiere E und T aktiv und setze $A_E \leftarrow s_i$

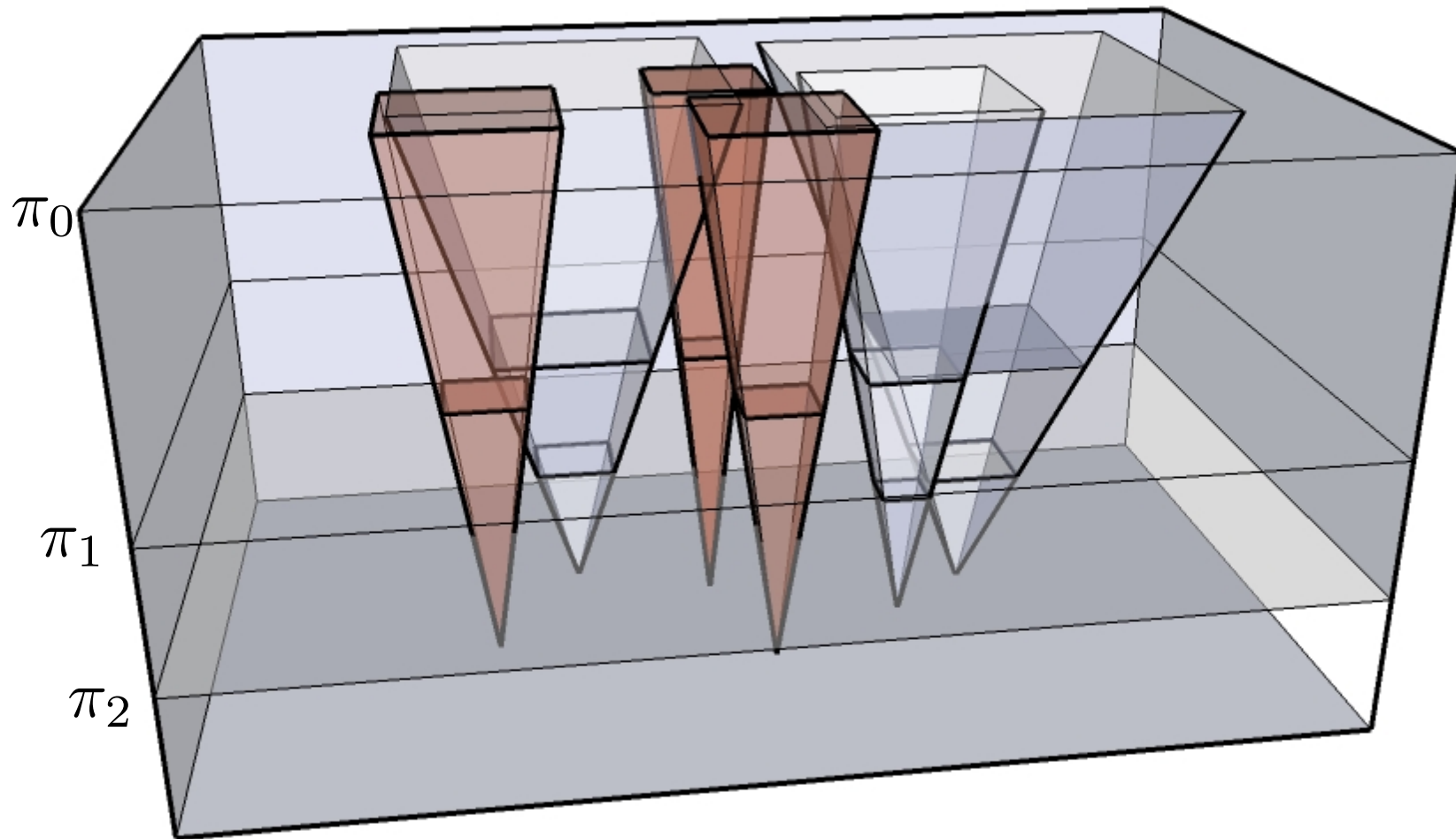
entferne T und alle geschnittenen Spuren aus \mathcal{C}_i

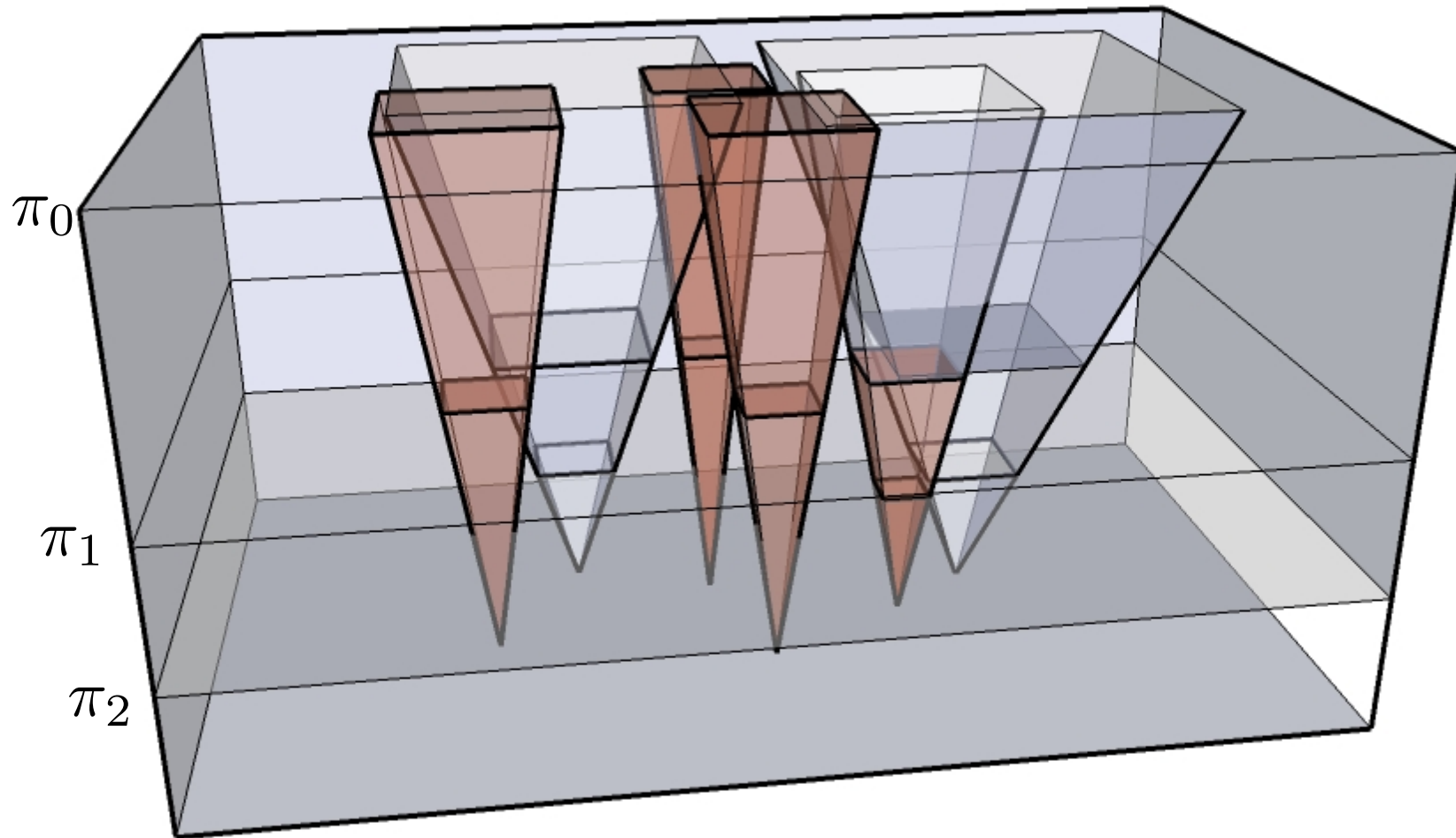


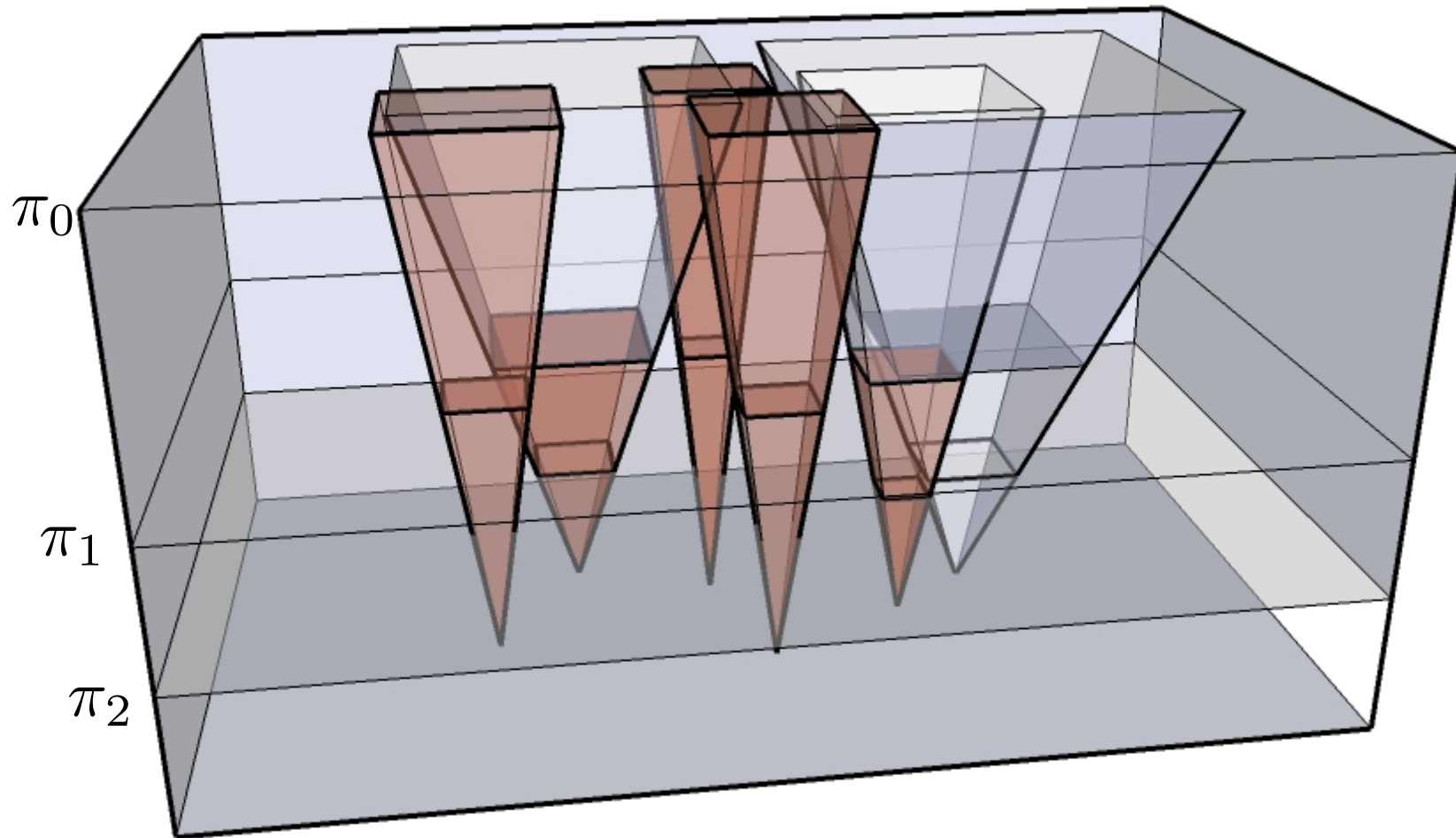


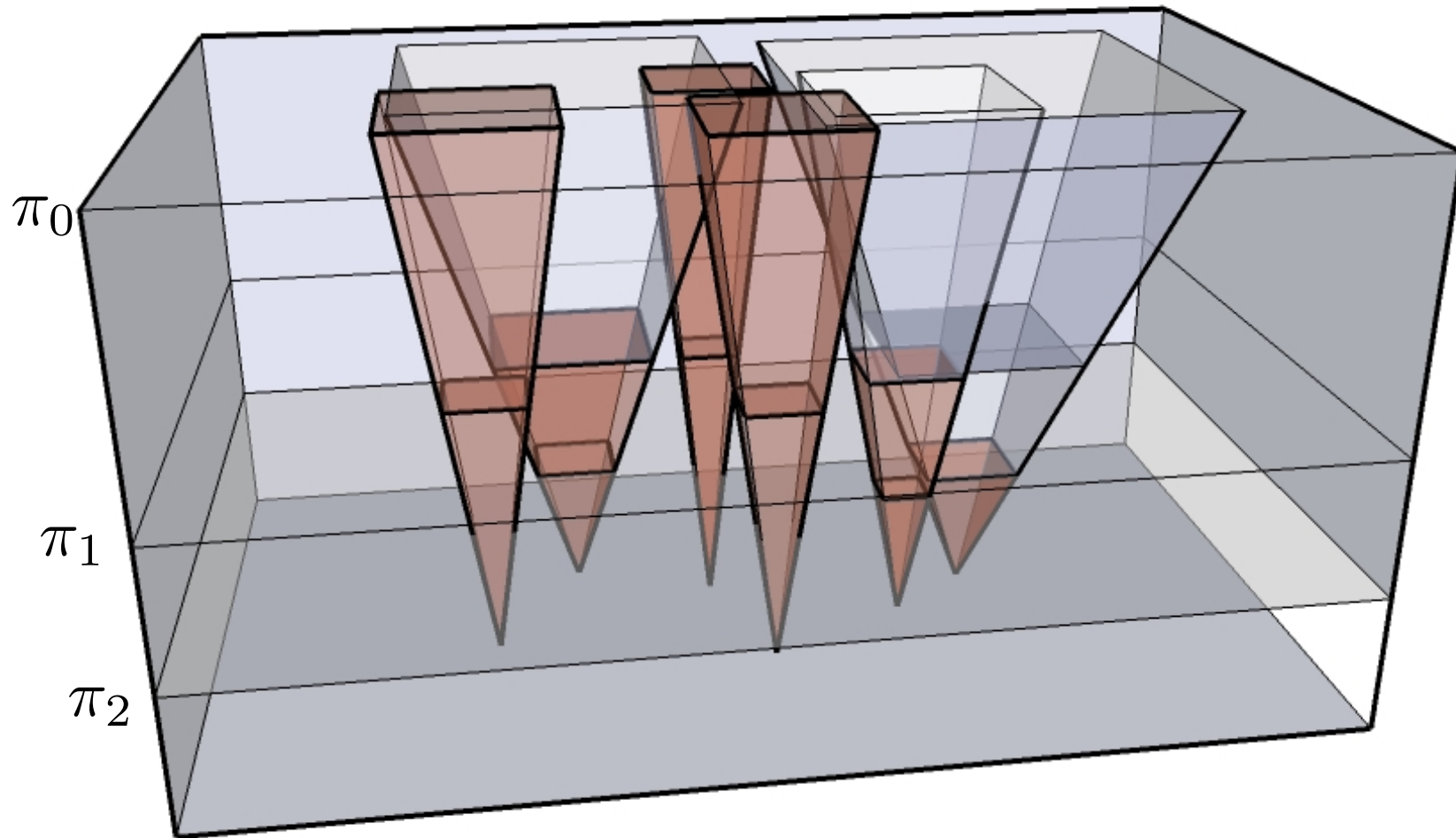
Beispiel











Blocker-Zuordnung

Am Ende von Phase i schneiden alle inaktiven Spuren eine aktive Spur in Ebene π_i , sie werden **blockiert**.

Sei T eine blockierte Spur. Wir weisen T einer aktiven Spur zu:

- (A) falls T anfangs in \mathcal{C}_i war, wurde T durch neu aktivierte Spur T' blockiert; weise T der Spur T' zu
- (B) sonst weise T einer beliebigen blockierenden Spur T' zu, die schon am Anfang von Phase i aktiv war

Blocker-Zuordnung

Am Ende von Phase i schneiden alle inaktiven Spuren eine aktive Spur in Ebene π_i , sie werden **blockiert**.

Sei T eine blockierte Spur. Wir weisen T einer aktiven Spur zu:

- (A) falls T anfangs in \mathcal{C}_i war, wurde T durch neu aktivierte Spur T' blockiert; weise T der Spur T' zu
- (B) sonst weise T einer beliebigen blockierenden Spur T' zu, die schon am Anfang von Phase i aktiv war

Lemma 3: Sei T eine aktive Spur in Ebene π_i mit Seitenlänge ℓ . Dann hat jede inaktive und T zugeordnete Spur Seitenlänge mind. $\ell/3$ und schneidet den Rand von T .

Am Ende von Phase i schneiden alle inaktiven Spuren eine aktive Spur in Ebene π_i , sie werden **blockiert**.

Sei T eine blockierte Spur. Wir weisen T einer aktiven Spur zu:

- (A) falls T anfangs in C_i war, wurde T durch neu aktivierte Spur T' blockiert; weise T der Spur T' zu
- (B) sonst weise T einer beliebigen blockierenden Spur T' zu, die schon am Anfang von Phase i aktiv war

Lemma 3: Sei T eine aktive Spur in Ebene π_i mit Seitenlänge ℓ . Dann hat jede inaktive und T zugeordnete Spur Seitenlänge mind. $\ell/3$ und schneidet den Rand von T .

Beweis: Sei $T = tr_i(E)$ aktiv und $T' = tr_i(E')$ inaktiv und T zugeordnet

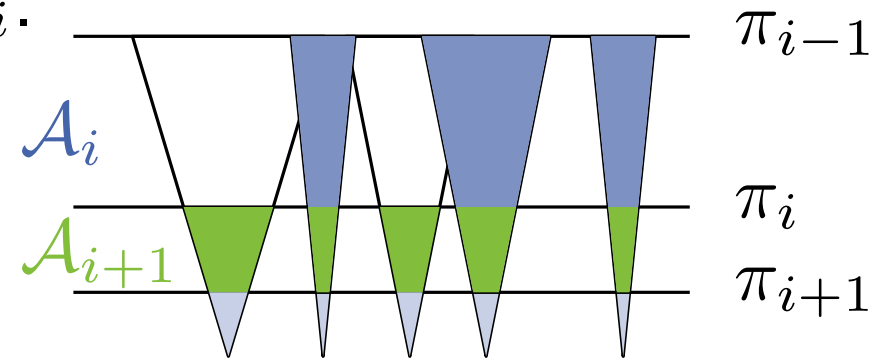
Fall (A) ist klar, Fall (B): Widerspruchsbeweis an der Tafel

Abschätzung aktive Gesamthöhe

Sei \mathcal{S} optimale Lösung und \mathcal{A} Lösung des Algorithmus 2.

Sei $\pi_{\log_2 n+1} = \pi(0)$.

Definiere \mathcal{S}_i und \mathcal{A}_i als Menge der aktiven Pyramidenstümpfe von \mathcal{S} bzw. \mathcal{A} zwischen π_{i-1} und π_i .

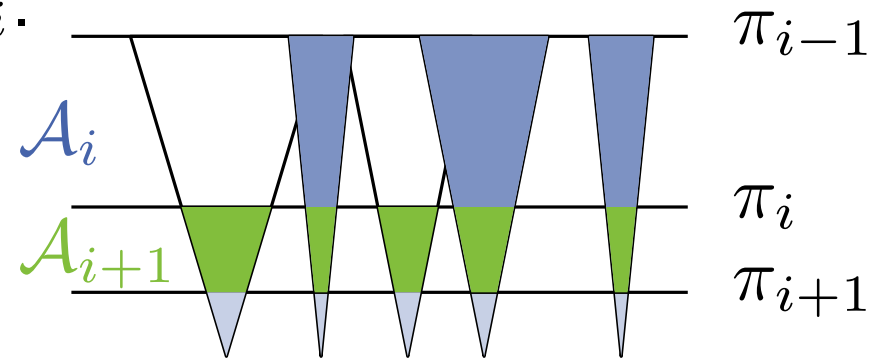


Abschätzung aktive Gesamthöhe

Sei \mathcal{S} optimale Lösung und \mathcal{A} Lösung des Algorithmus 2.

Sei $\pi_{\log_2 n+1} = \pi(0)$.

Definiere \mathcal{S}_i und \mathcal{A}_i als Menge der aktiven Pyramidenstümpfe von \mathcal{S} bzw. \mathcal{A} zwischen π_{i-1} und π_i .



Weise aktive Gesamthöhe $H(\mathcal{S}_i)$ der Gesamthöhe $H(\mathcal{A}_{i+1})$ zu;
weise $H(\mathcal{S}_{\log_2 n})$ und $H(\mathcal{S}_{\log_2 n+1})$ der Gesamthöhe $H(\mathcal{A}_1)$ zu.

Lemma 4: Es gilt $H(\mathcal{A}_1) \geq (H(\mathcal{S}_{\log_2 n}) + H(\mathcal{S}_{\log_2 n+1}))/4$.

Wenn nicht mehr als c Spuren in \mathcal{S} einer beliebigen Spur in \mathcal{A} zugeordnet sind, dann gilt für

$1 \leq i < \log_2 n$: $H(\mathcal{A}_{i+1}) \geq H(\mathcal{S}_i)/(2c)$.

Satz 3: Für n achsenparallele quadratische Label beliebiger Größe berechnet Algorithmus 2 eine $1/24$ -Approximation der optimalen aktiven Gesamthöhe. Der Algorithmus lässt sich in $O(n \log^3 n)$ Zeit und $O(n \log n)$ Platz implementieren.

Satz 3: Für n achsenparallele quadratische Label beliebiger Größe berechnet Algorithmus 2 eine $1/24$ -Approximation der optimalen aktiven Gesamthöhe. Der Algorithmus lässt sich in $O(n \log^3 n)$ Zeit und $O(n \log n)$ Platz implementieren.

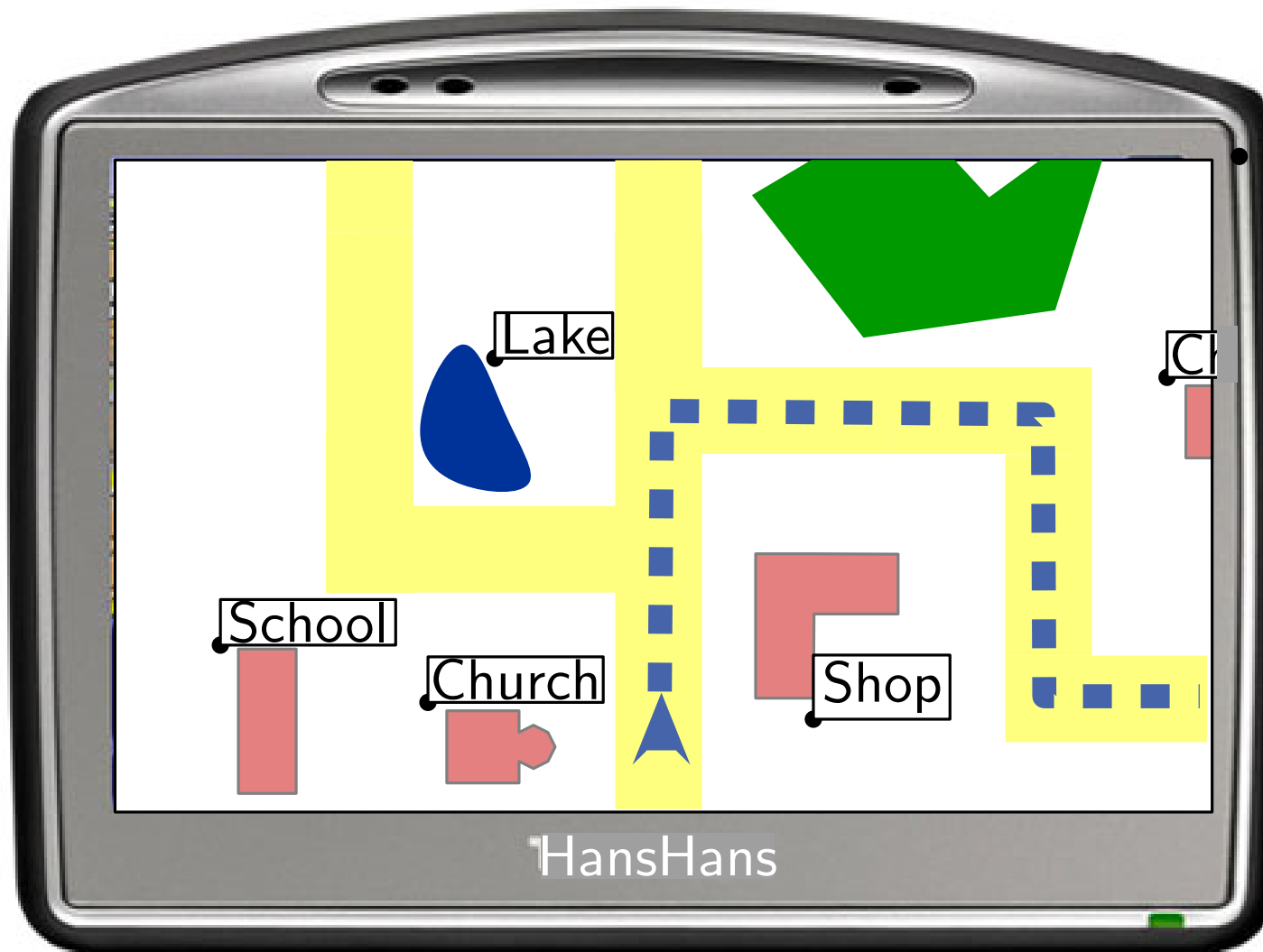
Abschlussfrage:

Was macht Algorithmus 2 für Label einheitlicher Größe?

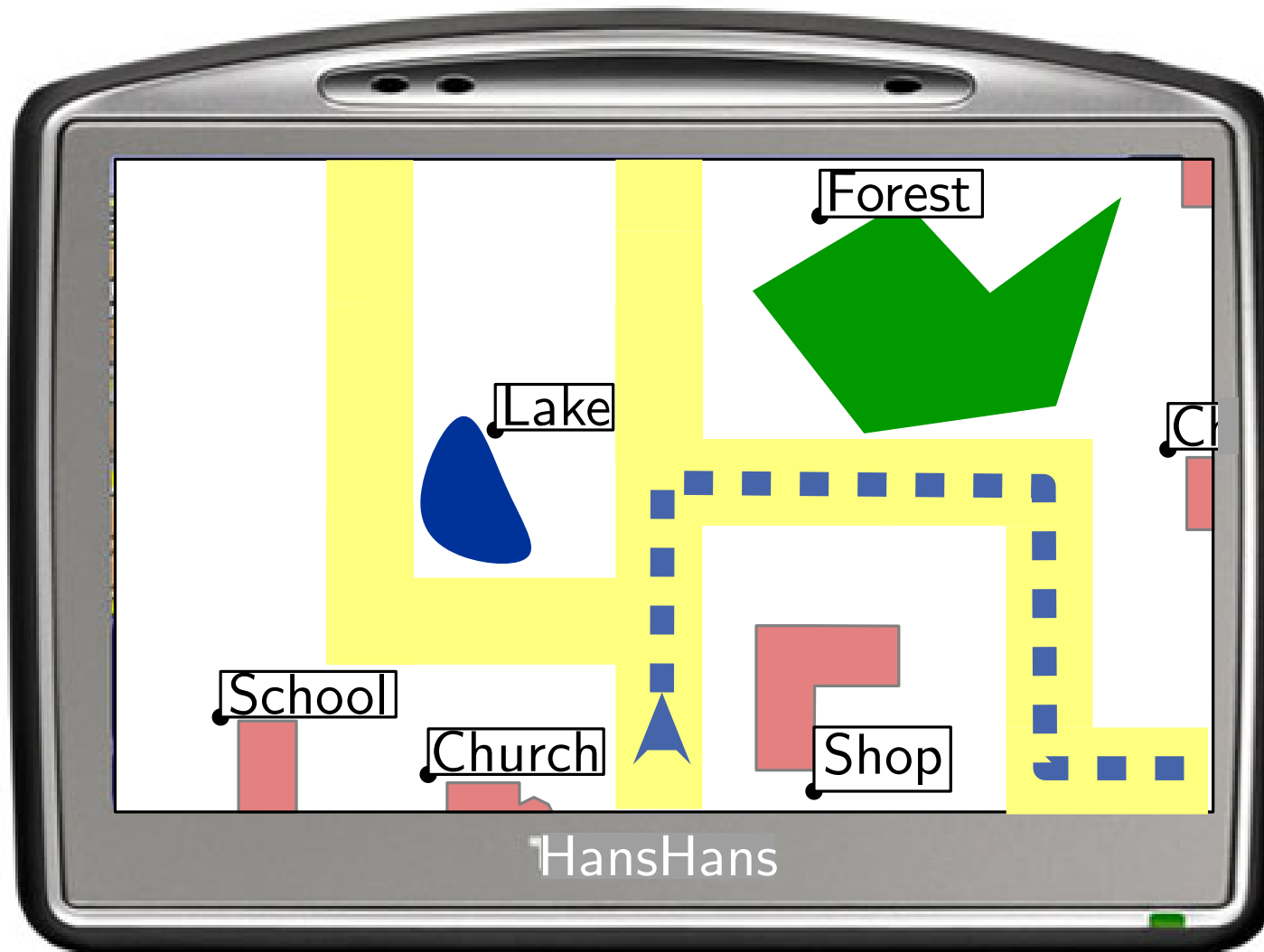
Beschriftung in dynamischen Karten: Rotieren

Motivation

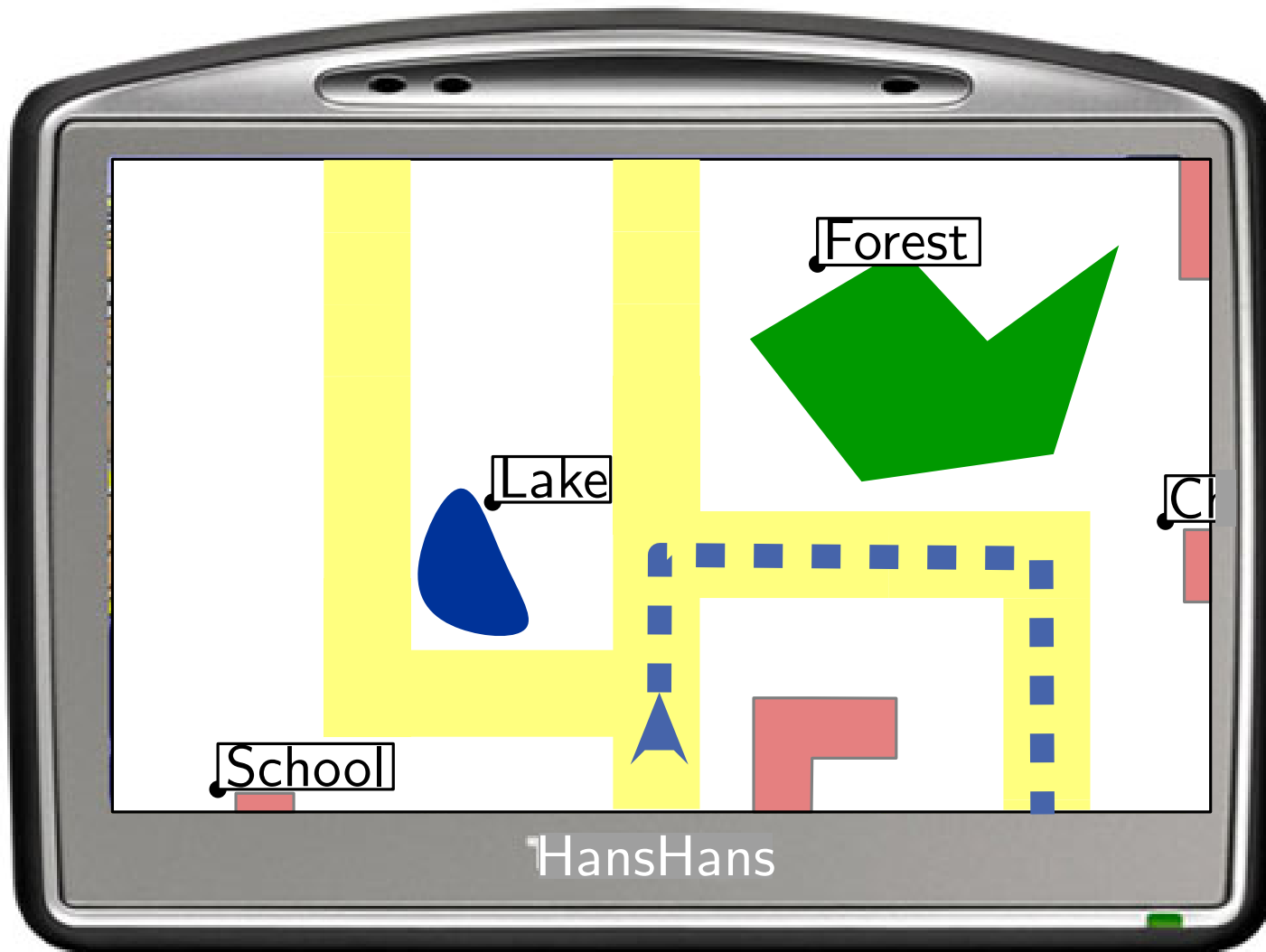




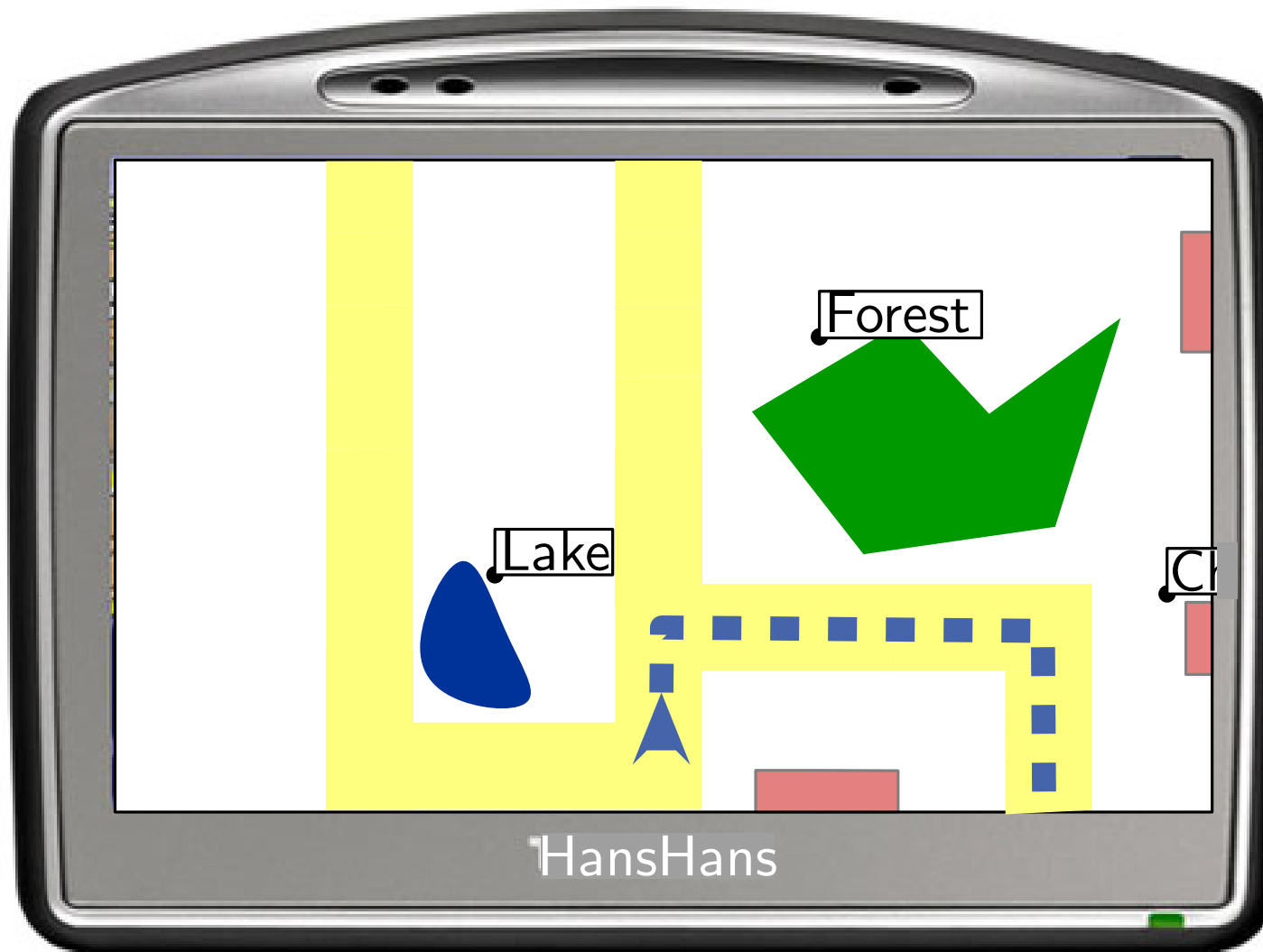
Motivation



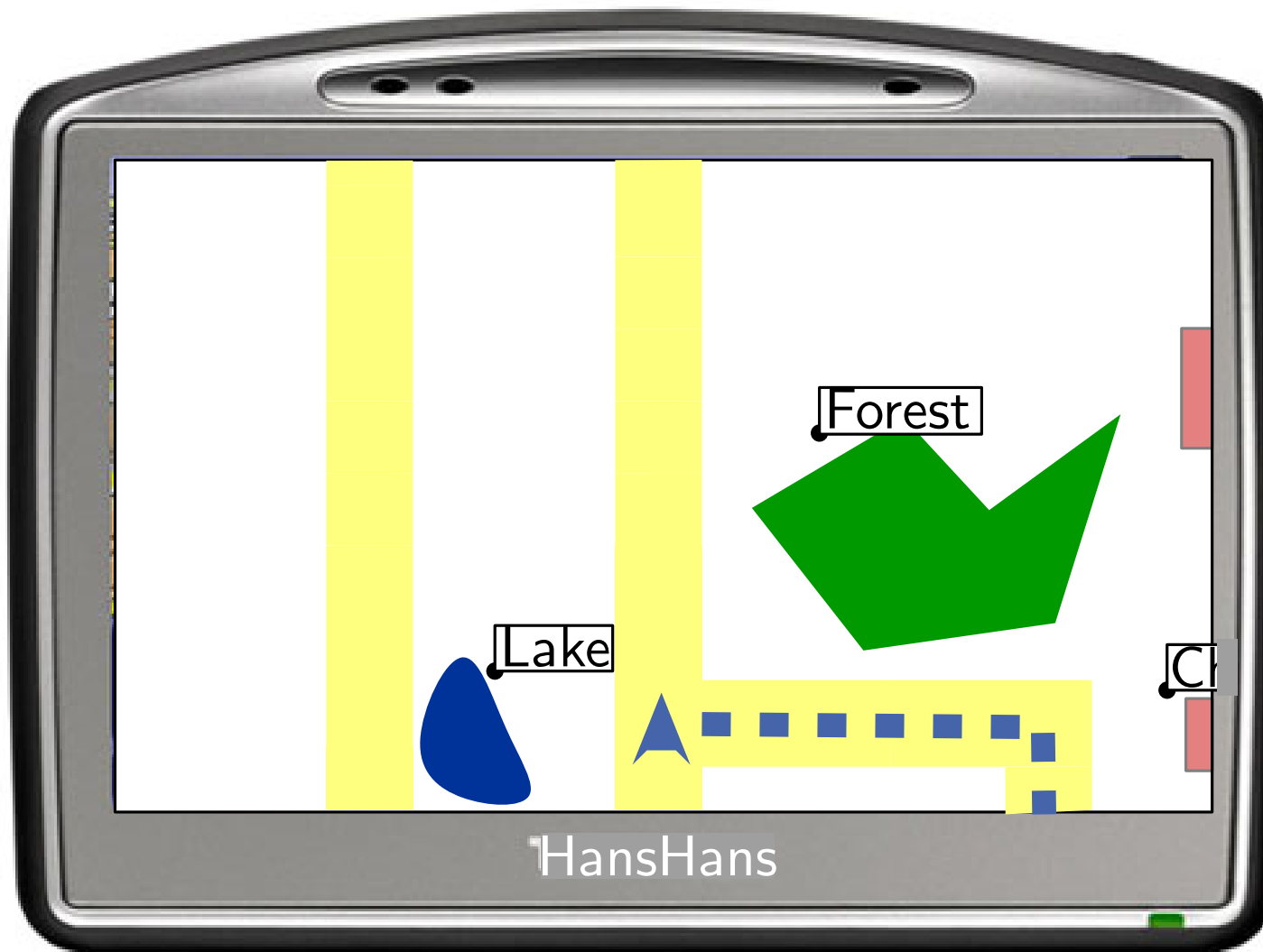
Motivation



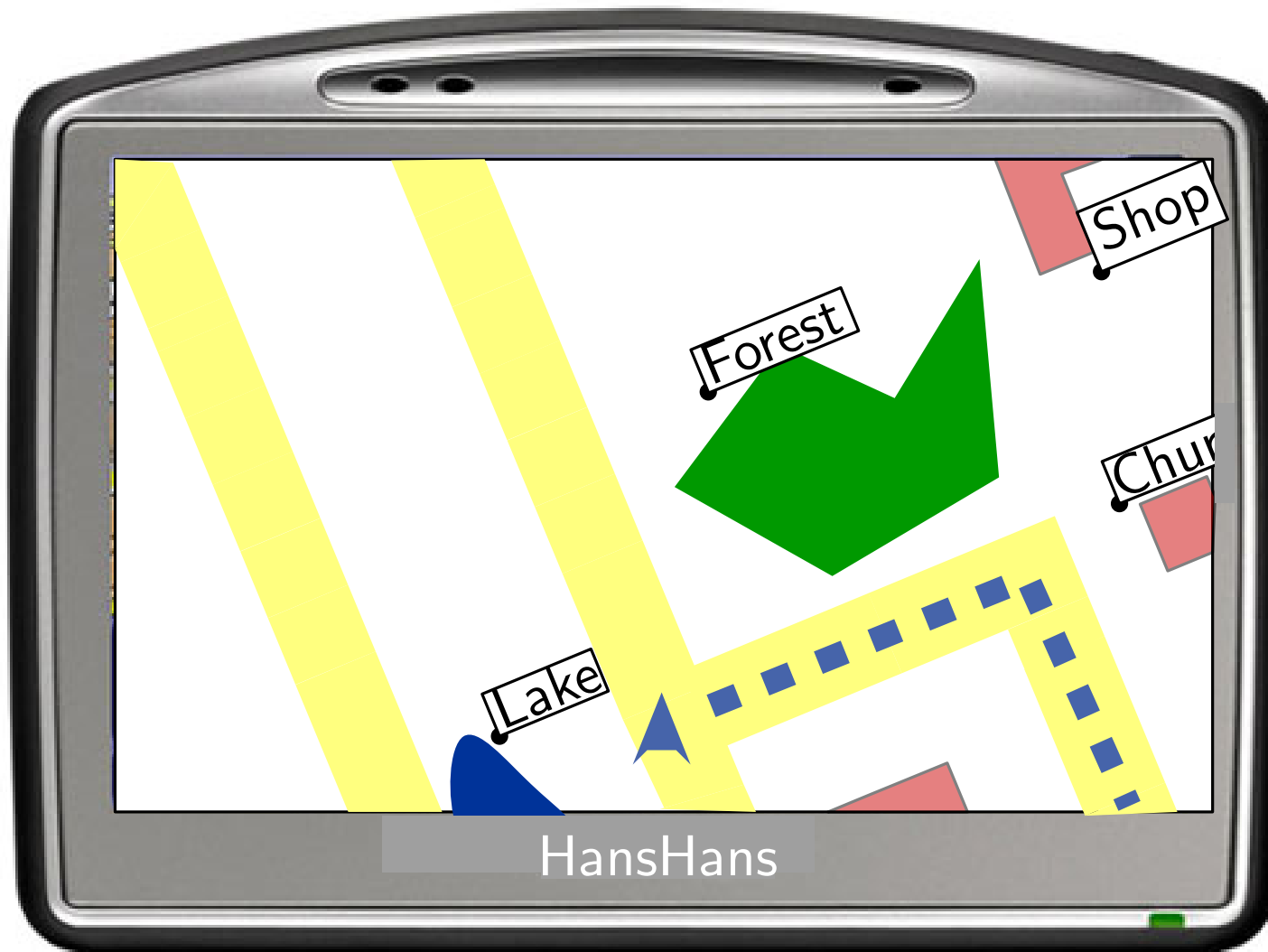
Motivation



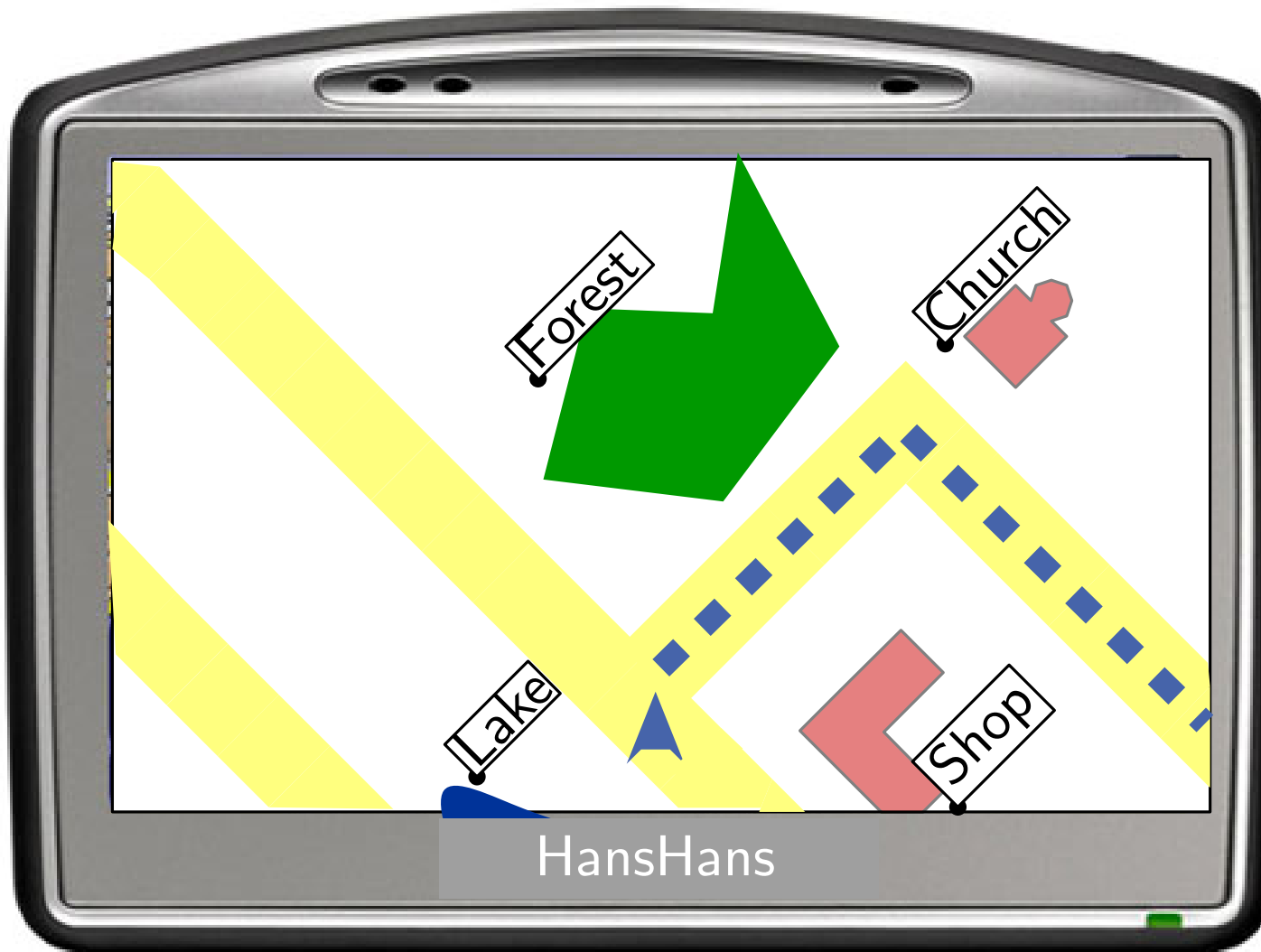
Motivation



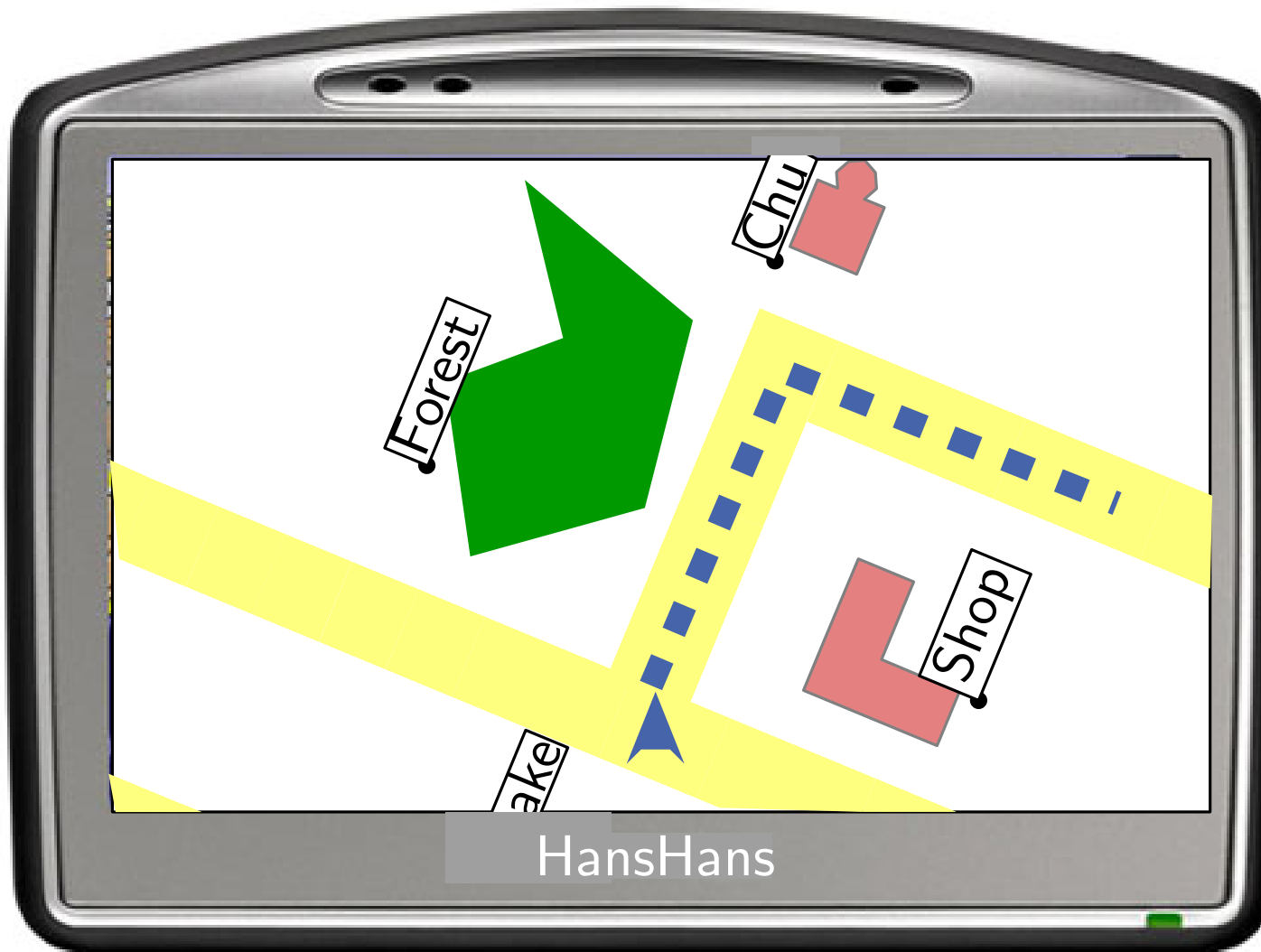
Motivation



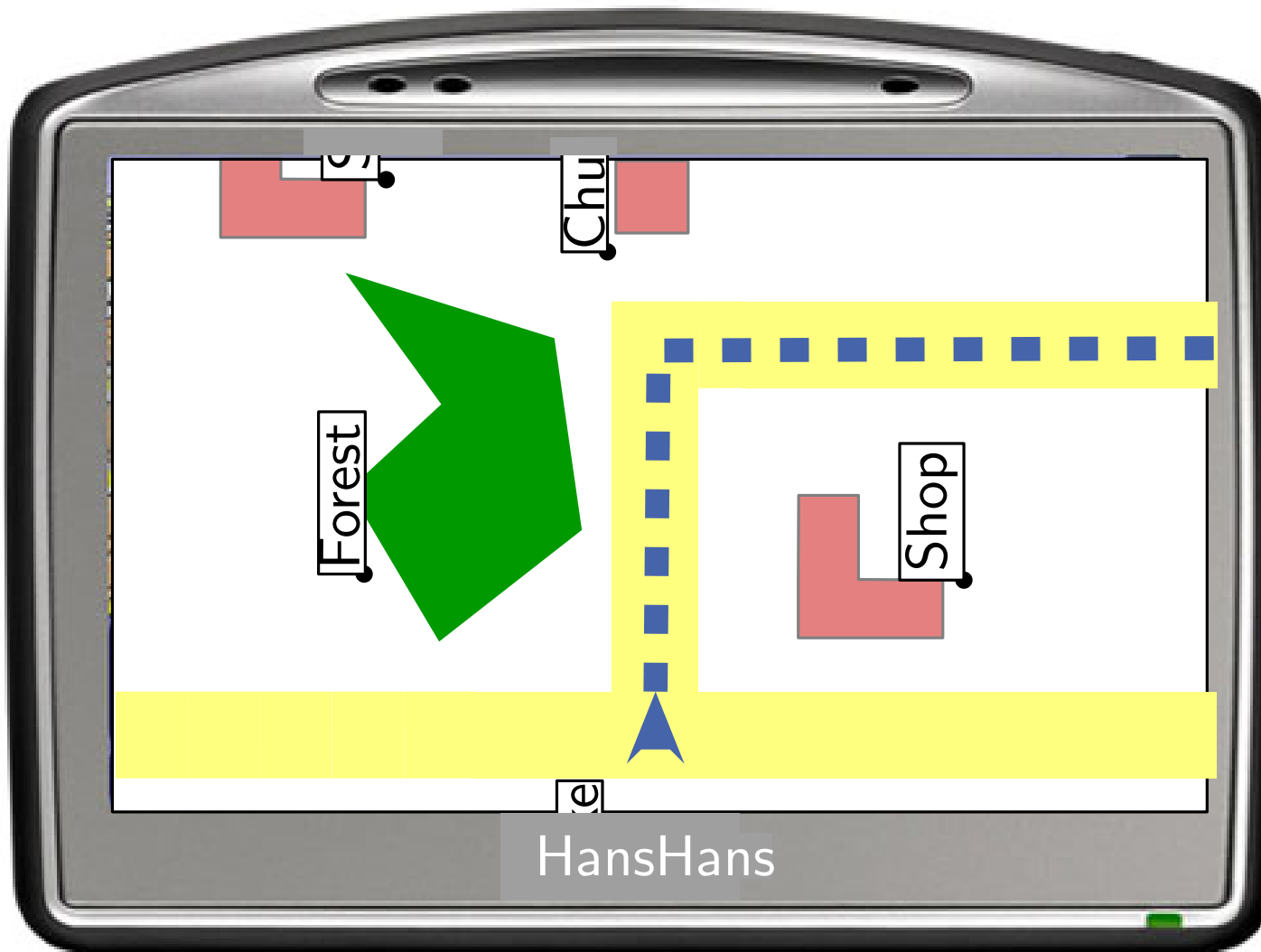
Motivation



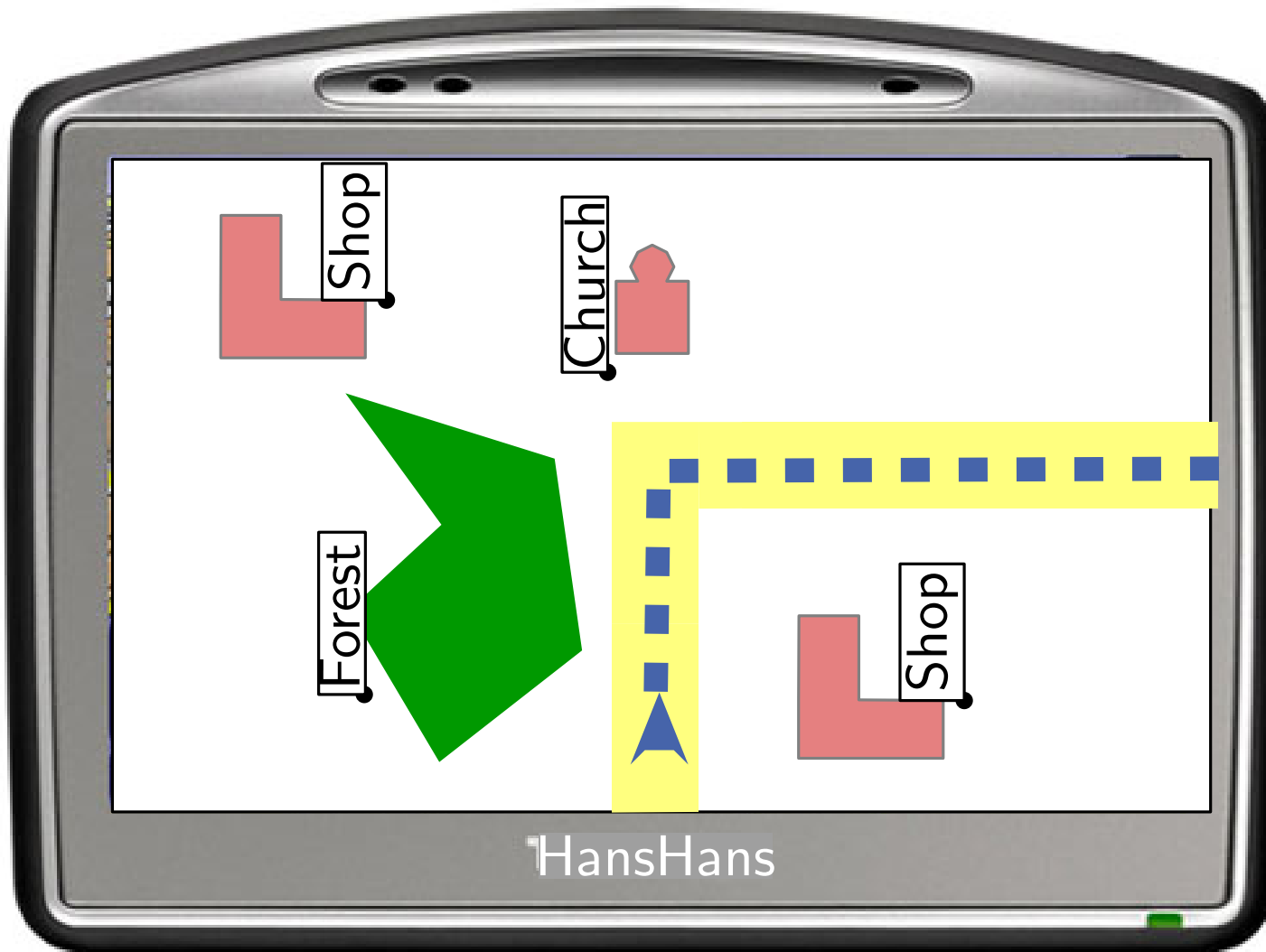
Motivation



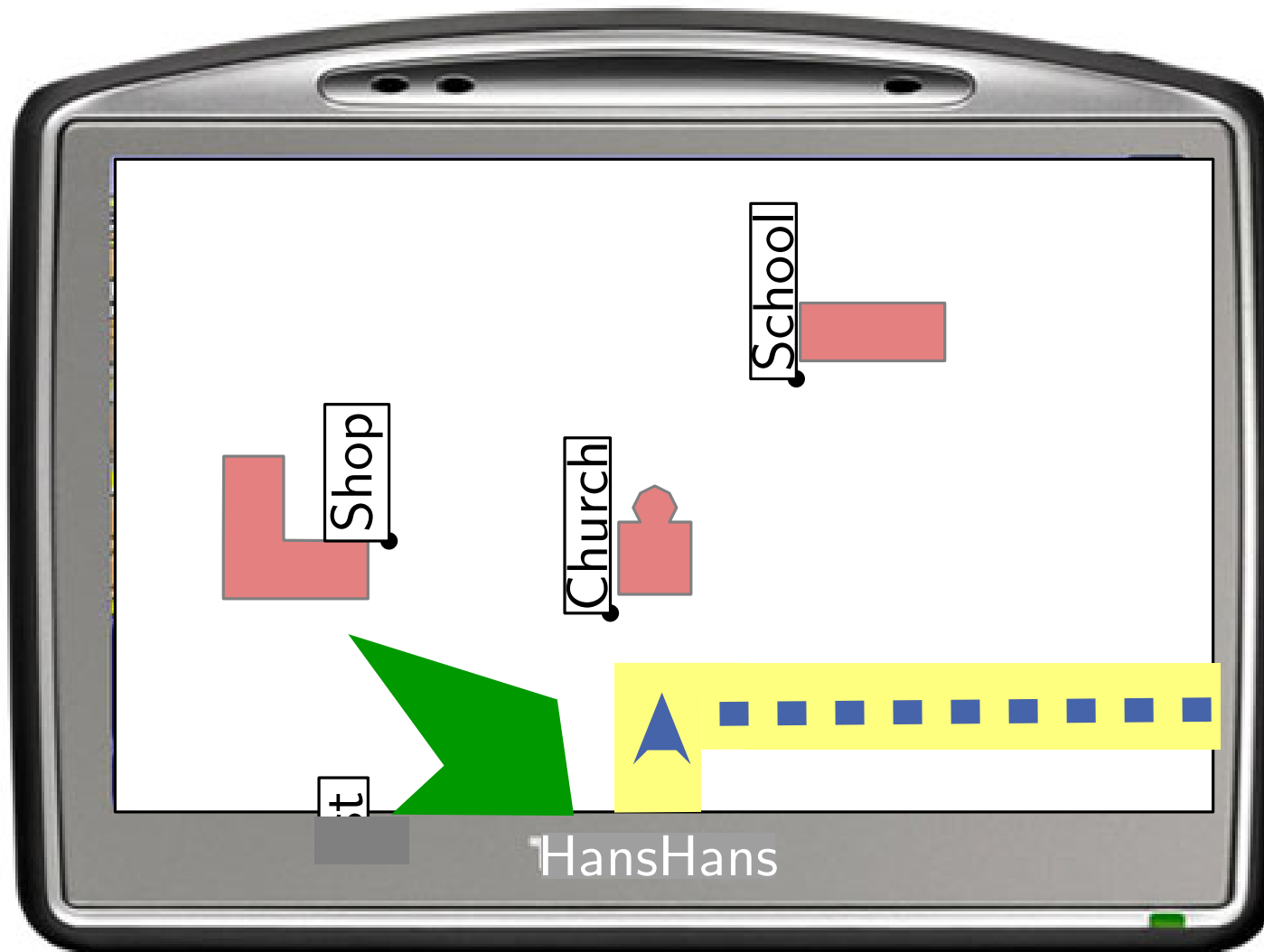
Motivation



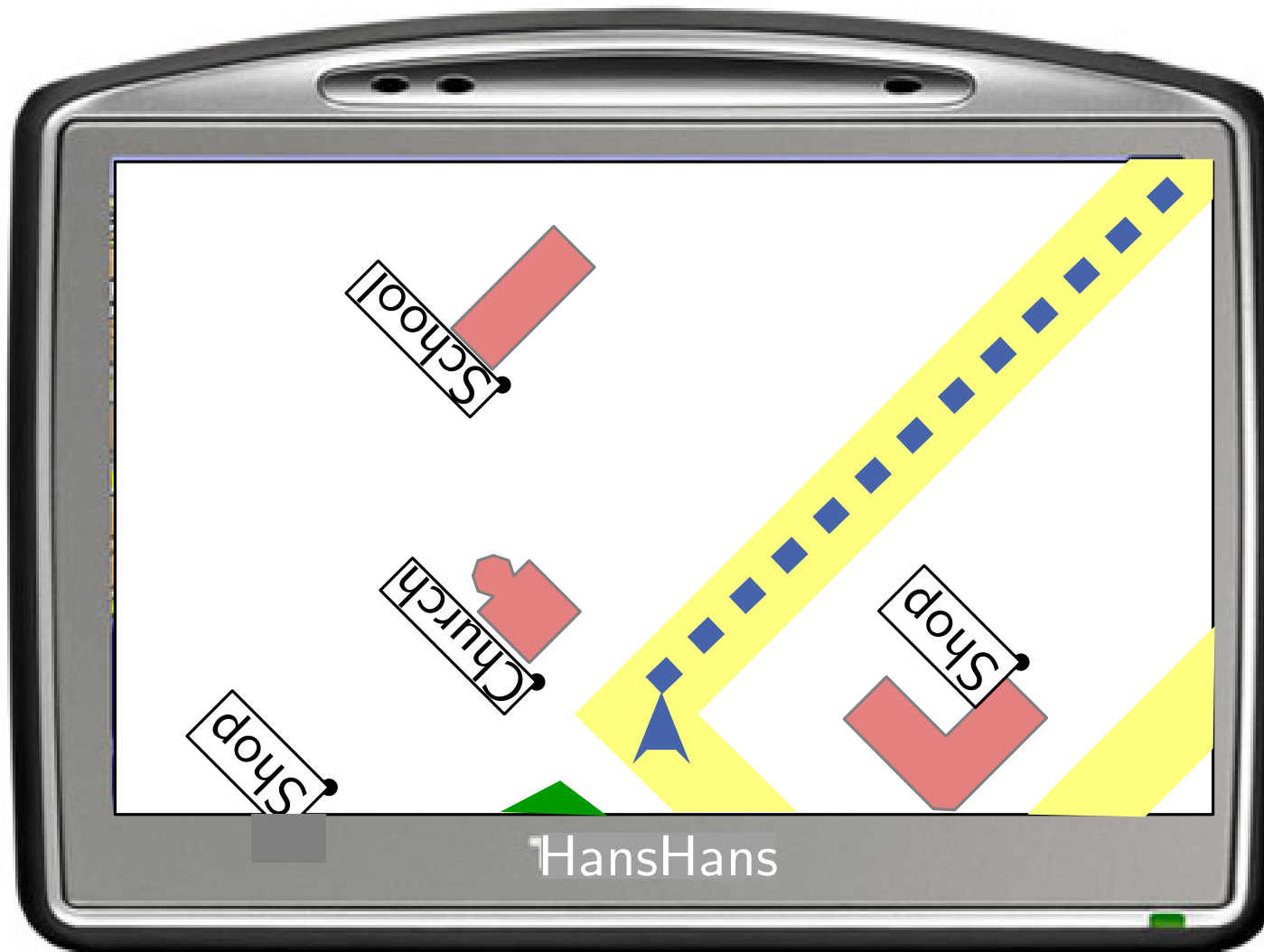
Motivation



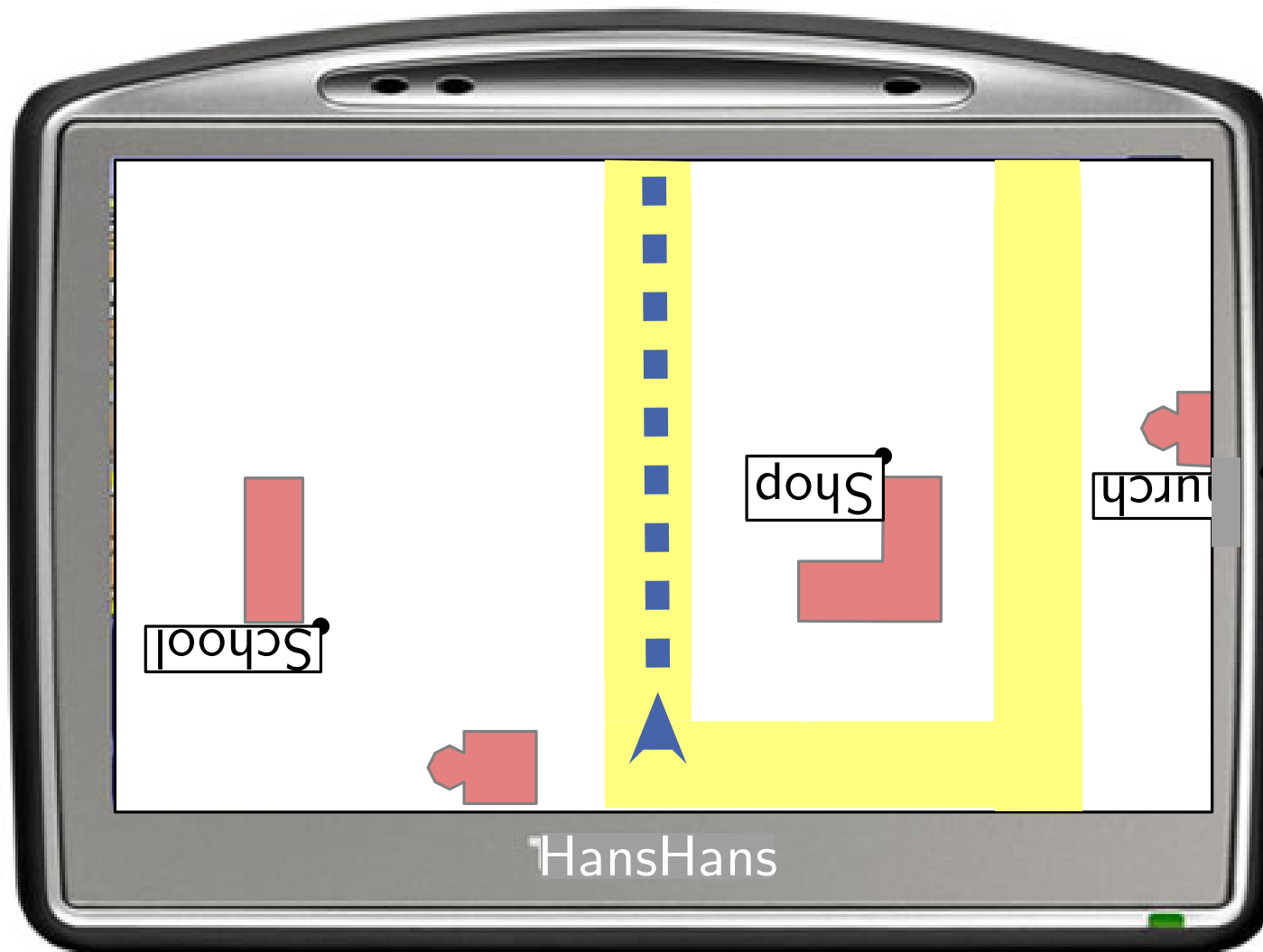
Motivation



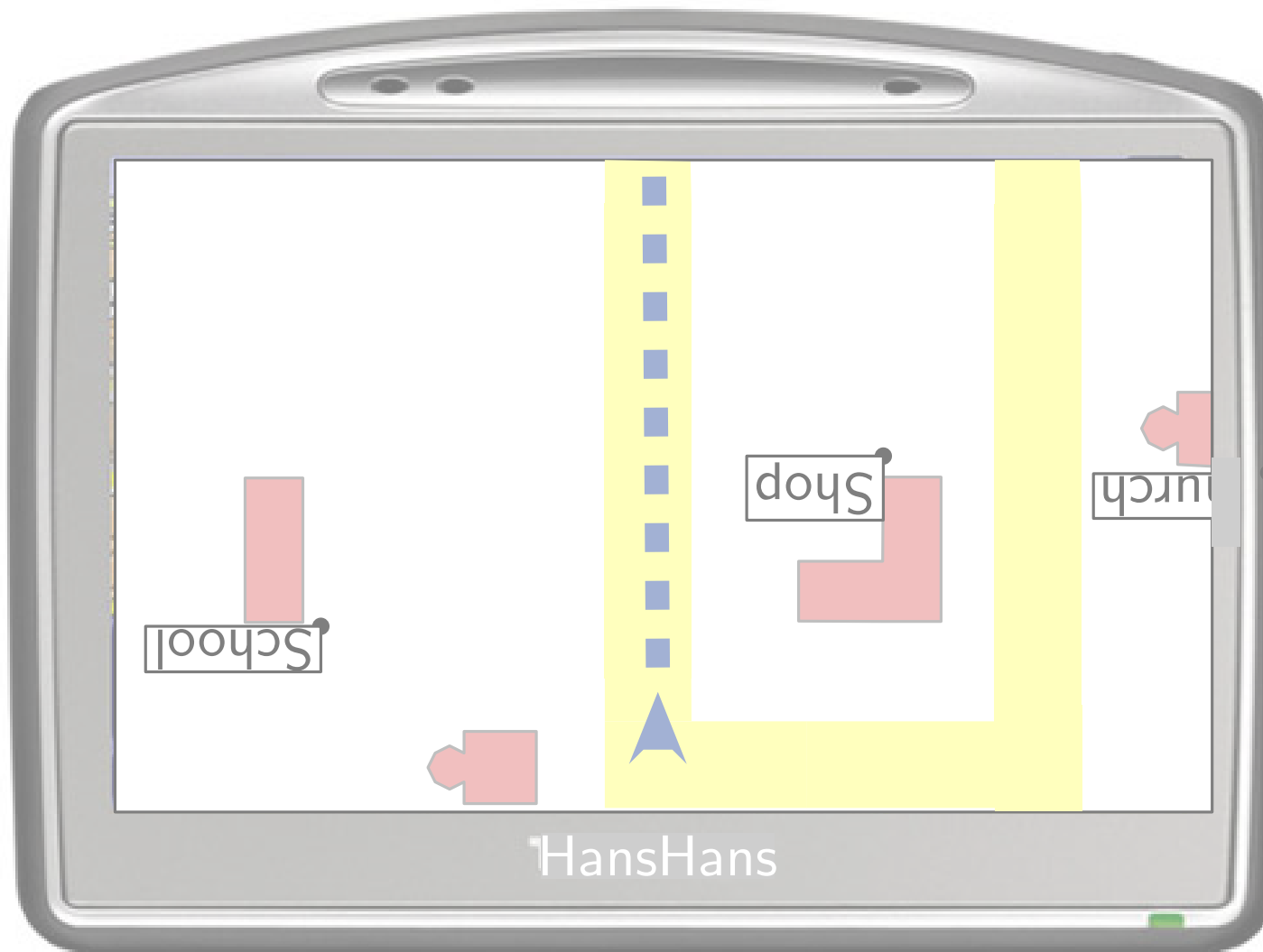
Motivation



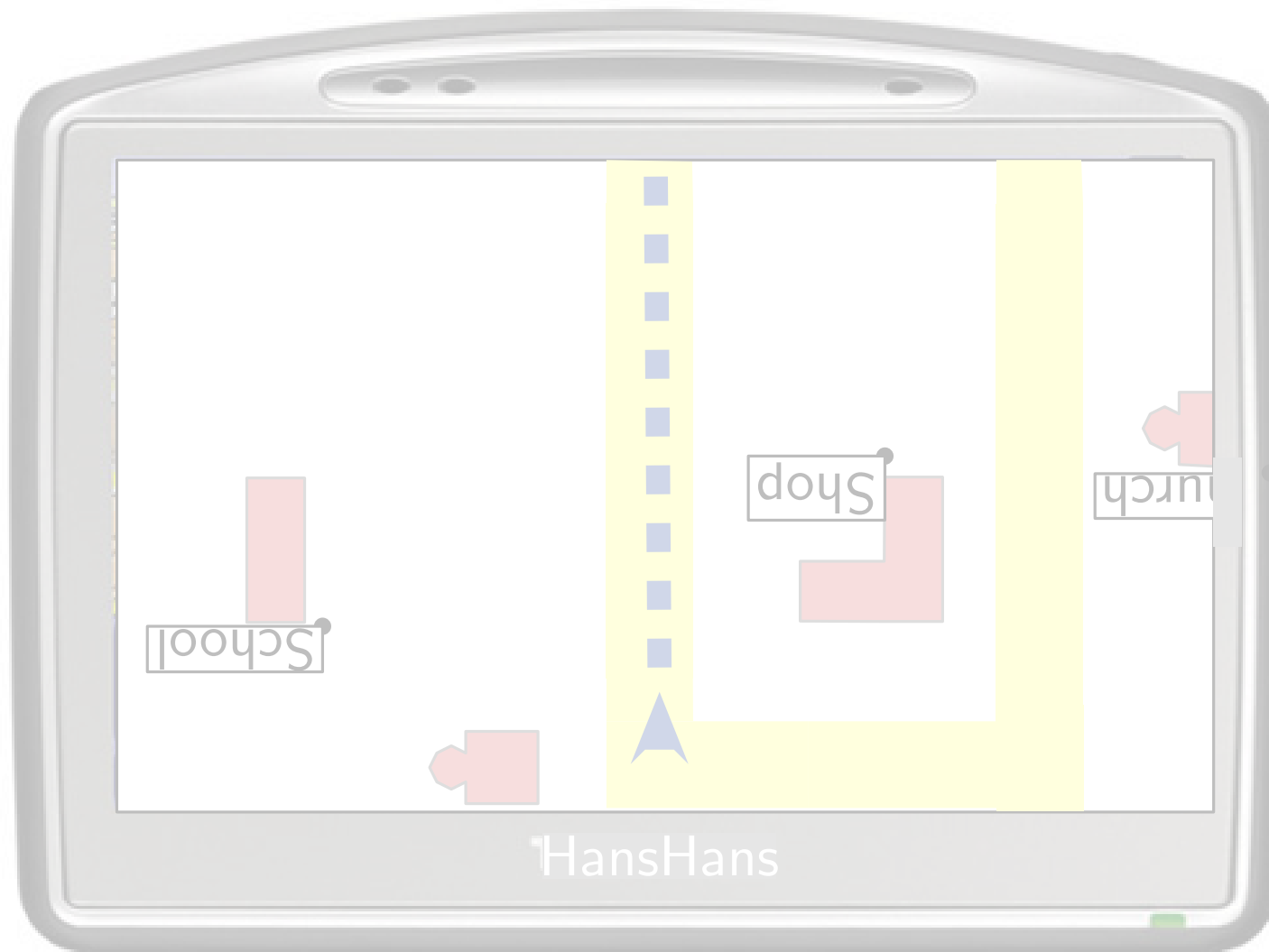
Motivation



Motivation

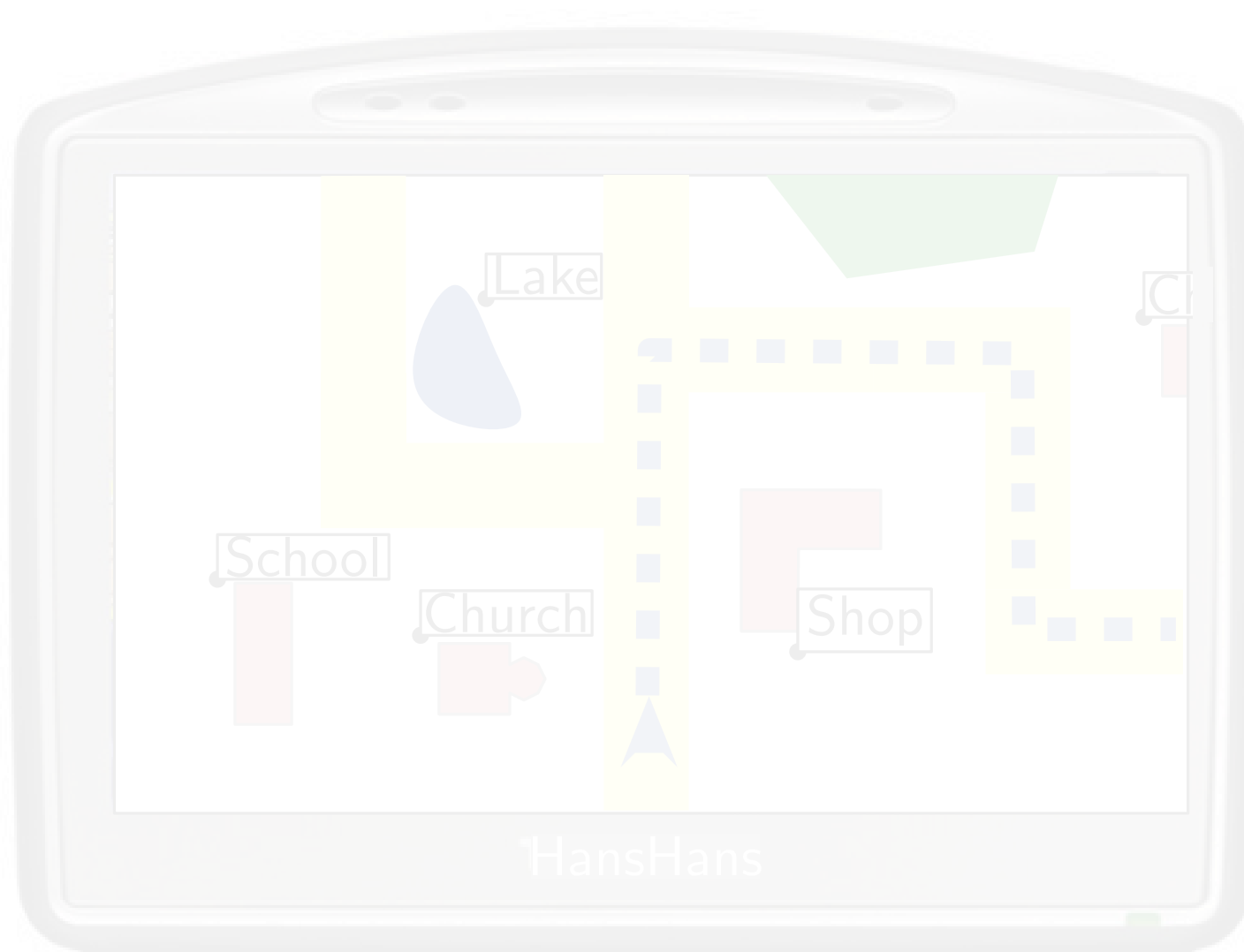


Motivation



Motivation

Motivation



Motivation



Motivation

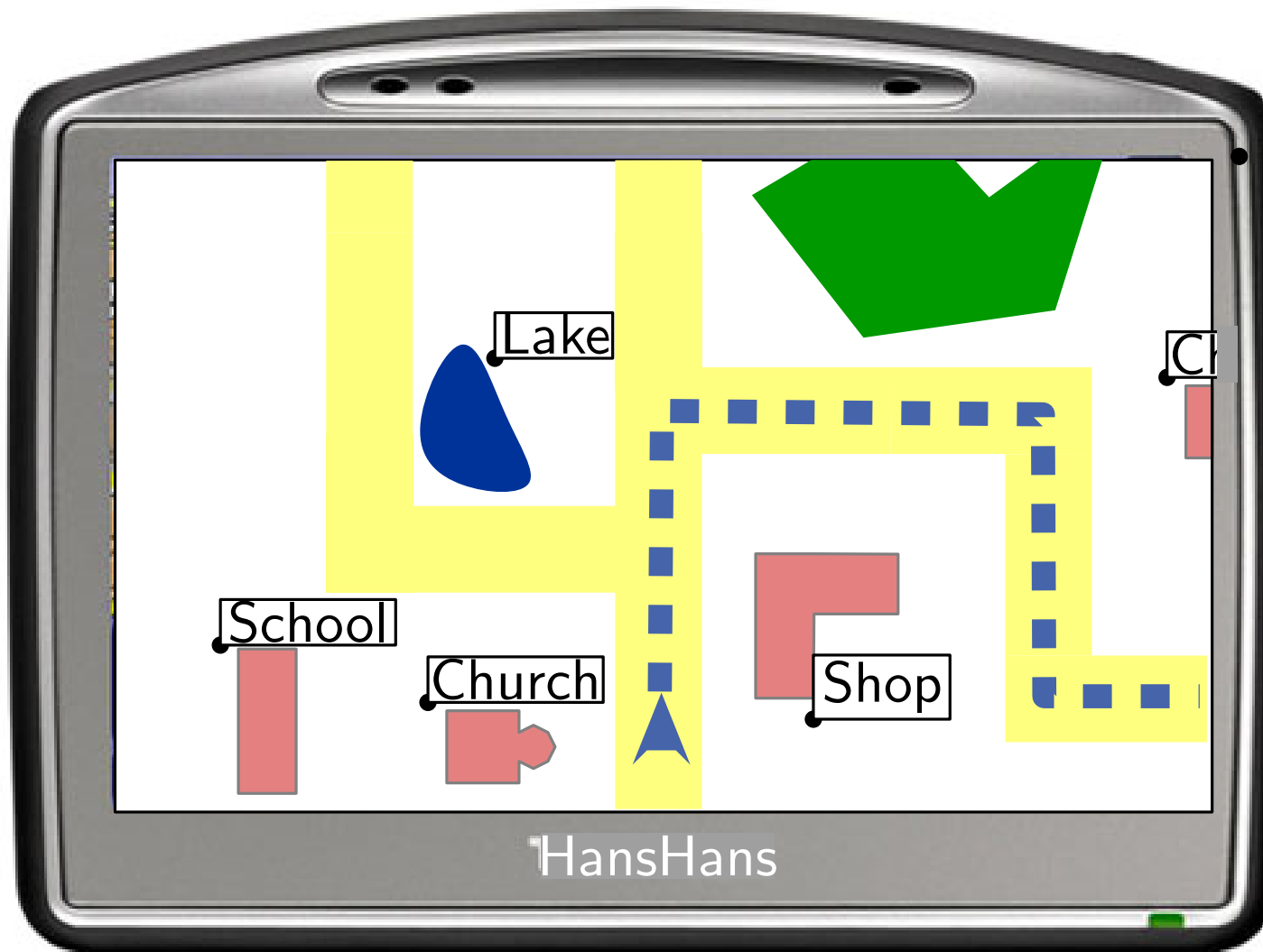


Motivation

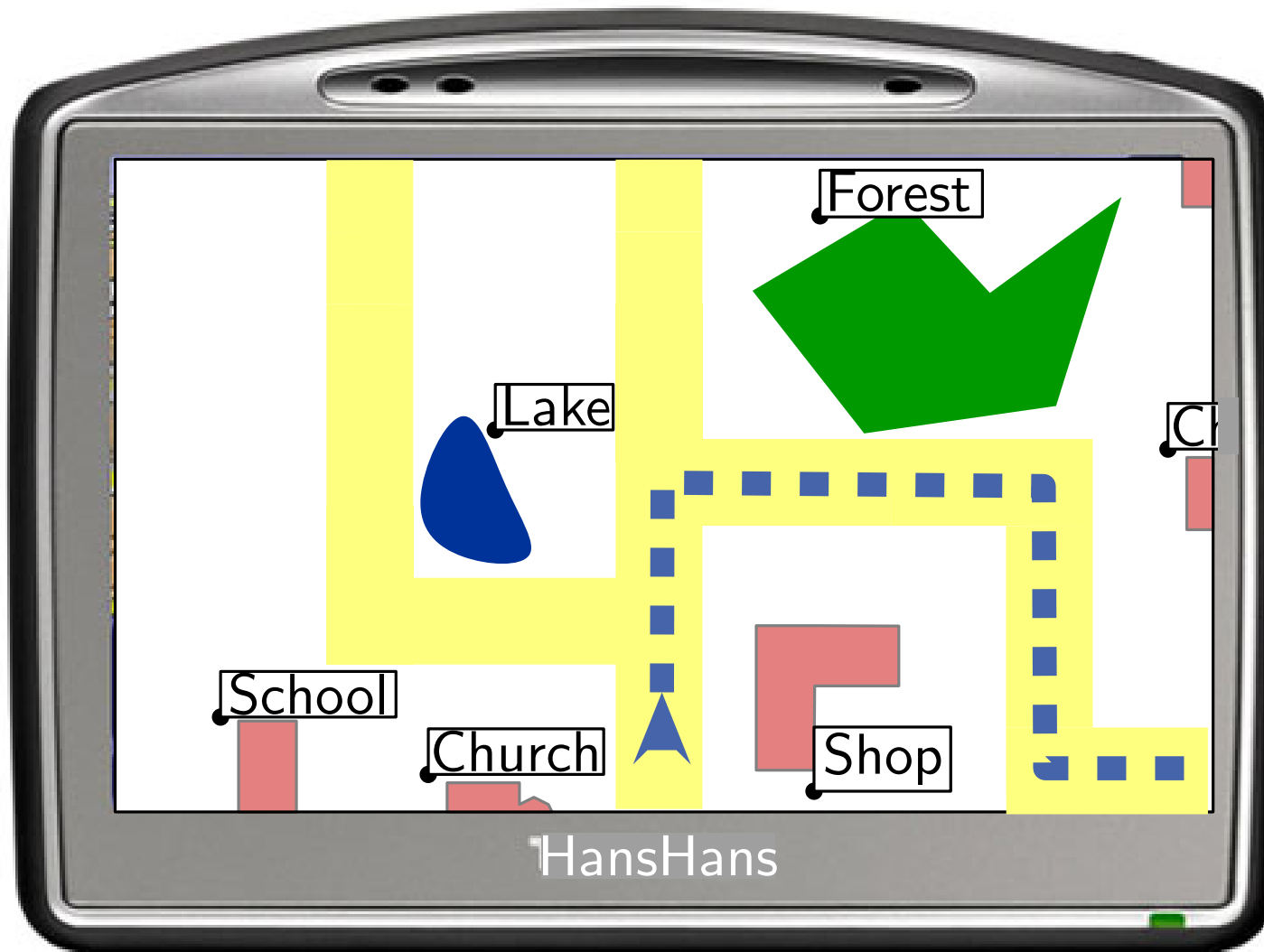




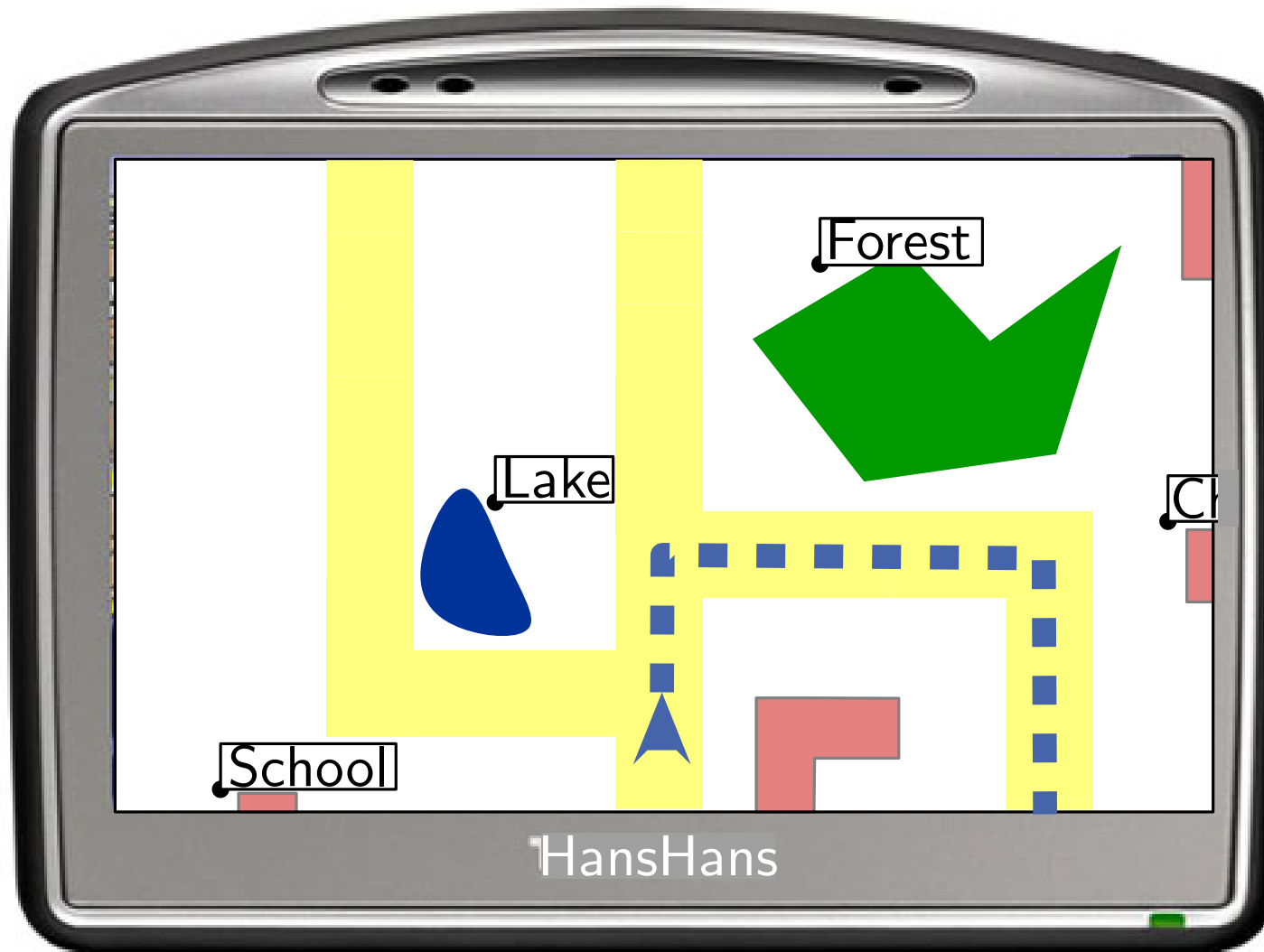
Motivation



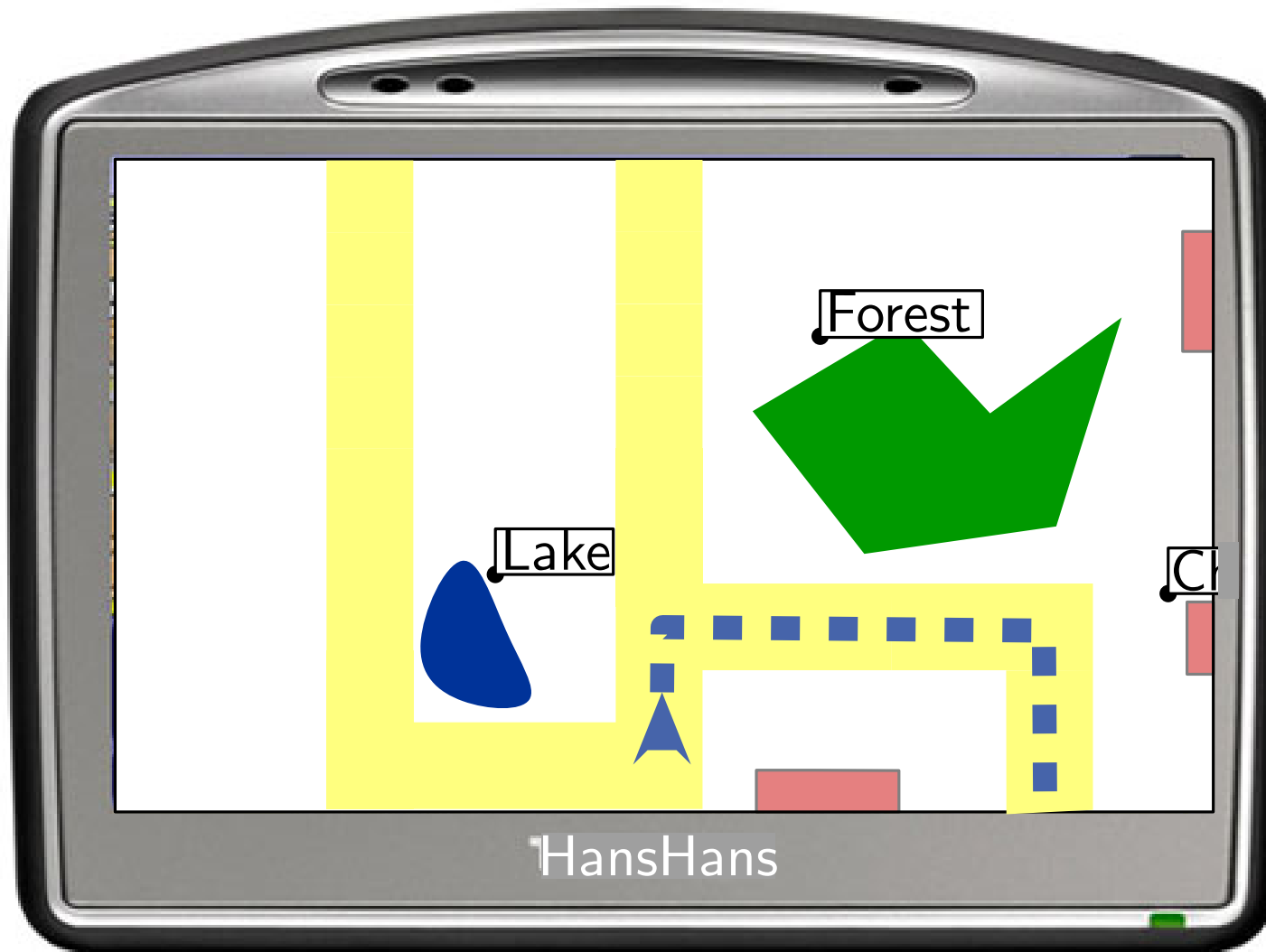
Motivation



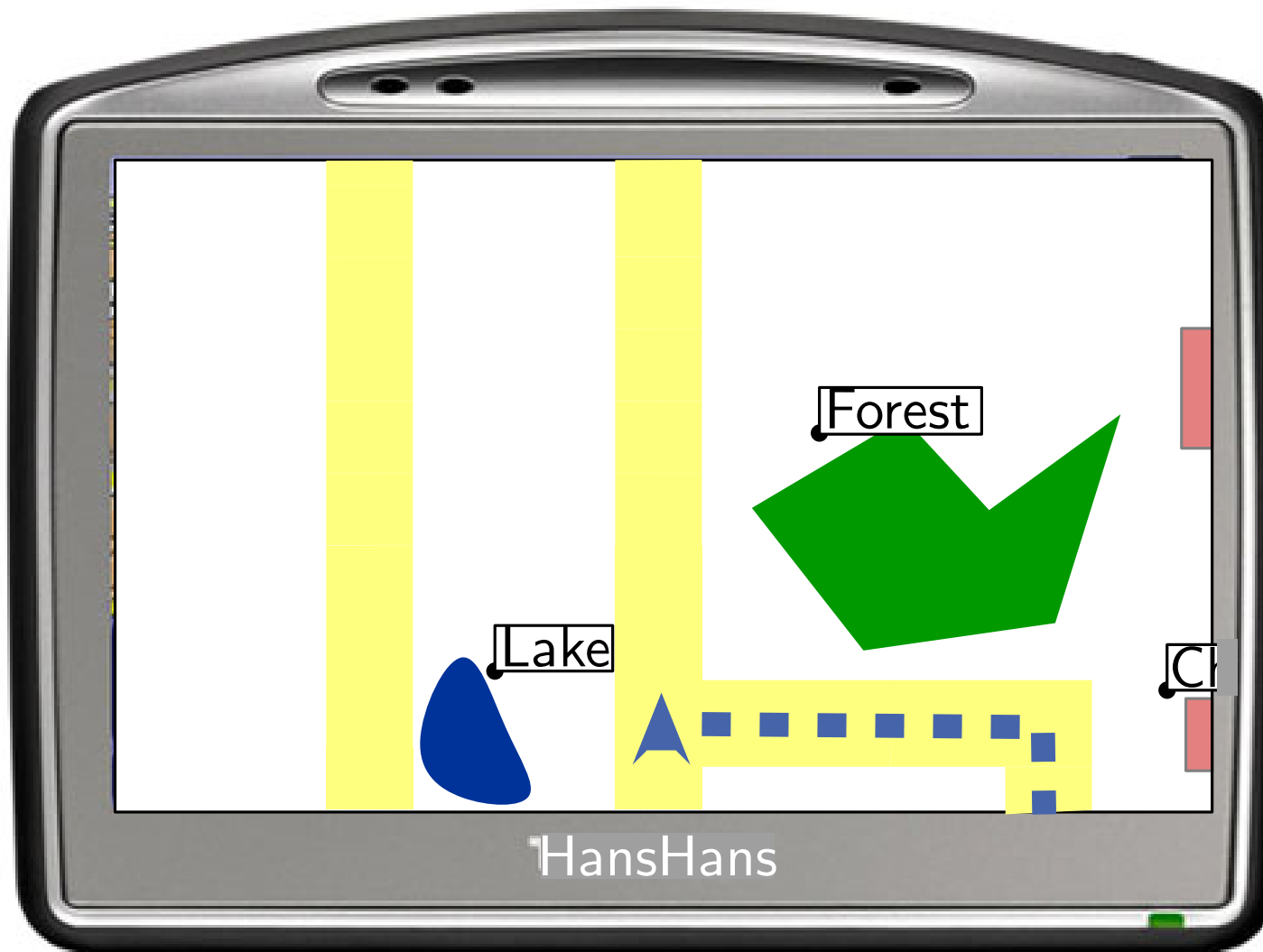
Motivation



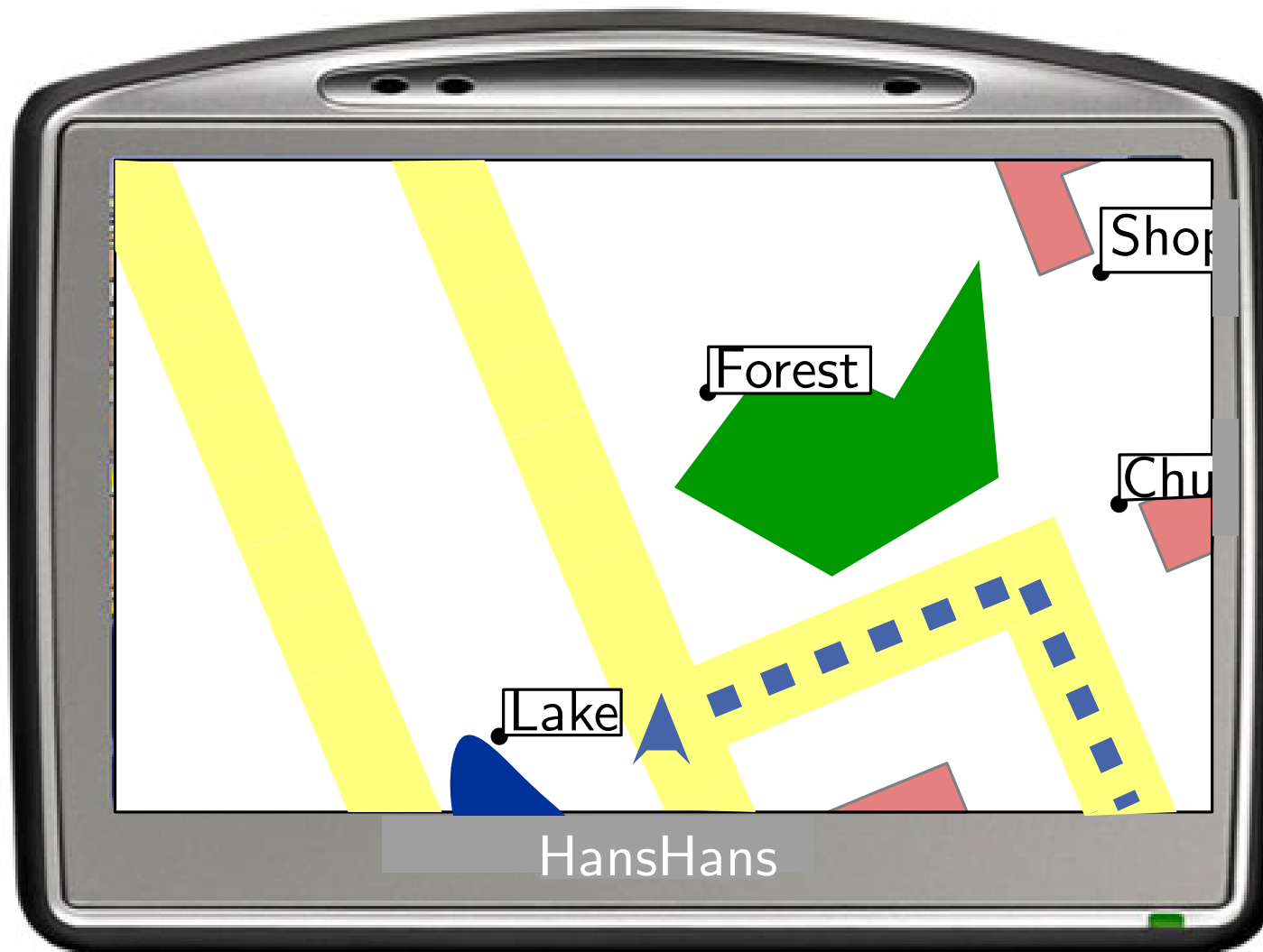
Motivation



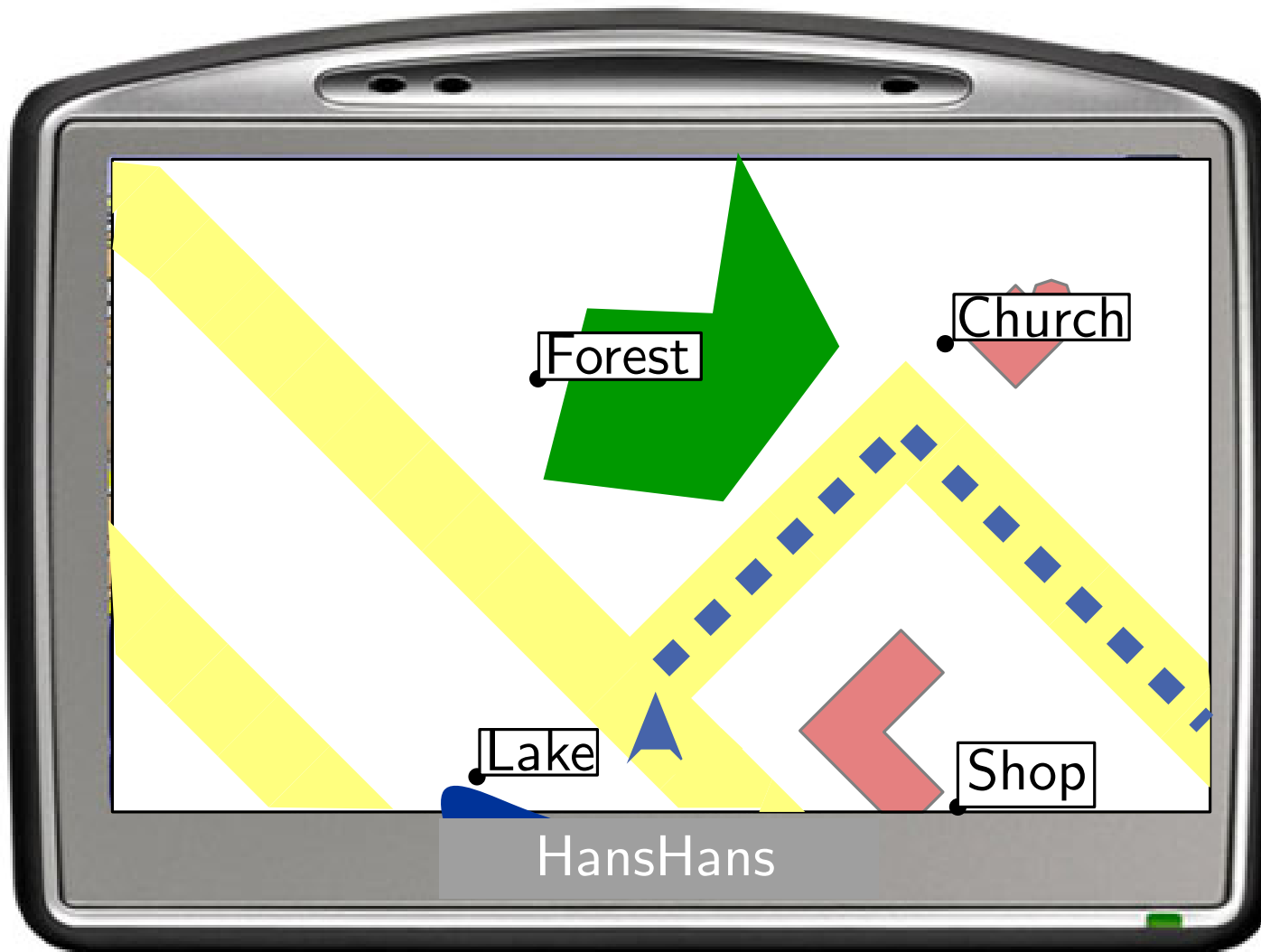
Motivation



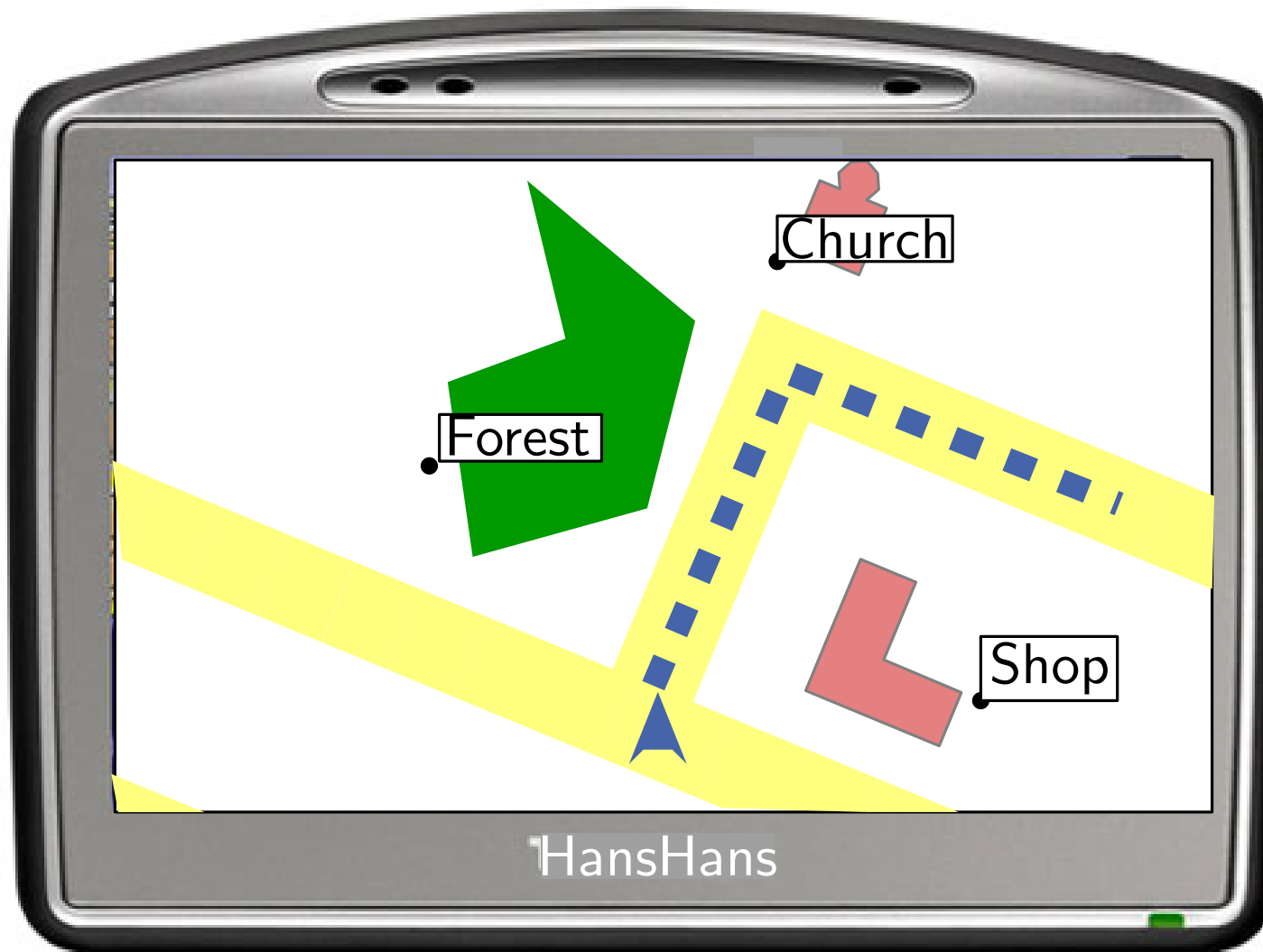
Motivation

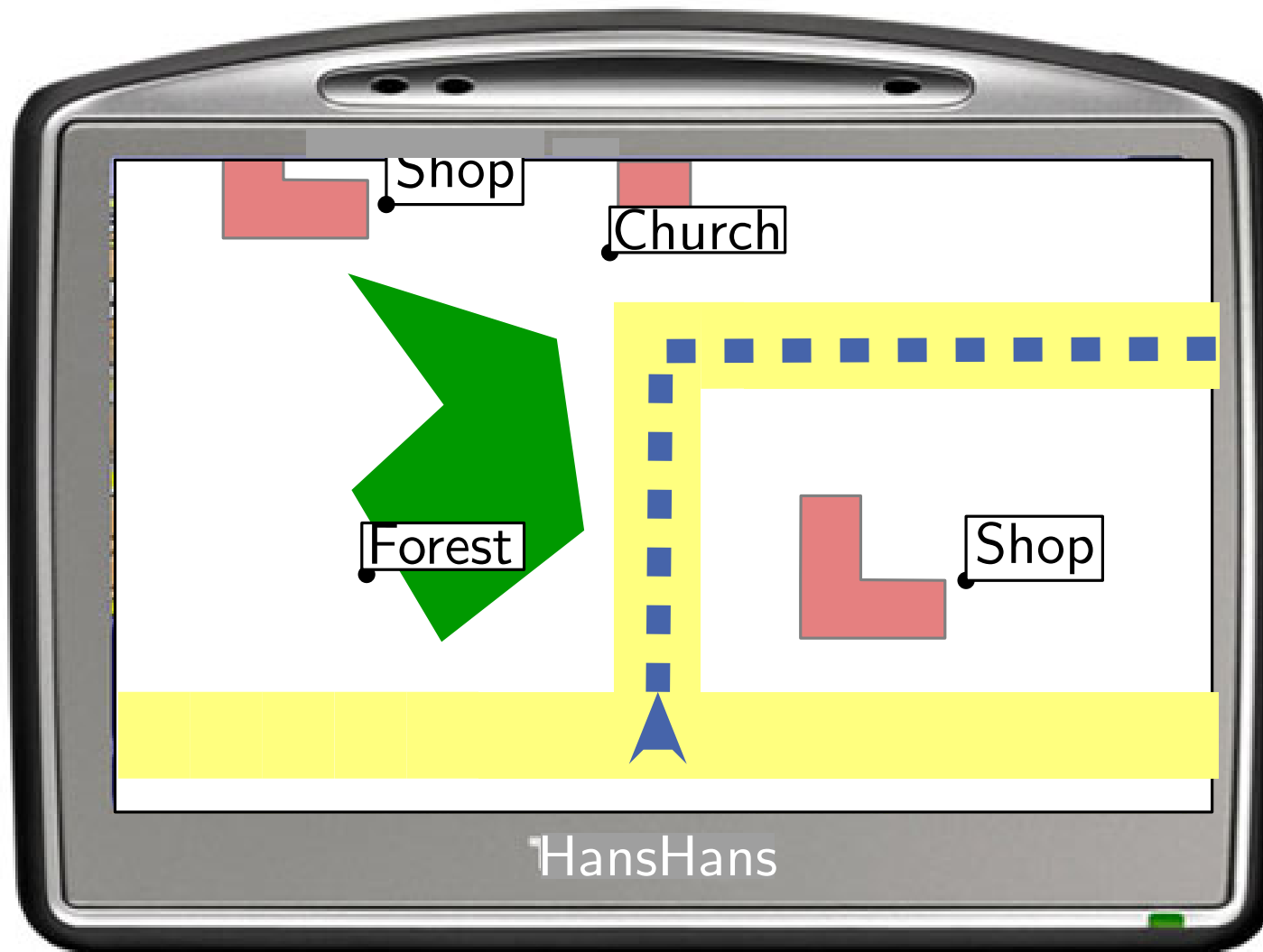


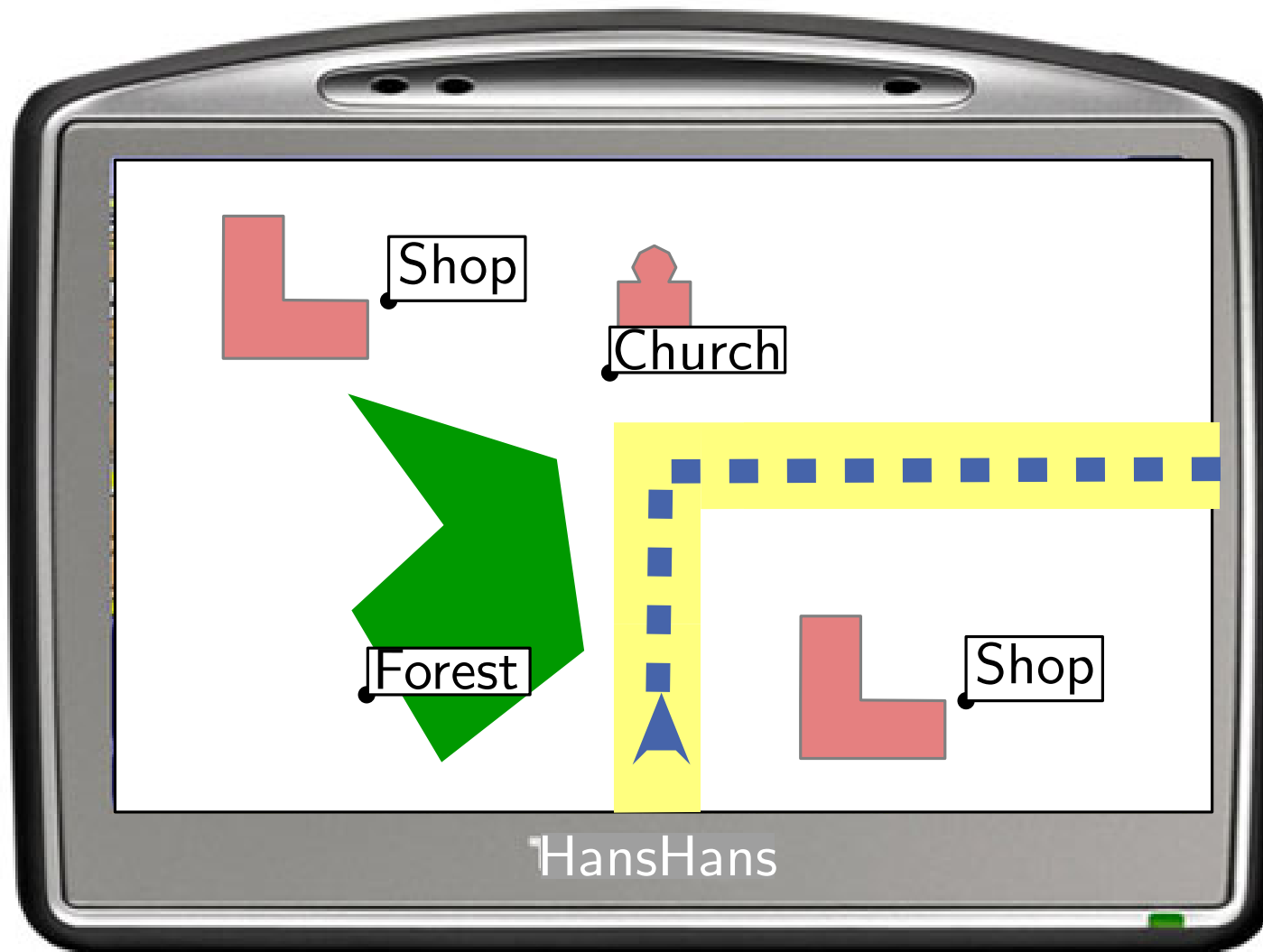
Motivation

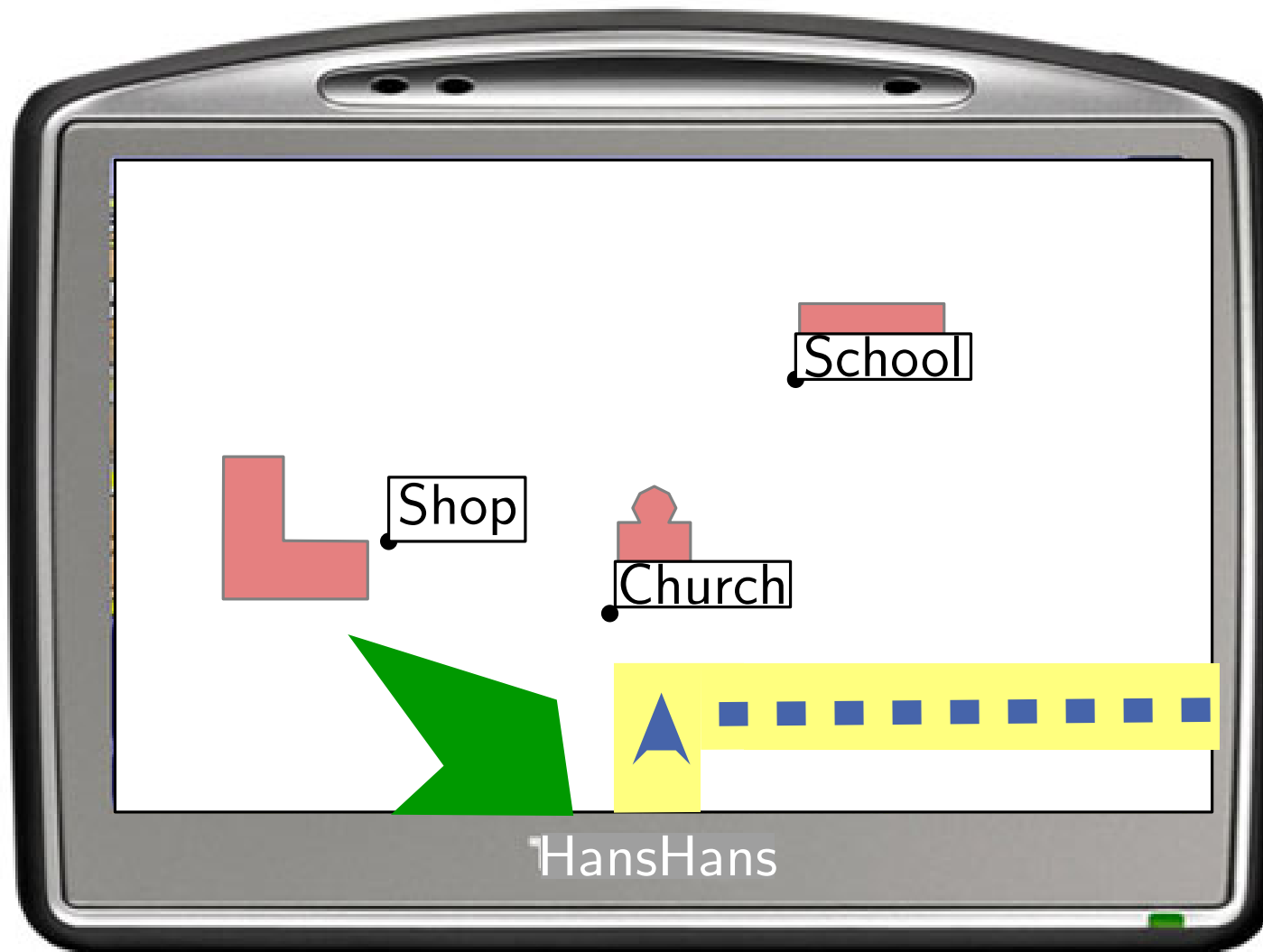


Motivation

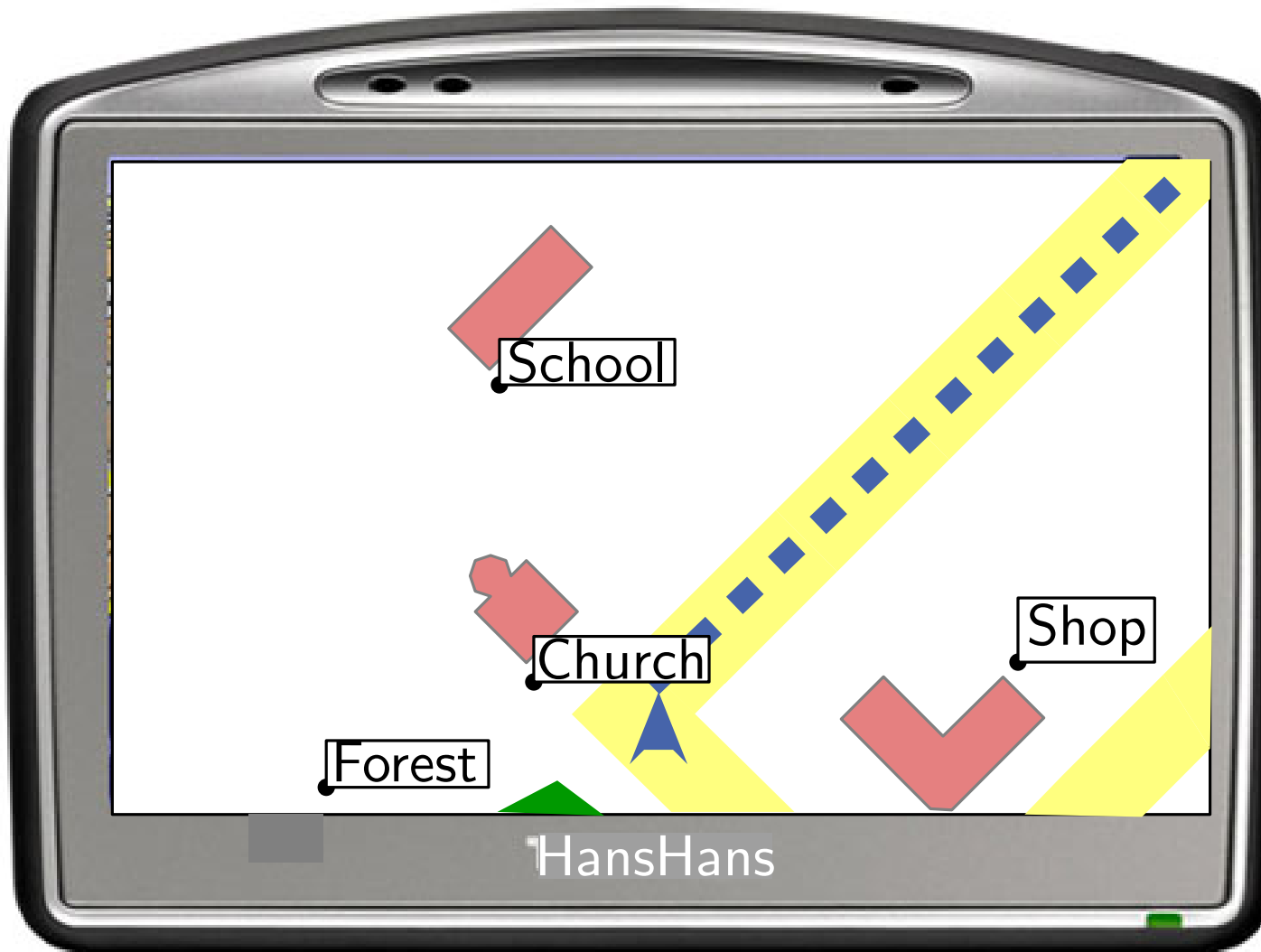




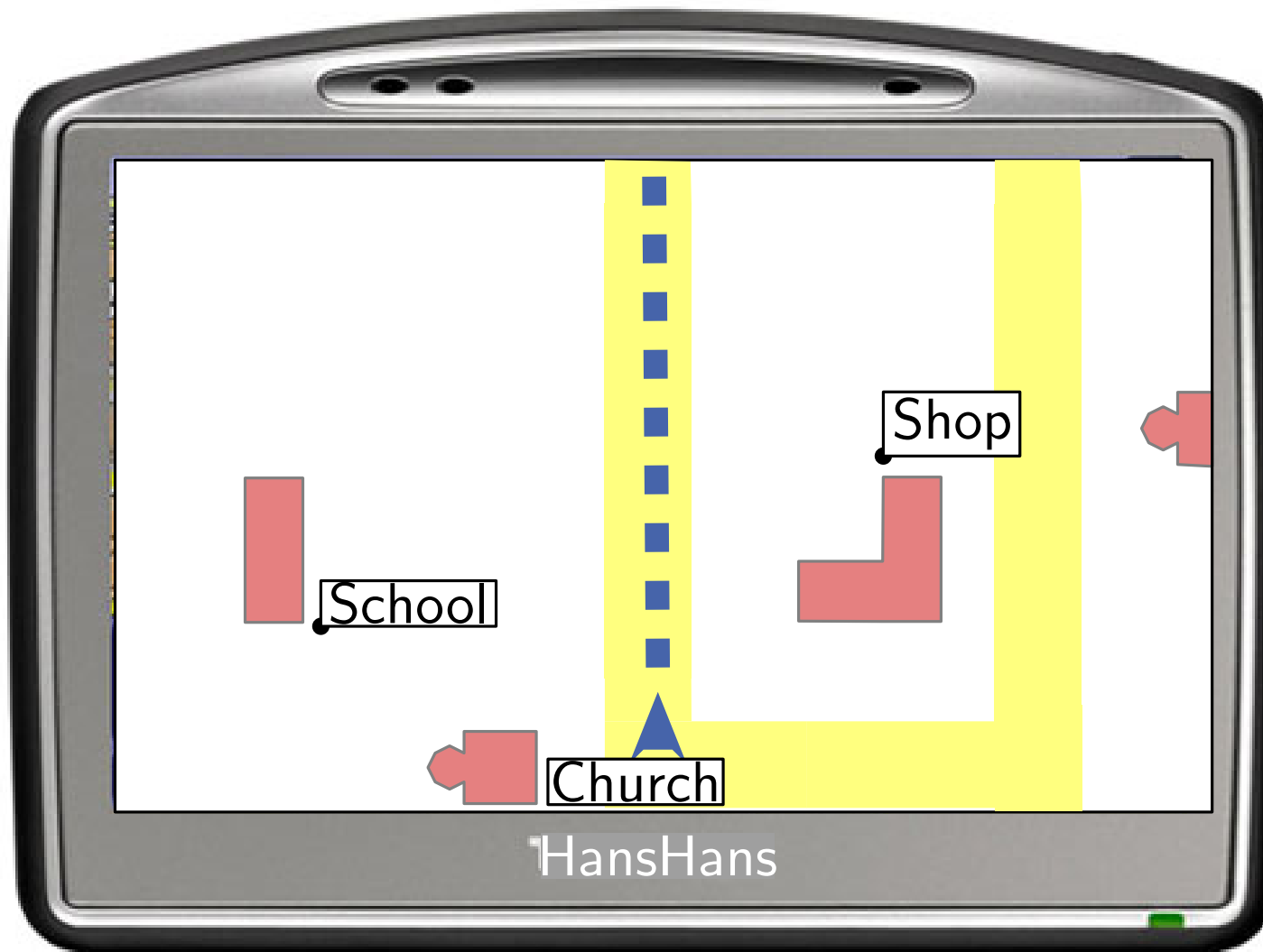




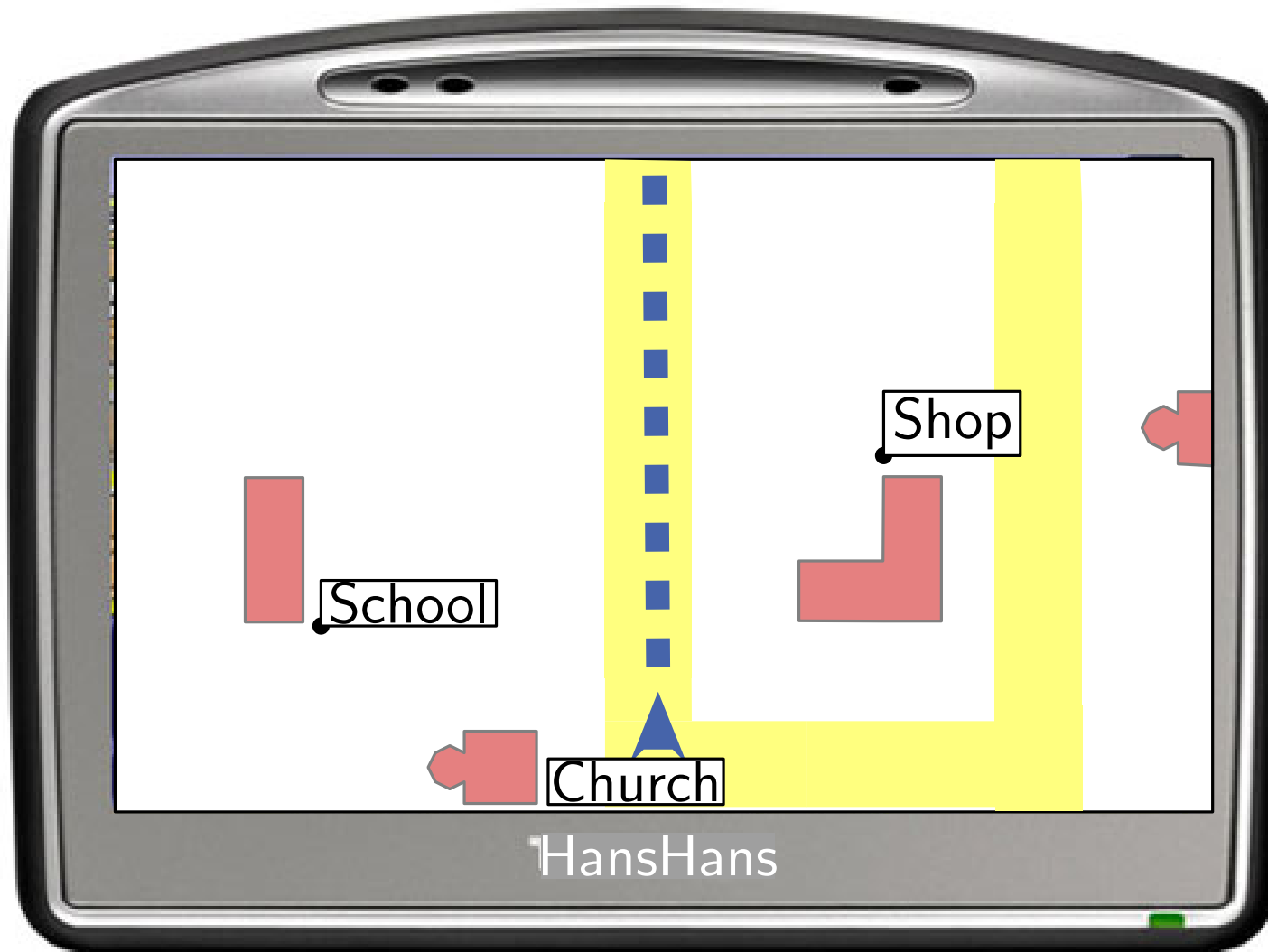
Motivation



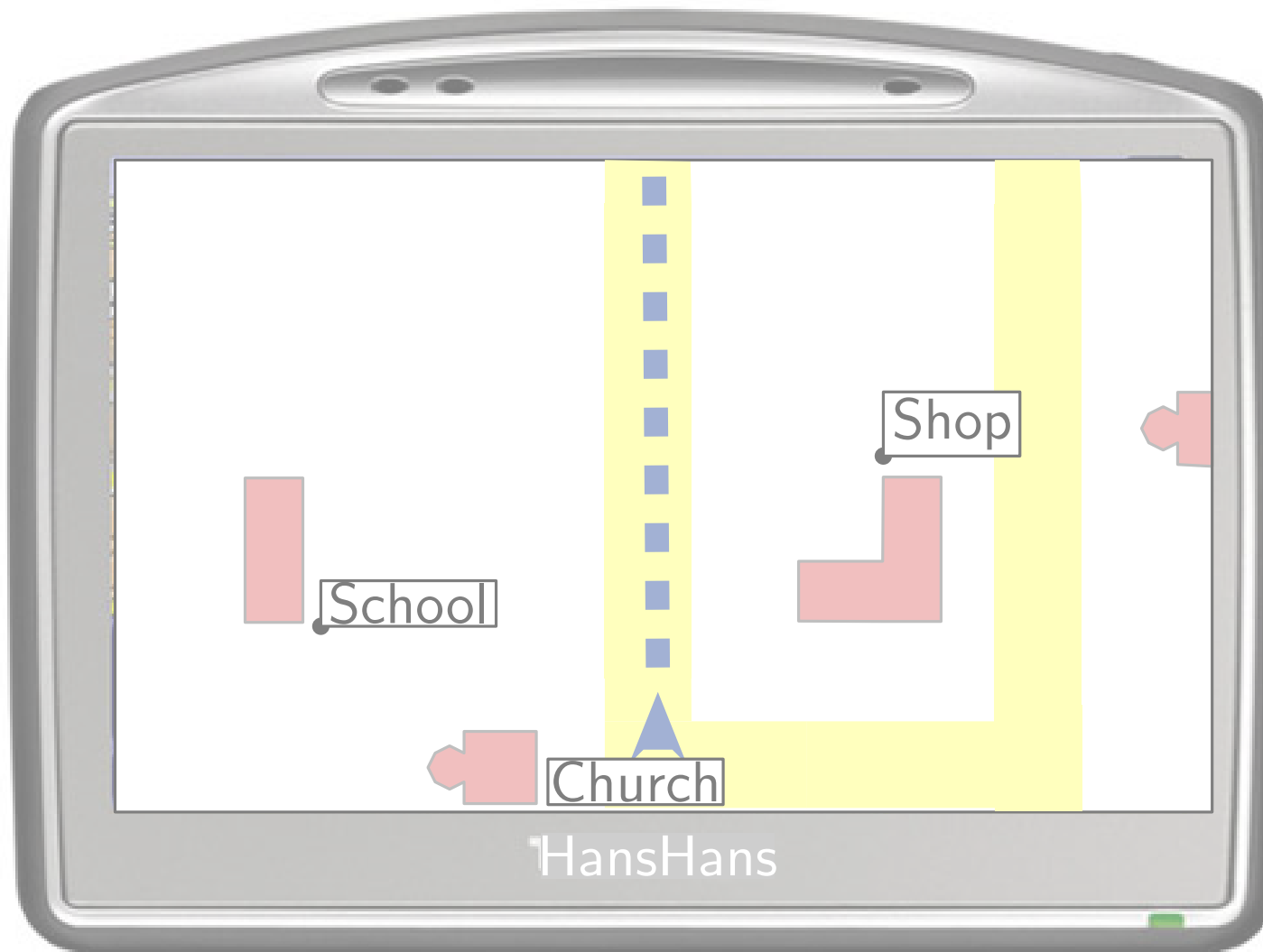
Motivation



Motivation



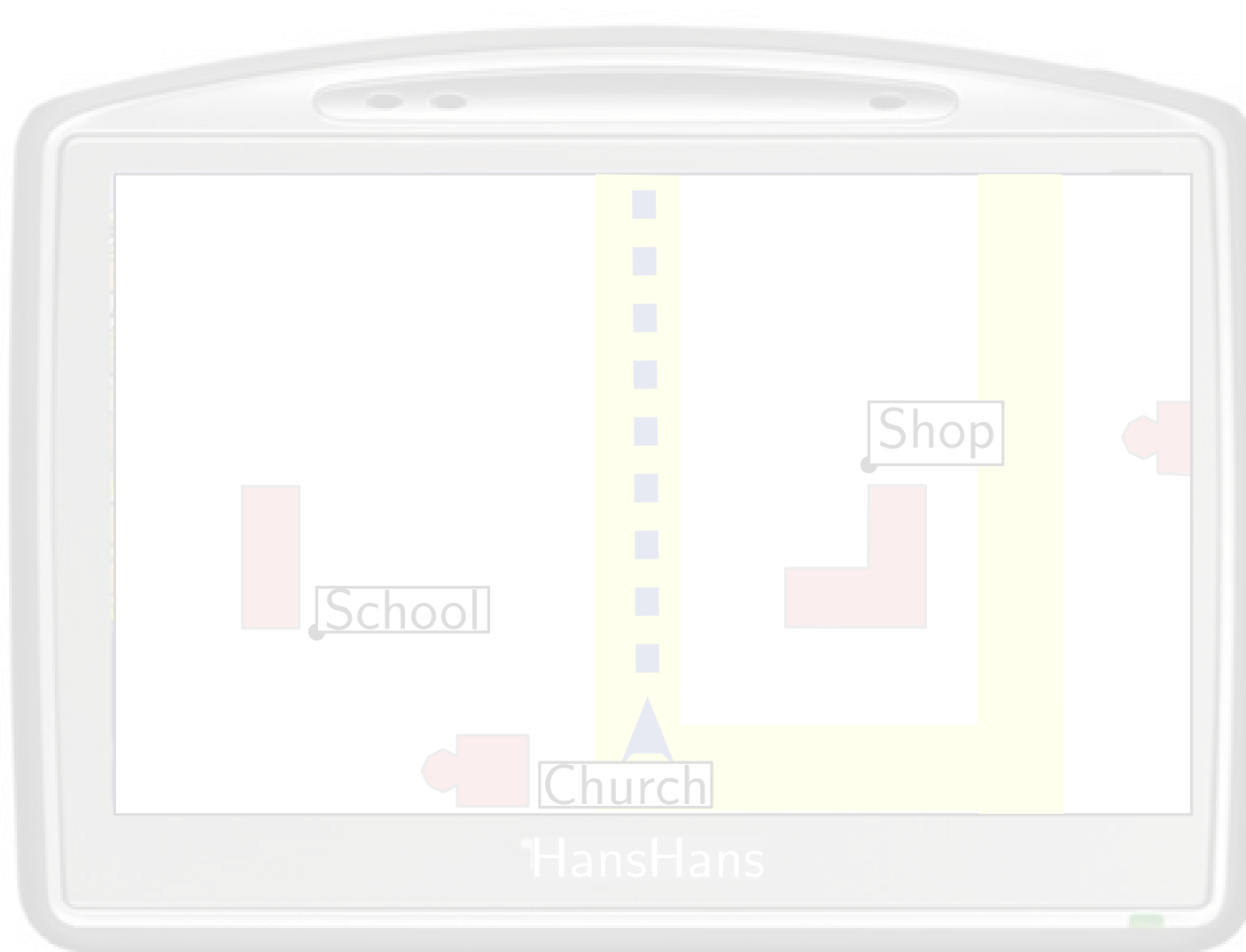
Motivation



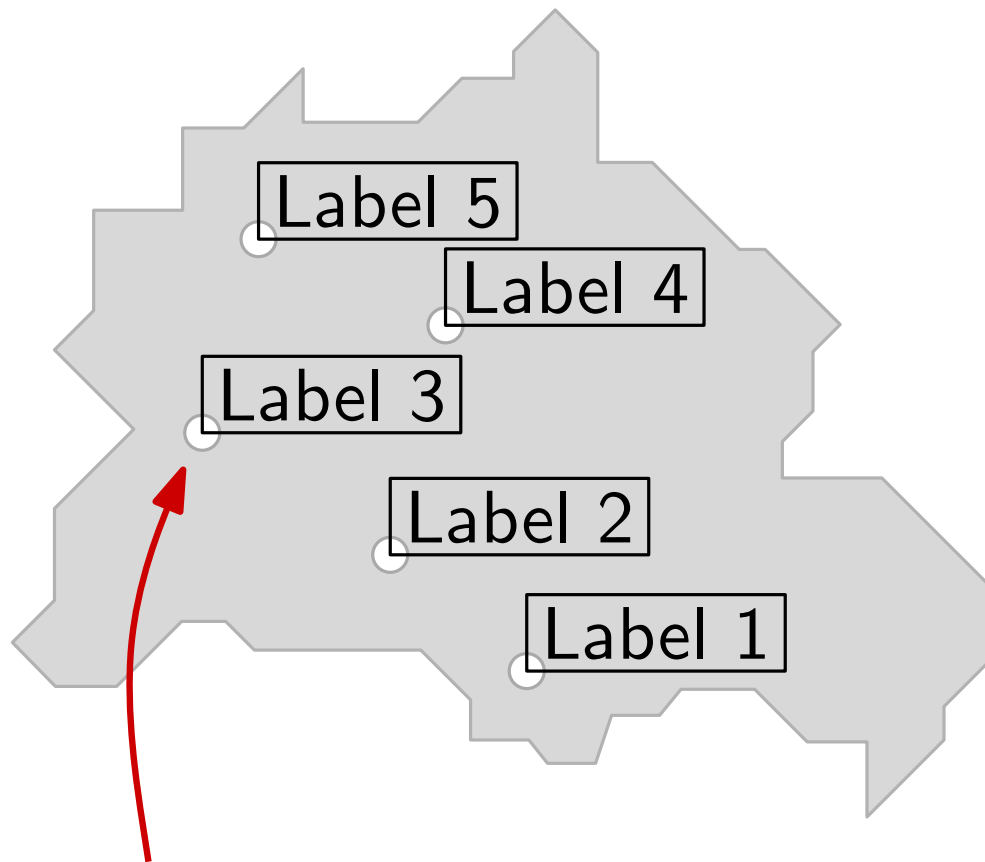
Motivation



Motivation

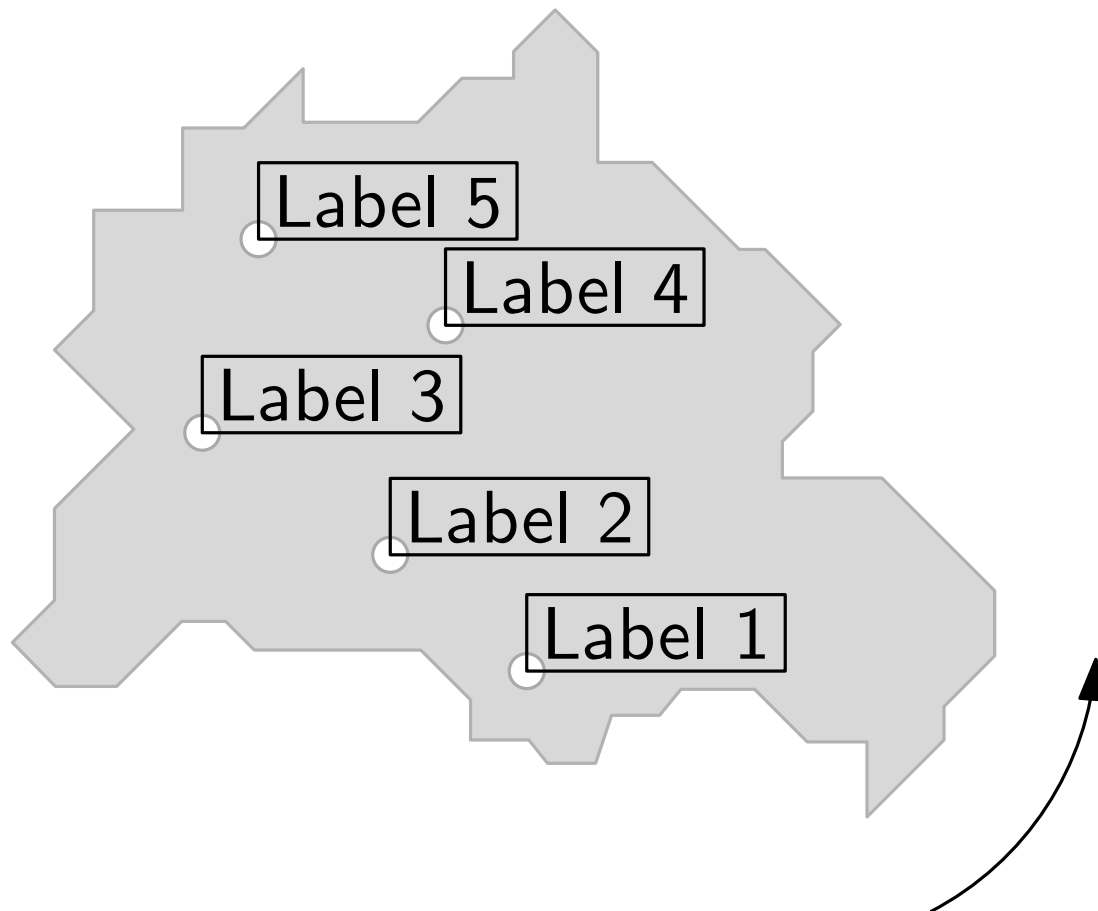


Eingabe: beschriftete Karte



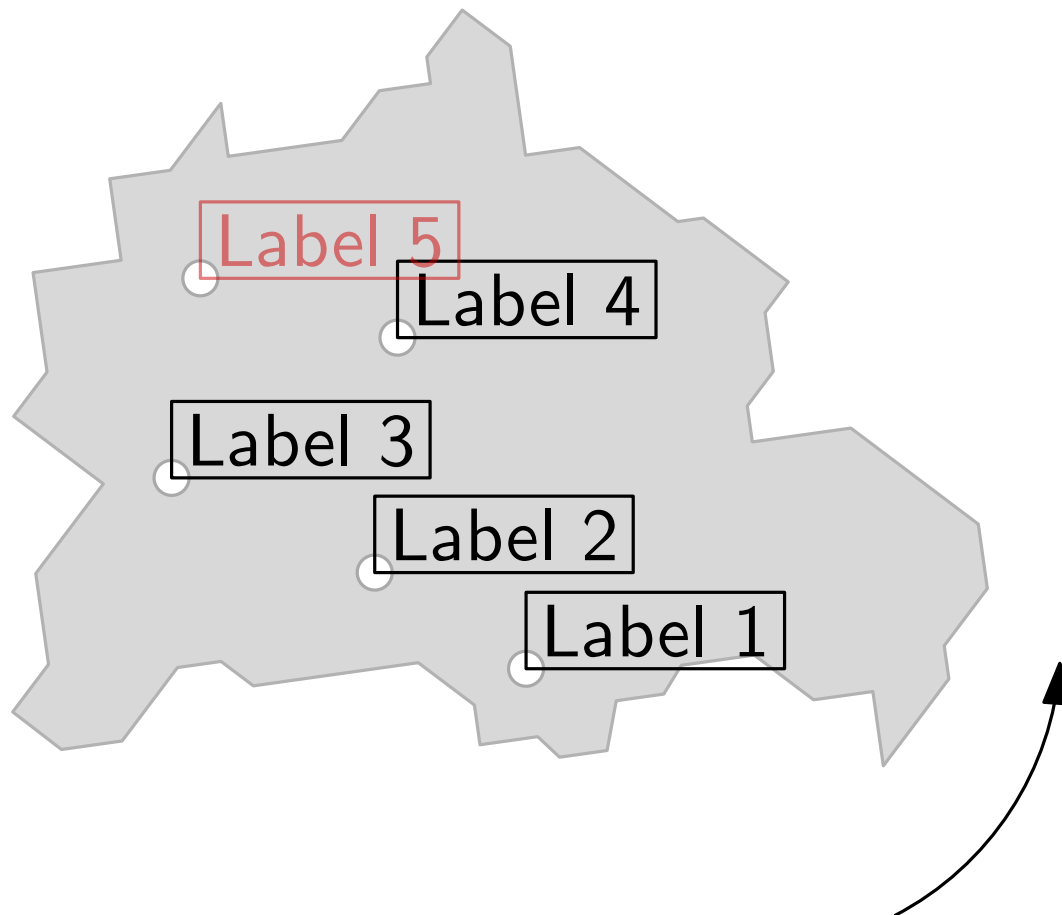
Ankerpunkt

Eingabe: beschriftete Karte



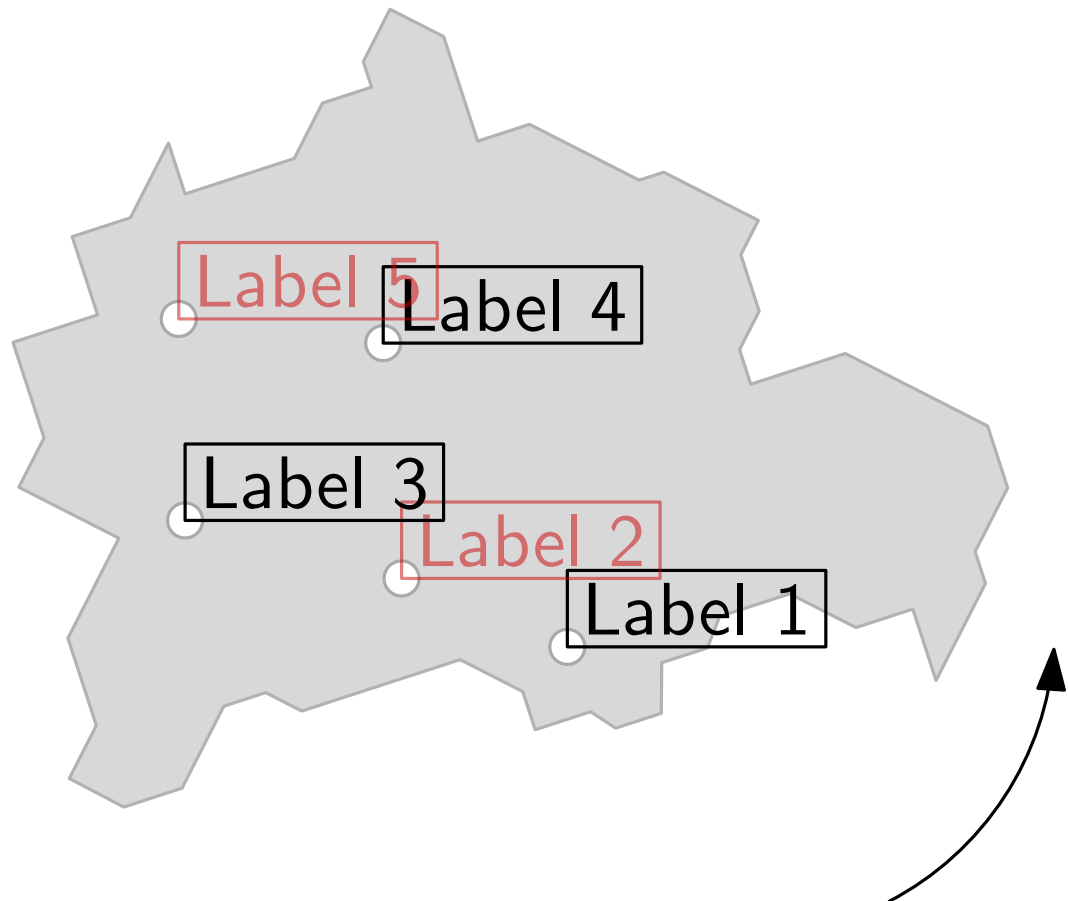
monotone Rotation

Eingabe: beschriftete Karte



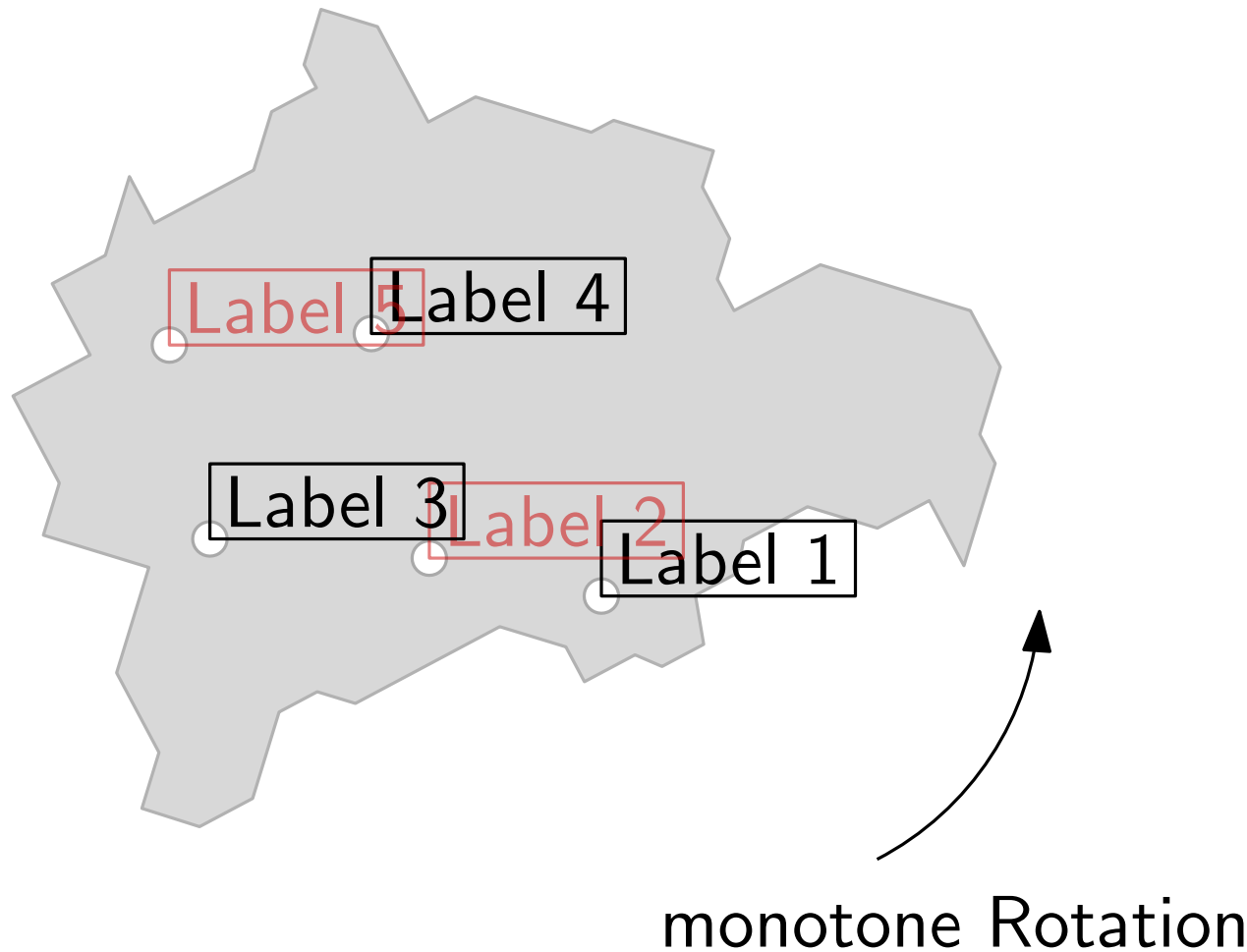
monotone Rotation

Eingabe: beschriftete Karte

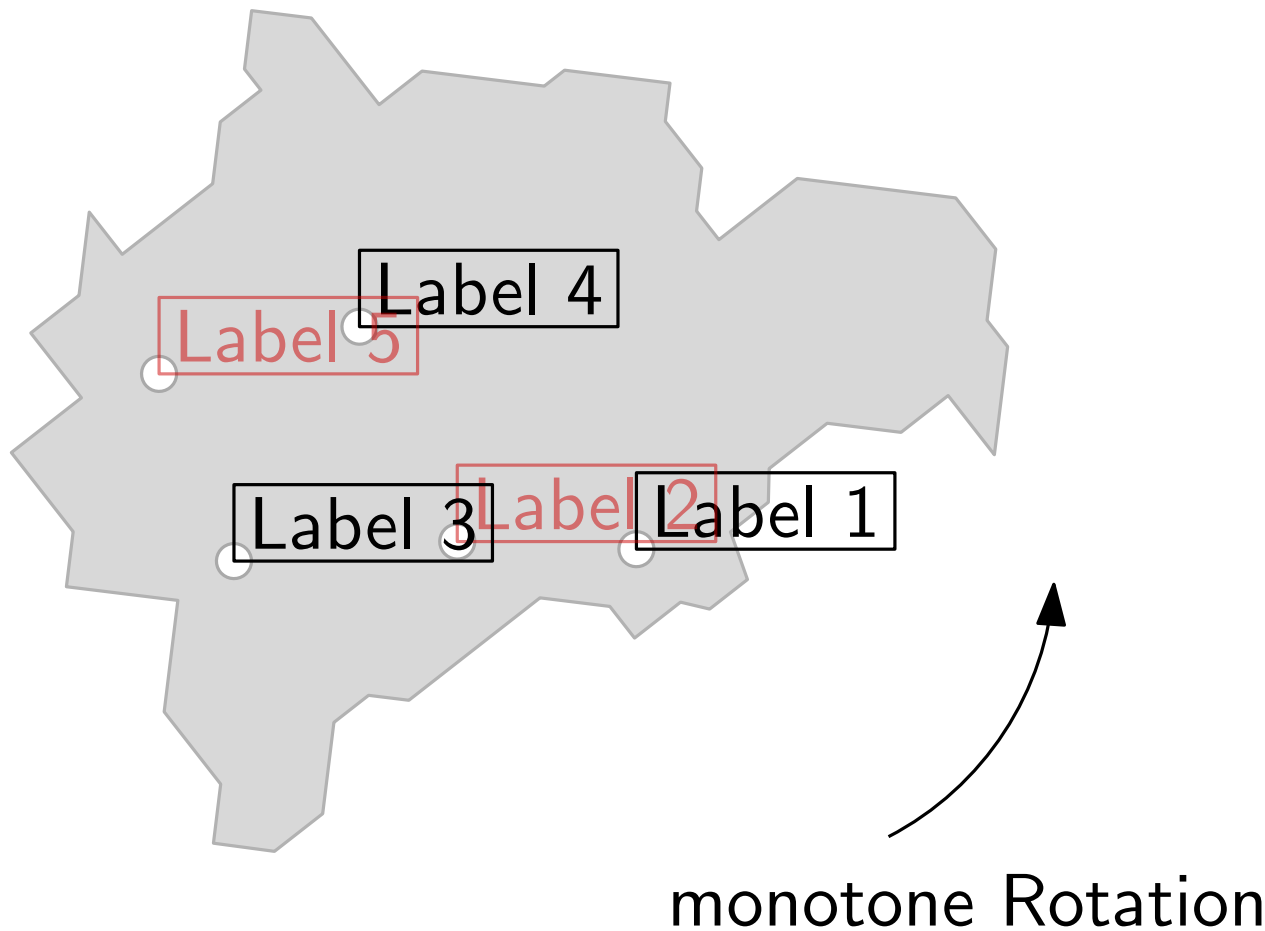


monotone Rotation

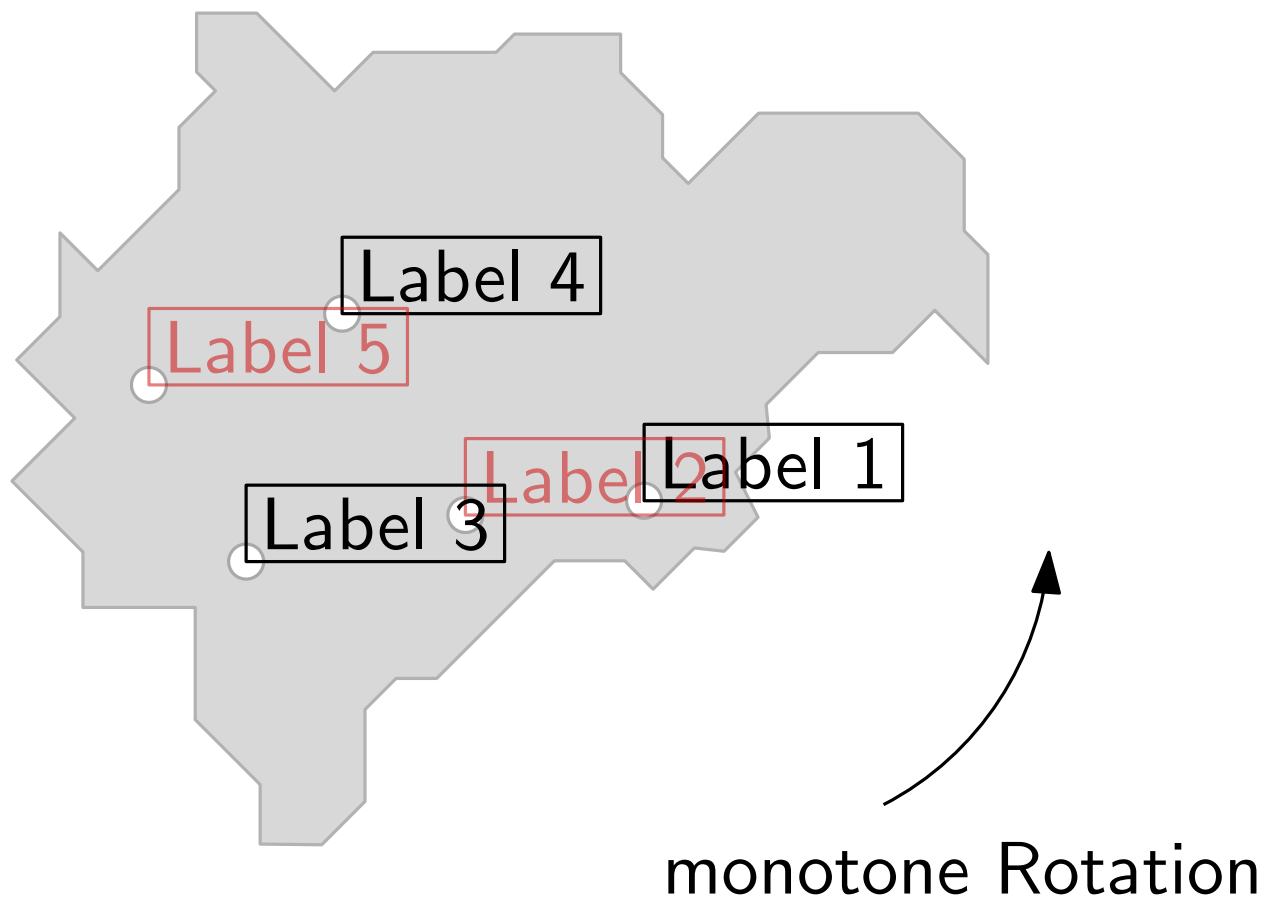
Eingabe: beschriftete Karte



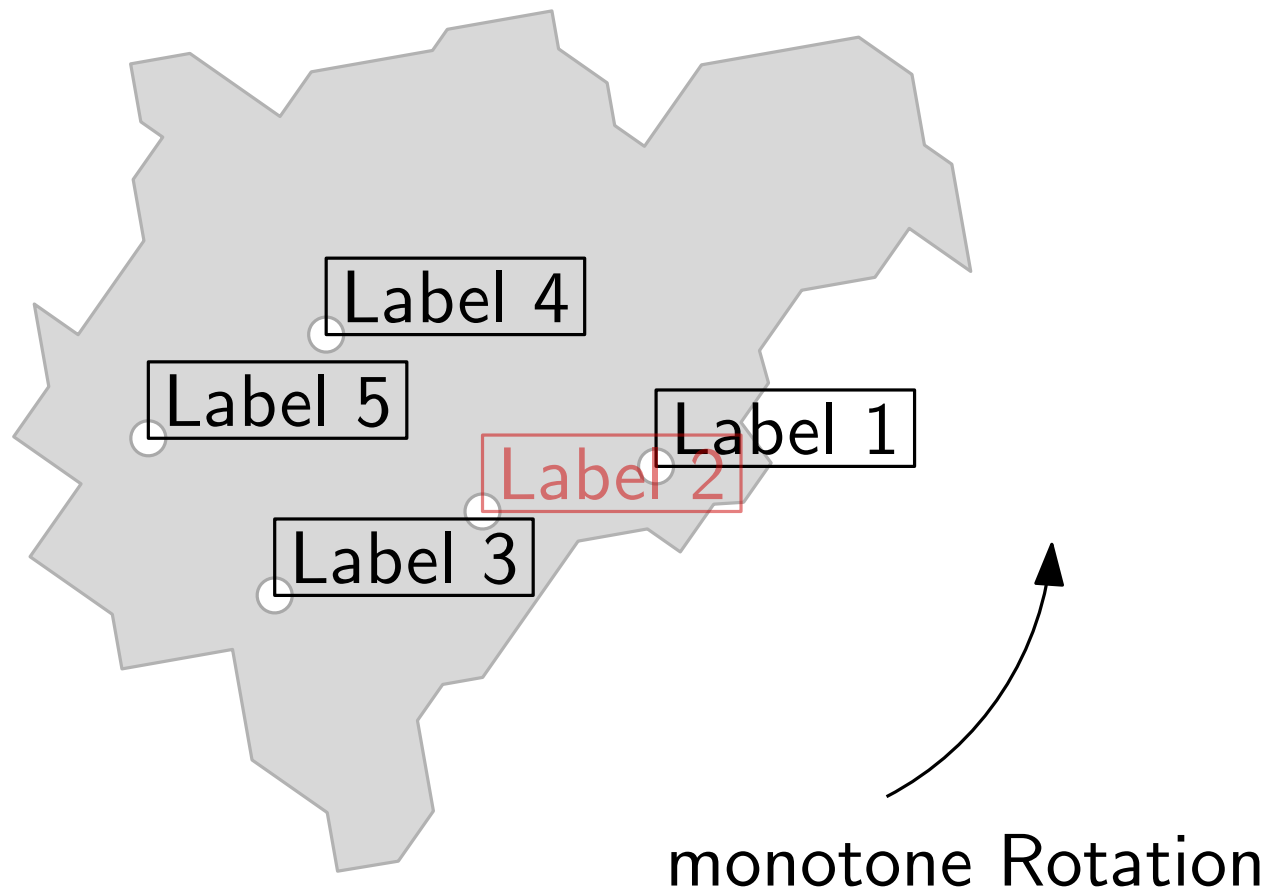
Eingabe: beschriftete Karte



Eingabe: beschriftete Karte

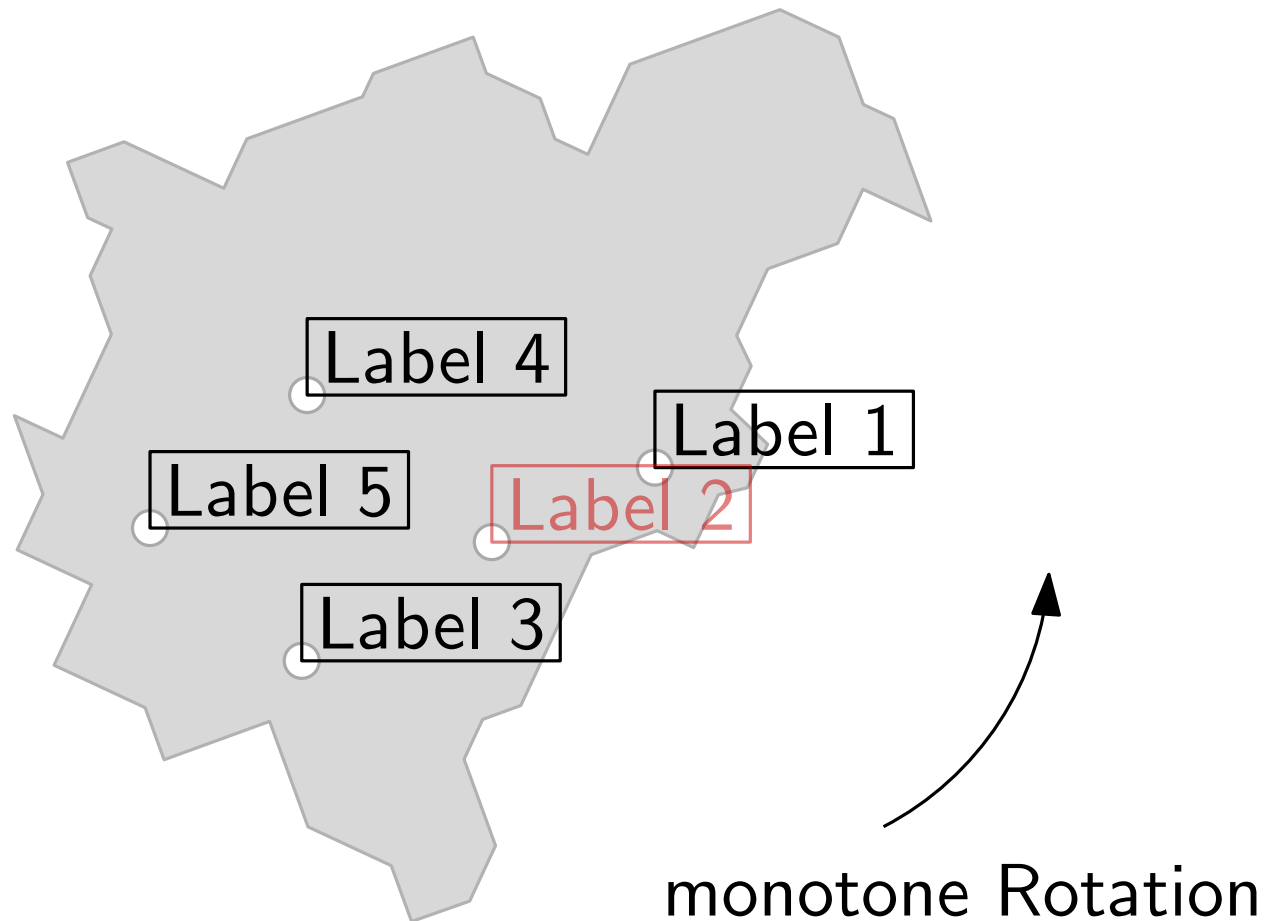


Eingabe: beschriftete Karte

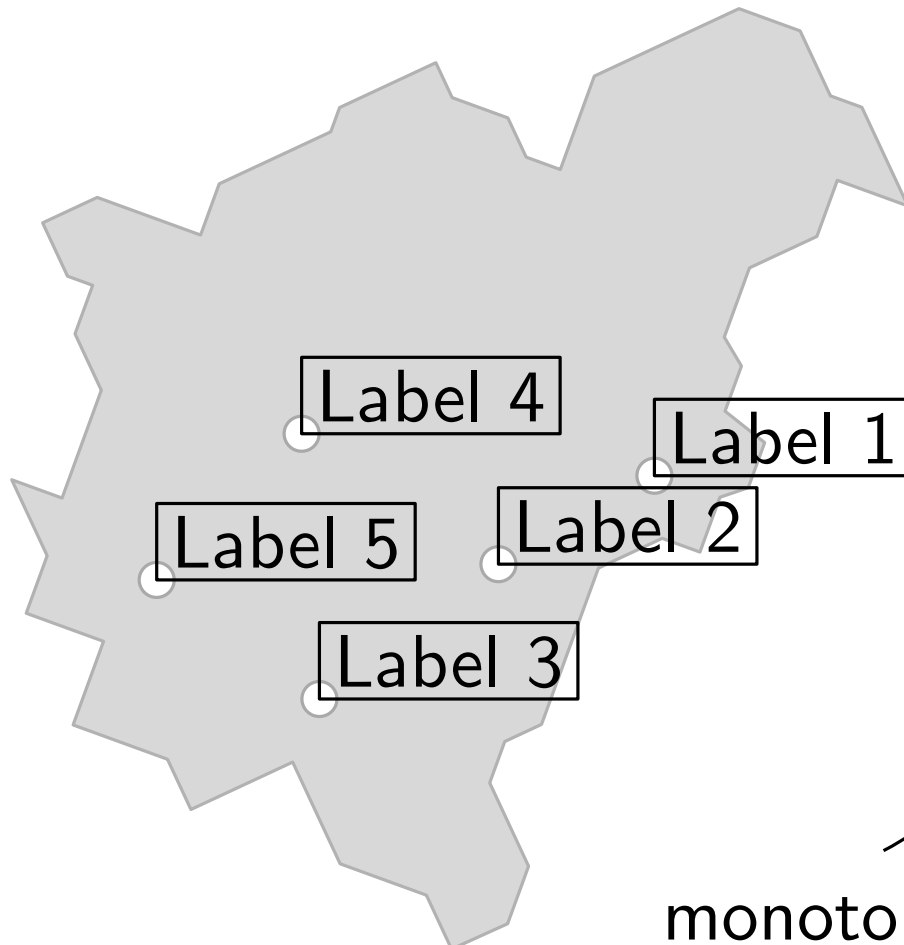


monotone Rotation

Eingabe: beschriftete Karte

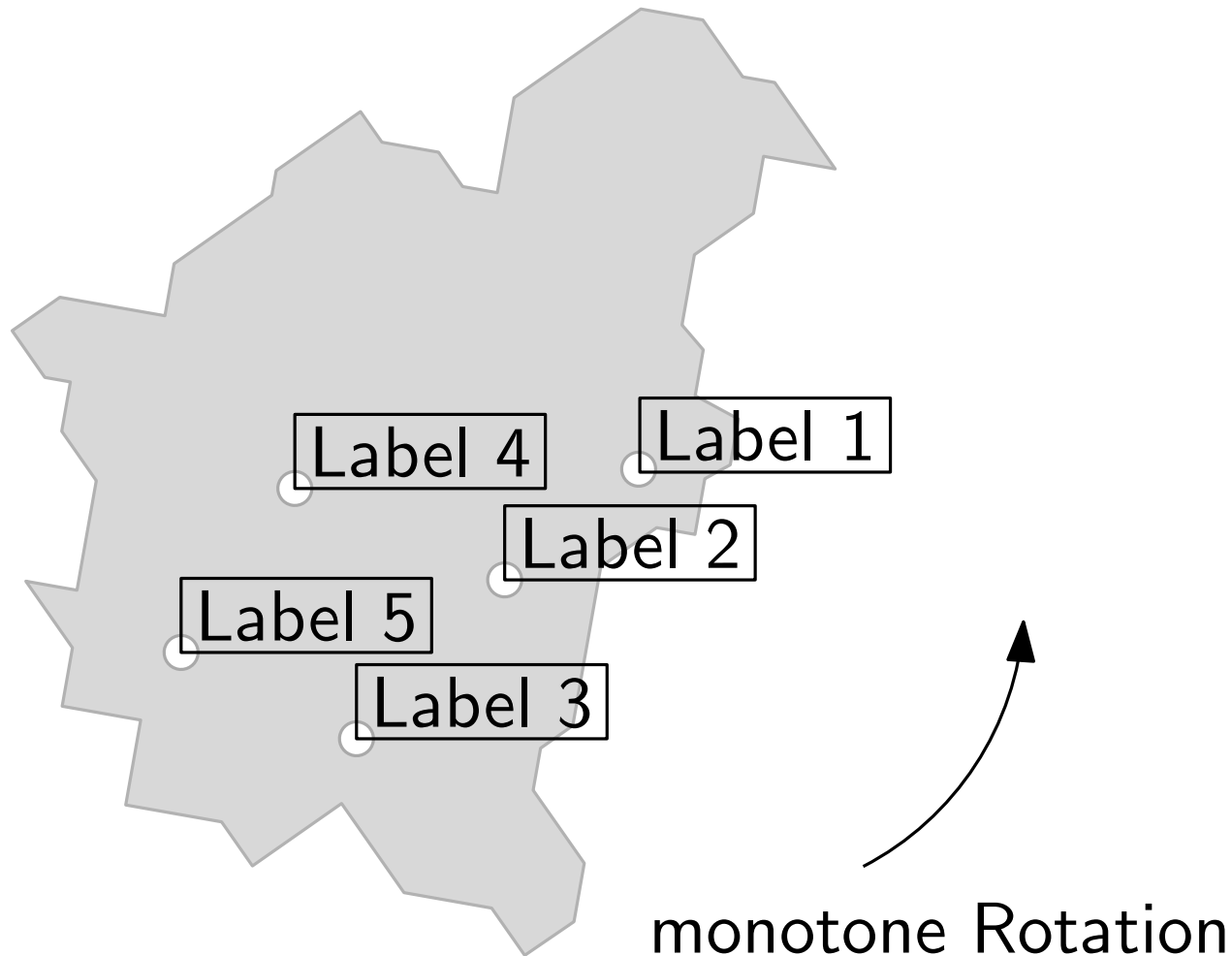


Eingabe: beschriftete Karte

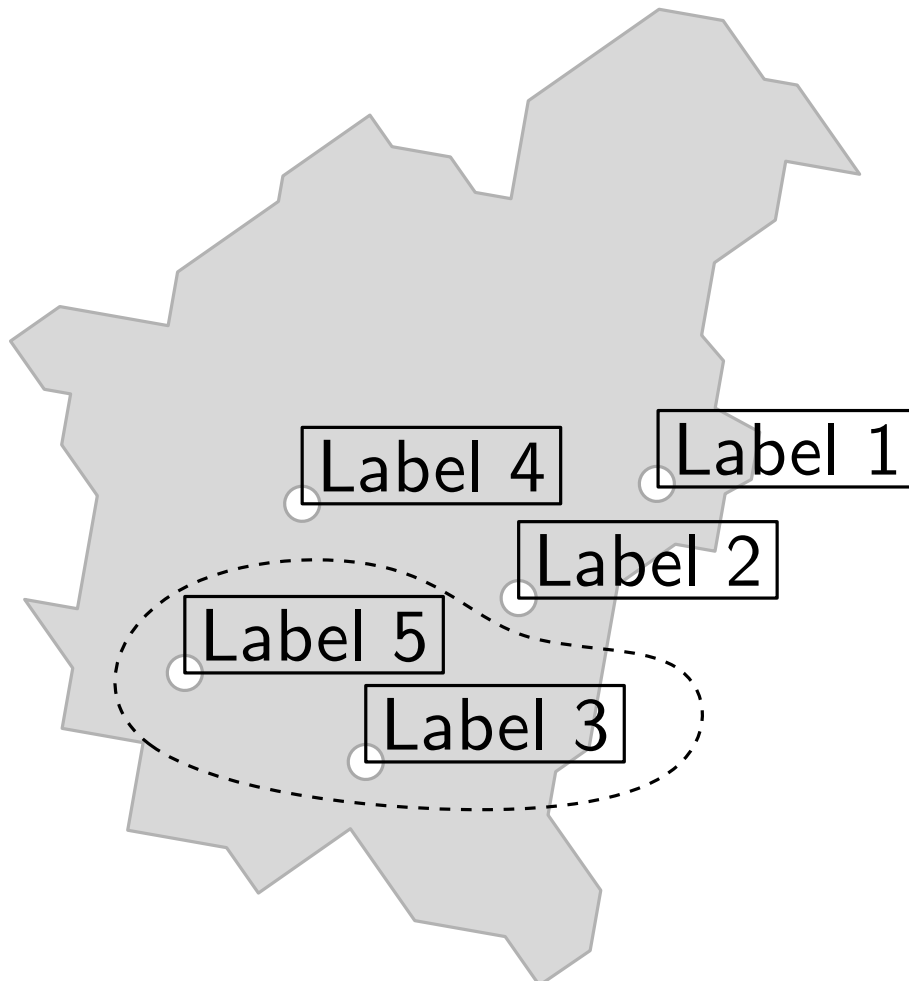


monotone Rotation

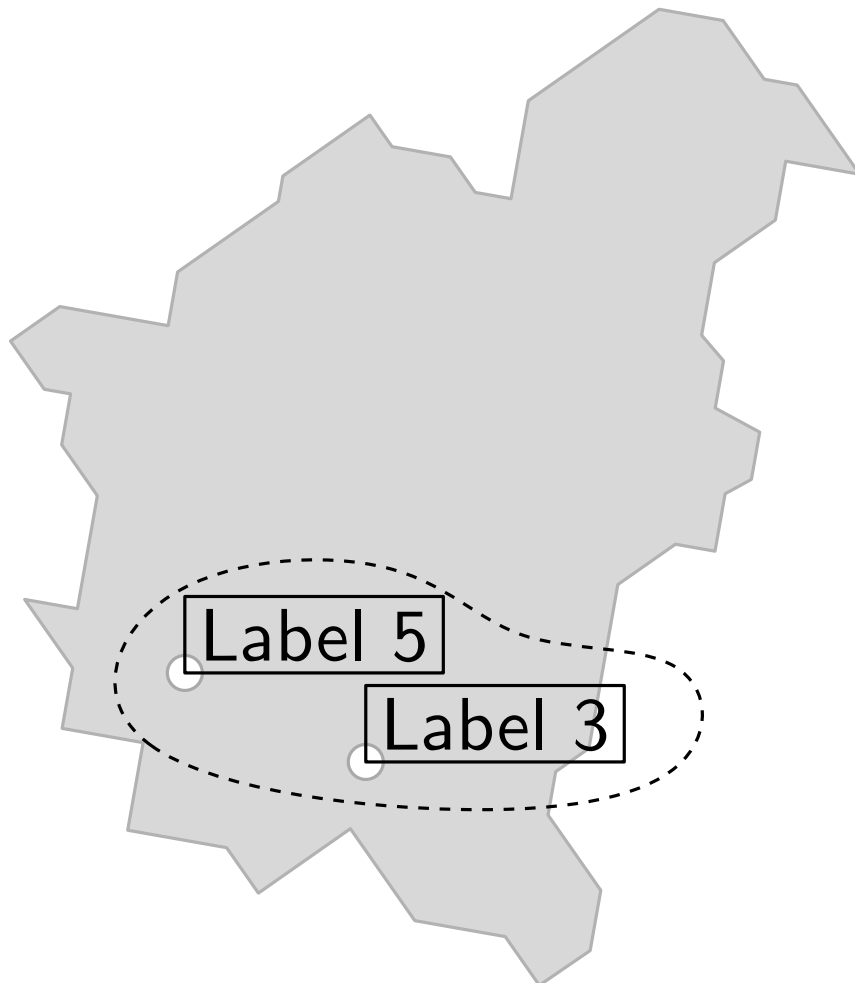
Eingabe: beschriftete Karte



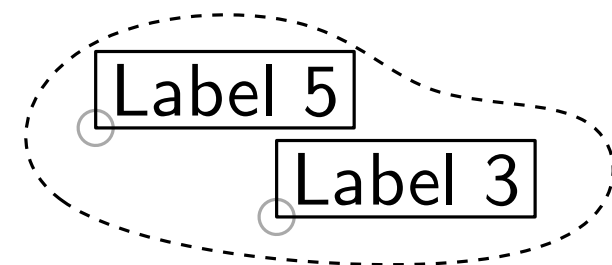
Eingabe: beschriftete Karte



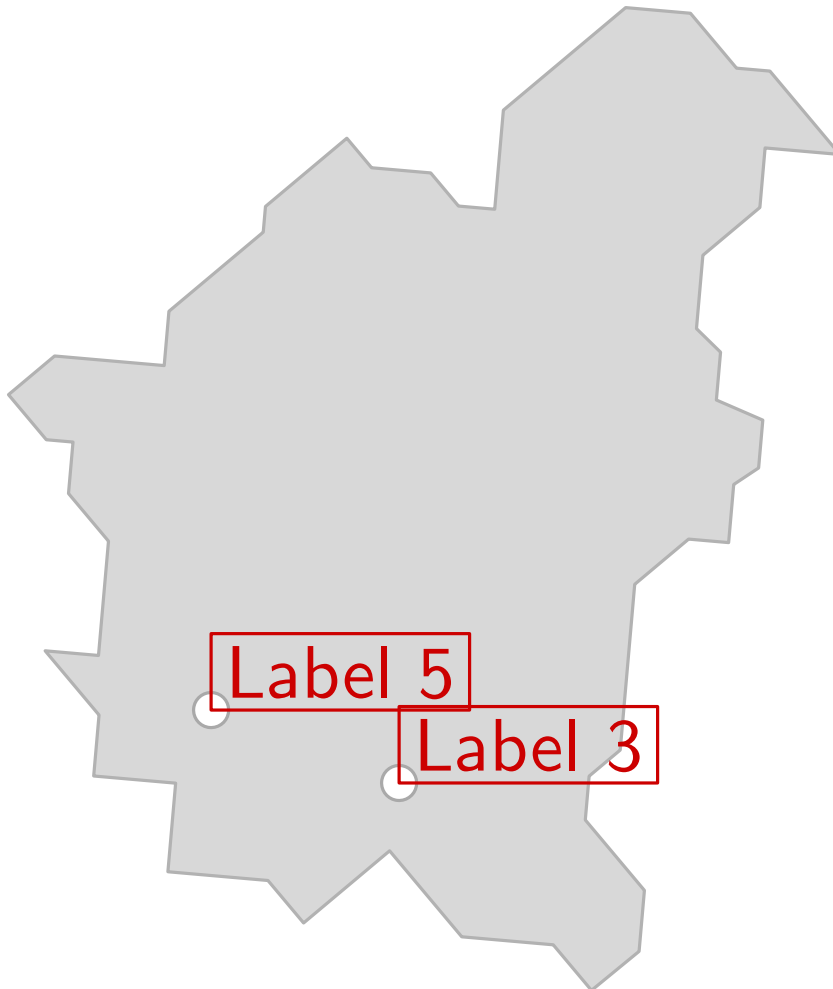
Eingabe: beschriftete Karte



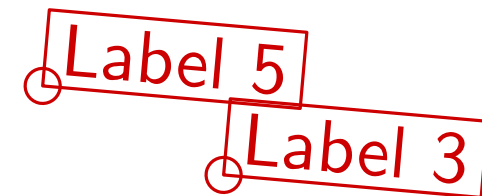
andere Perspektive



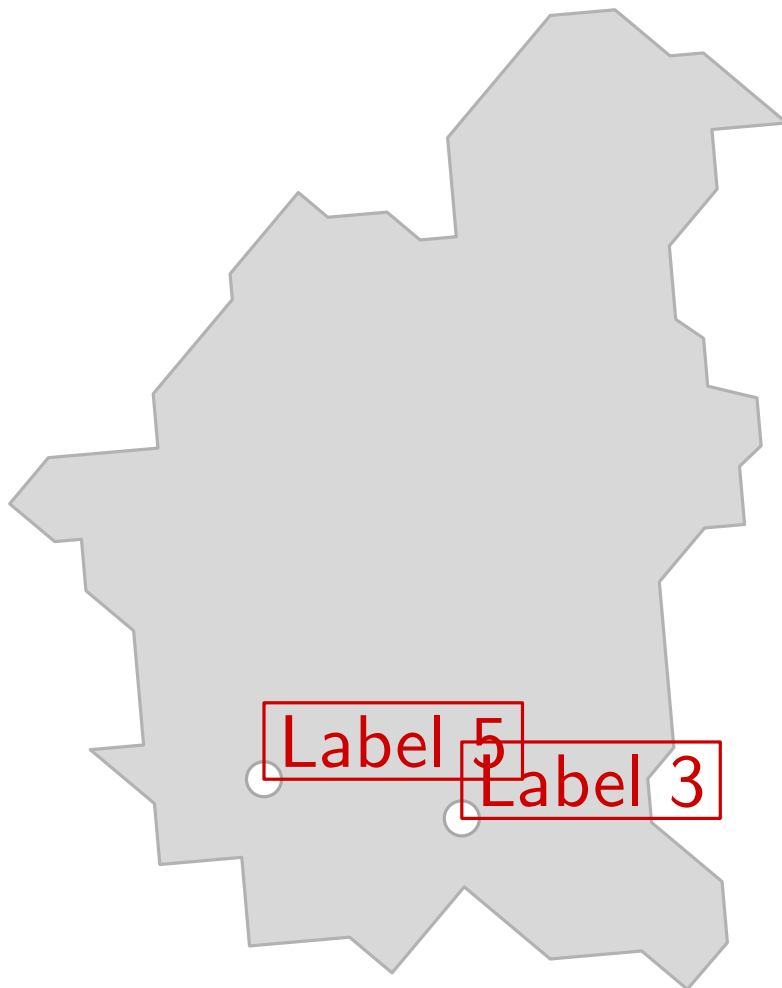
Eingabe: beschriftete Karte



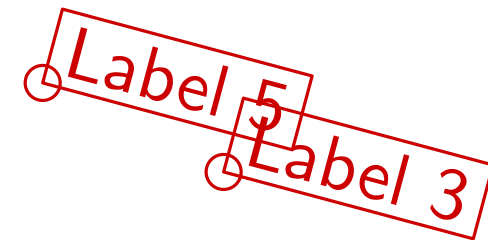
andere Perspektive



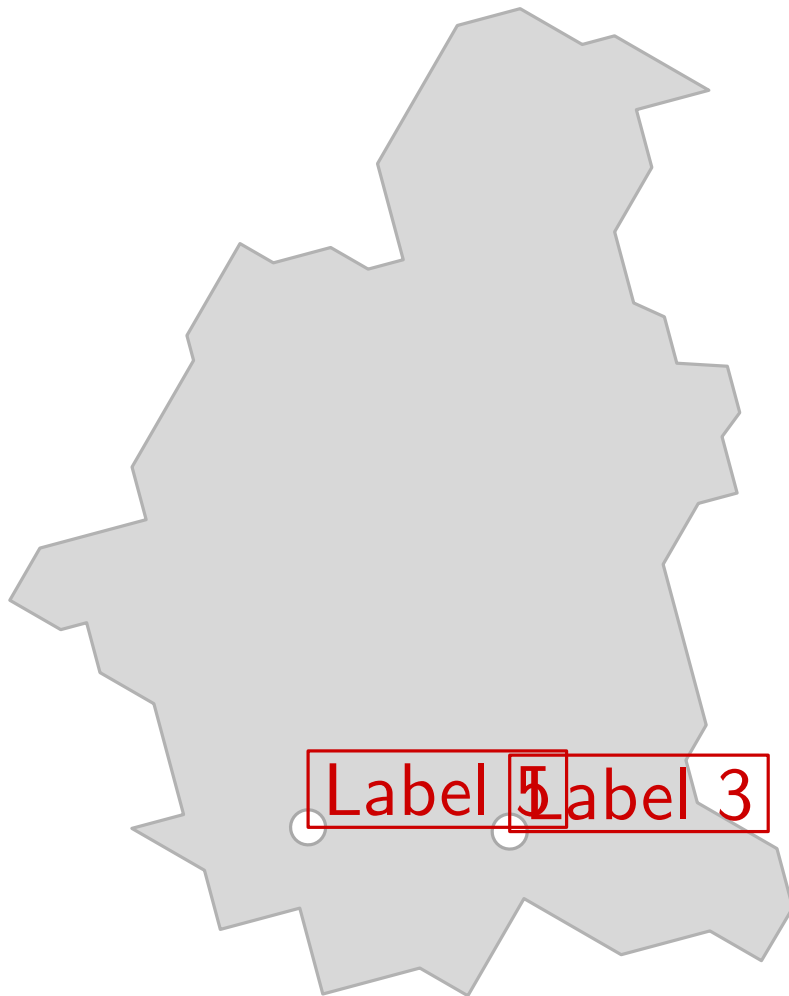
Eingabe: beschriftete Karte



andere Perspektive



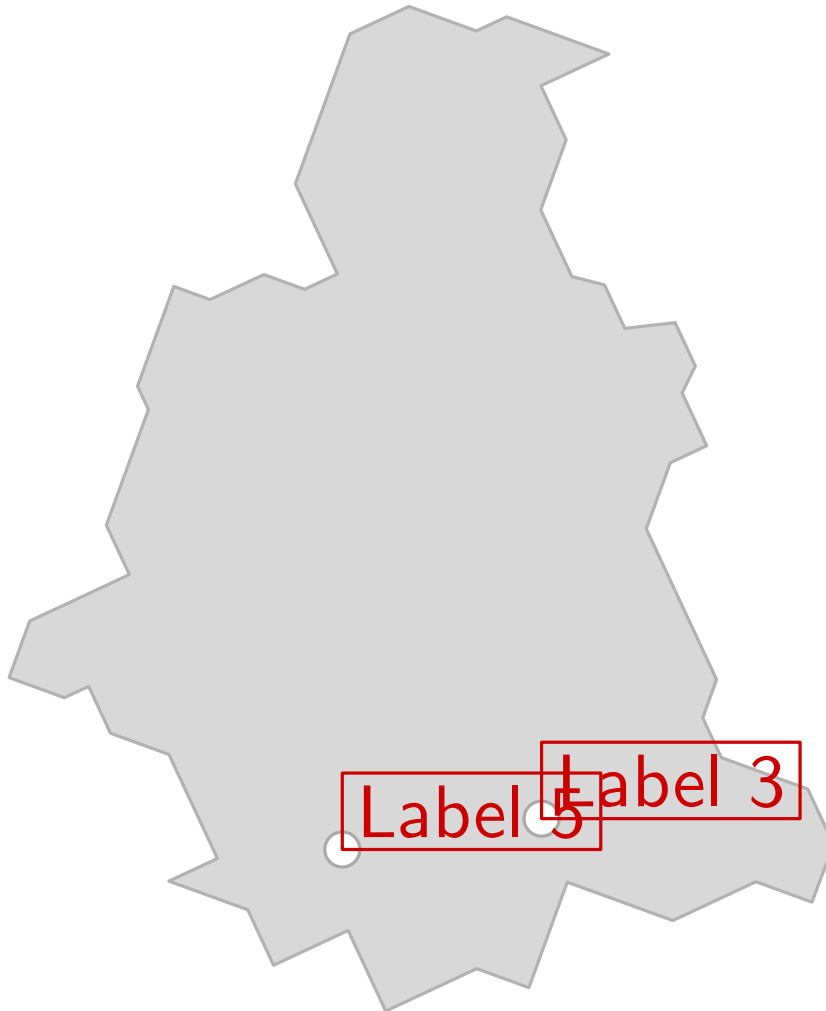
Eingabe: beschriftete Karte



andere Perspektive



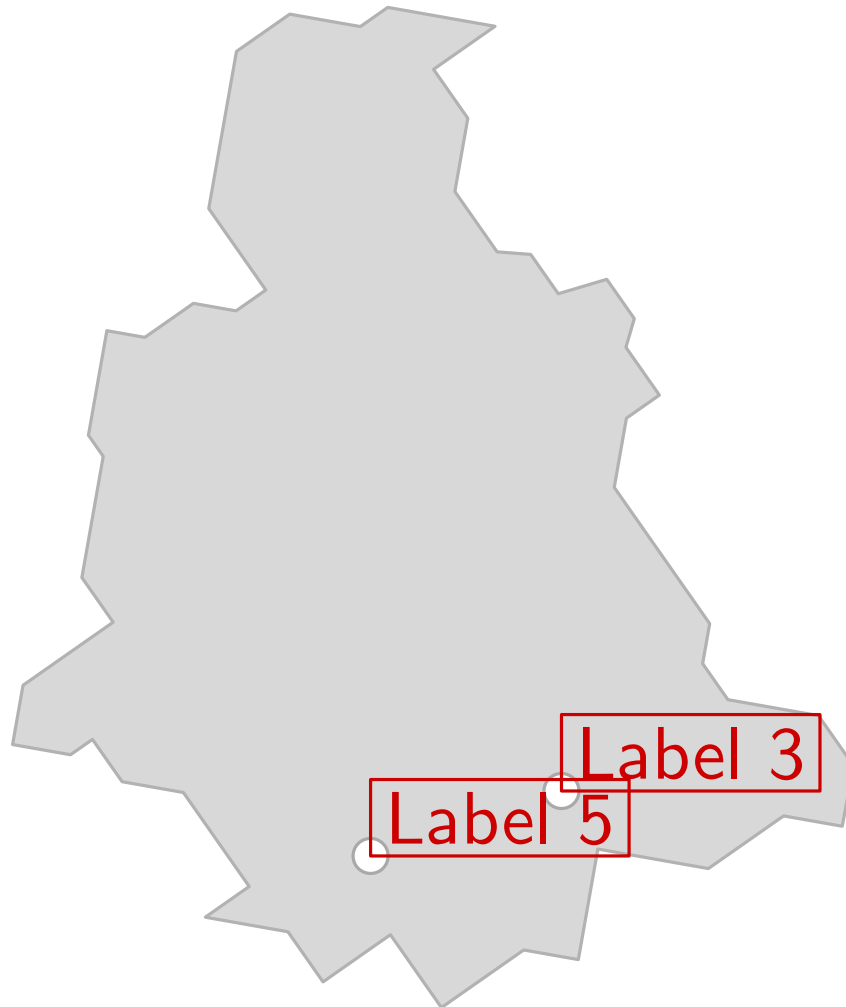
Eingabe: beschriftete Karte



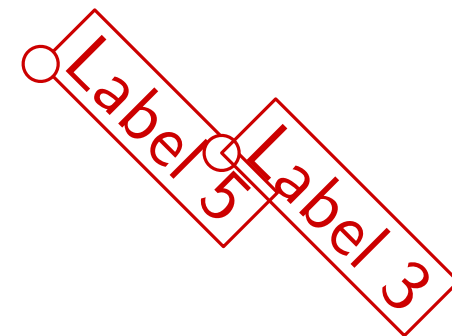
andere Perspektive



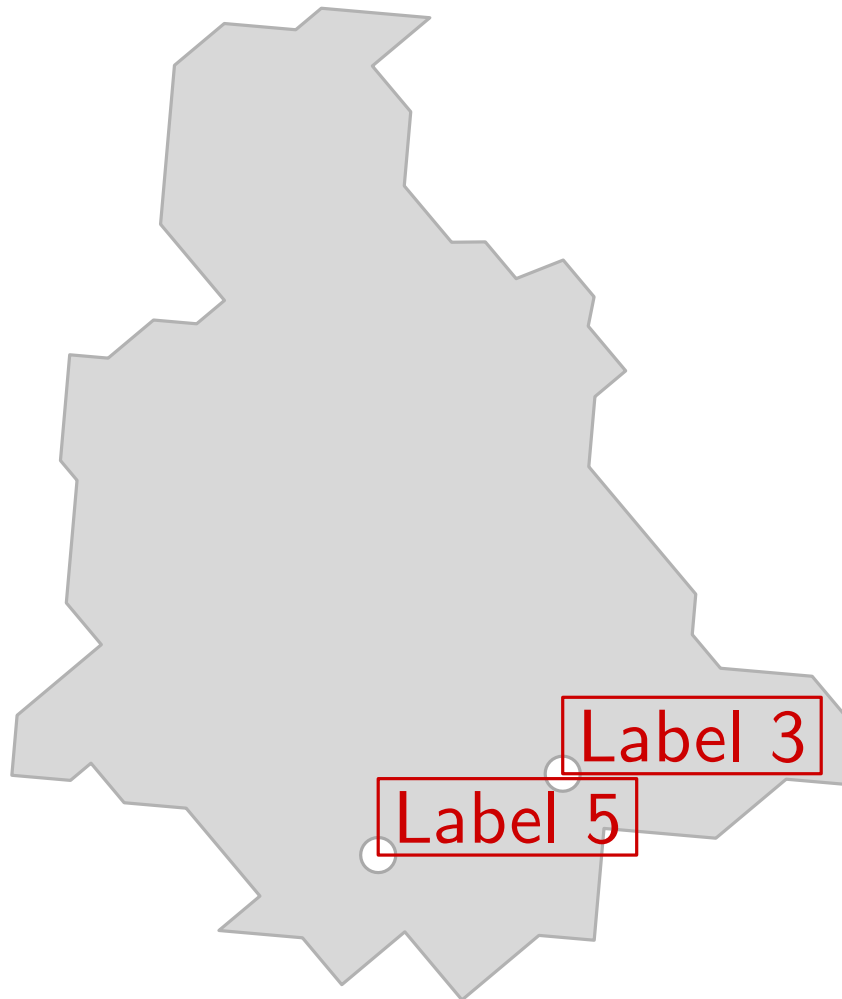
Eingabe: beschriftete Karte



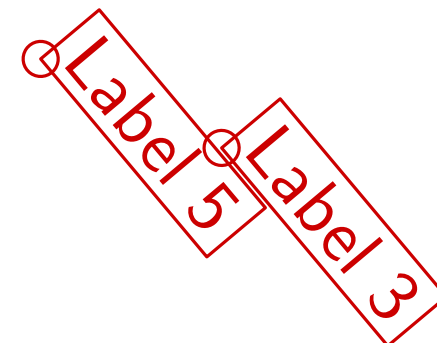
andere Perspektive



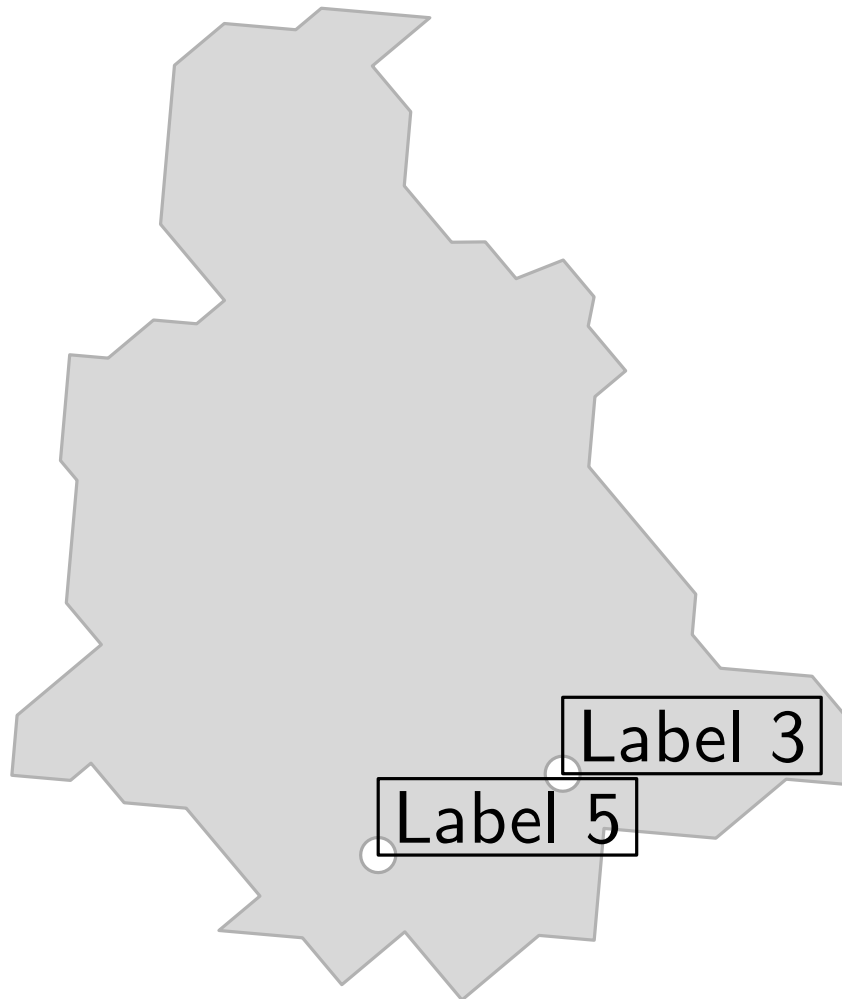
Eingabe: beschriftete Karte



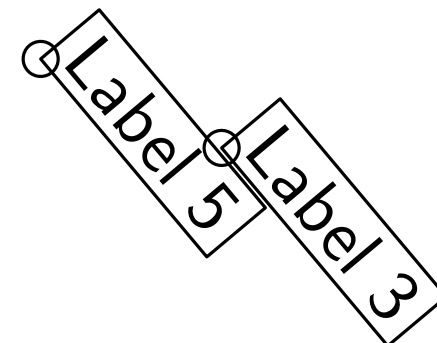
andere Perspektive



Eingabe: beschriftete Karte



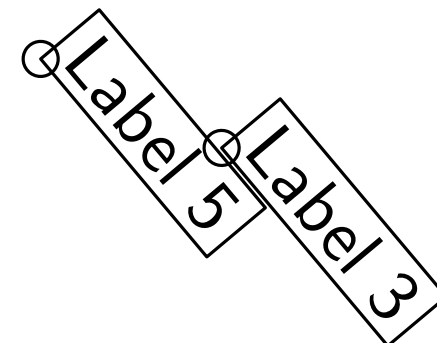
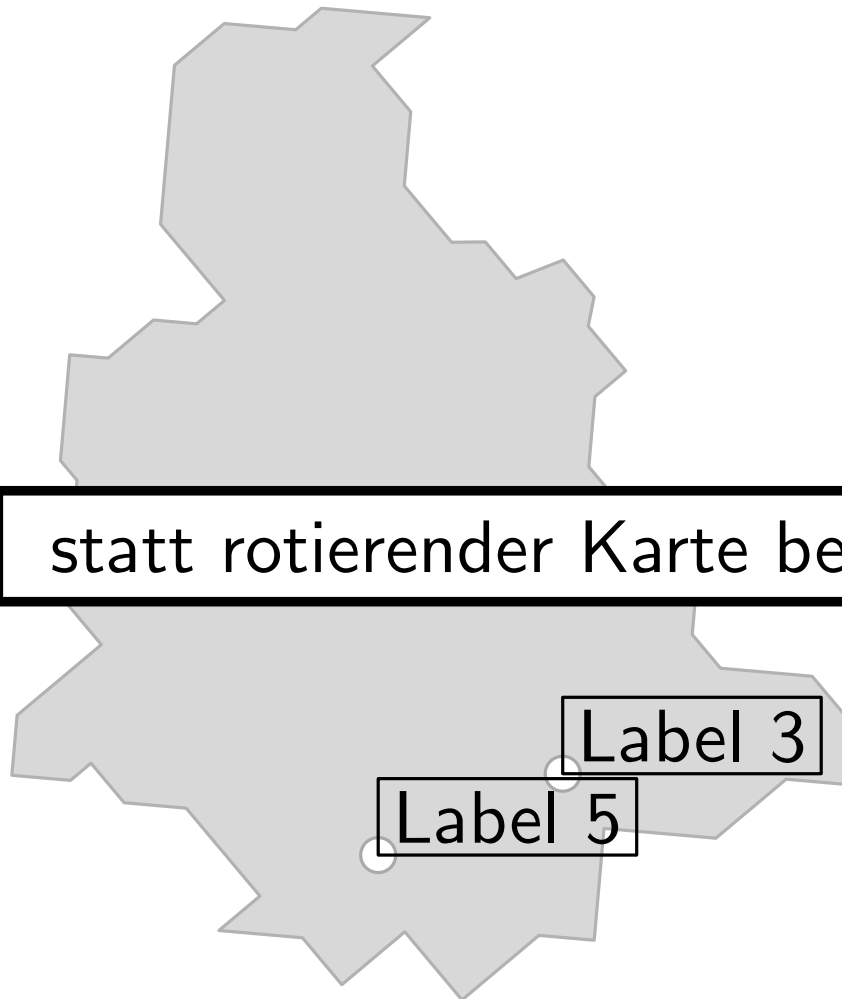
andere Perspektive



Eingabe: beschriftete Karte

andere Perspektive

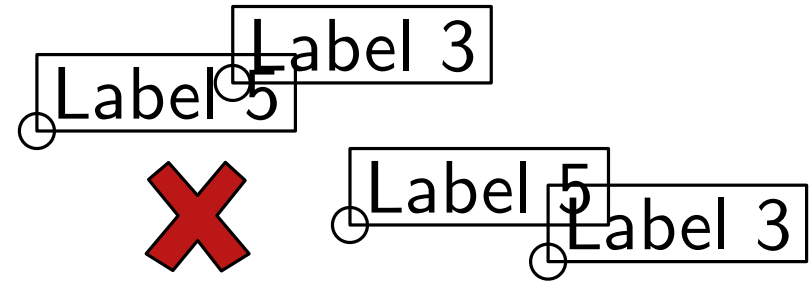
statt rotierender Karte betrachte rotierende Label



Anforderungen

statische Anforderungen

- kein Label verdeckt Eingabepunkt
- keine zwei Label überlappen sich



dynamische Anforderungen

- keine springenden Label
- kein Flackern der Label

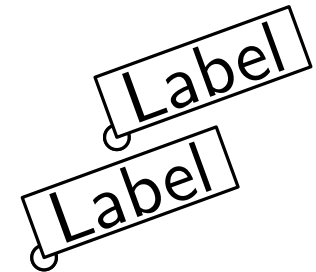
Anforderungen

statische Anforderungen

- kein Label verdeckt Eingabepunkt
- keine zwei Label überlappen sich

dynamische Anforderungen

- keine springenden Label
- kein Flackern der Label



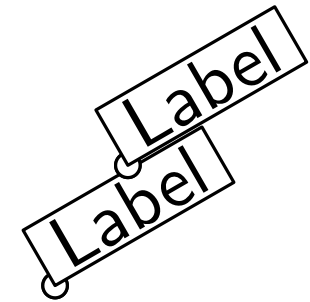
Anforderungen

statische Anforderungen

- kein Label verdeckt Eingabepunkt
- keine zwei Label überlappen sich

dynamische Anforderungen

- keine springenden Label
- kein Flackern der Label



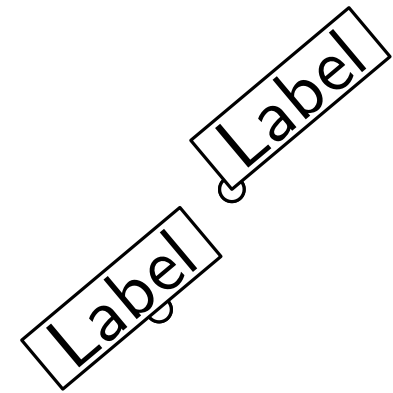
Anforderungen

statische Anforderungen

- kein Label verdeckt Eingabepunkt
- keine zwei Label überlappen sich

dynamische Anforderungen

- keine springenden Label
- kein Flackern der Label



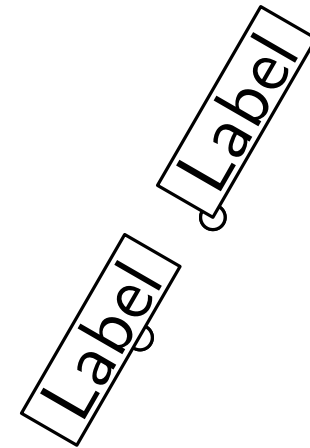
Anforderungen

statische Anforderungen

- kein Label verdeckt Eingabepunkt
- keine zwei Label überlappen sich

dynamische Anforderungen

- keine springenden Label
- kein Flackern der Label



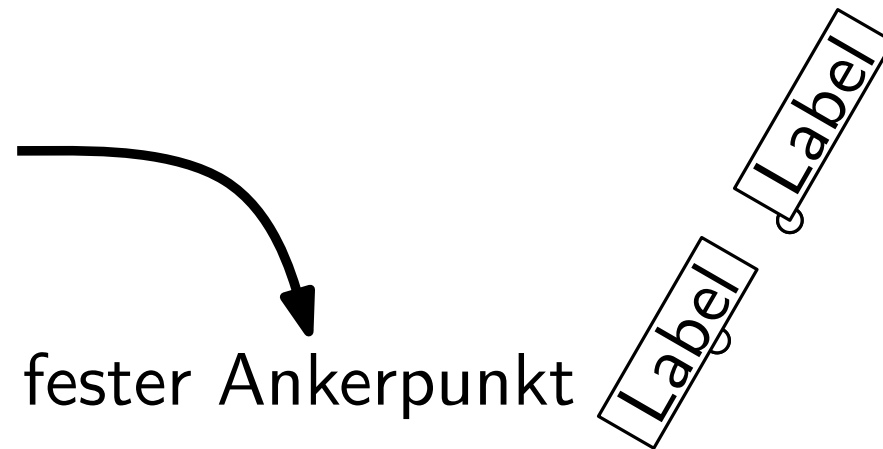
Anforderungen

statische Anforderungen

- kein Label verdeckt Eingabepunkt
- keine zwei Label überlappen sich

dynamische Anforderungen

- keine springenden Label
- kein Flackern der Label



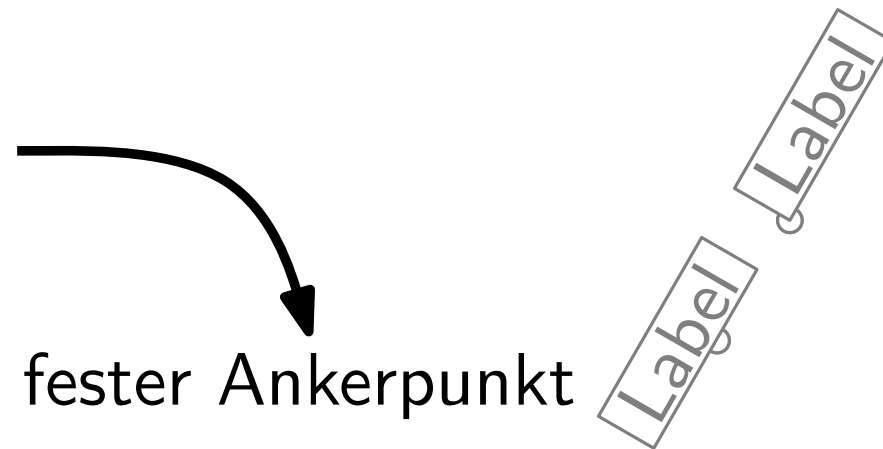
Anforderungen

statische Anforderungen

- kein Label verdeckt Eingabepunkt
- keine zwei Label überlappen sich

dynamische Anforderungen

- keine springenden Label
- kein Flackern der Label



Anforderungen

statische Anforderungen

- kein Label verdeckt Eingabepunkt
- keine zwei Label überlappen sich

dynamische Anforderungen

- keine springenden Label
- kein Flackern der Label



fester Ankerpunkt

Anforderungen

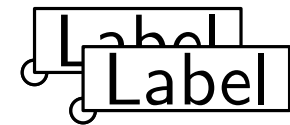
statische Anforderungen

- kein Label verdeckt Eingabepunkt
- keine zwei Label überlappen sich

dynamische Anforderungen

- keine springenden Label
- kein Flackern der Label


fester Ankerpunkt



Anforderungen

statische Anforderungen

- kein Label verdeckt Eingabepunkt
- keine zwei Label überlappen sich

dynamische Anforderungen

- keine springenden Label
- kein Flackern der Label


fester Ankerpunkt



Anforderungen

statische Anforderungen

- kein Label verdeckt Eingabepunkt
- keine zwei Label überlappen sich

dynamische Anforderungen

- keine springenden Label
- kein Flackern der Label



fester Ankerpunkt



Anforderungen

statische Anforderungen

- kein Label verdeckt Eingabepunkt
- keine zwei Label überlappen sich

dynamische Anforderungen

- keine springenden Label
- kein Flackern der Label



fester Ankerpunkt



Anforderungen

statische Anforderungen

- kein Label verdeckt Eingabepunkt
- keine zwei Label überlappen sich

dynamische Anforderungen

- keine springenden Label
- kein Flackern der Label


fester Ankerpunkt



Anforderungen

statische Anforderungen

- kein Label verdeckt Eingabepunkt
- keine zwei Label überlappen sich

dynamische Anforderungen

- keine springenden Label
- kein Flackern der Label


fester Ankerpunkt



Anforderungen

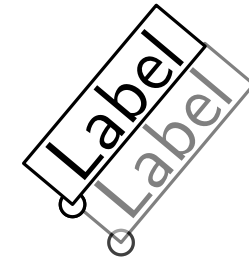
statische Anforderungen

- kein Label verdeckt Eingabepunkt
- keine zwei Label überlappen sich

dynamische Anforderungen

- keine springenden Label
- kein Flackern der Label


fester Ankerpunkt



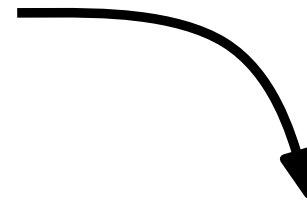
Anforderungen

statische Anforderungen

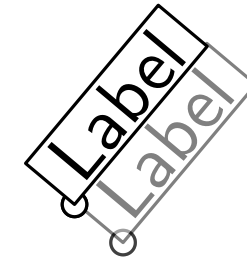
- kein Label verdeckt Eingabepunkt
- keine zwei Label überlappen sich

dynamische Anforderungen

- keine springenden Label
- kein Flackern der Label



fester Ankerpunkt



aktiv in *einem* zusammenhängenden Winkelbereich

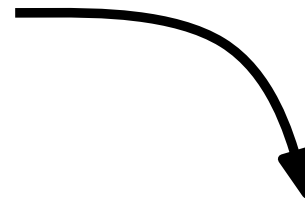
Anforderungen

statische Anforderungen

- kein Label verdeckt Eingabepunkt
- keine zwei Label überlappen sich

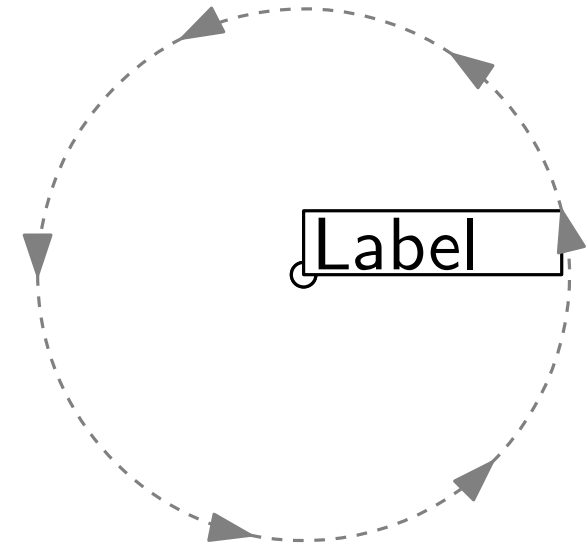
dynamische Anforderungen

- keine springenden Label
- kein Flackern der Label



fester Ankerpunkt

aktiv in *einem* zusammenhängenden Winkelbereich



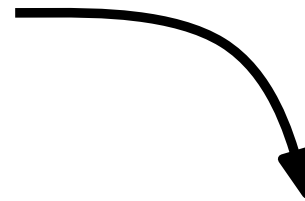
Anforderungen

statische Anforderungen

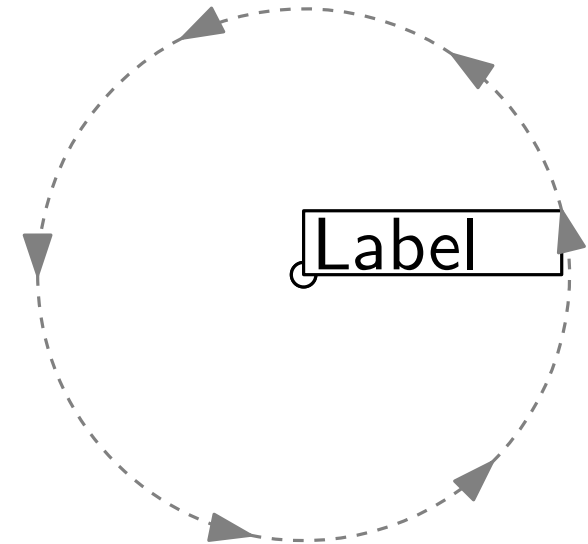
- kein Label verdeckt Eingabepunkt
- keine zwei Label überlappen sich

dynamische Anforderungen

- keine springenden Label
- kein Flackern der Label



fester Ankerpunkt



aktiv in *einem* zusammenhängenden Winkelbereich

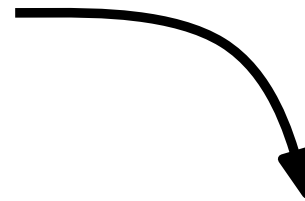
Anforderungen

statische Anforderungen

- kein Label verdeckt Eingabepunkt
- keine zwei Label überlappen sich

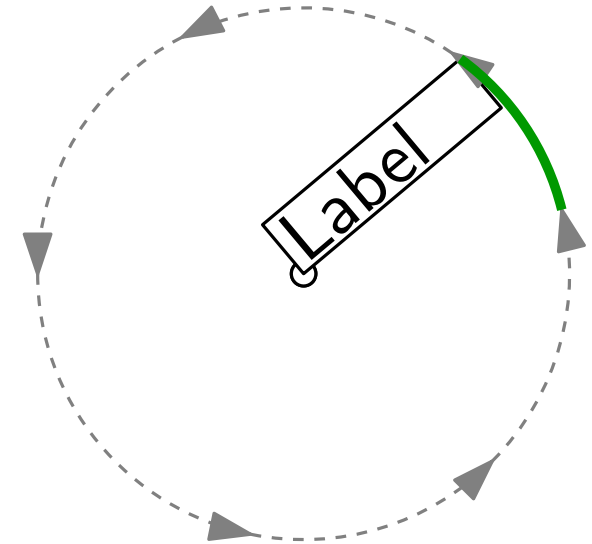
dynamische Anforderungen

- keine springenden Label
- kein Flackern der Label



fester Ankerpunkt

aktiv in *einem* zusammenhängenden Winkelbereich



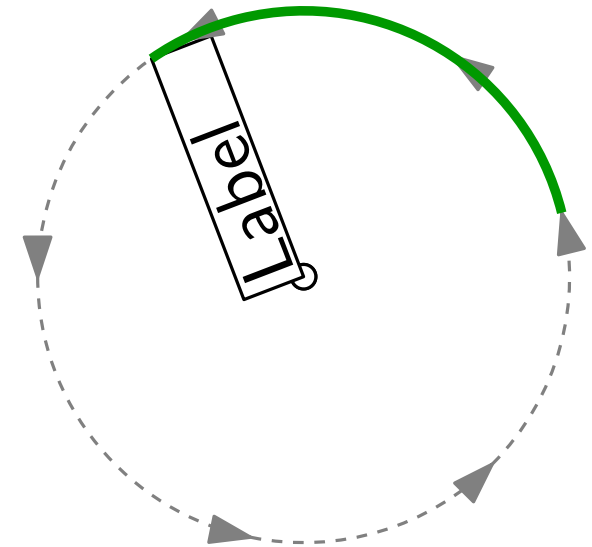
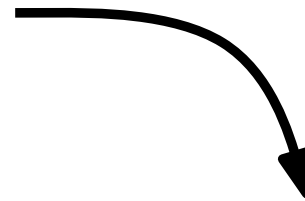
Anforderungen

statische Anforderungen

- kein Label verdeckt Eingabepunkt
- keine zwei Label überlappen sich

dynamische Anforderungen

- keine springenden Label
- kein Flackern der Label



fester Ankerpunkt

aktiv in *einem* zusammenhängenden Winkelbereich

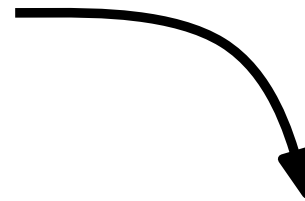
Anforderungen

statische Anforderungen

- kein Label verdeckt Eingabepunkt
- keine zwei Label überlappen sich

dynamische Anforderungen

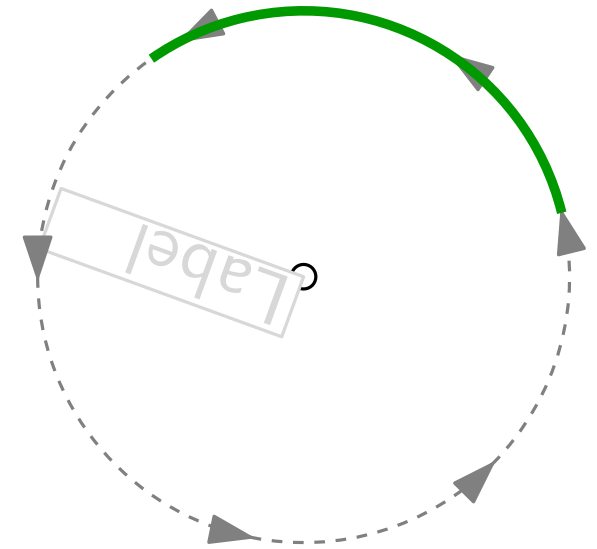
- keine springenden Label
- kein Flackern der Label



fester Ankerpunkt



aktiv in *einem* zusammenhängenden Winkelbereich



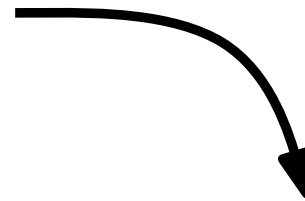
Anforderungen

statische Anforderungen

- kein Label verdeckt Eingabepunkt
- keine zwei Label überlappen sich

dynamische Anforderungen

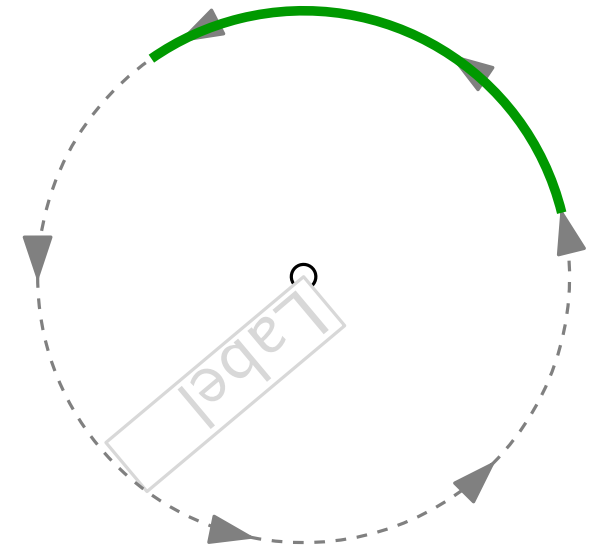
- keine springenden Label
- kein Flackern der Label



fester Ankerpunkt



aktiv in *einem* zusammenhängenden Winkelbereich



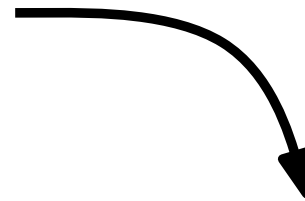
Anforderungen

statische Anforderungen

- kein Label verdeckt Eingabepunkt
- keine zwei Label überlappen sich

dynamische Anforderungen

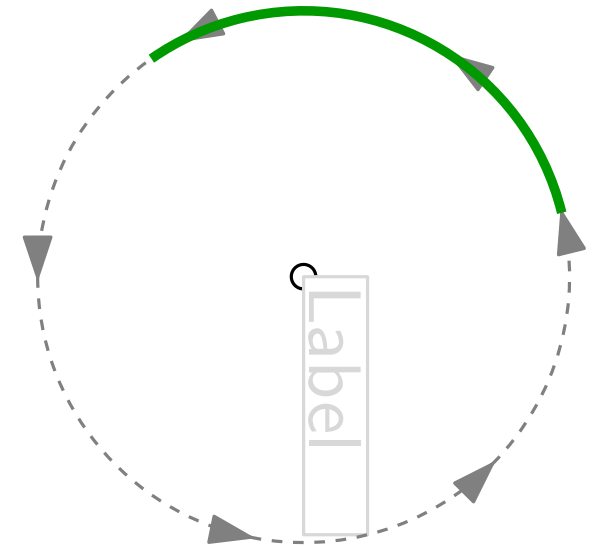
- keine springenden Label
- kein Flackern der Label



fester Ankerpunkt



aktiv in *einem* zusammenhängenden Winkelbereich



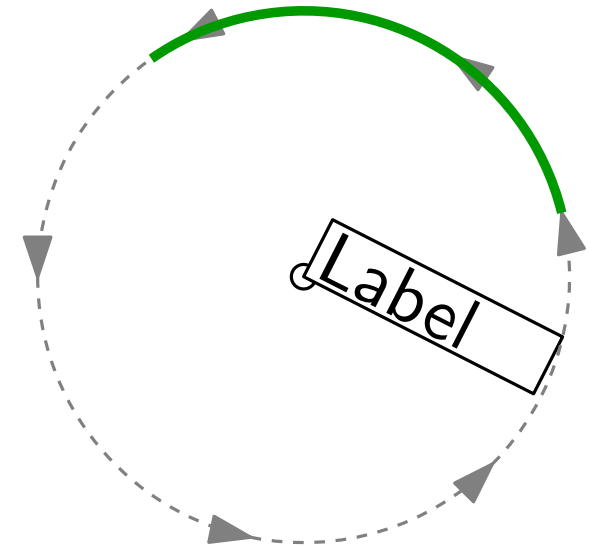
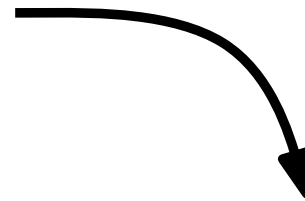
Anforderungen

statische Anforderungen

- kein Label verdeckt Eingabepunkt
- keine zwei Label überlappen sich

dynamische Anforderungen

- keine springenden Label
- kein Flackern der Label



fester Ankerpunkt

aktiv in *einem* zusammenhängenden Winkelbereich

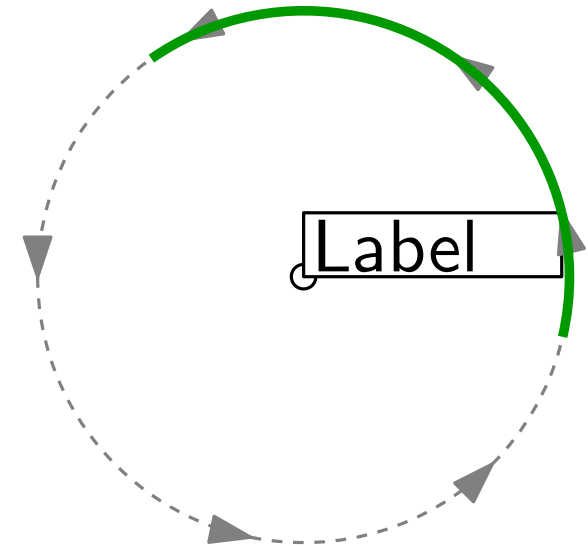
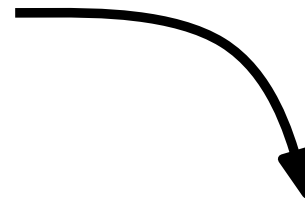
Anforderungen

statische Anforderungen

- kein Label verdeckt Eingabepunkt
- keine zwei Label überlappen sich

dynamische Anforderungen

- keine springenden Label
- kein Flackern der Label



fester Ankerpunkt



aktiv in *einem* zusammenhängenden Winkelbereich

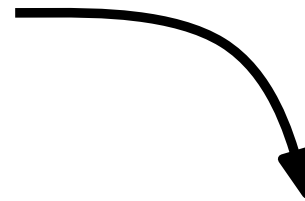
Anforderungen

statische Anforderungen

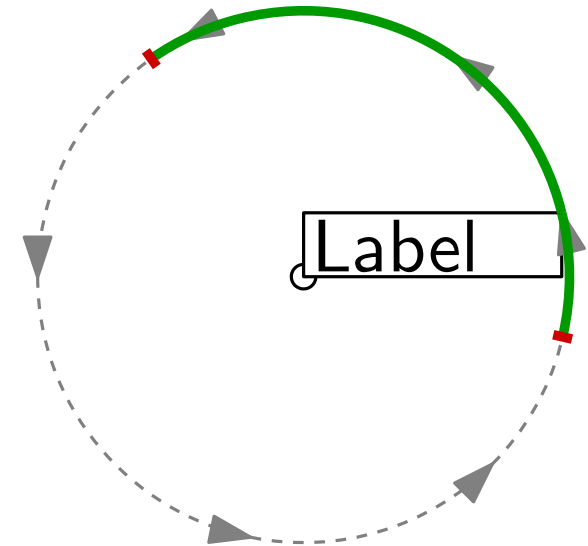
- kein Label verdeckt Eingabepunkt
- keine zwei Label überlappen sich

dynamische Anforderungen

- keine springenden Label
- kein Flackern der Label



fester Ankerpunkt



aktiv in *einem* zusammenhängenden Winkelbereich

aktiver Bereich

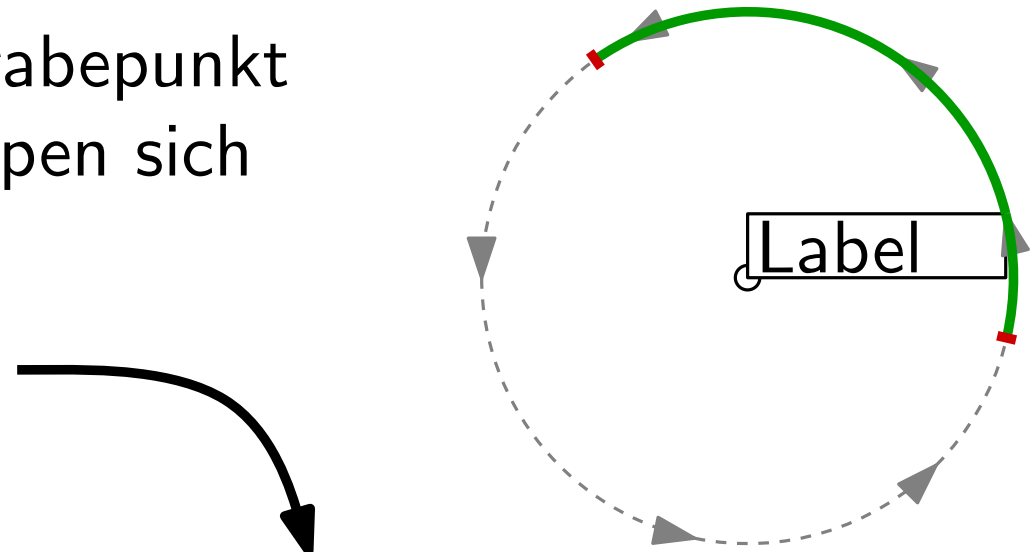
Anforderungen

statische Anforderungen

- kein Label verdeckt Eingabepunkt
- keine zwei Label überlappen sich

dynamische Anforderungen

- keine springenden Label
- kein Flackern der Label



fester Ankerpunkt

aktiv in *einem* zusammenhängenden Winkelbereich

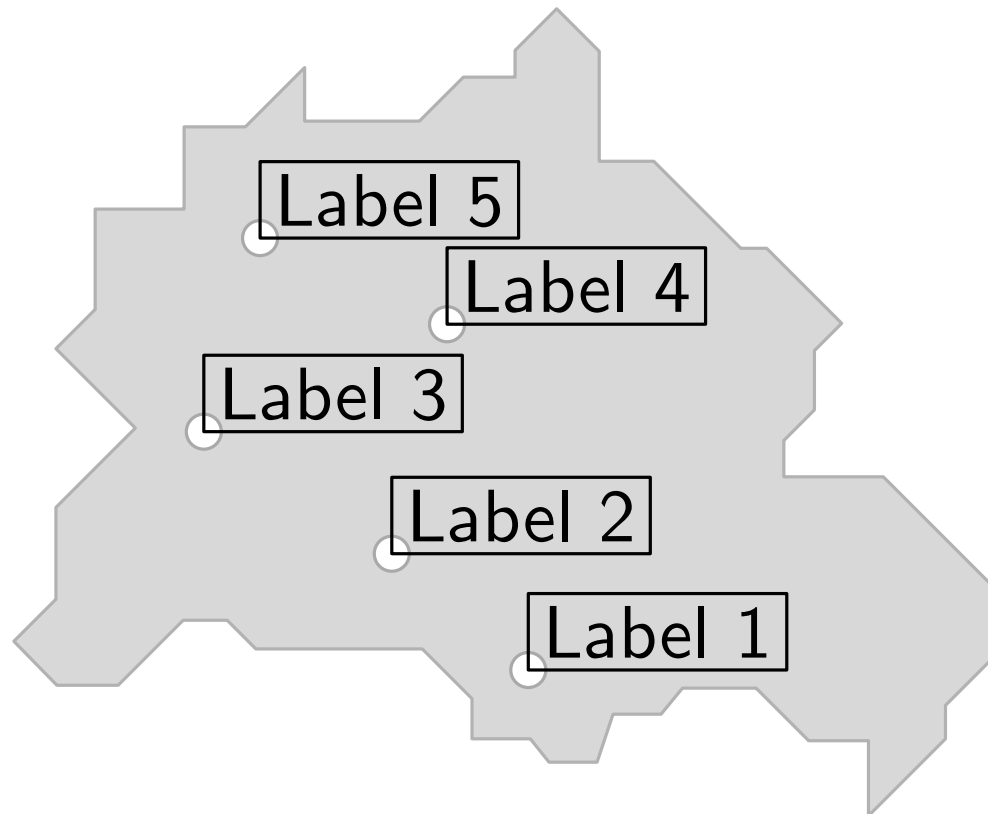
aktiver Bereich

Definition:

Beschriftung, die die Anforderungen erfüllt heißt **konsistent**.

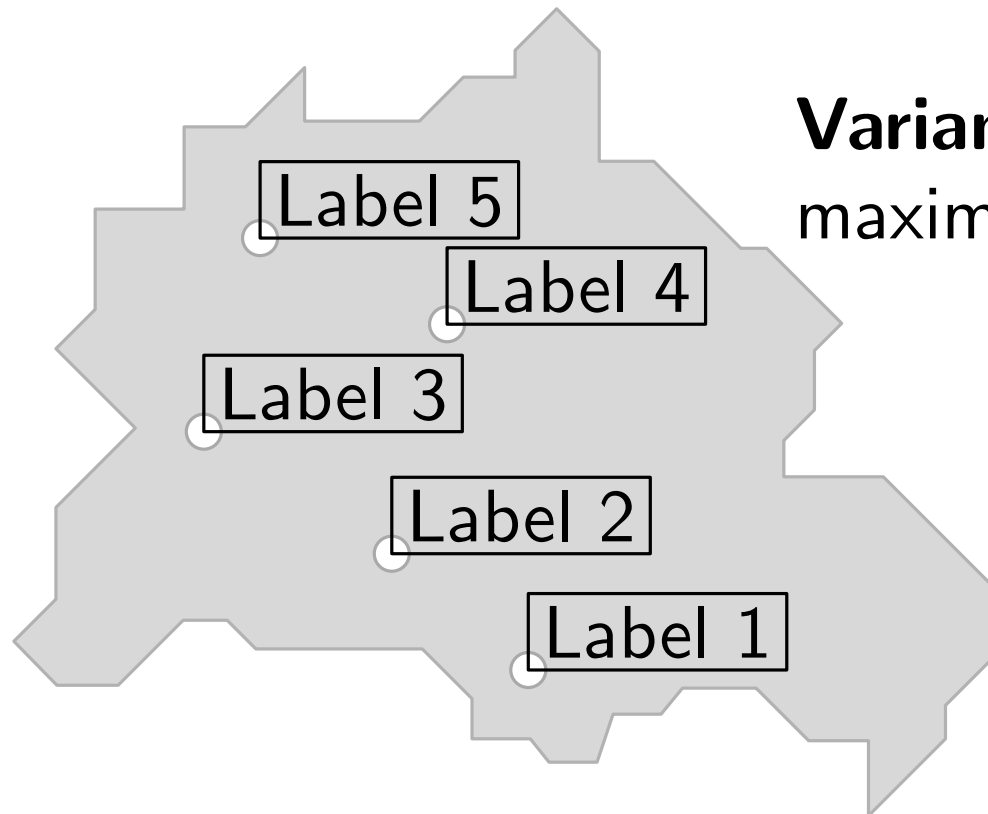
MaxTotal

Geg. eine Karte, Punktmenge P und gültige Beschriftung $L(P)$, suche eine konsistente Rotationsbeschriftung, die die **Gesamtlänge** $\sum_L |A_L|$ aller aktiven Bereiche maximiert.



MaxTotal

Geg. eine Karte, Punktmenge P und gültige Beschriftung $L(P)$, suche eine konsistente Rotationsbeschriftung, die die **Gesamtlänge** $\sum_L |A_L|$ aller aktiven Bereiche maximiert.

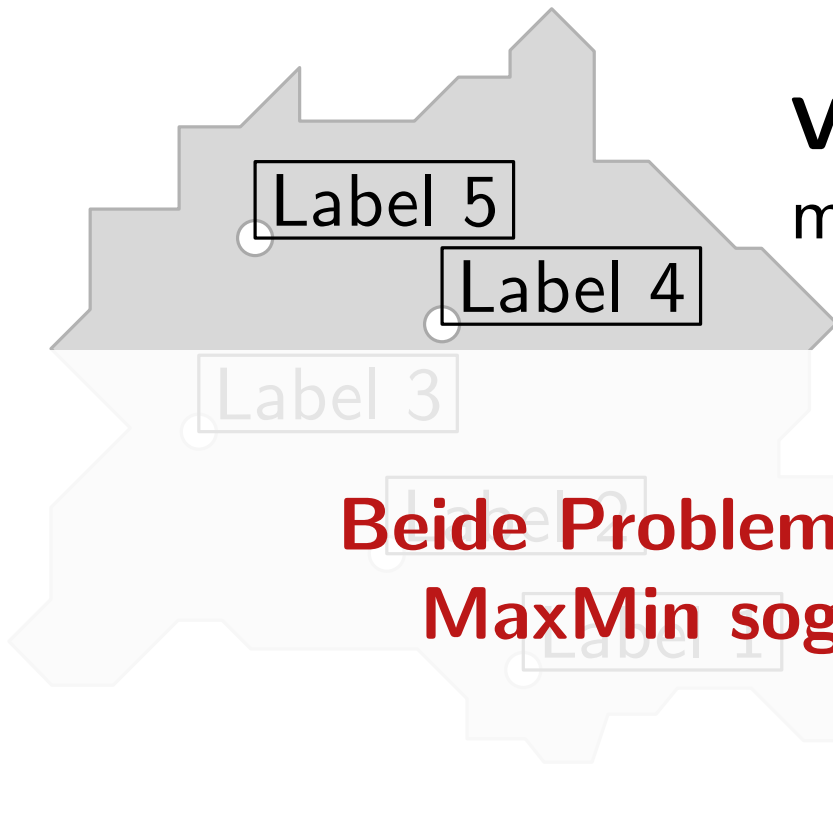


Variante MaxMin:

maximiere **kleinsten** aktiven Bereich

MaxTotal

Geg. eine Karte, Punktmenge P und gültige Beschriftung $L(P)$, suche eine konsistente Rotationsbeschriftung, die die **Gesamtlänge** $\sum_L |A_L|$ aller aktiven Bereiche maximiert.



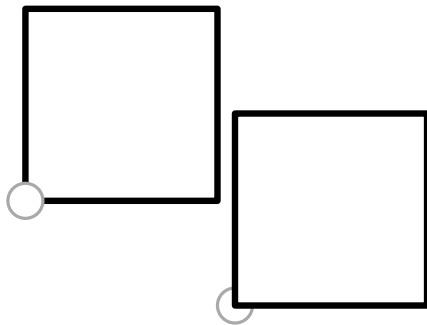
Variante MaxMin:

maximiere **kleinsten** aktiven Bereich

**Beide Probleme sind NP-schwer,
MaxMin sogar APX-schwer.**

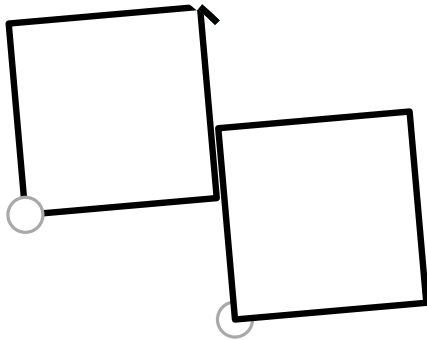
Konfliktlemma

Für ein Paar von Labeln besteht die Konfliktmenge aus höchstens vier zusammenhängenden Konfliktbereichen.



Konfliktlemma

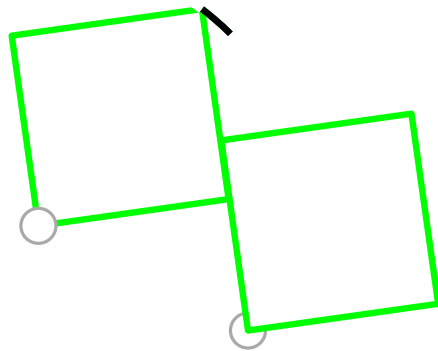
Für ein Paar von Labeln besteht die Konfliktmenge aus höchstens vier zusammenhängenden Konfliktbereichen.



Konfliktlemma

Für ein Paar von Labeln besteht die Konfliktmenge aus höchstens vier zusammenhängenden Konfliktbereichen.

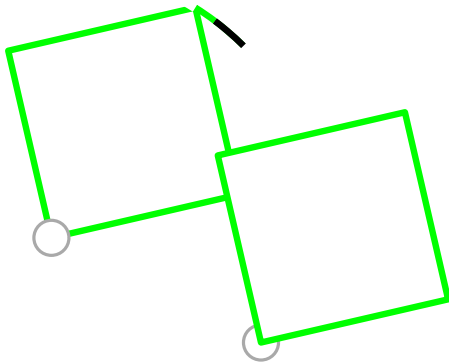
Label-Label Konflikt



Konfliktlemma

Für ein Paar von Labeln besteht die Konfliktmenge aus höchstens vier zusammenhängenden Konfliktbereichen.

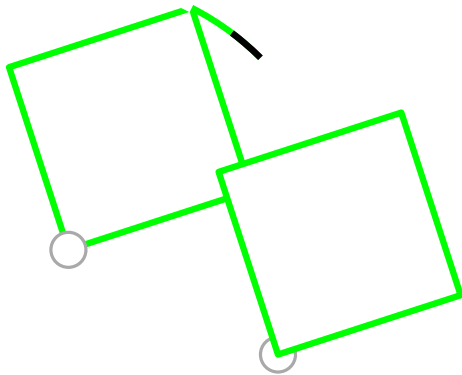
Label-Label Konflikt



Konfliktlemma

Für ein Paar von Labeln besteht die Konfliktmenge aus höchstens vier zusammenhängenden Konfliktbereichen.

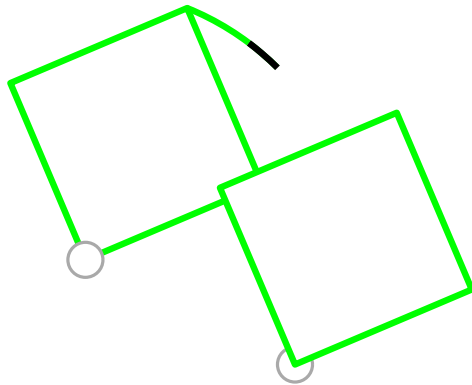
Label-Label Konflikt



Konfliktlemma

Für ein Paar von Labeln besteht die Konfliktmenge aus höchstens vier zusammenhängenden Konfliktbereichen.

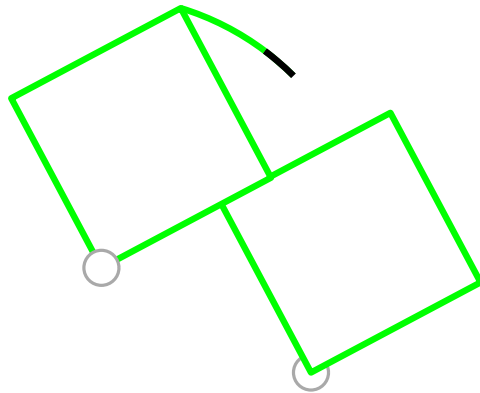
Label-Label Konflikt



Konfliktlemma

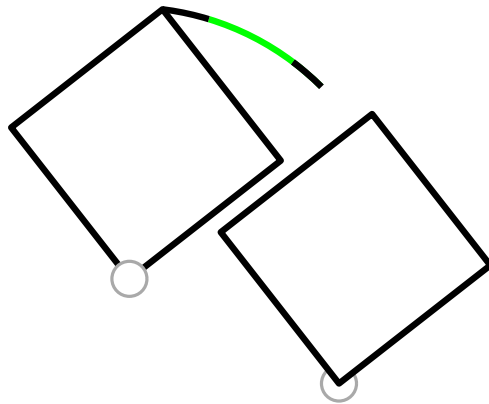
Für ein Paar von Labeln besteht die Konfliktmenge aus höchstens vier zusammenhängenden Konfliktbereichen.

Label-Label Konflikt



Konfliktlemma

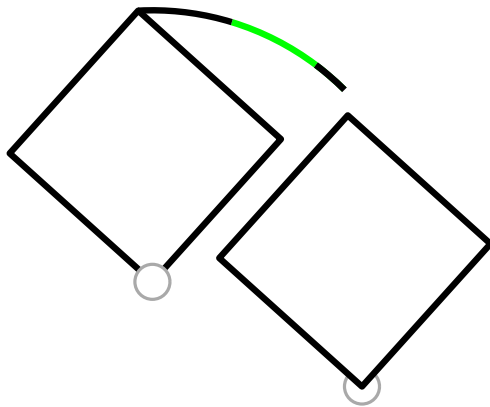
Für ein Paar von Labeln besteht die Konfliktmenge aus höchstens vier zusammenhängenden Konfliktbereichen.



Label-Label Konflikt

Konfliktlemma

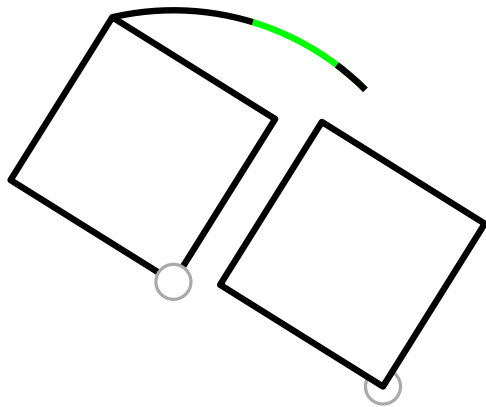
Für ein Paar von Labeln besteht die Konfliktmenge aus höchstens vier zusammenhängenden Konfliktbereichen.



Label-Label Konflikt

Konfliktlemma

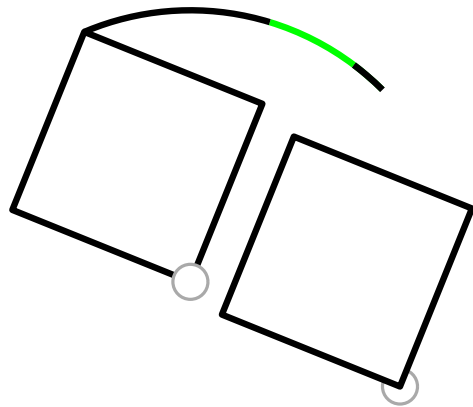
Für ein Paar von Labeln besteht die Konfliktmenge aus höchstens vier zusammenhängenden Konfliktbereichen.



Label-Label Konflikt

Konfliktlemma

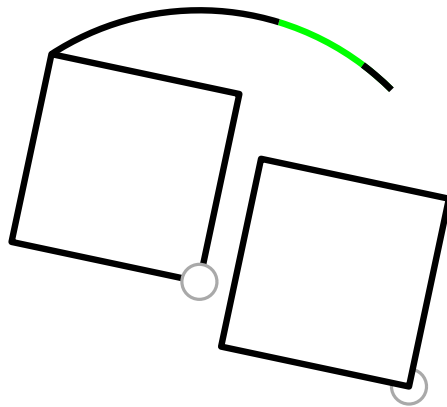
Für ein Paar von Labeln besteht die Konfliktmenge aus höchstens vier zusammenhängenden Konfliktbereichen.



Label-Label Konflikt

Konfliktlemma

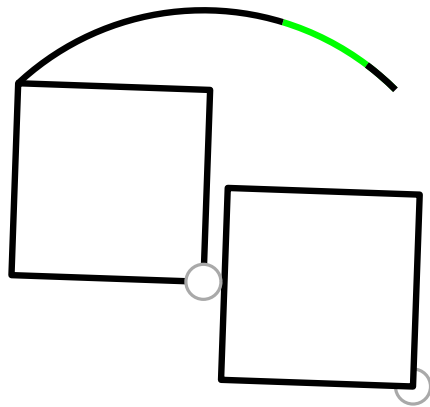
Für ein Paar von Labeln besteht die Konfliktmenge aus höchstens vier zusammenhängenden Konfliktbereichen.



Label-Label Konflikt

Konfliktlemma

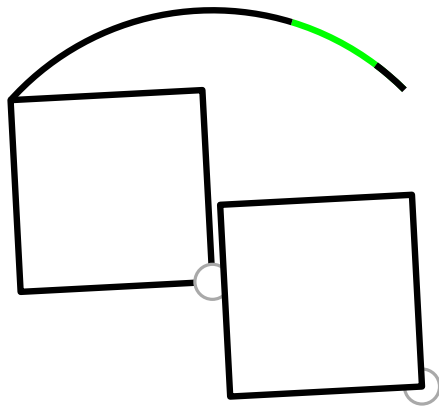
Für ein Paar von Labeln besteht die Konfliktmenge aus höchstens vier zusammenhängenden Konfliktbereichen.



Label-Label Konflikt

Konfliktlemma

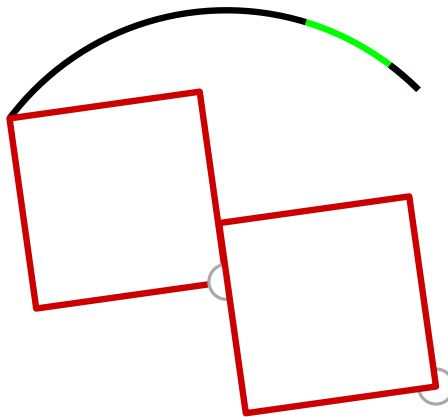
Für ein Paar von Labeln besteht die Konfliktmenge aus höchstens vier zusammenhängenden Konfliktbereichen.



Label-Label Konflikt

Konfliktlemma

Für ein Paar von Labeln besteht die Konfliktmenge aus höchstens vier zusammenhängenden Konfliktbereichen.

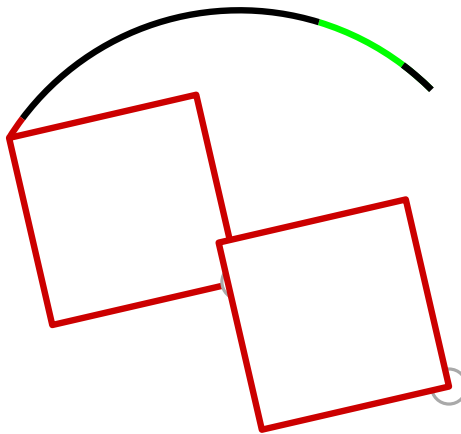


Label-Label Konflikt

Label-Punkt Konflikt

Konfliktlemma

Für ein Paar von Labeln besteht die Konfliktmenge aus höchstens vier zusammenhängenden Konfliktbereichen.

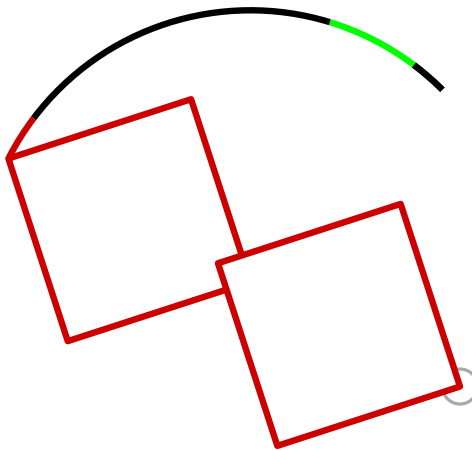


Label-Label Konflikt

Label-Punkt Konflikt

Konfliktlemma

Für ein Paar von Labeln besteht die Konfliktmenge aus höchstens vier zusammenhängenden Konfliktbereichen.

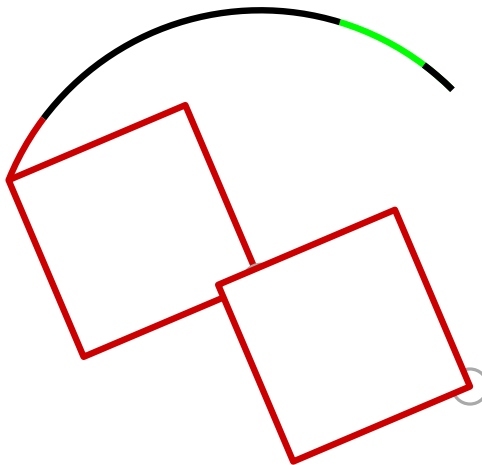


Label-Label Konflikt

Label-Punkt Konflikt

Konfliktlemma

Für ein Paar von Labeln besteht die Konfliktmenge aus höchstens vier zusammenhängenden Konfliktbereichen.

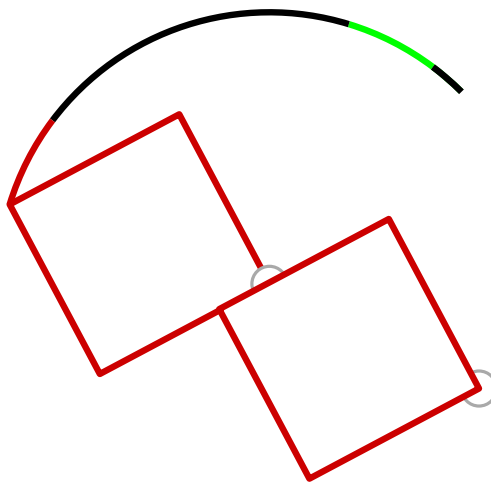


Label-Label Konflikt

Label-Punkt Konflikt

Konfliktlemma

Für ein Paar von Labeln besteht die Konfliktmenge aus höchstens vier zusammenhängenden Konfliktbereichen.

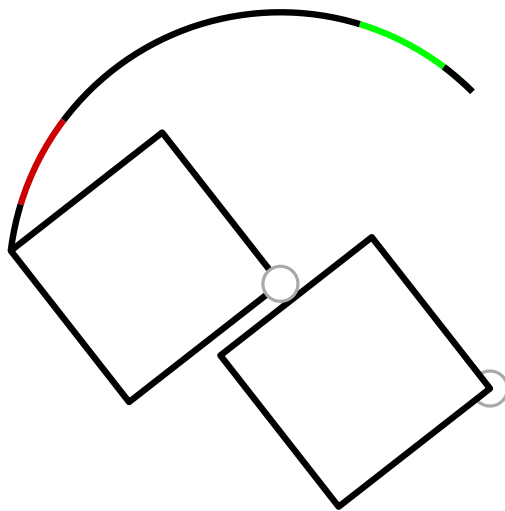


Label-Label Konflikt

Label-Punkt Konflikt

Konfliktlemma

Für ein Paar von Labeln besteht die Konfliktmenge aus höchstens vier zusammenhängenden Konfliktbereichen.

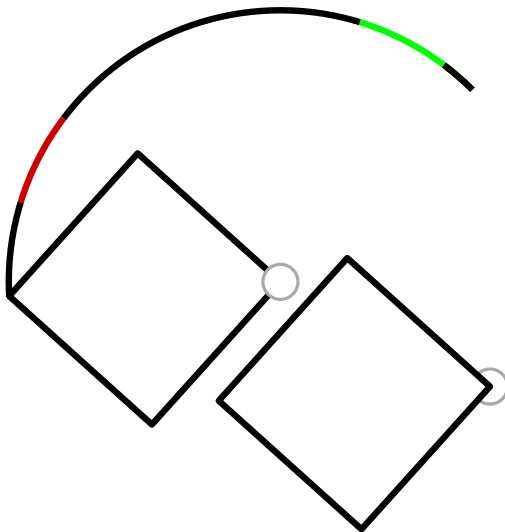


Label-Label Konflikt

Label-Punkt Konflikt

Konfliktlemma

Für ein Paar von Labeln besteht die Konfliktmenge aus höchstens vier zusammenhängenden Konfliktbereichen.

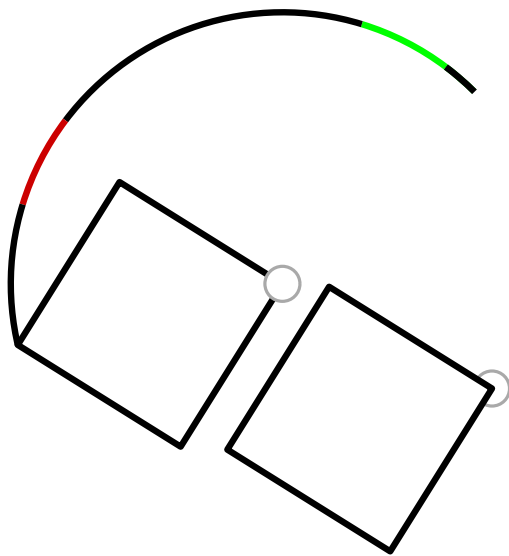


Label-Label Konflikt

Label-Punkt Konflikt

Konfliktlemma

Für ein Paar von Labeln besteht die Konfliktmenge aus höchstens vier zusammenhängenden Konfliktbereichen.

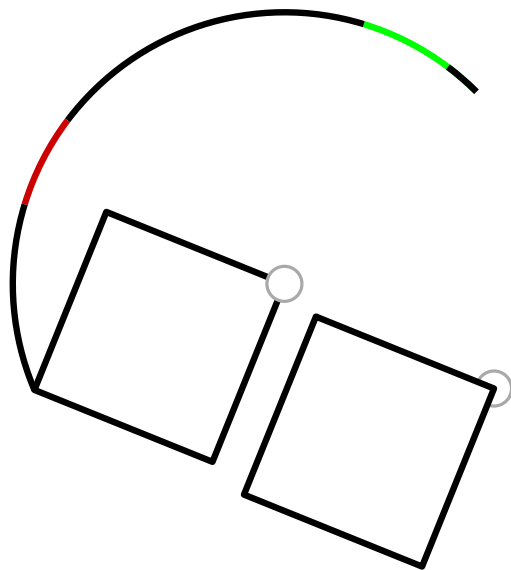


Label-Label Konflikt

Label-Punkt Konflikt

Konfliktlemma

Für ein Paar von Labeln besteht die Konfliktmenge aus höchstens vier zusammenhängenden Konfliktbereichen.

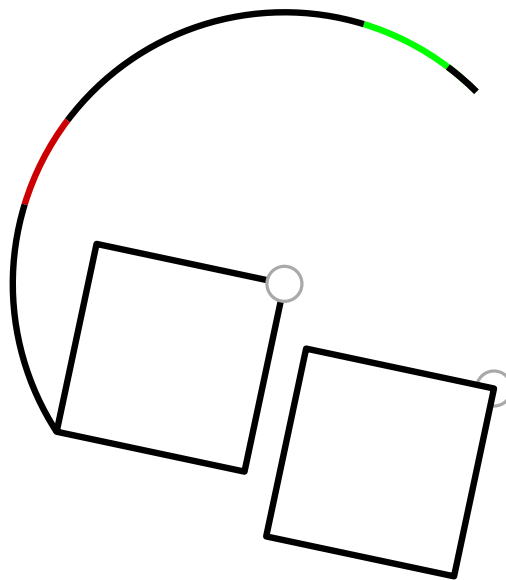


Label-Label Konflikt

Label-Punkt Konflikt

Konfliktlemma

Für ein Paar von Labeln besteht die Konfliktmenge aus höchstens vier zusammenhängenden Konfliktbereichen.

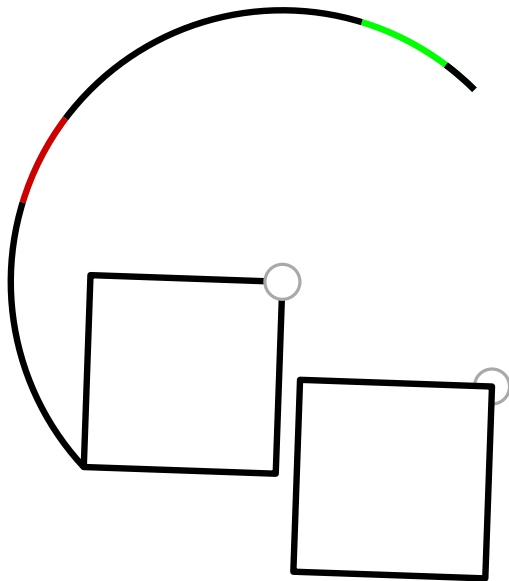


Label-Label Konflikt

Label-Punkt Konflikt

Konfliktlemma

Für ein Paar von Labeln besteht die Konfliktmenge aus höchstens vier zusammenhängenden Konfliktbereichen.

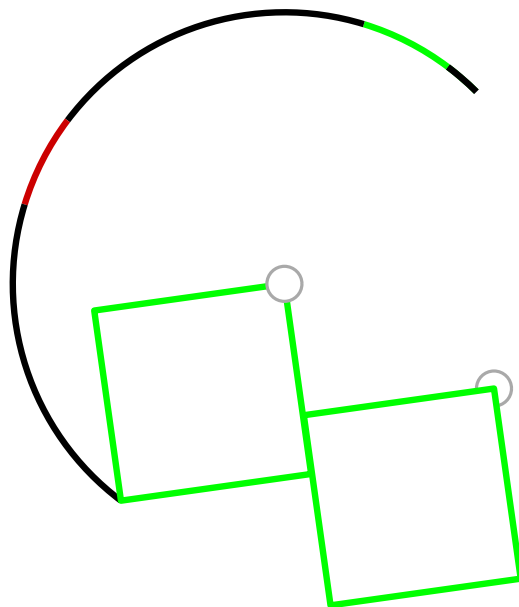


Label-Label Konflikt

Label-Punkt Konflikt

Konfliktlemma

Für ein Paar von Labeln besteht die Konfliktmenge aus höchstens vier zusammenhängenden Konfliktbereichen.

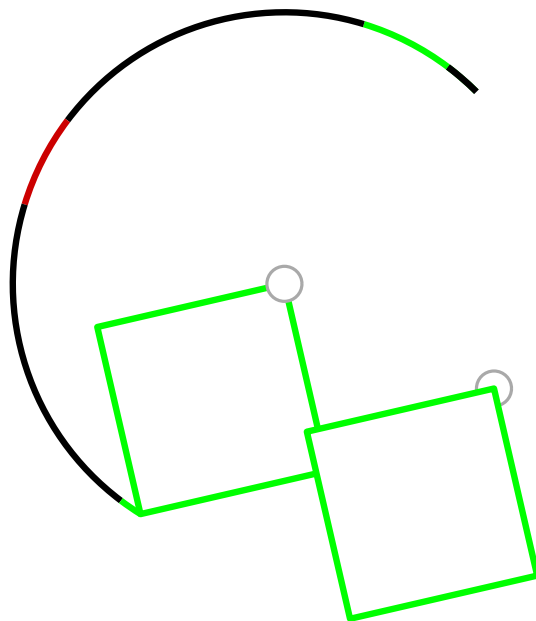


Label-Label Konflikt

Label-Punkt Konflikt

Konfliktlemma

Für ein Paar von Labeln besteht die Konfliktmenge aus höchstens vier zusammenhängenden Konfliktbereichen.

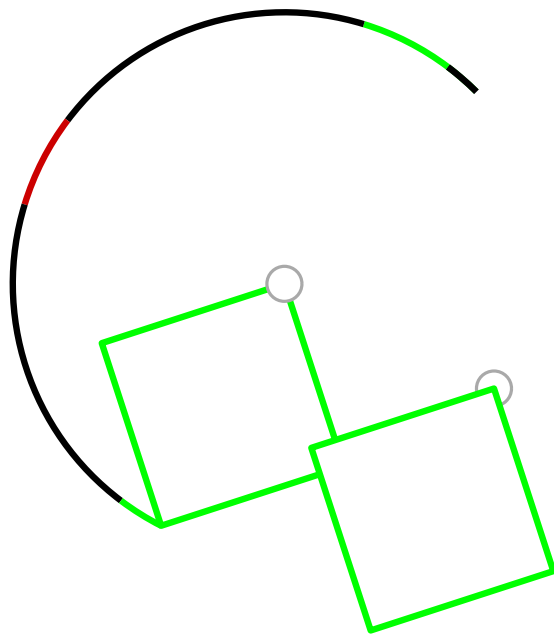


Label-Label Konflikt

Label-Punkt Konflikt

Konfliktlemma

Für ein Paar von Labeln besteht die Konfliktmenge aus höchstens vier zusammenhängenden Konfliktbereichen.

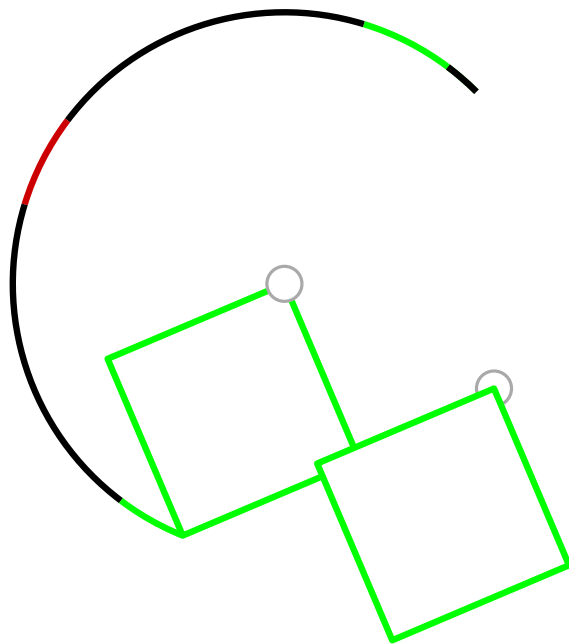


Label-Label Konflikt

Label-Punkt Konflikt

Konfliktlemma

Für ein Paar von Labeln besteht die Konfliktmenge aus höchstens vier zusammenhängenden Konfliktbereichen.

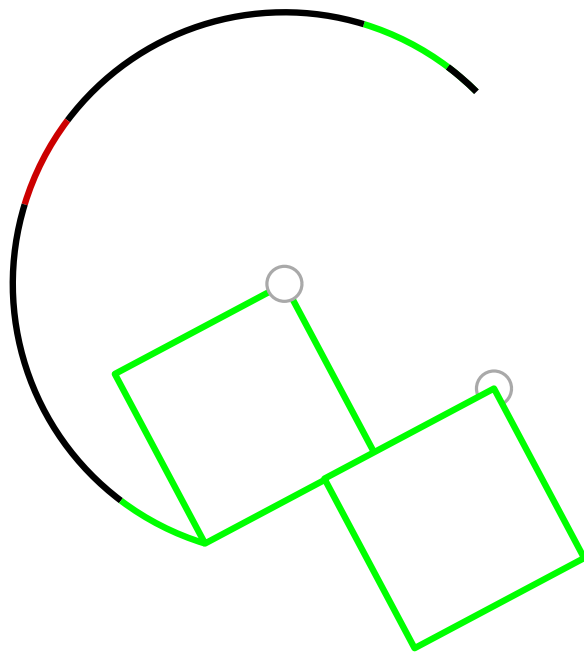


Label-Label Konflikt

Label-Punkt Konflikt

Konfliktlemma

Für ein Paar von Labeln besteht die Konfliktmenge aus höchstens vier zusammenhängenden Konfliktbereichen.

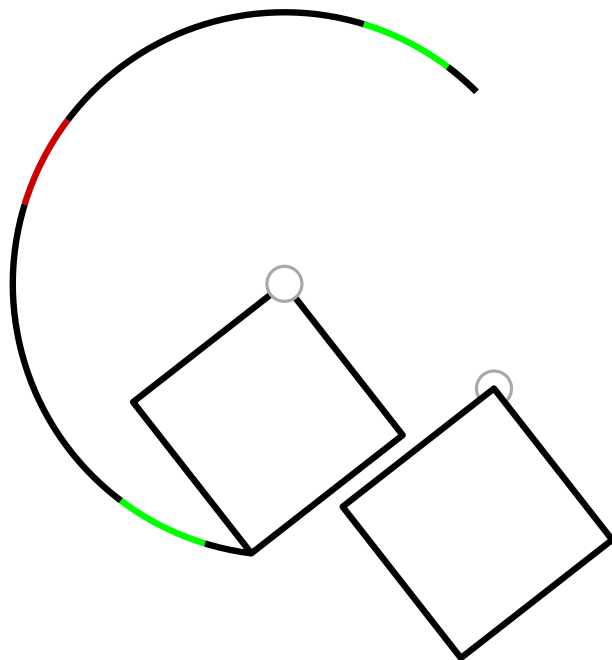


Label-Label Konflikt

Label-Punkt Konflikt

Konfliktlemma

Für ein Paar von Labeln besteht die Konfliktmenge aus höchstens vier zusammenhängenden Konfliktbereichen.

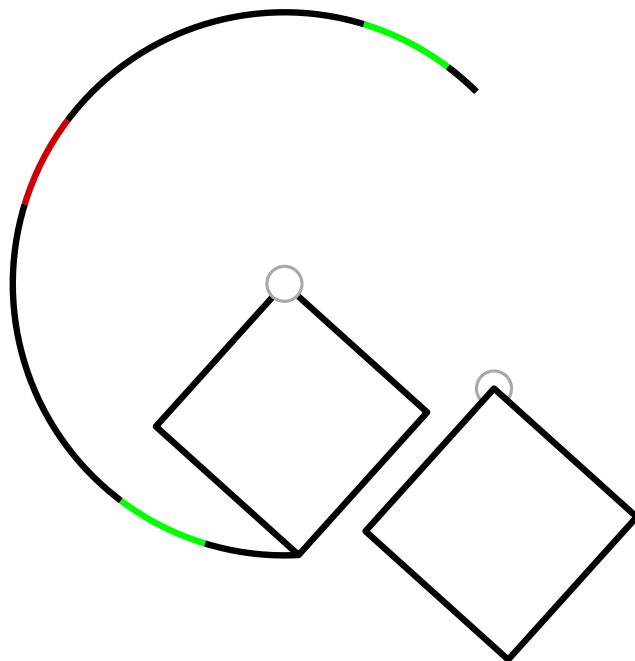


Label-Label Konflikt

Label-Punkt Konflikt

Konfliktlemma

Für ein Paar von Labeln besteht die Konfliktmenge aus höchstens vier zusammenhängenden Konfliktbereichen.

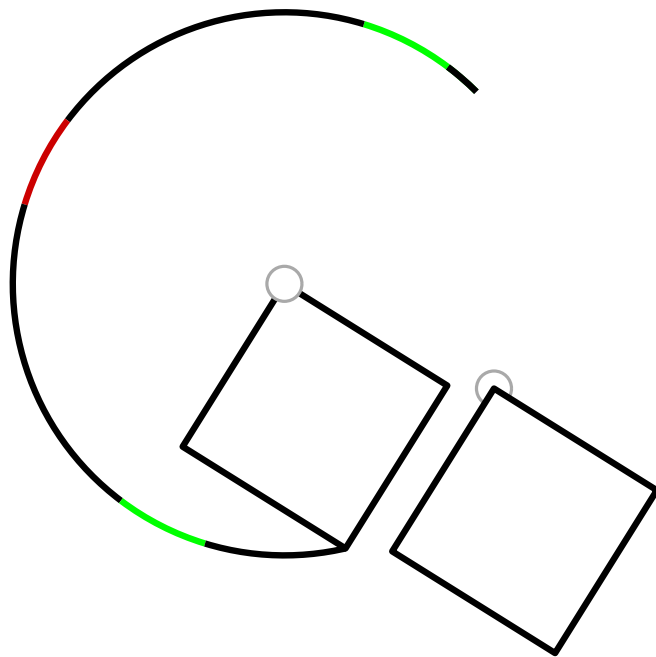


Label-Label Konflikt

Label-Punkt Konflikt

Konfliktlemma

Für ein Paar von Labeln besteht die Konfliktmenge aus höchstens vier zusammenhängenden Konfliktbereichen.

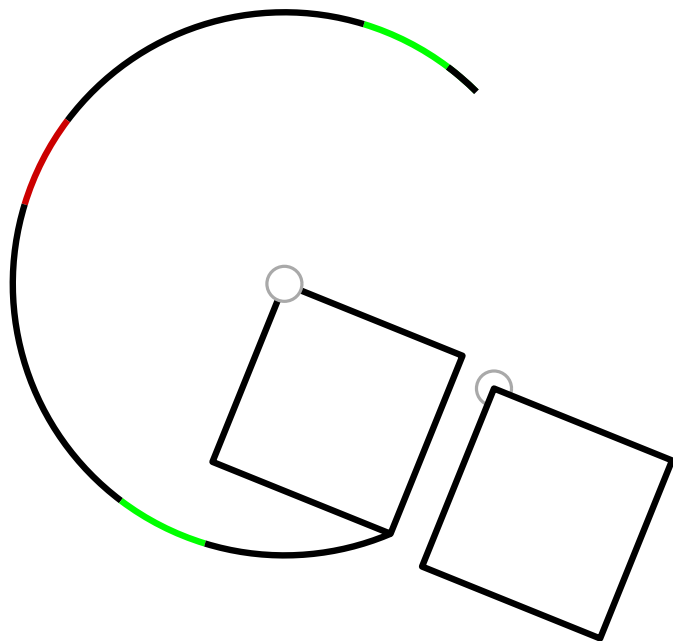


Label-Label Konflikt

Label-Punkt Konflikt

Konfliktlemma

Für ein Paar von Labeln besteht die Konfliktmenge aus höchstens vier zusammenhängenden Konfliktbereichen.

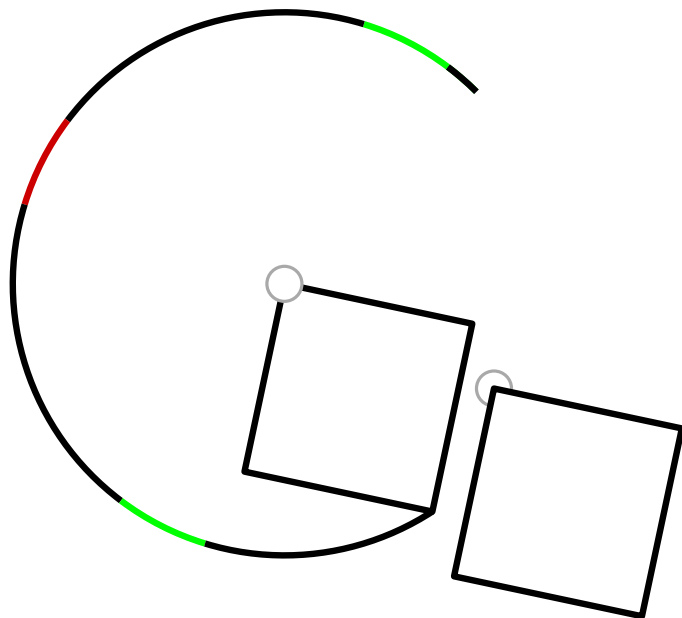


Label-Label Konflikt

Label-Punkt Konflikt

Konfliktlemma

Für ein Paar von Labeln besteht die Konfliktmenge aus höchstens vier zusammenhängenden Konfliktbereichen.

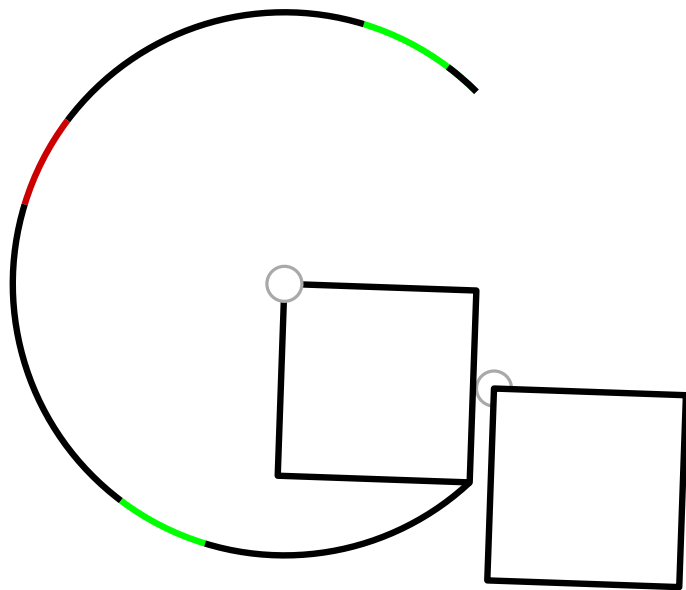


Label-Label Konflikt

Label-Punkt Konflikt

Konfliktlemma

Für ein Paar von Labeln besteht die Konfliktmenge aus höchstens vier zusammenhängenden Konfliktbereichen.

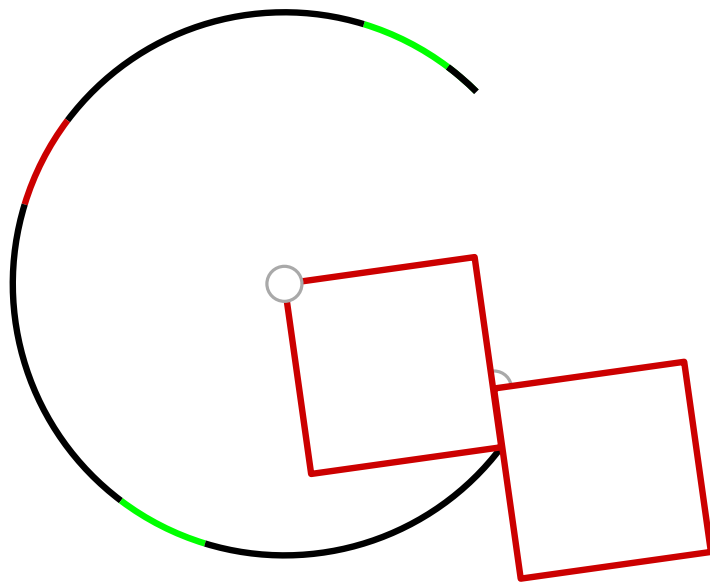


Label-Label Konflikt

Label-Punkt Konflikt

Konfliktlemma

Für ein Paar von Labeln besteht die Konfliktmenge aus höchstens vier zusammenhängenden Konfliktbereichen.

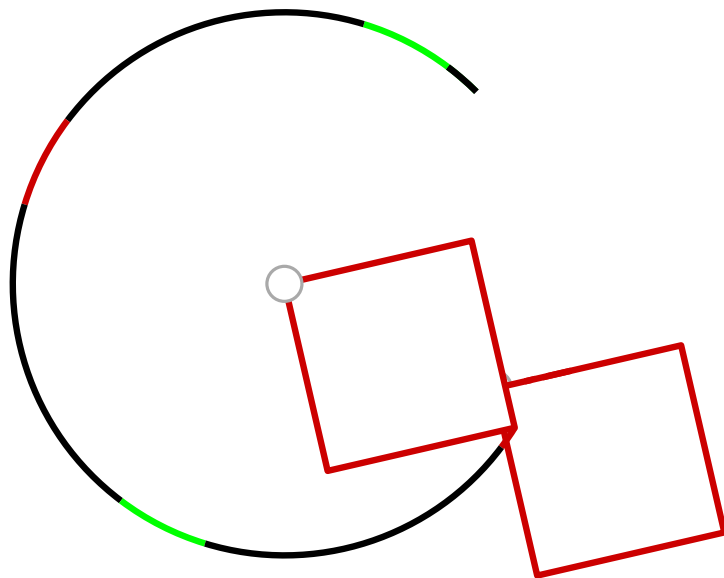


Label-Label Konflikt

Label-Punkt Konflikt

Konfliktlemma

Für ein Paar von Labeln besteht die Konfliktmenge aus höchstens vier zusammenhängenden Konfliktbereichen.

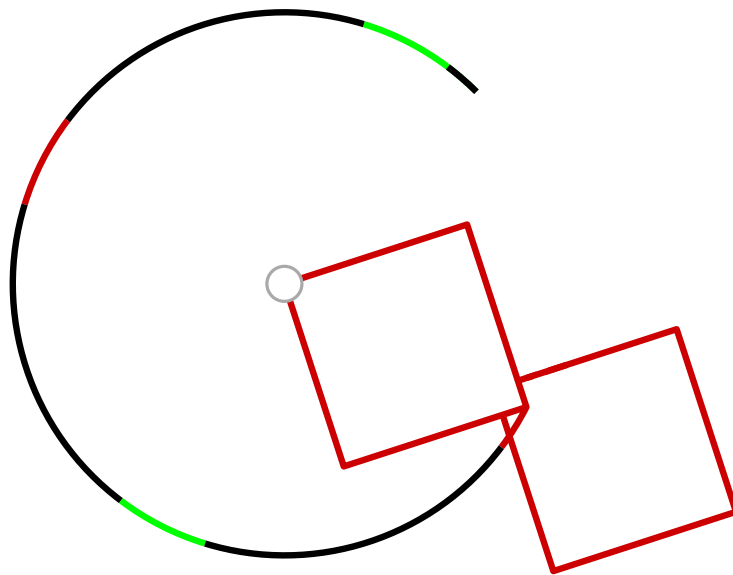


Label-Label Konflikt

Label-Punkt Konflikt

Konfliktlemma

Für ein Paar von Labeln besteht die Konfliktmenge aus höchstens vier zusammenhängenden Konfliktbereichen.

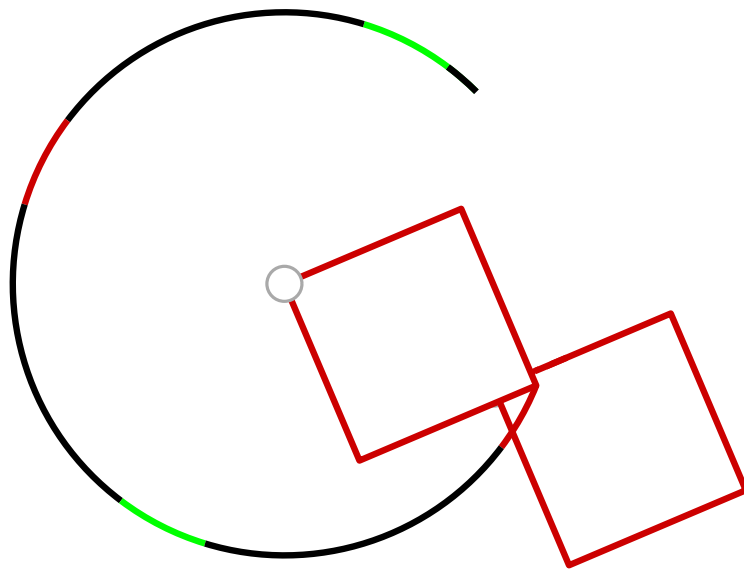


Label-Label Konflikt

Label-Punkt Konflikt

Konfliktlemma

Für ein Paar von Labeln besteht die Konfliktmenge aus höchstens vier zusammenhängenden Konfliktbereichen.

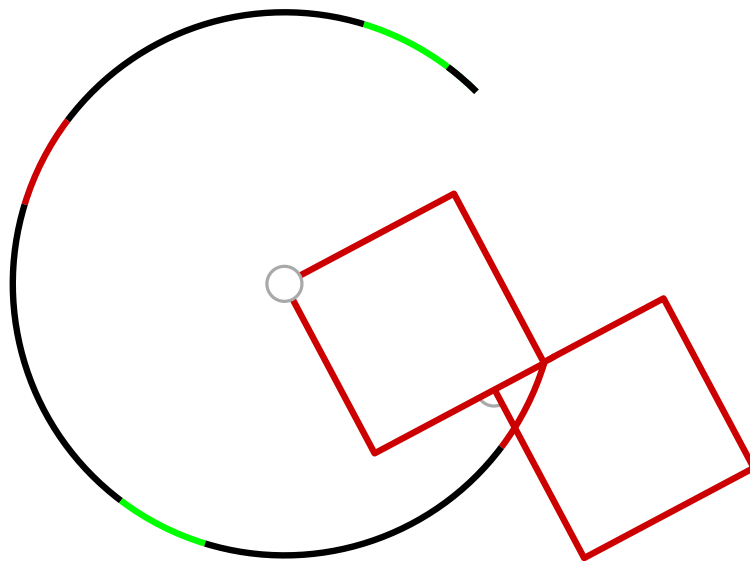


Label-Label Konflikt

Label-Punkt Konflikt

Konfliktlemma

Für ein Paar von Labeln besteht die Konfliktmenge aus höchstens vier zusammenhängenden Konfliktbereichen.

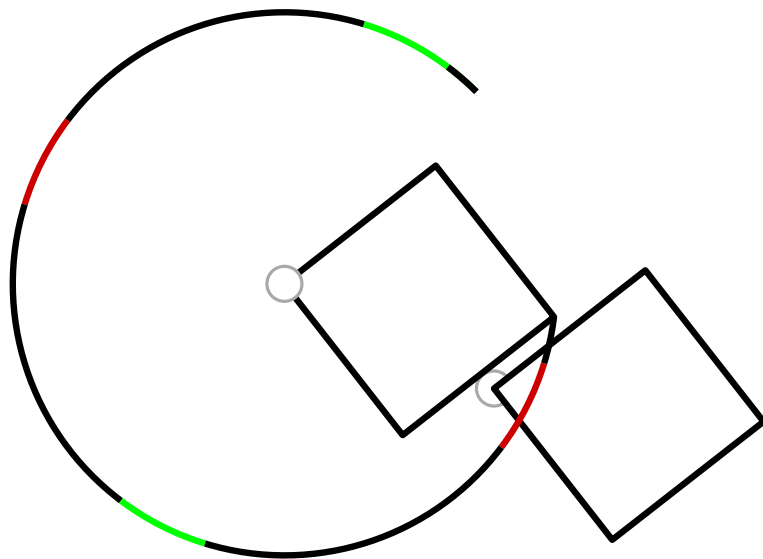


Label-Label Konflikt

Label-Punkt Konflikt

Konfliktlemma

Für ein Paar von Labeln besteht die Konfliktmenge aus höchstens vier zusammenhängenden Konfliktbereichen.

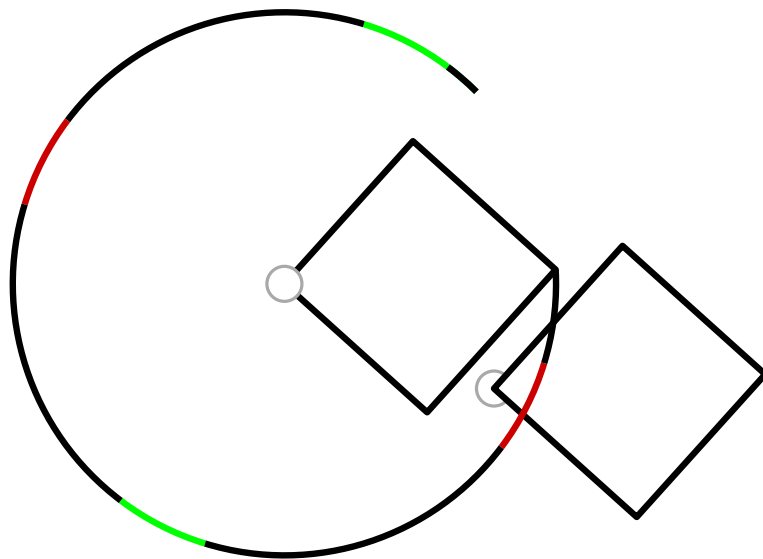


Label-Label Konflikt

Label-Punkt Konflikt

Konfliktlemma

Für ein Paar von Labeln besteht die Konfliktmenge aus höchstens vier zusammenhängenden Konfliktbereichen.

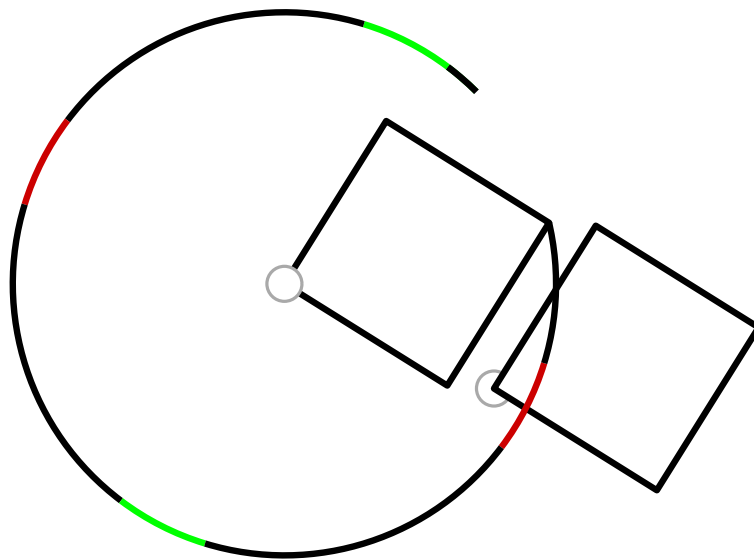


Label-Label Konflikt

Label-Punkt Konflikt

Konfliktlemma

Für ein Paar von Labeln besteht die Konfliktmenge aus höchstens vier zusammenhängenden Konfliktbereichen.

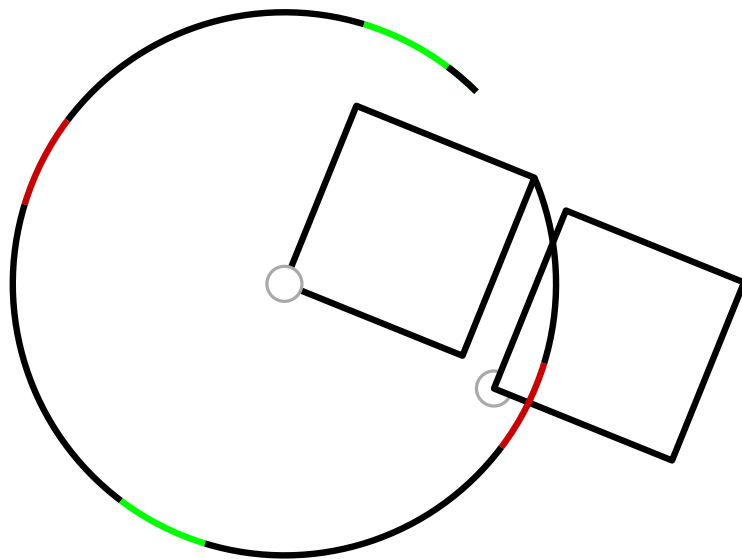


Label-Label Konflikt

Label-Punkt Konflikt

Konfliktlemma

Für ein Paar von Labeln besteht die Konfliktmenge aus höchstens vier zusammenhängenden Konfliktbereichen.

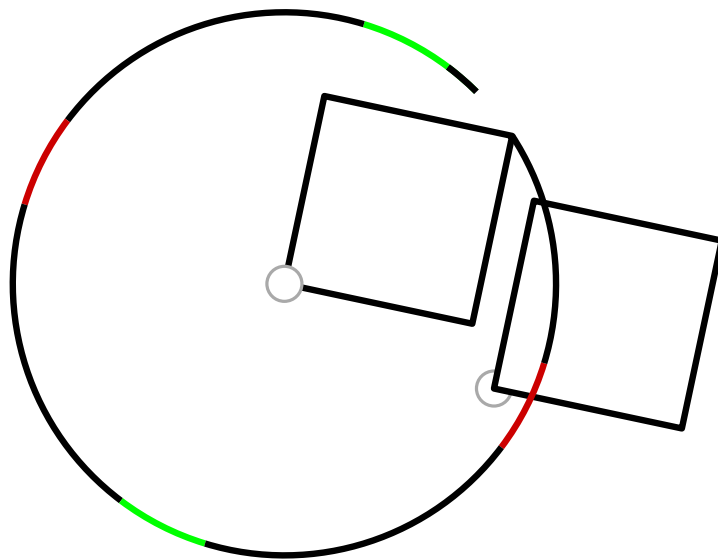


Label-Label Konflikt

Label-Punkt Konflikt

Konfliktlemma

Für ein Paar von Labeln besteht die Konfliktmenge aus höchstens vier zusammenhängenden Konfliktbereichen.

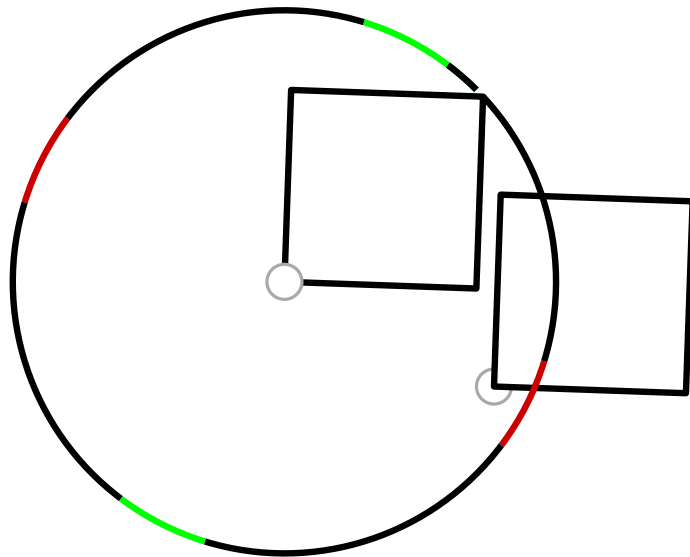


Label-Label Konflikt

Label-Punkt Konflikt

Konfliktlemma

Für ein Paar von Labeln besteht die Konfliktmenge aus höchstens vier zusammenhängenden Konfliktbereichen.

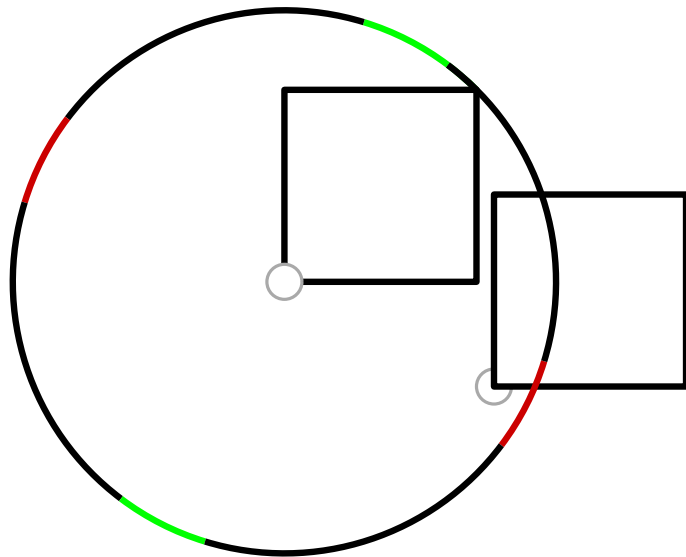


Label-Label Konflikt

Label-Punkt Konflikt

Konfliktlemma

Für ein Paar von Labeln besteht die Konfliktmenge aus höchstens vier zusammenhängenden Konfliktbereichen.

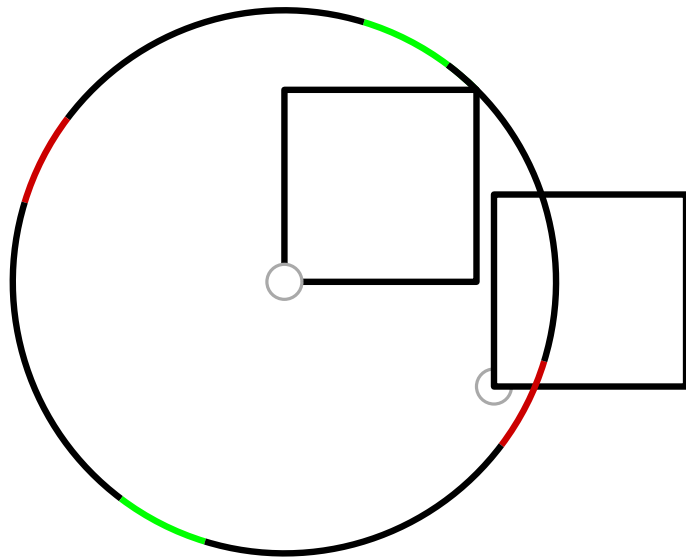


Label-Label Konflikt

Label-Punkt Konflikt

Konfliktlemma

Für ein Paar von Labeln besteht die Konfliktmenge aus höchstens vier zusammenhängenden Konfliktbereichen.

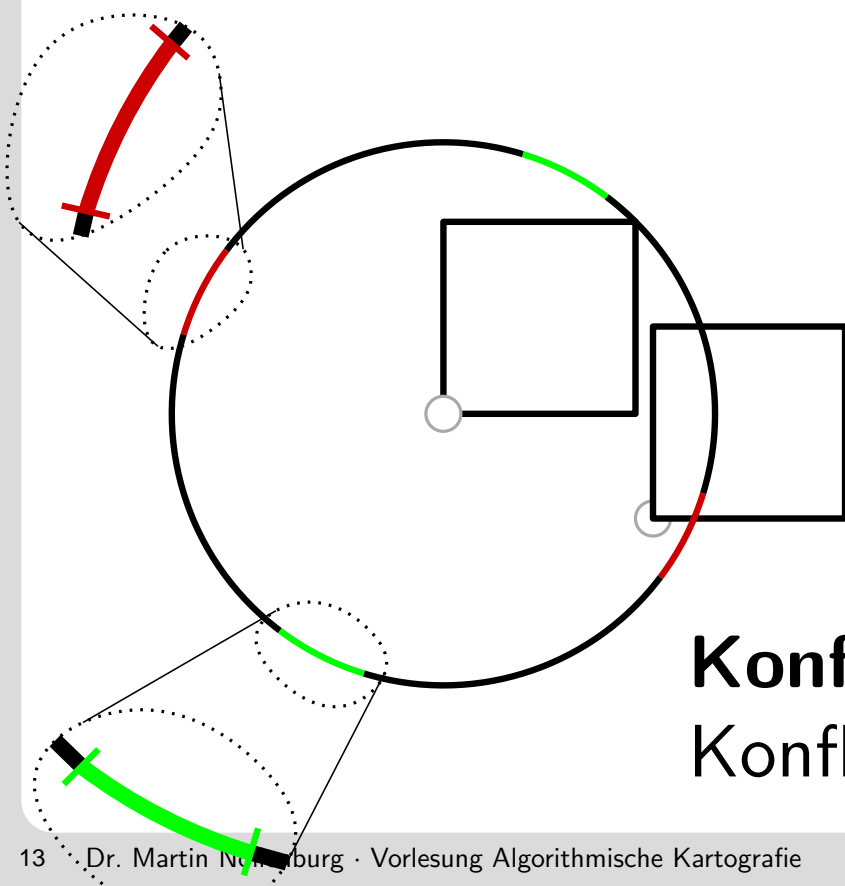


Label-Label Konflikt

Label-Punkt Konflikt

Konfliktlemma

Für ein Paar von Labeln besteht die Konfliktmenge aus höchstens vier zusammenhängenden Konfliktbereichen.



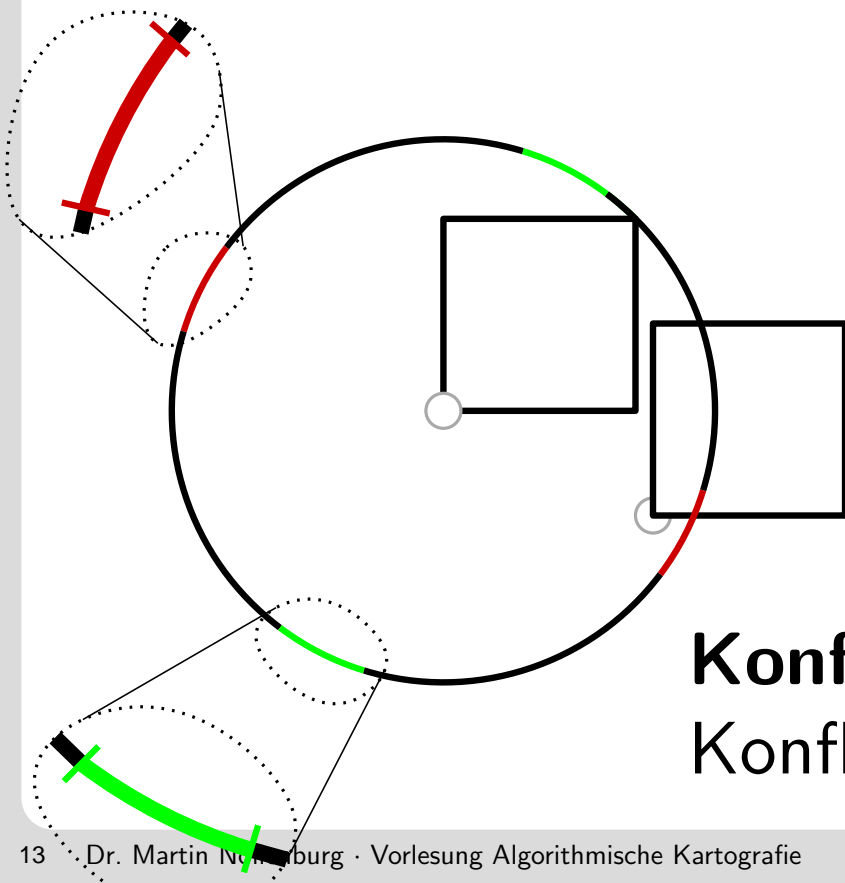
Label-Label Konflikt

Label-Punkt Konflikt

Konflikt-Events: Anfang/Ende eines Konfliktbereichs (Labelränder schneiden sich)

Konfliktlemma

Für ein Paar von Labeln besteht die Konfliktmenge aus höchstens vier zusammenhängenden Konfliktbereichen.



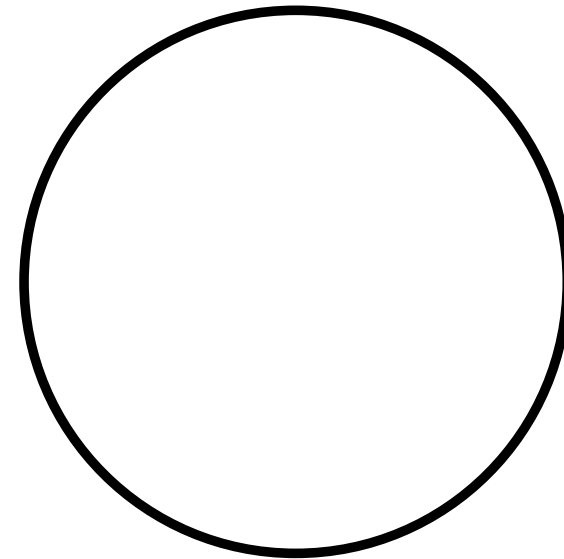
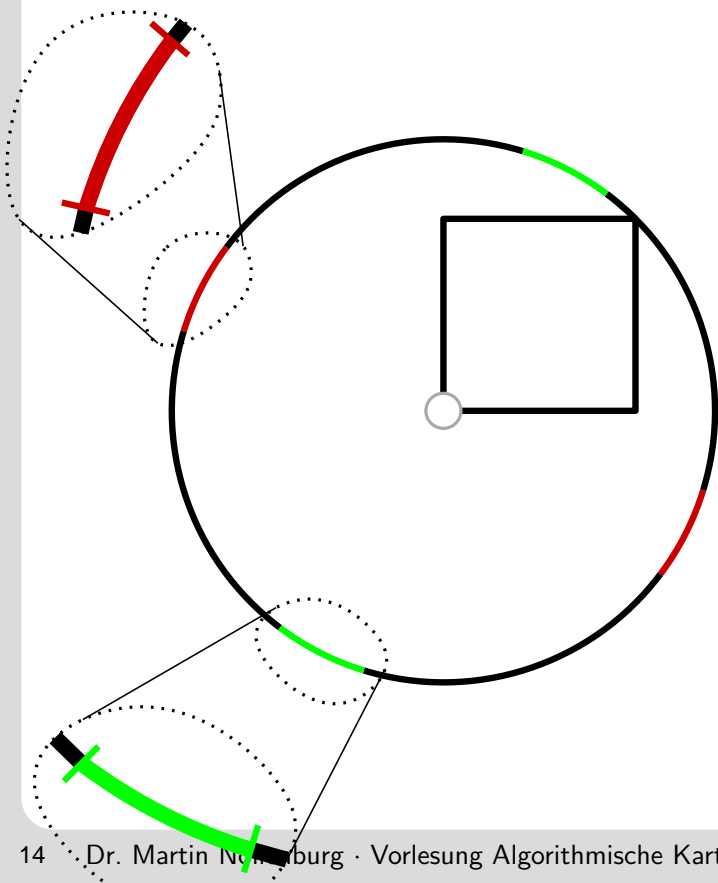
Label-Label Konflikt

Label-Punkt Konflikt

max. 8 Events pro Label-Paar

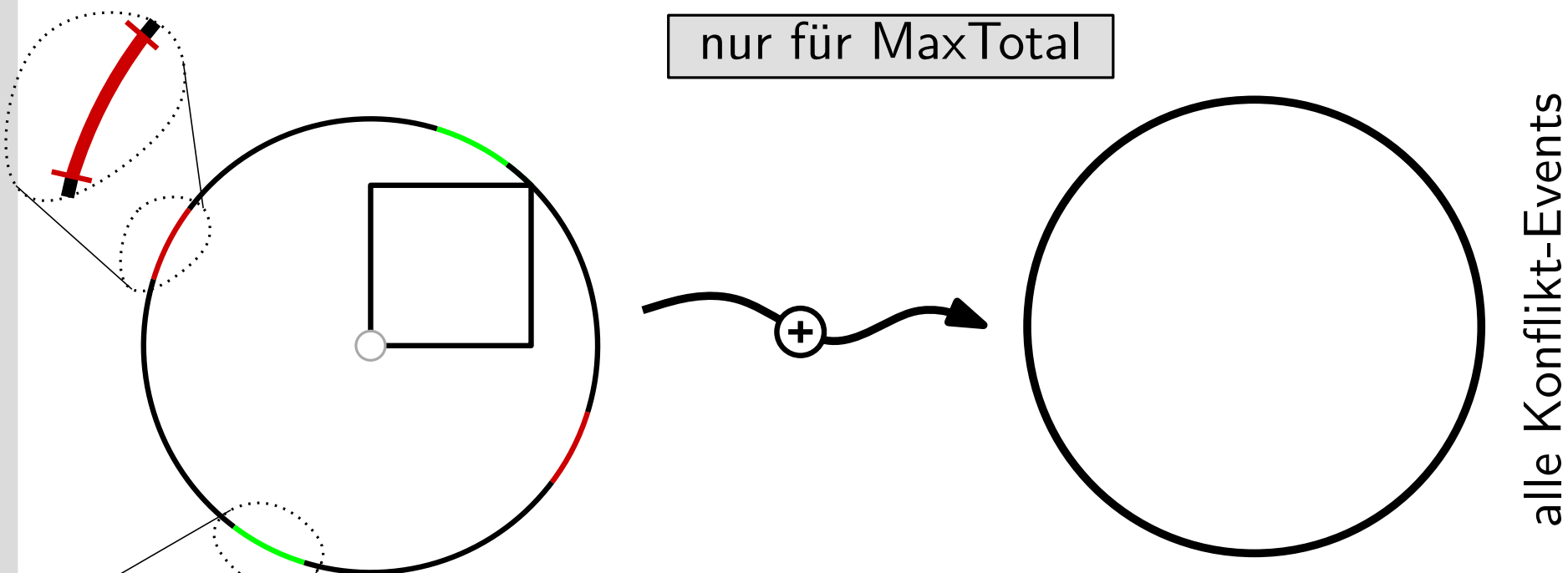
Konflikt-Events: Anfang/Ende eines Konfliktbereichs (Labelränder schneiden sich)

nur für MaxTotal



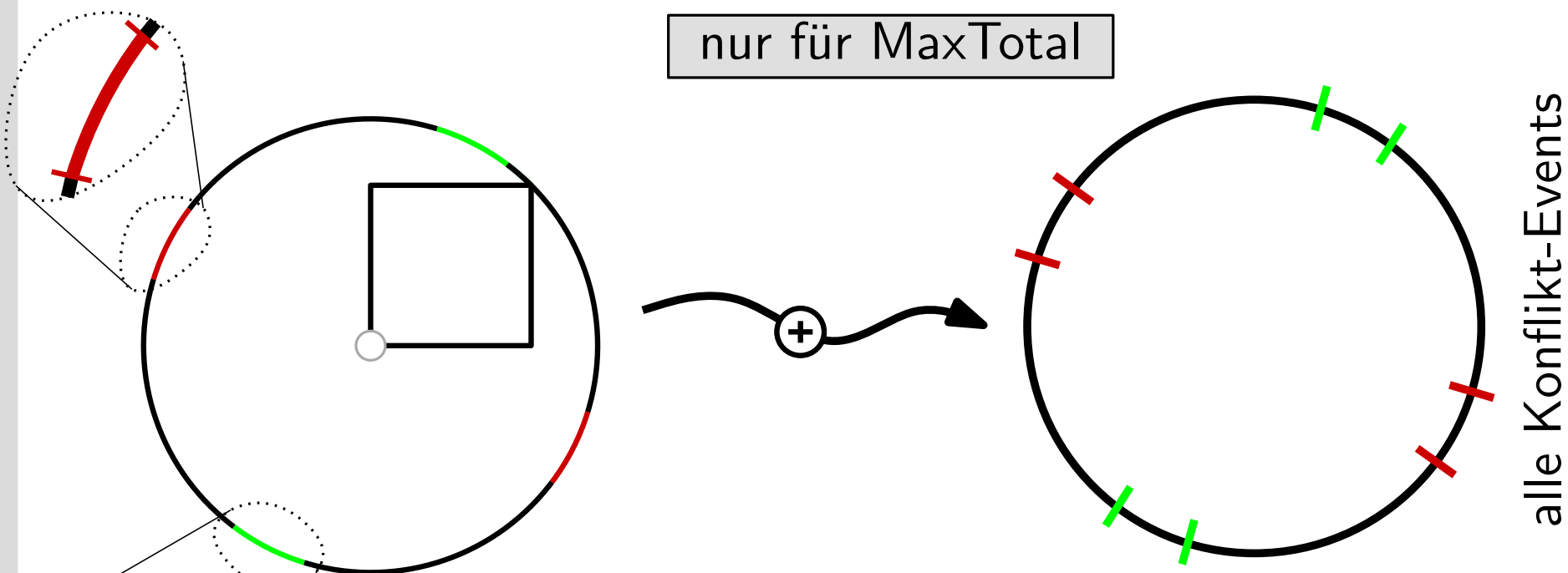
Diskretisierungslemma

Es gibt eine optimale Lösung für MaxTotal, in der alle aktiven Bereiche an Konflikt-Events anfangen und enden.



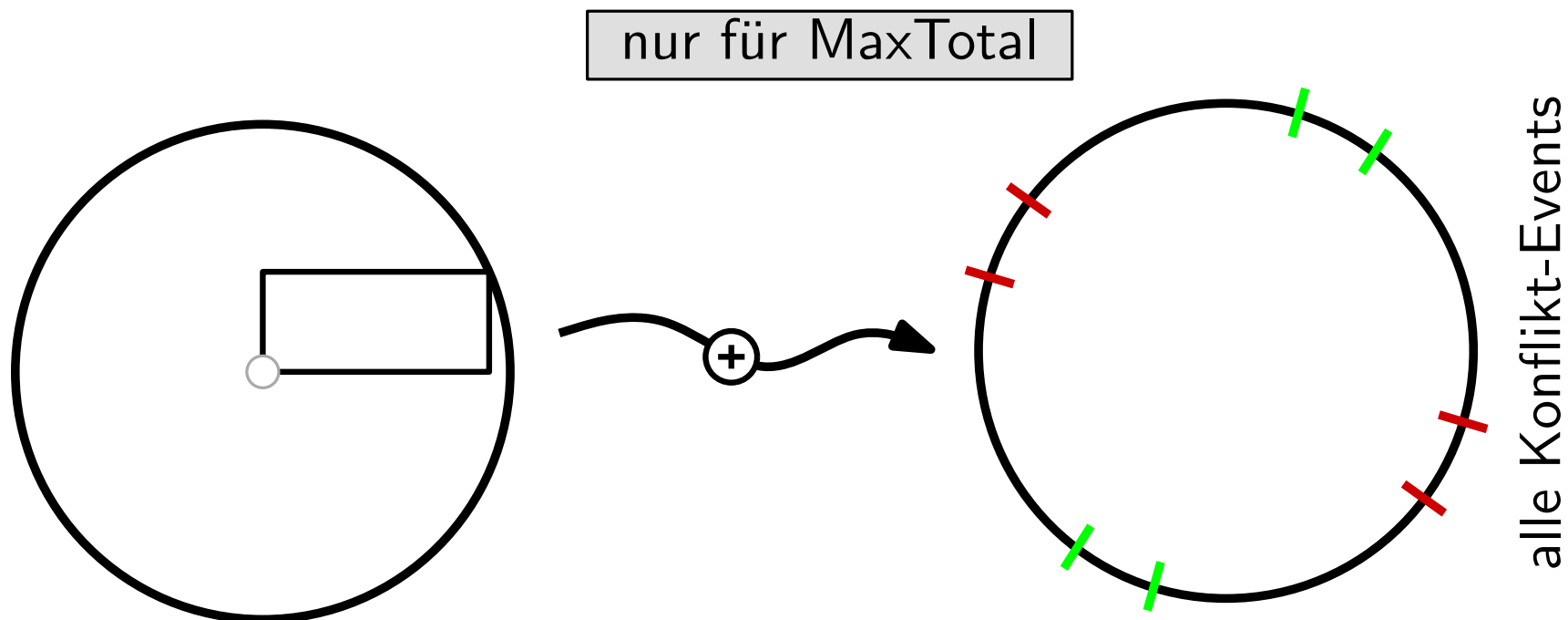
Diskretisierungslemma

Es gibt eine optimale Lösung für MaxTotal, in der alle aktiven Bereiche an Konflikt-Events anfangen und enden.



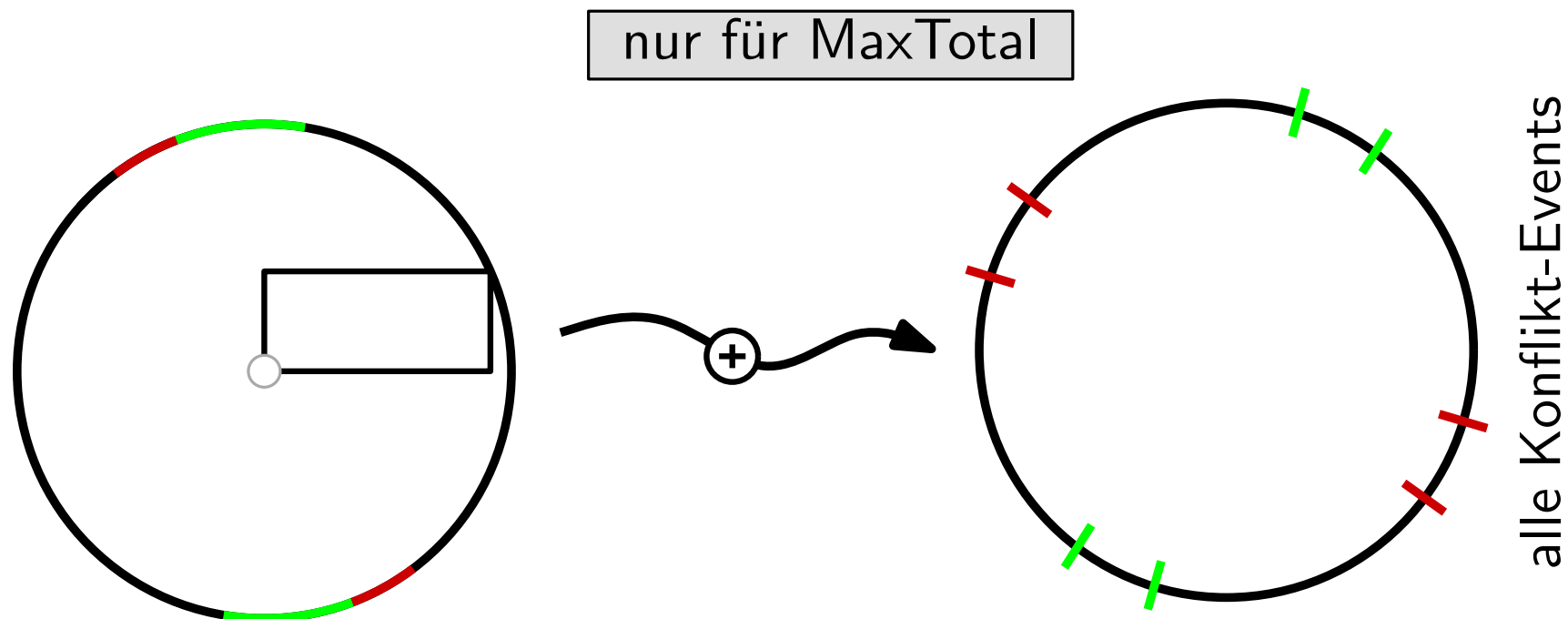
Diskretisierungslemma

Es gibt eine optimale Lösung für MaxTotal, in der alle aktiven Bereiche an Konflikt-Events anfangen und enden.



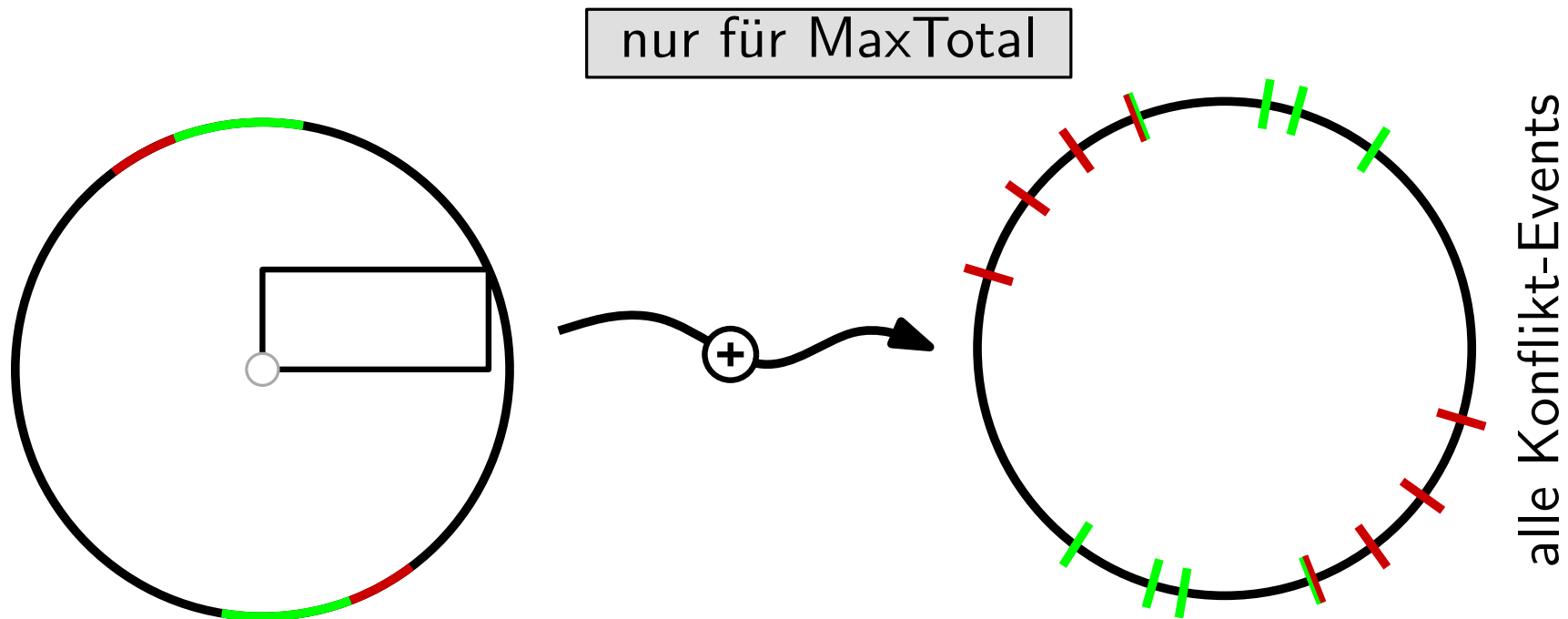
Diskretisierungslemma

Es gibt eine optimale Lösung für MaxTotal, in der alle aktiven Bereiche an Konflikt-Events anfangen und enden.



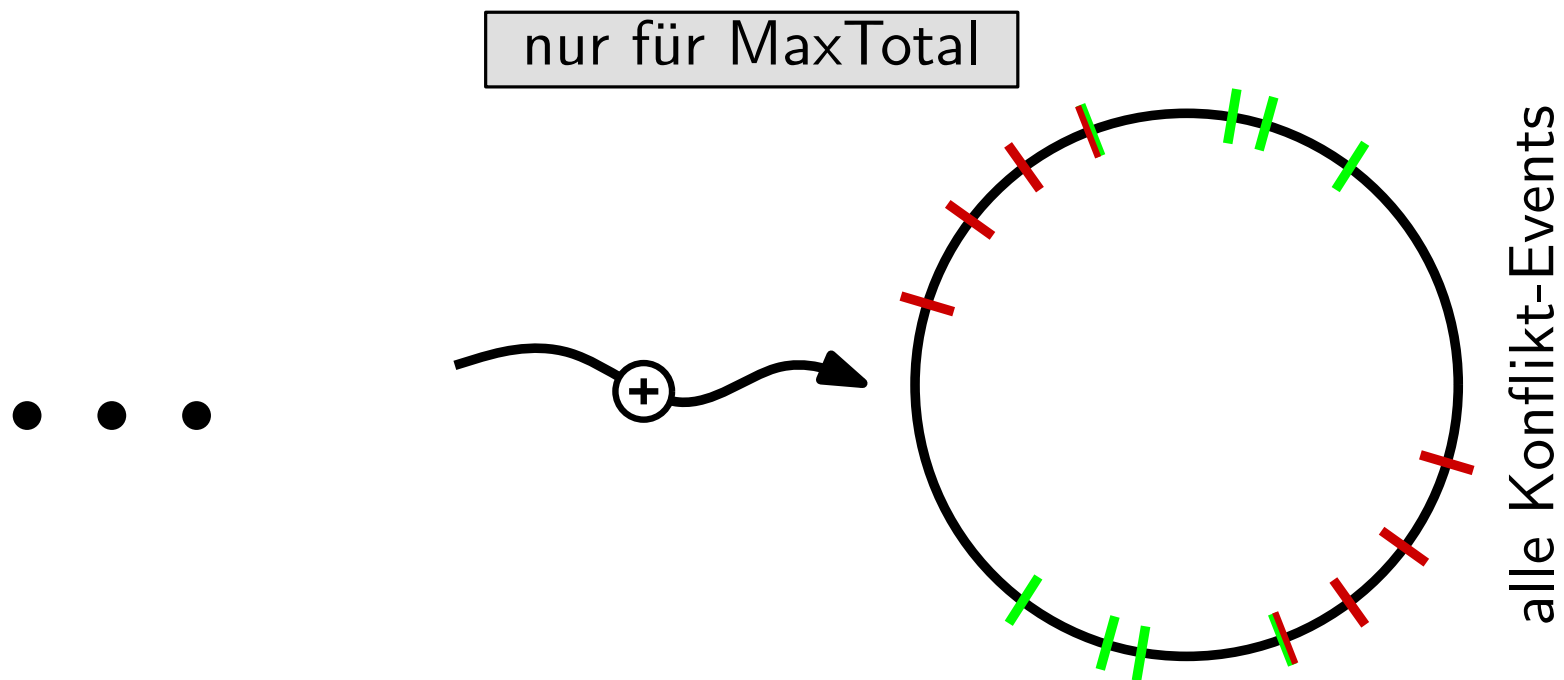
Diskretisierungslemma

Es gibt eine optimale Lösung für MaxTotal, in der alle aktiven Bereiche an Konflikt-Events anfangen und enden.



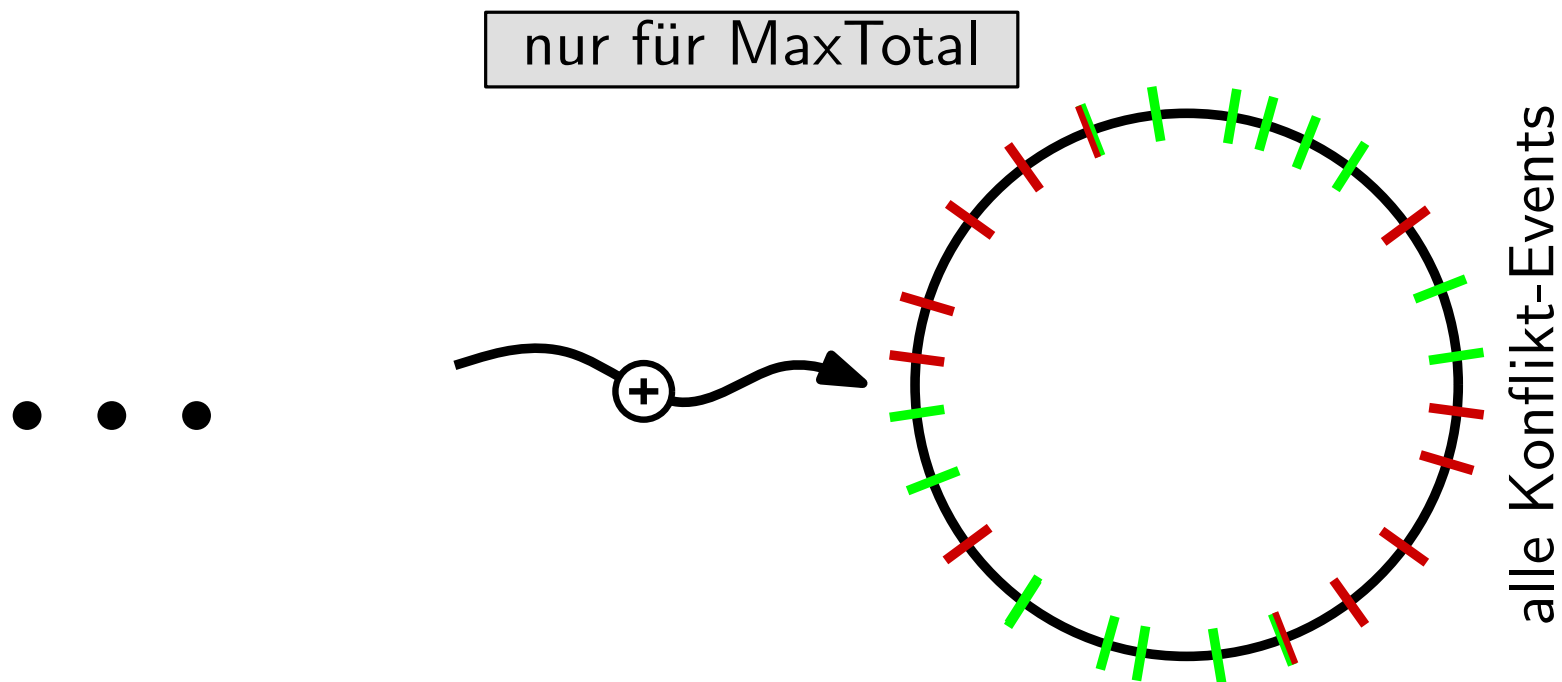
Diskretisierungslemma

Es gibt eine optimale Lösung für MaxTotal, in der alle aktiven Bereiche an Konflikt-Events anfangen und enden.



Diskretisierungslemma

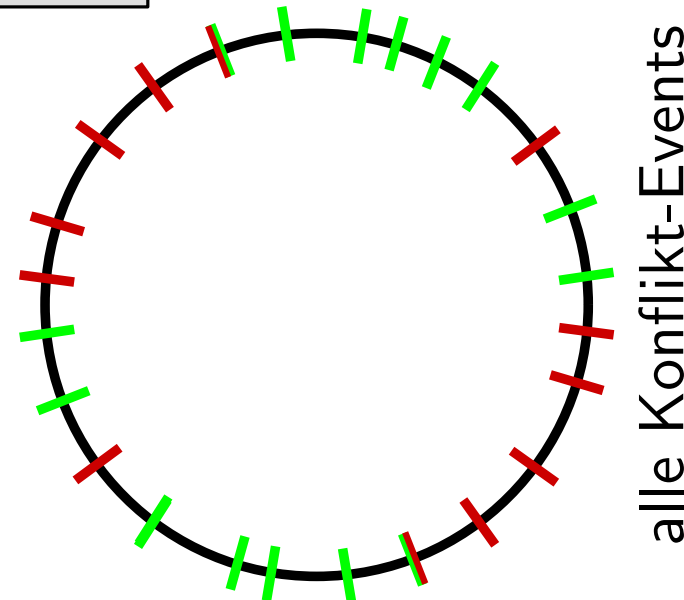
Es gibt eine optimale Lösung für MaxTotal, in der alle aktiven Bereiche an Konflikt-Events anfangen und enden.



Diskretisierungslemma

Es gibt eine optimale Lösung für MaxTotal, in der alle aktiven Bereiche an Konflikt-Events anfangen und enden.

nur für MaxTotal

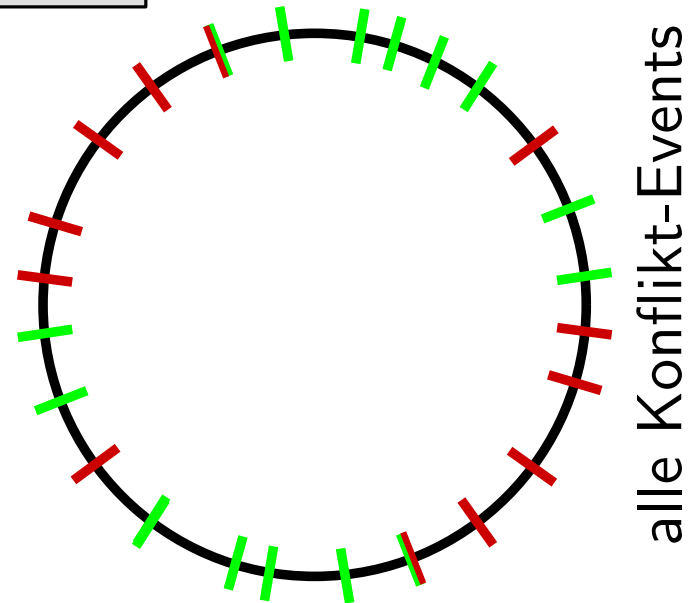


Diskretisierungslemma

Es gibt eine optimale Lösung für MaxTotal, in der alle aktiven Bereiche an Konflikt-Events anfangen und enden.

nur für MaxTotal

Q: (naiver) Algorithmus für optimale Lösung?



Diskretisierungslemma

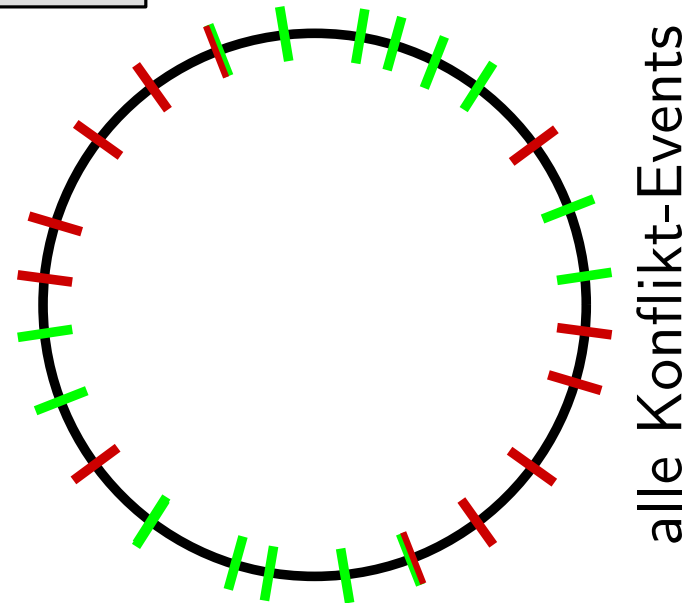
Es gibt eine optimale Lösung für MaxTotal, in der alle aktiven Bereiche an Konflikt-Events anfangen und enden.

nur für MaxTotal

naiver Ansatz

finde optimale Lösung:

- berechne alle Konflikt-Events
- pro Label $\mathcal{O}(n^4)$ Kandidaten für Konfliktbereiche
- betrachte alle möglichen Kombinationen



Diskretisierungslemma

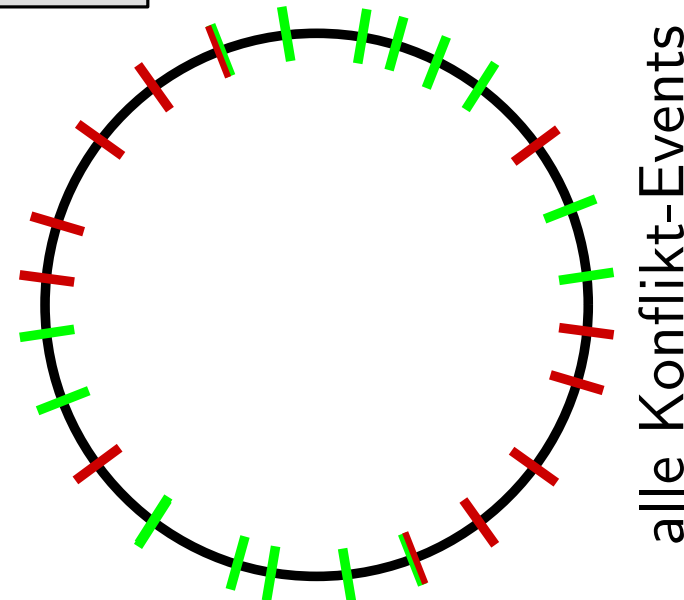
Es gibt eine optimale Lösung für MaxTotal, in der alle aktiven Bereiche an Konflikt-Events anfangen und enden.

nur für MaxTotal

naiver Ansatz

finde optimale Lösung:

- berechne alle Konflikt-Events
- pro Label $\mathcal{O}(n^4)$ Kandidaten für Konfliktbereiche
- betrachte alle möglichen Kombinationen



Zeitkomplexität?

Diskretisierungslemma

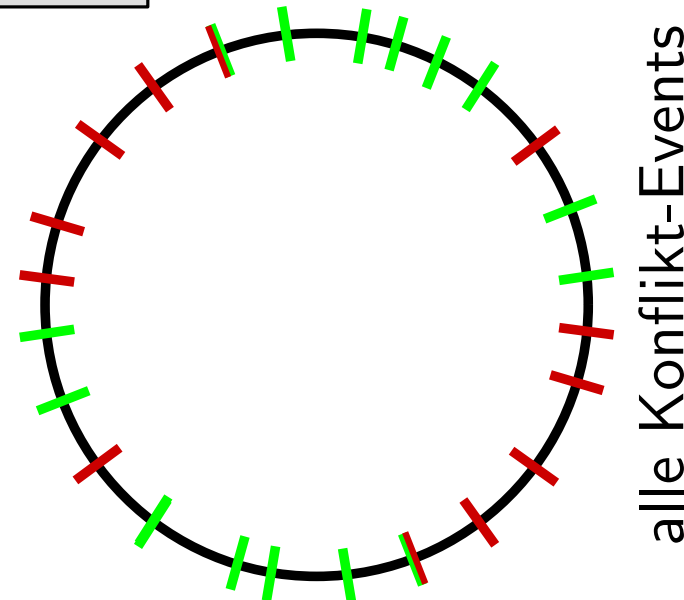
Es gibt eine optimale Lösung für MaxTotal, in der alle aktiven Bereiche an Konflikt-Events anfangen und enden.

nur für MaxTotal

naiver Ansatz

finde optimale Lösung:

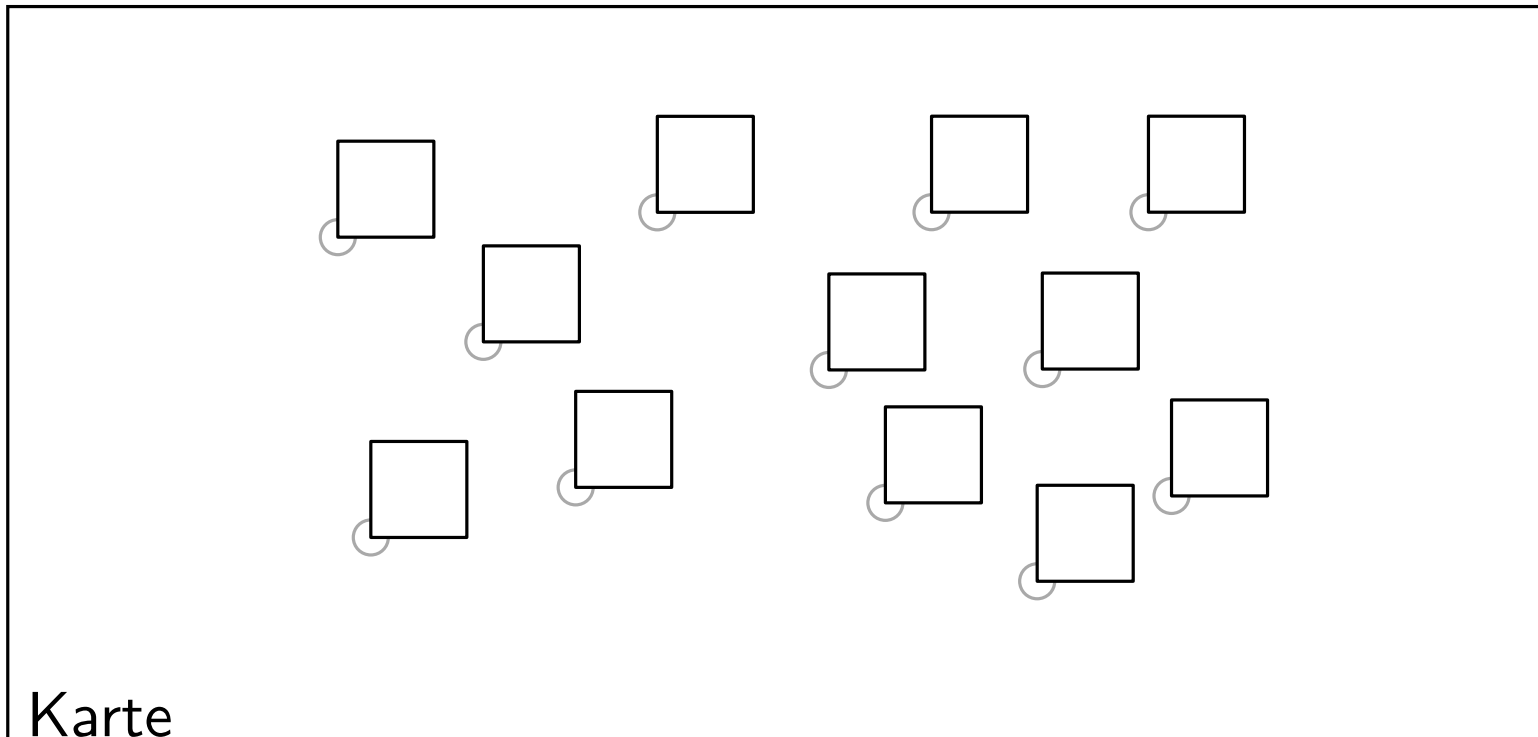
- berechne alle Konflikt-Events
- pro Label $\mathcal{O}(n^4)$ Kandidaten für Konfliktbereiche
- betrachte alle möglichen Kombinationen



Zeitkomplexität?

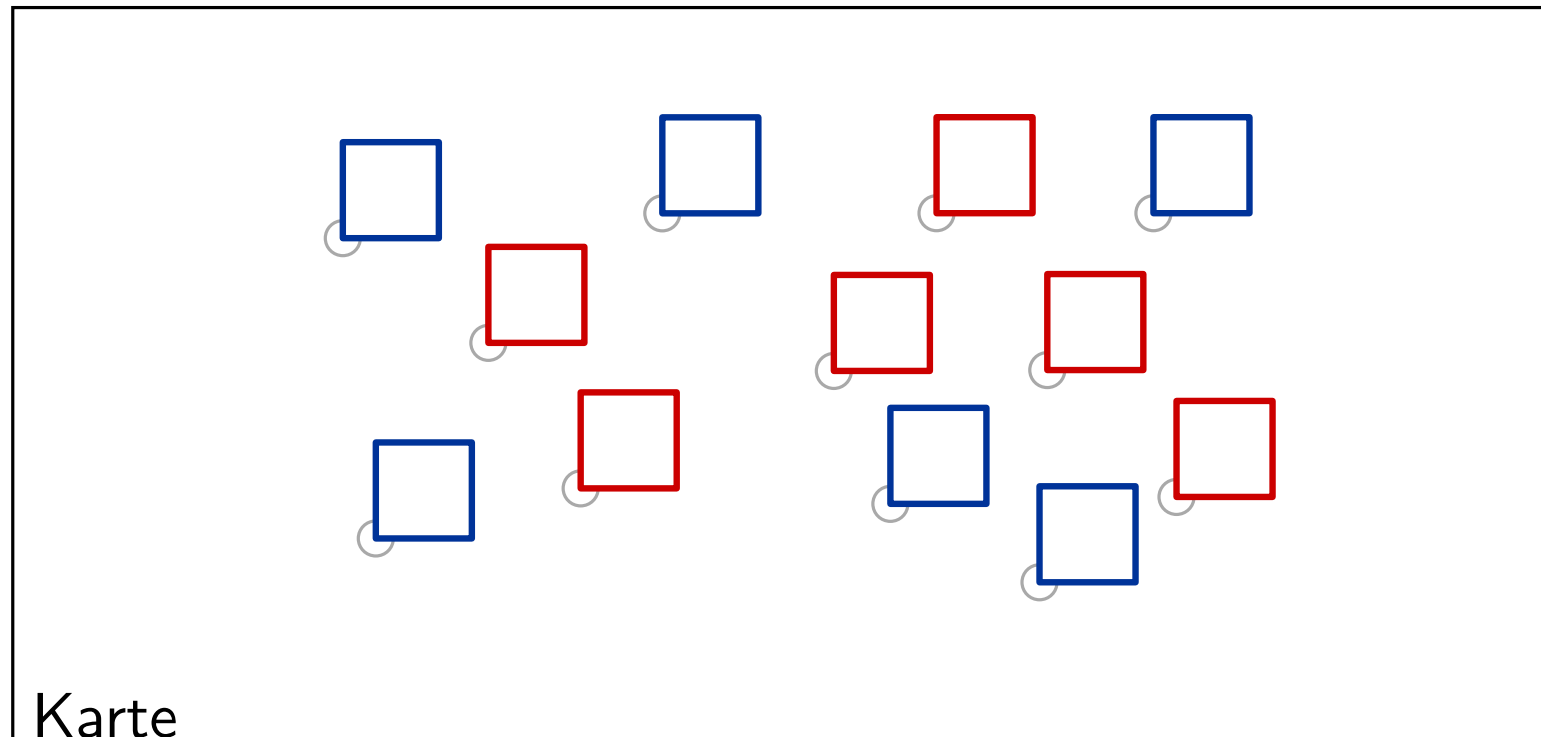
$$\mathcal{O}(n^{4n})$$

Beobachtung 1: disjunkte Teilmengen



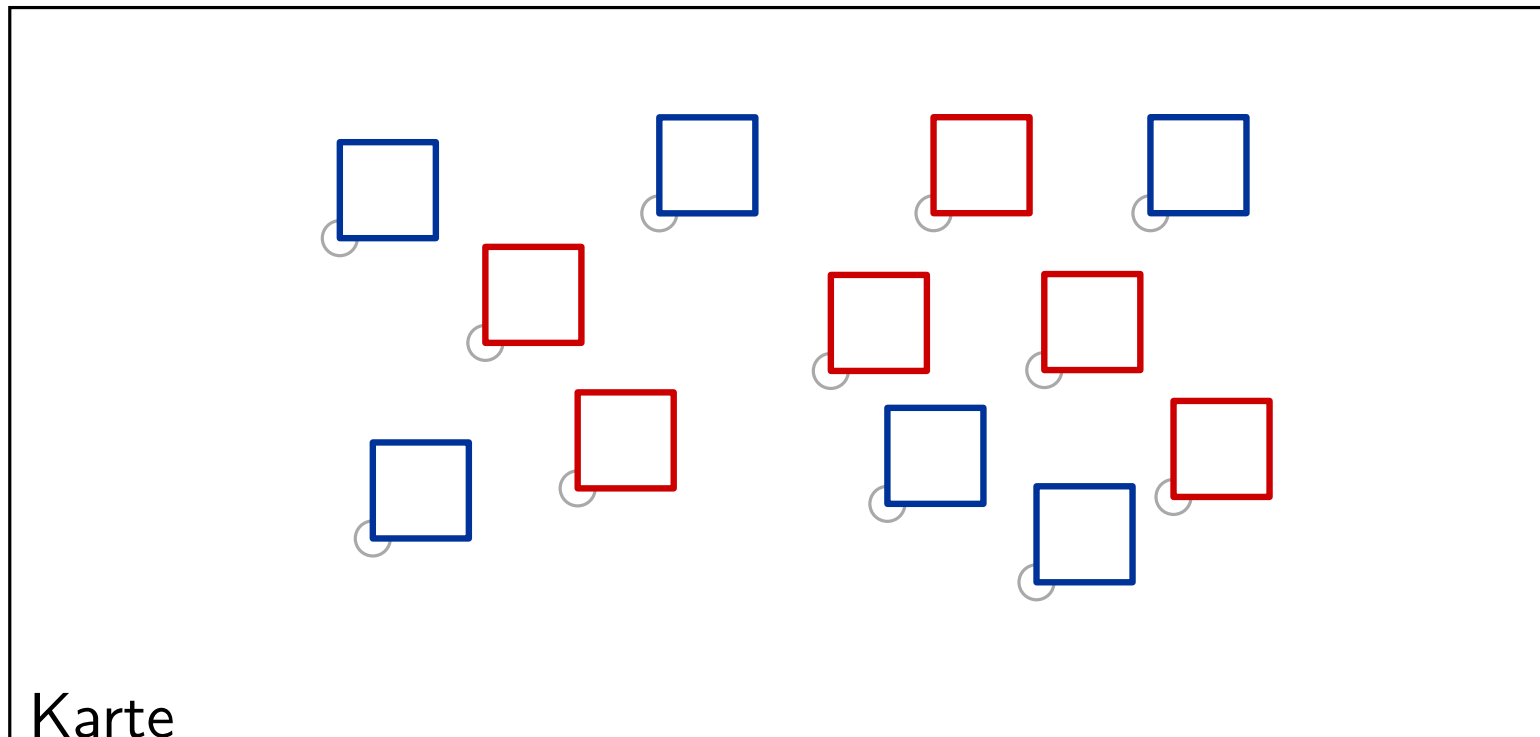
- zerlege Labelmenge in k disjunkte Teilmengen

Beobachtung 1: disjunkte Teilmengen



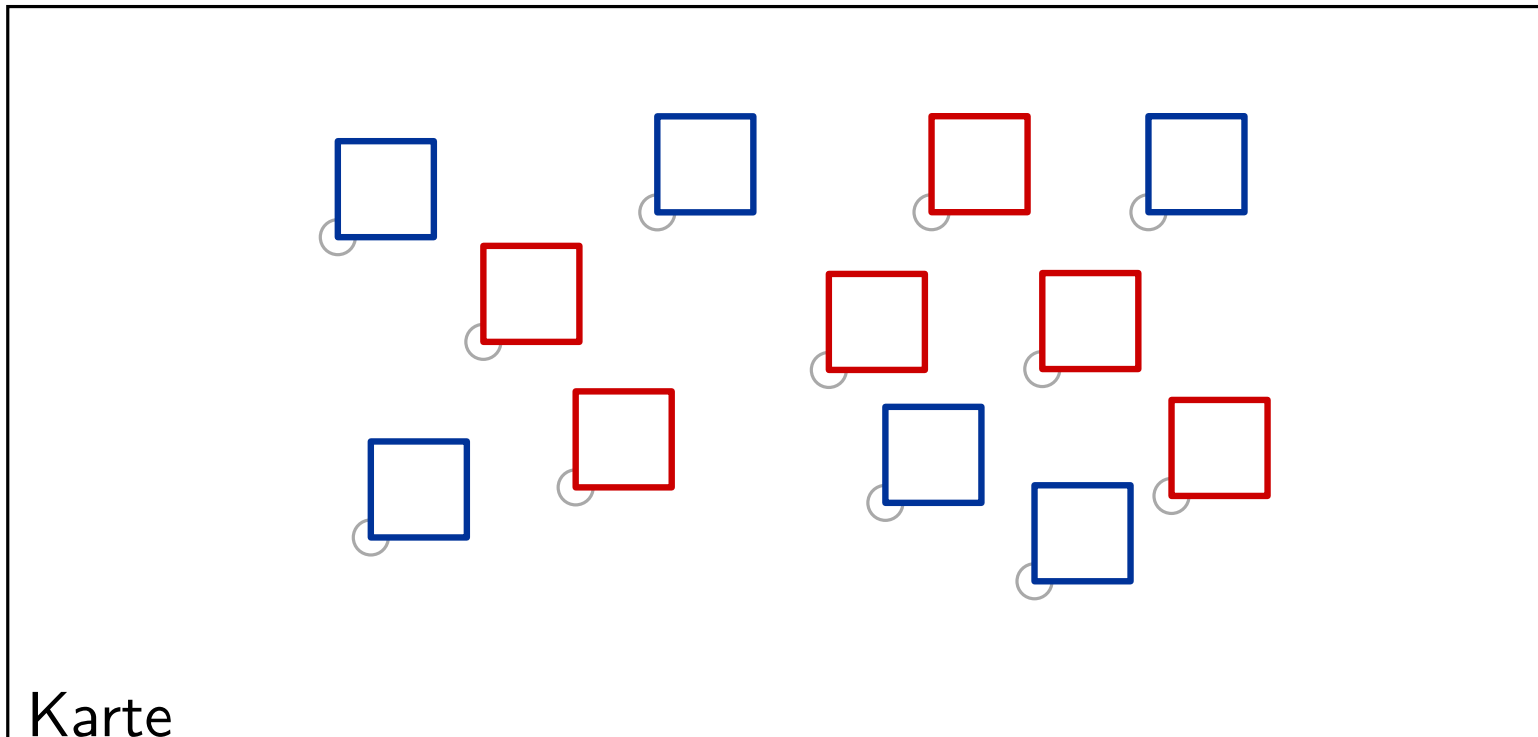
- zerlege Labelmenge in k disjunkte Teilmengen

Beobachtung 1: disjunkte Teilmengen



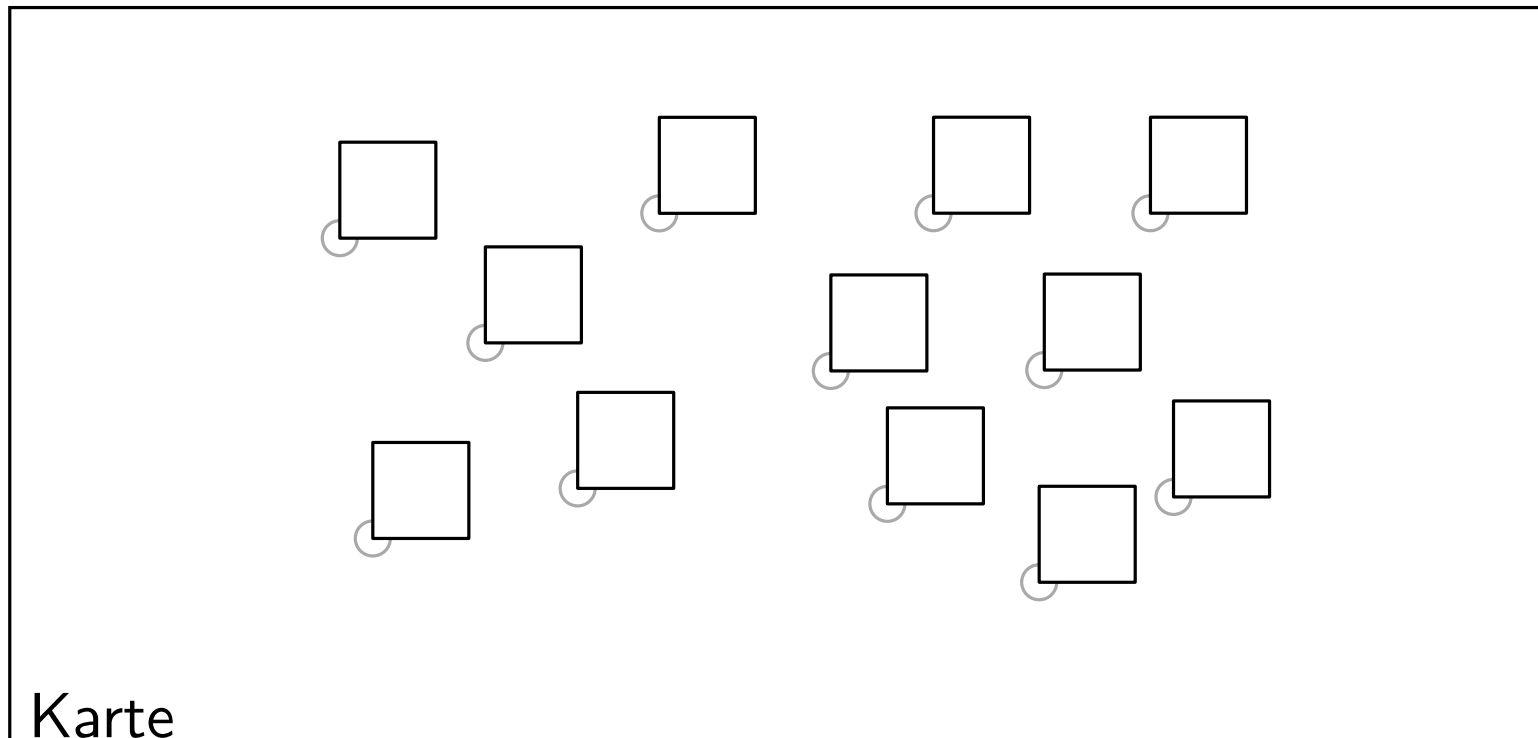
- zerlege Labelmenge in k disjunkte Teilmengen
- bestimme optimale Lösung für jede Teilmenge

Beobachtung 1: disjunkte Teilmengen

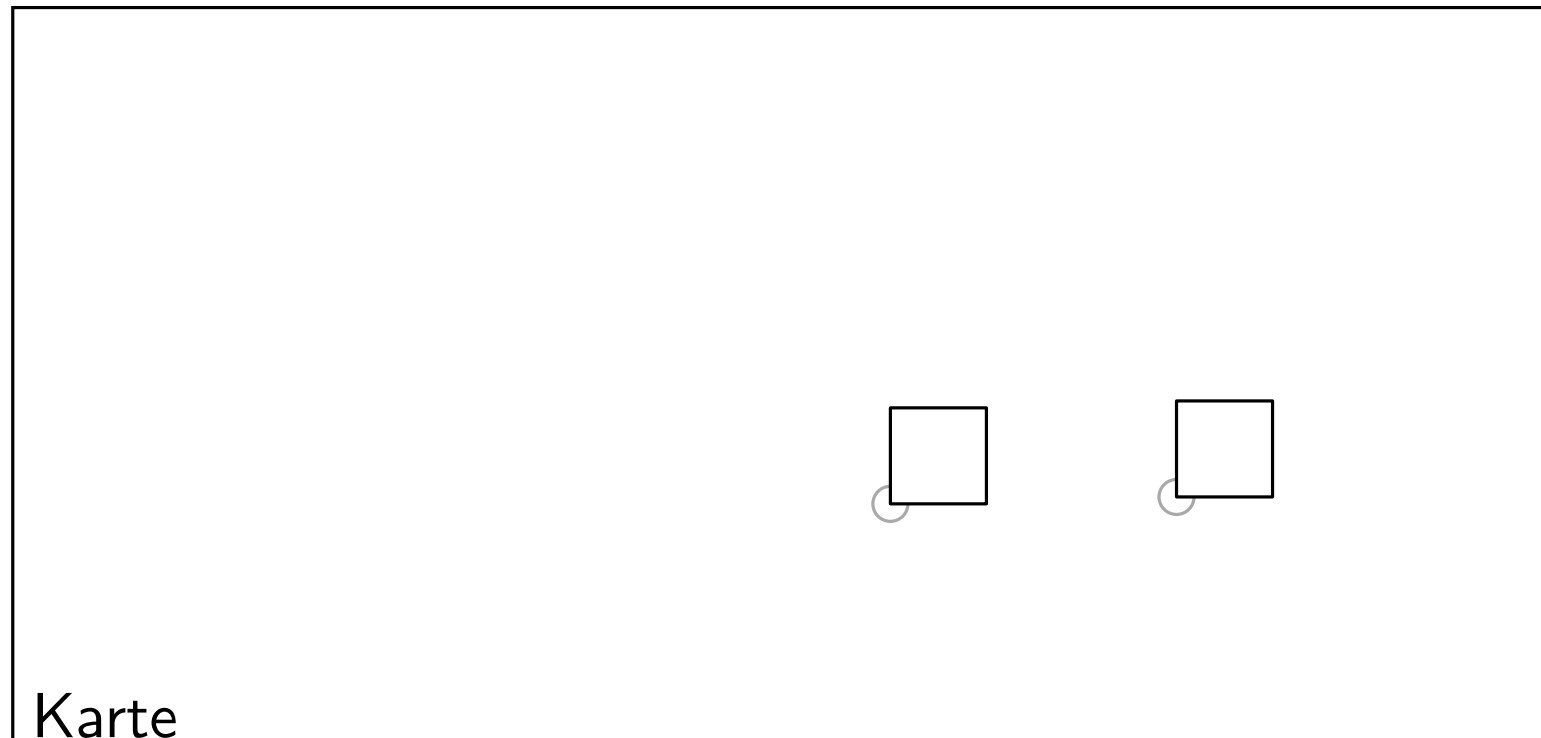


- zerlege Labelmenge in k disjunkte Teilmengen
 - bestimme optimale Lösung für jede Teilmenge
- ⇒ eine der k Lösungen ist eine $1/k$ -Approximation

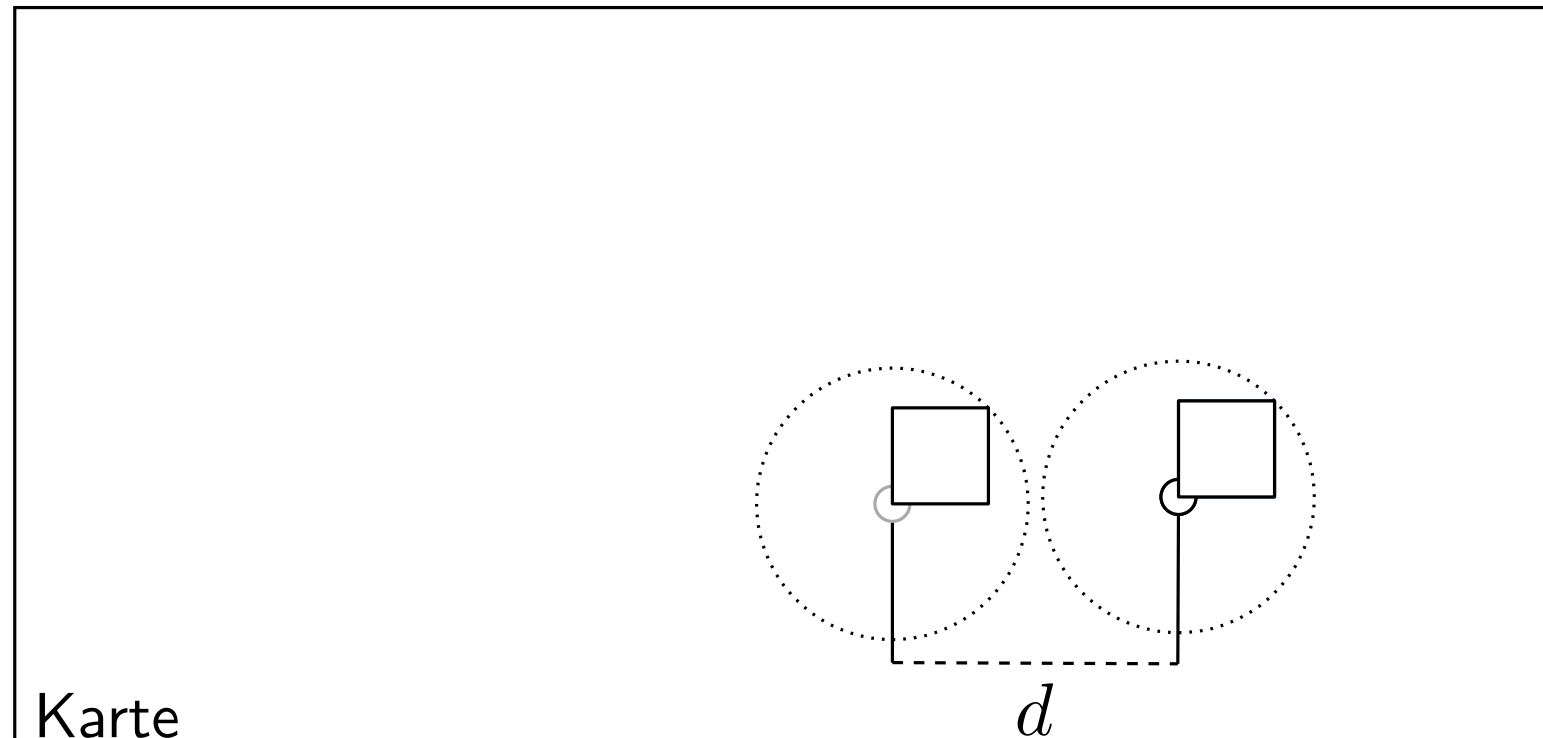
Beobachtung 2: Einflussbereich



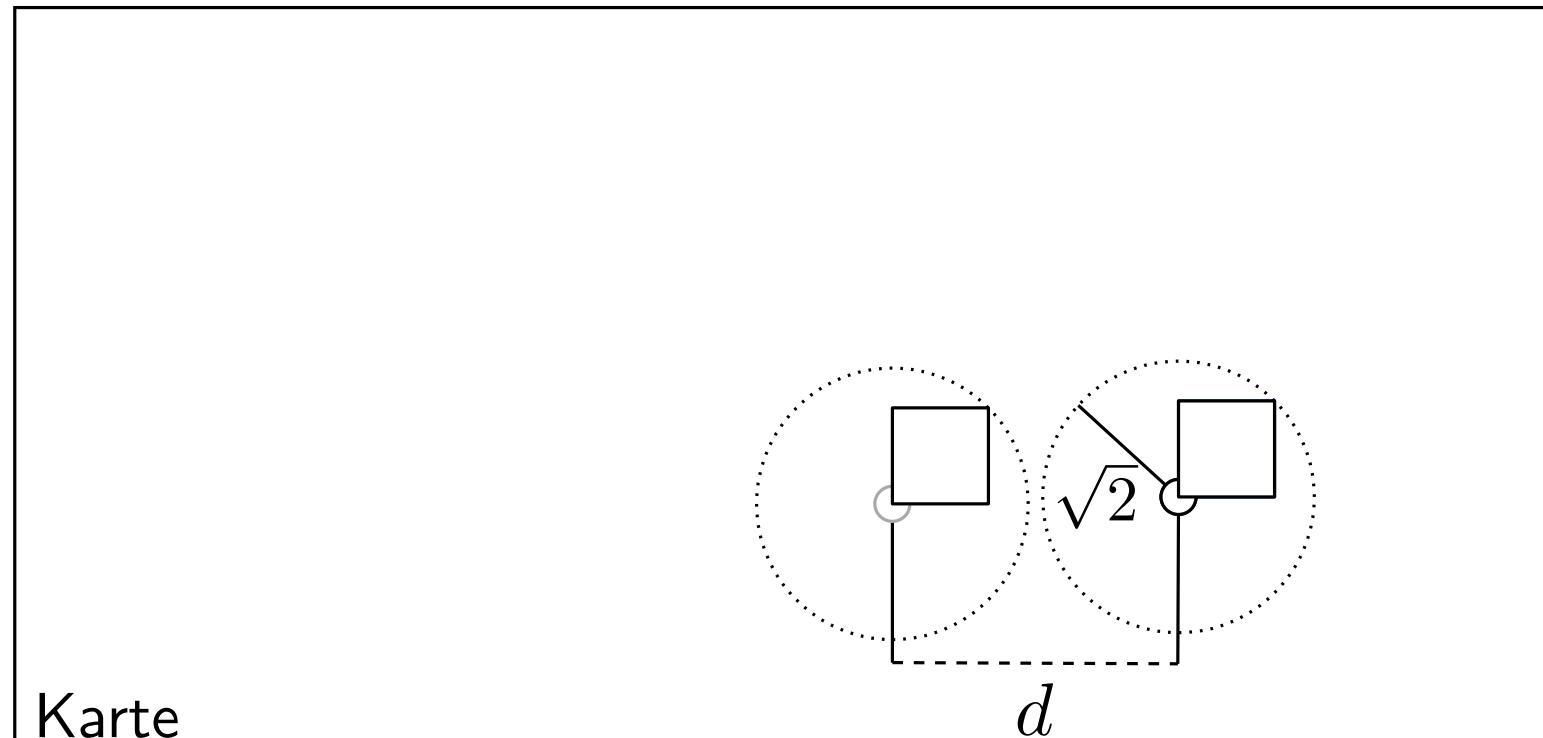
Beobachtung 2: Einflussbereich



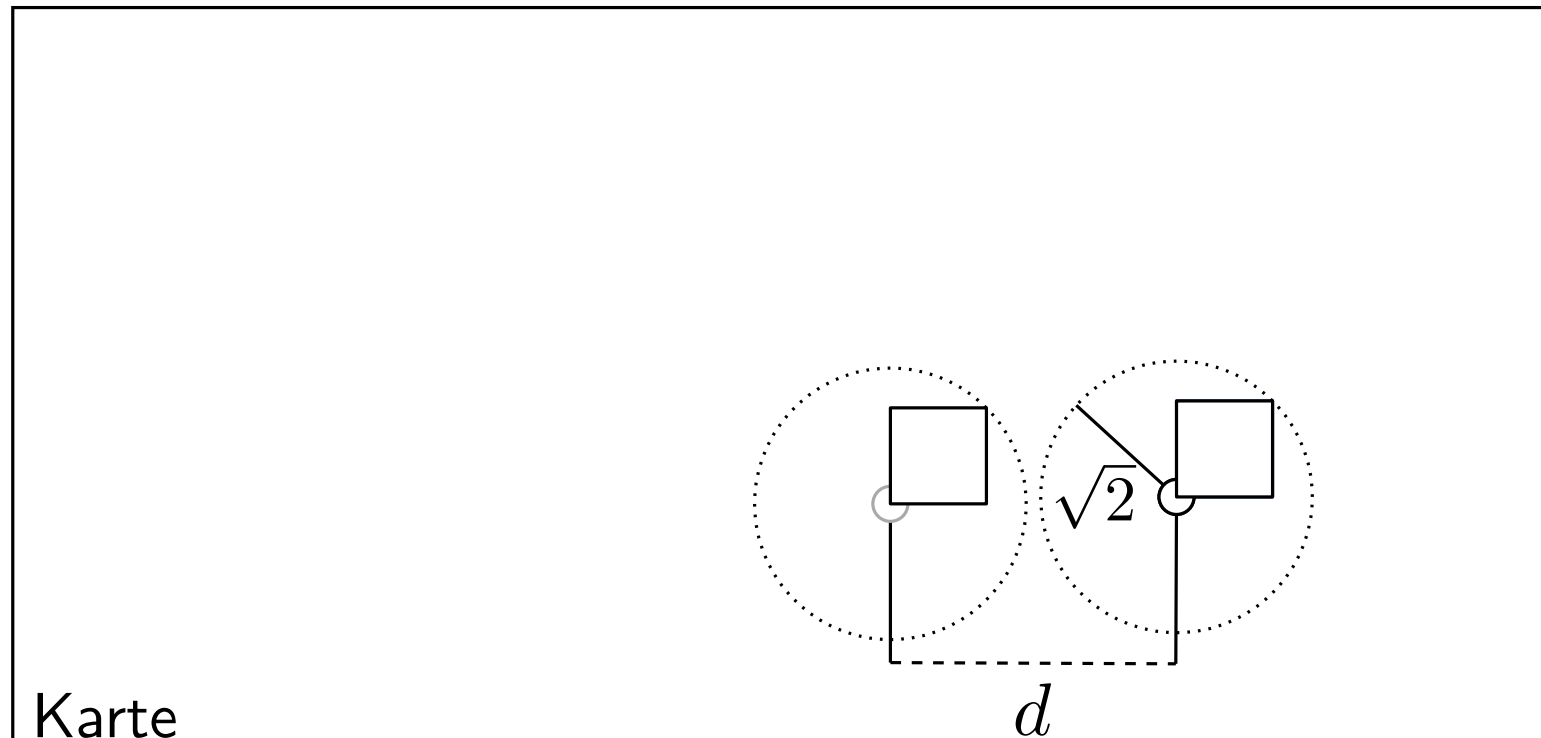
Beobachtung 2: Einflussbereich



Beobachtung 2: Einflussbereich

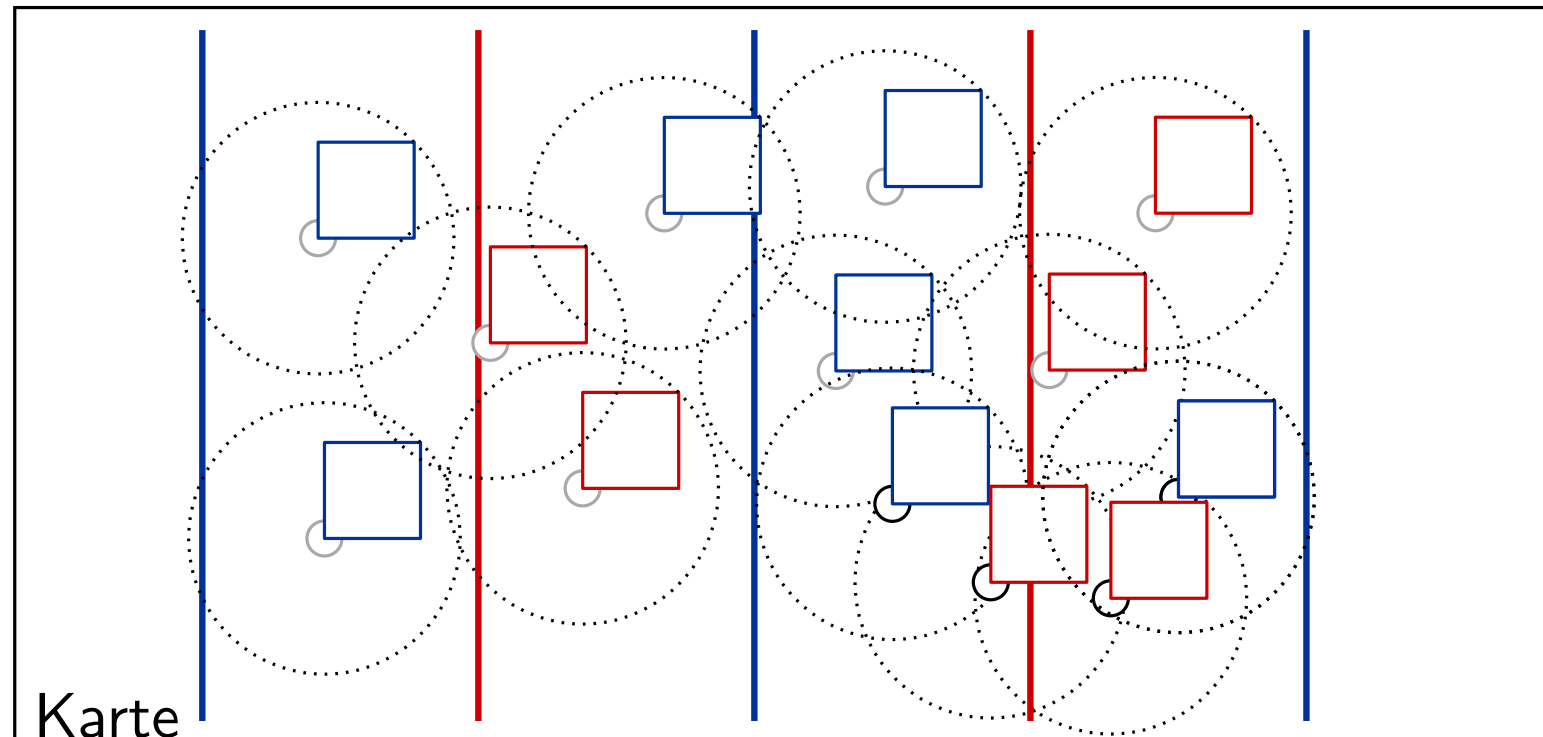


Beobachtung 2: Einflussbereich



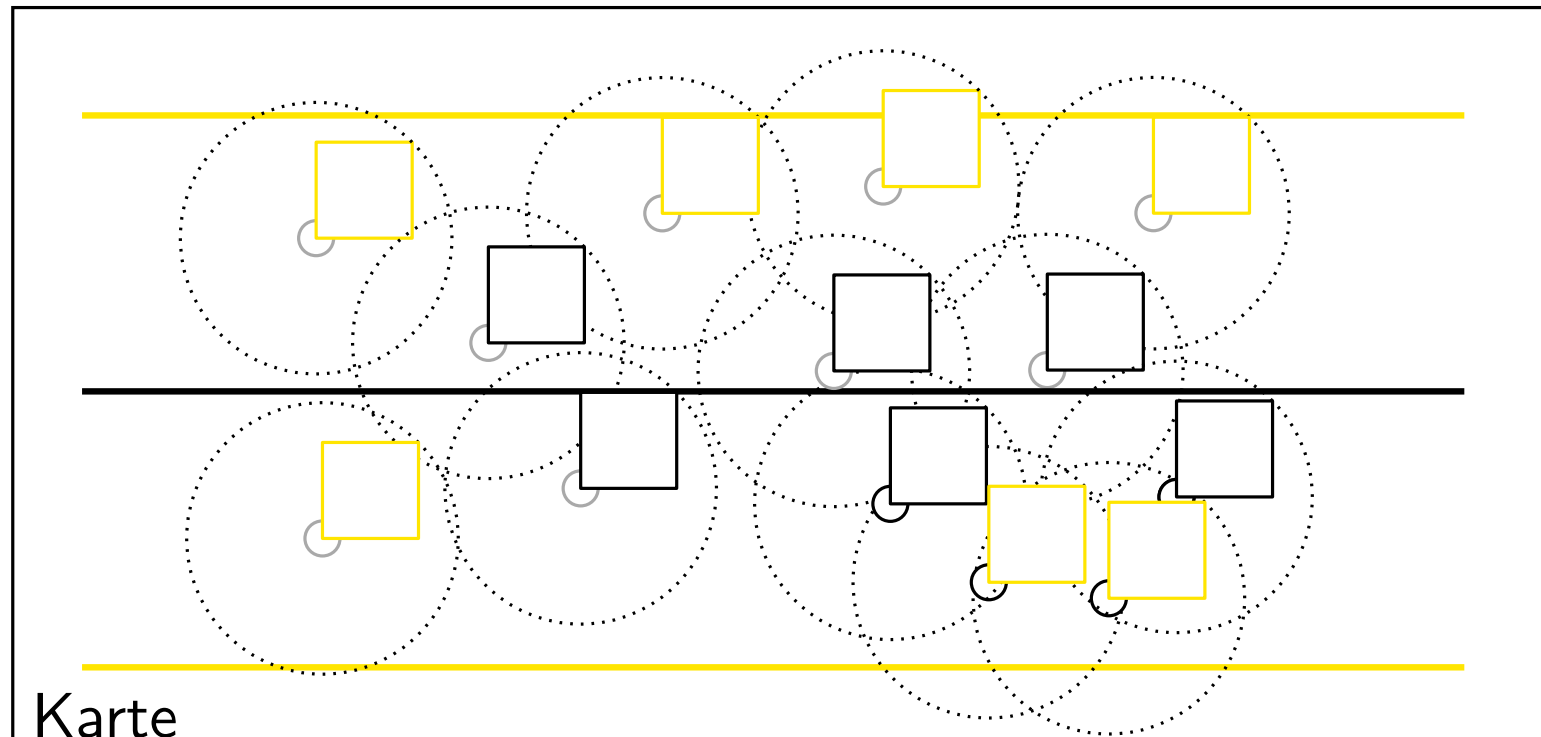
für $d > 2\sqrt{2}$ ist kein Konflikt möglich

1/4-Approximation für MaxTotal



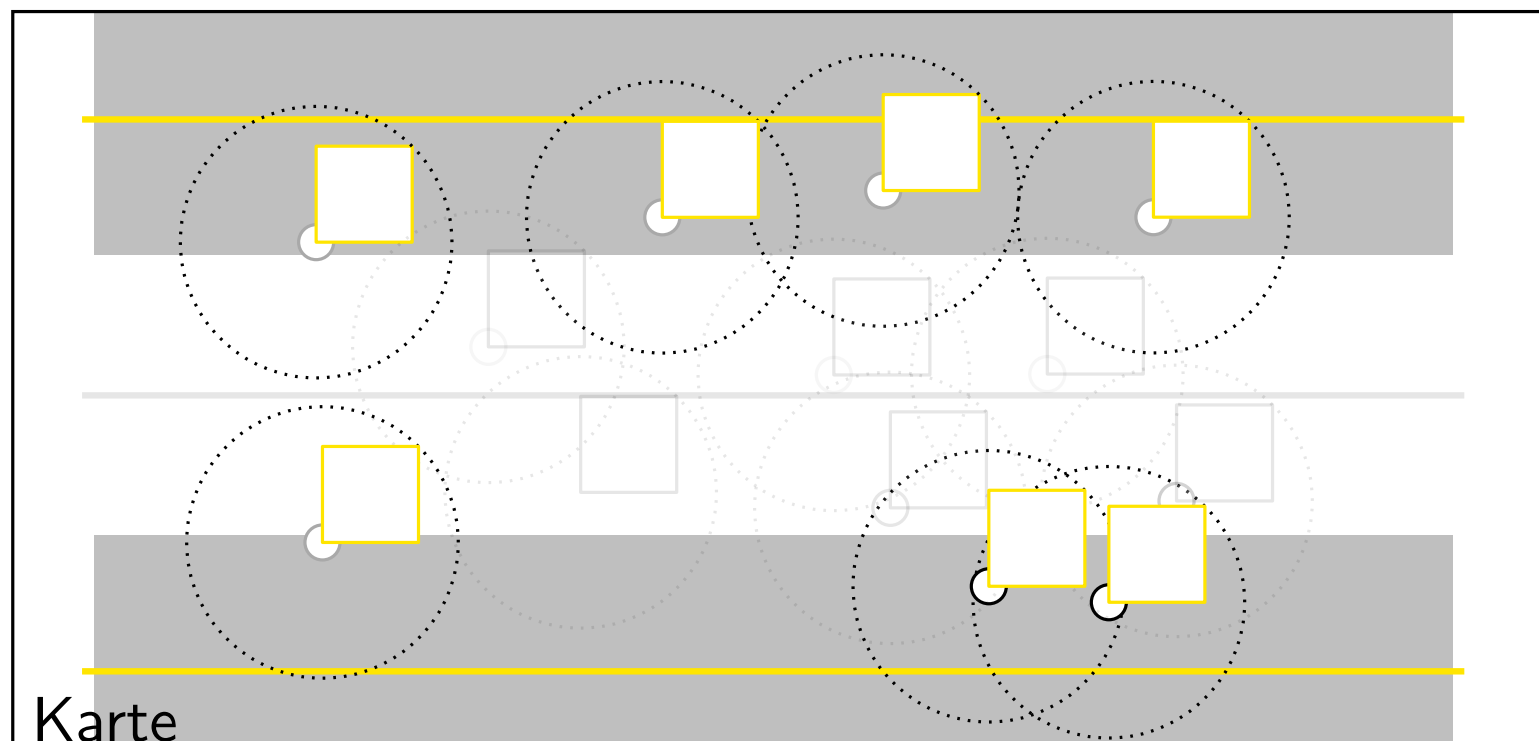
- „steche“ Instanz mit vertikalen Geraden im Abstand $2\sqrt{2}$

1/4-Approximation für MaxTotal

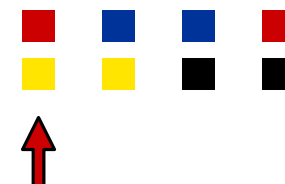


- „steche“ Instanz mit vertikalen Geraden im Abstand $2\sqrt{2}$
- „steche“ Instanz mit horizontalen Geraden im Abstand $2\sqrt{2}$

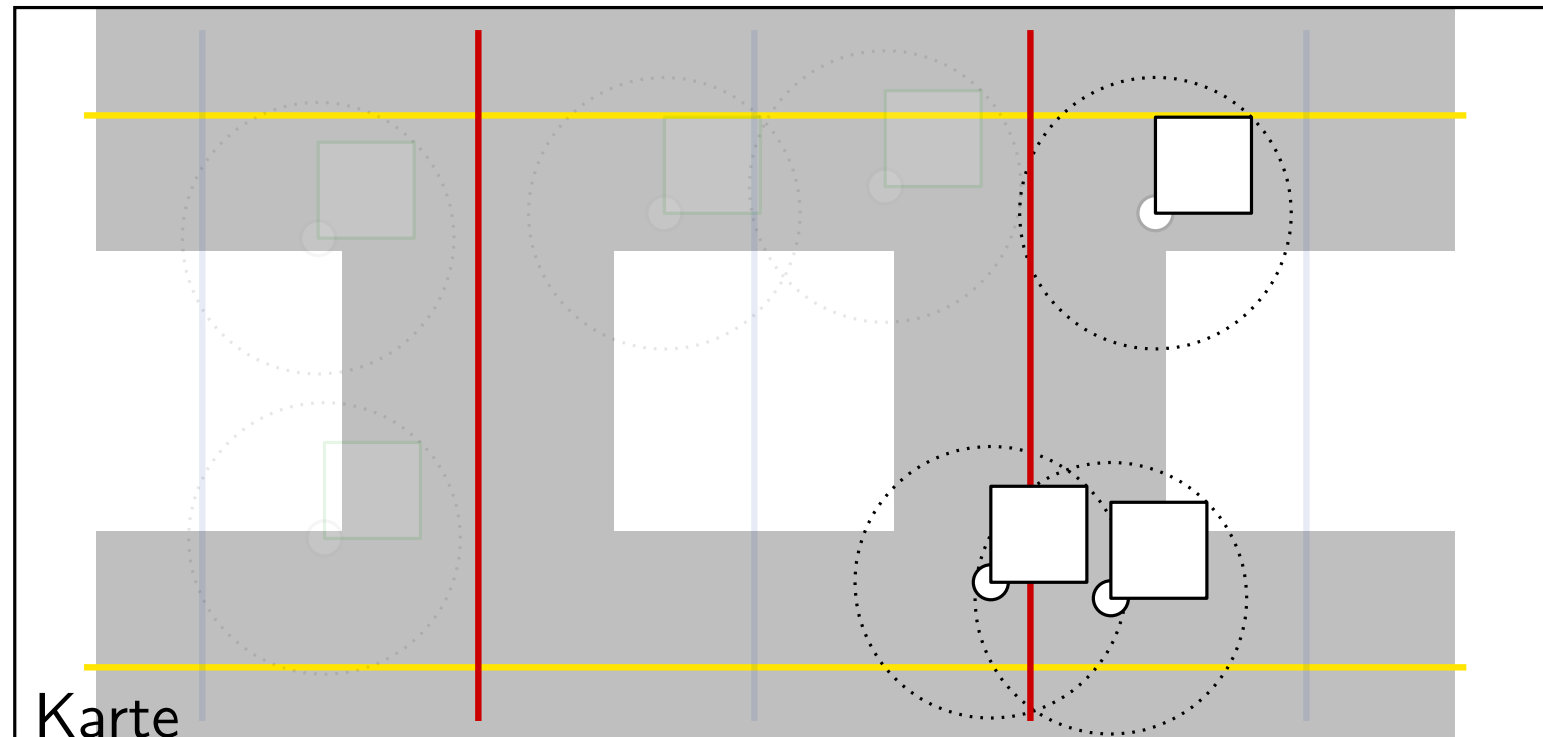
1/4-Approximation für MaxTotal



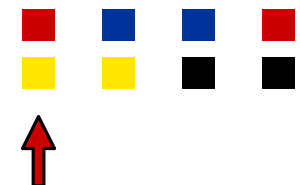
- „steche“ Instanz mit vertikalen Geraden im Abstand $2\sqrt{2}$
- „steche“ Instanz mit horizontalen Geraden im Abstand $2\sqrt{2}$
- zerlege Labelmenge in vier disjunkte Teile



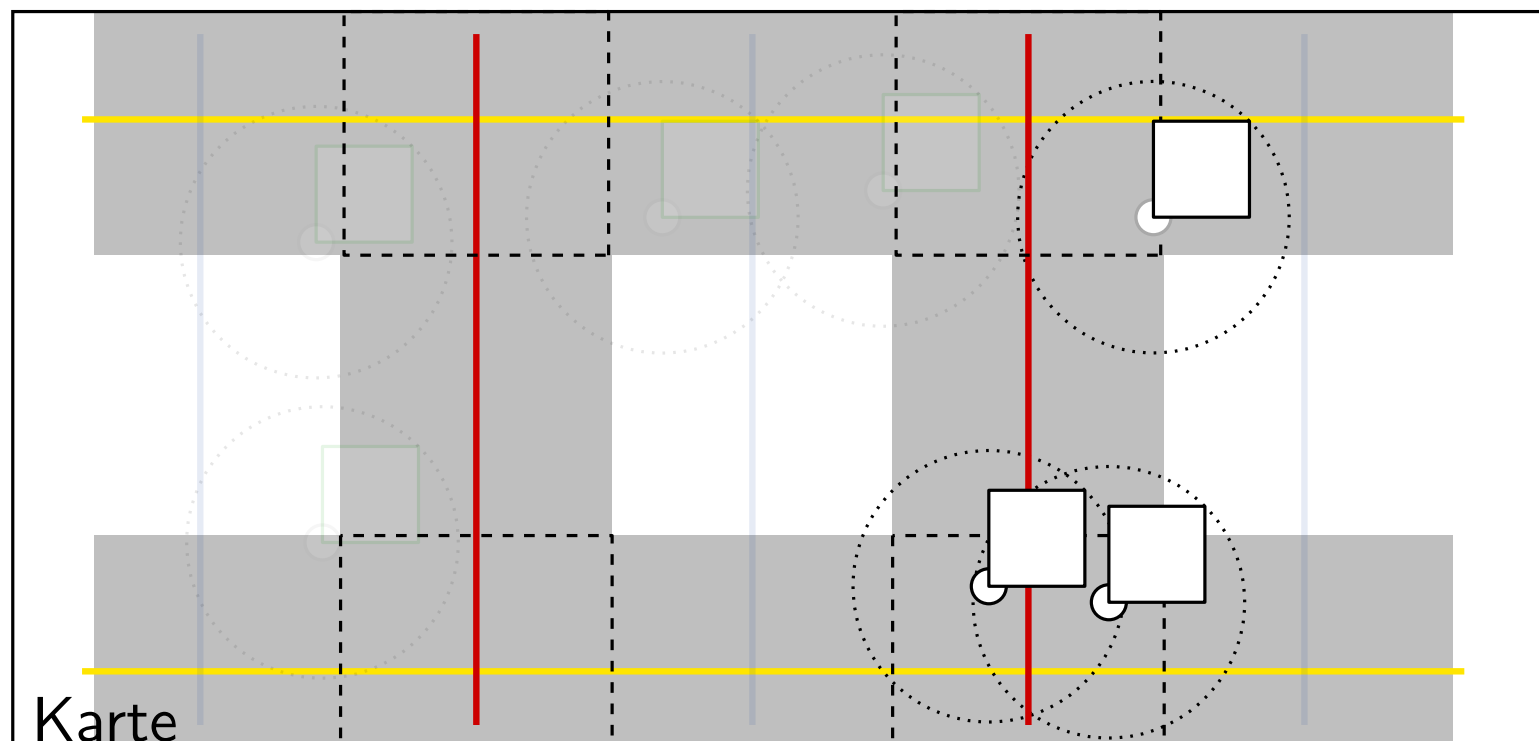
1/4-Approximation für MaxTotal



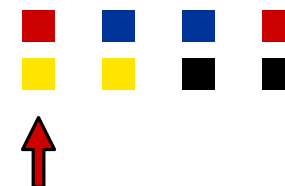
- „steche“ Instanz mit vertikalen Geraden im Abstand $2\sqrt{2}$
- „steche“ Instanz mit horizontalen Geraden im Abstand $2\sqrt{2}$
- zerlege Labelmenge in vier disjunkte Teile



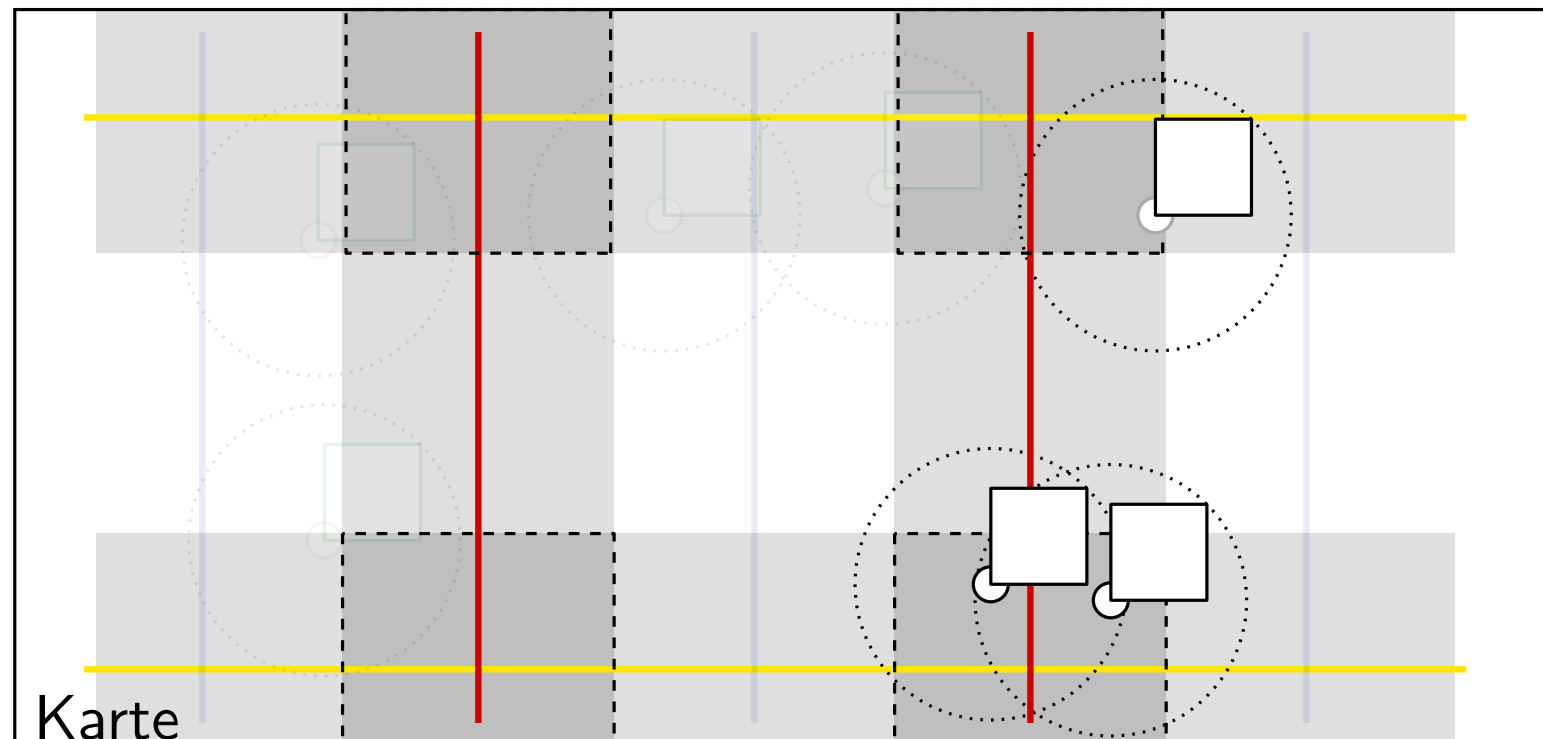
1/4-Approximation für MaxTotal



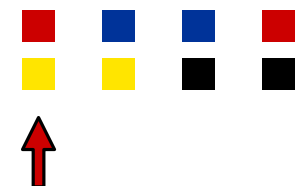
- „steche“ Instanz mit vertikalen Geraden im Abstand $2\sqrt{2}$
- „steche“ Instanz mit horizontalen Geraden im Abstand $2\sqrt{2}$
- zerlege Labelmenge in vier disjunkte Teile



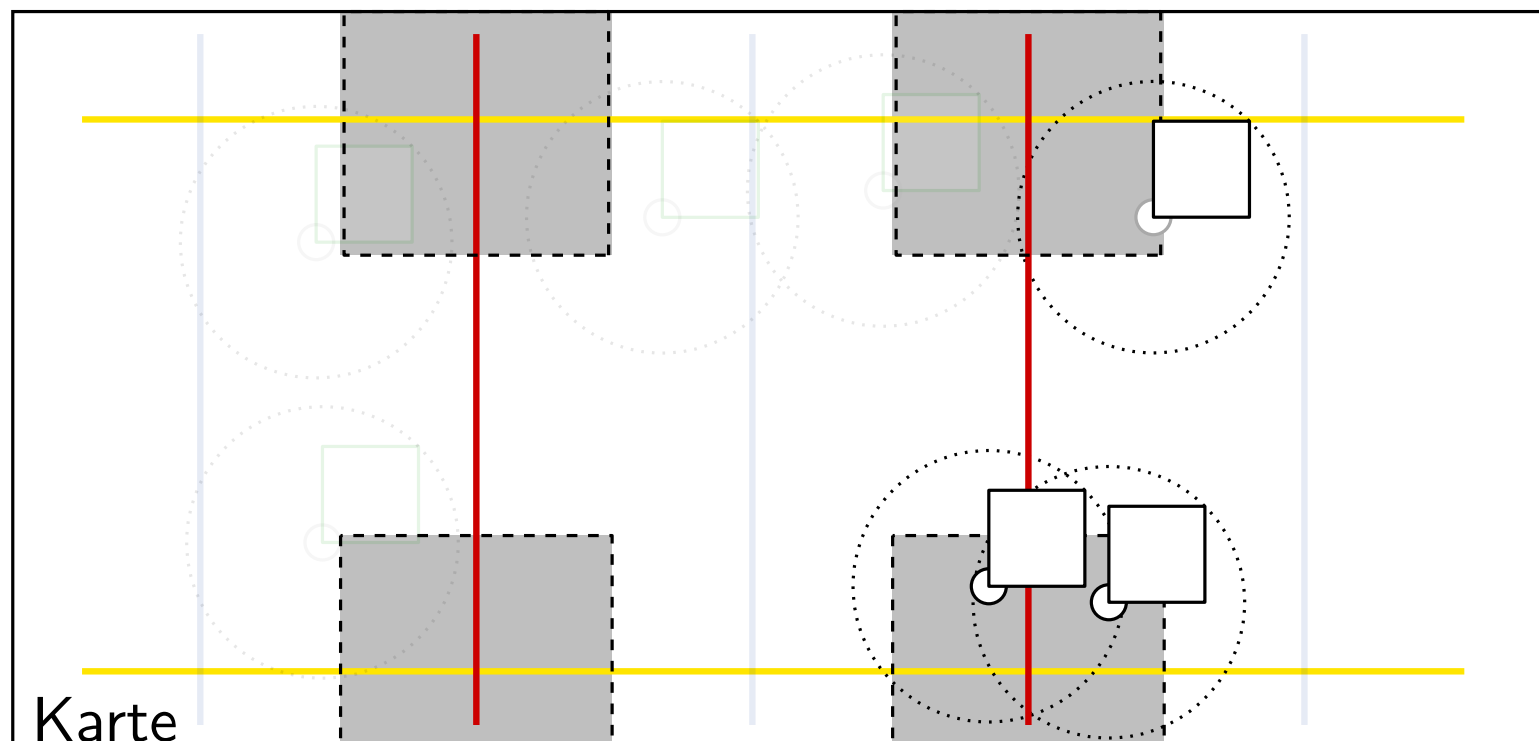
1/4-Approximation für MaxTotal



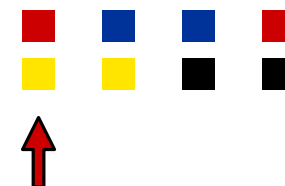
- „steche“ Instanz mit vertikalen Geraden im Abstand $2\sqrt{2}$
- „steche“ Instanz mit horizontalen Geraden im Abstand $2\sqrt{2}$
- zerlege Labelmenge in vier disjunkte Teile



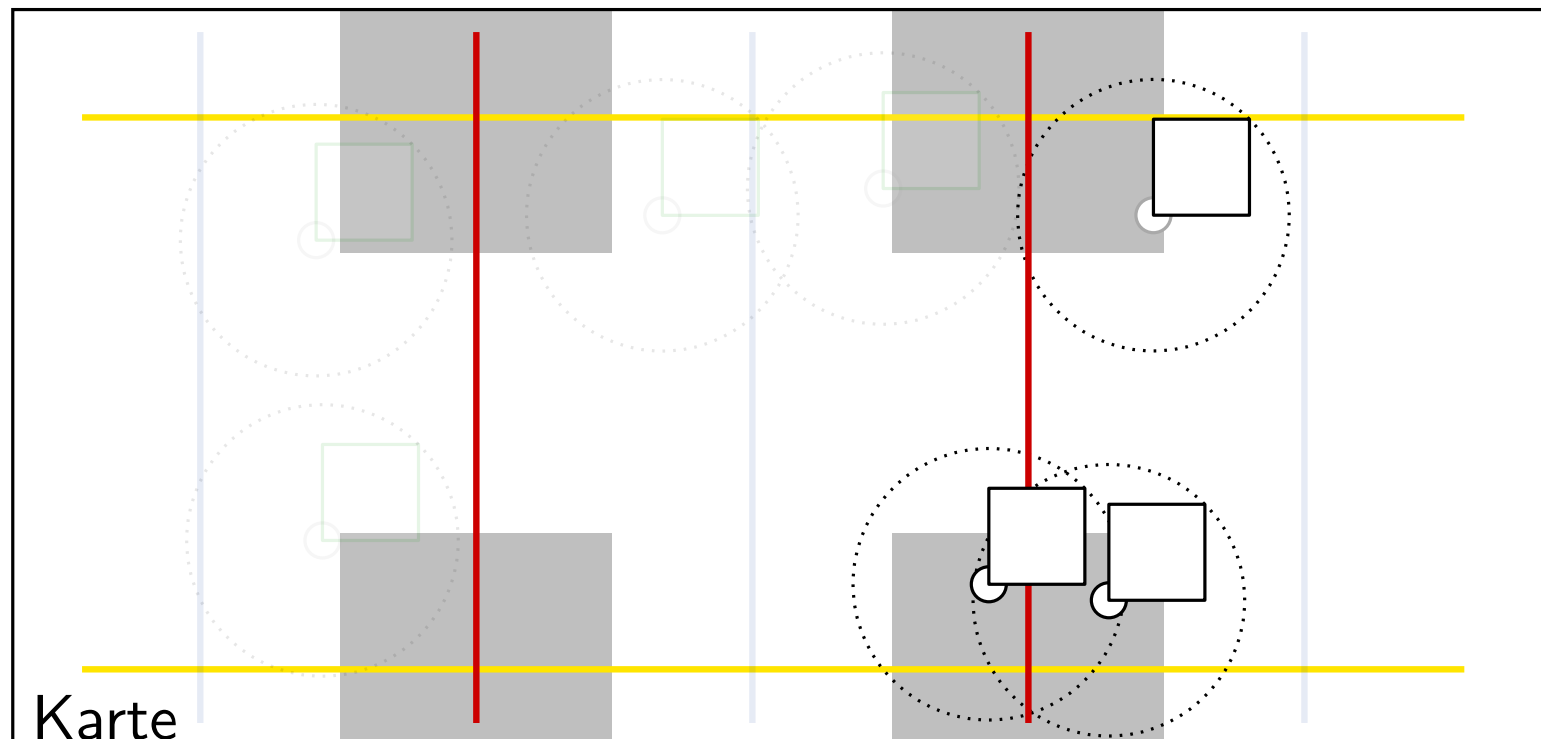
1/4-Approximation für MaxTotal



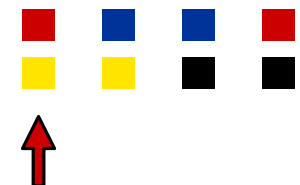
- „steche“ Instanz mit vertikalen Geraden im Abstand $2\sqrt{2}$
- „steche“ Instanz mit horizontalen Geraden im Abstand $2\sqrt{2}$
- zerlege Labelmenge in vier disjunkte Teile



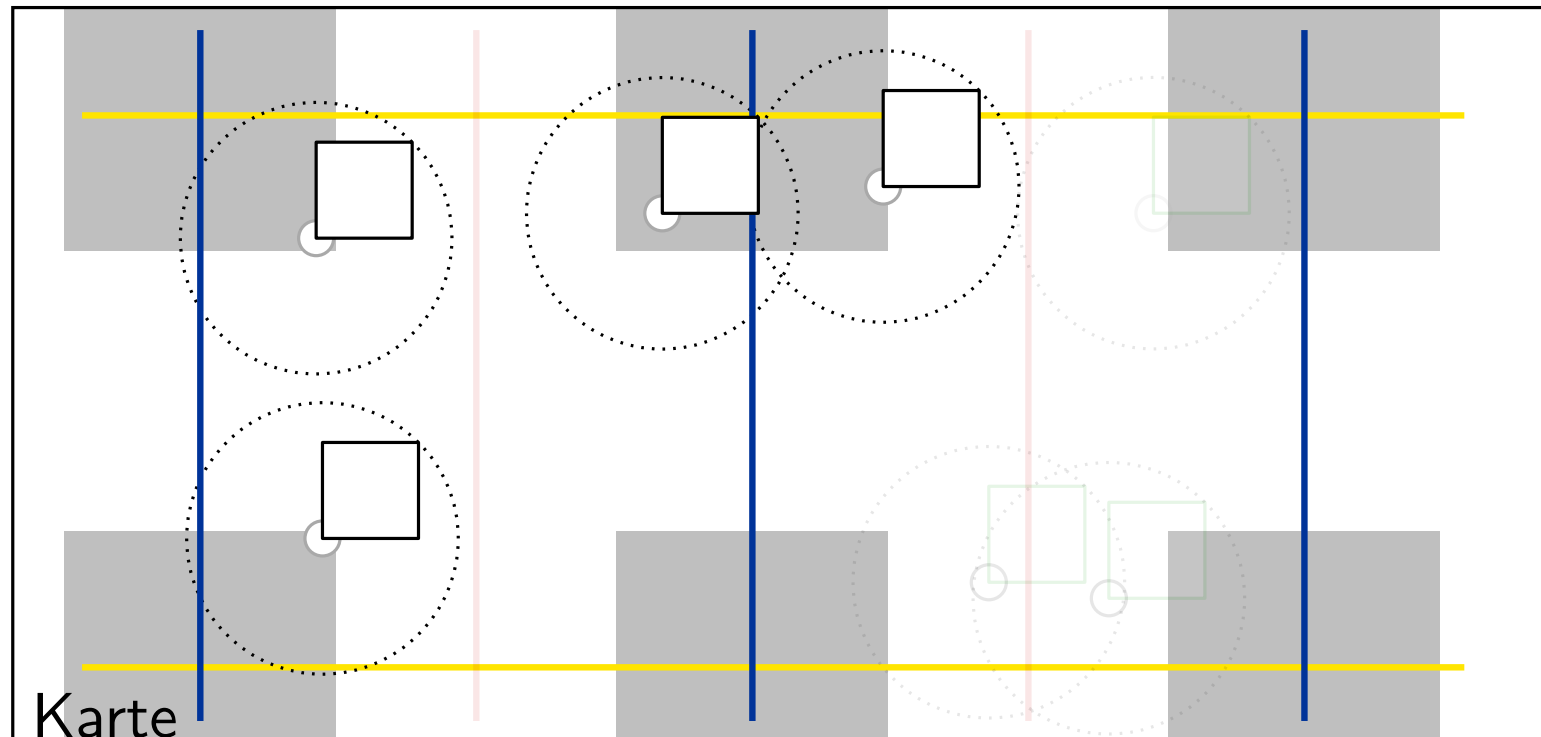
1/4-Approximation für MaxTotal



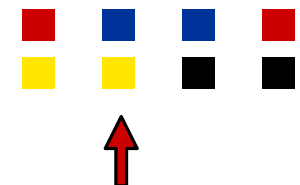
- „steche“ Instanz mit vertikalen Geraden im Abstand $2\sqrt{2}$
- „steche“ Instanz mit horizontalen Geraden im Abstand $2\sqrt{2}$
- zerlege Labelmenge in vier disjunkte Teile



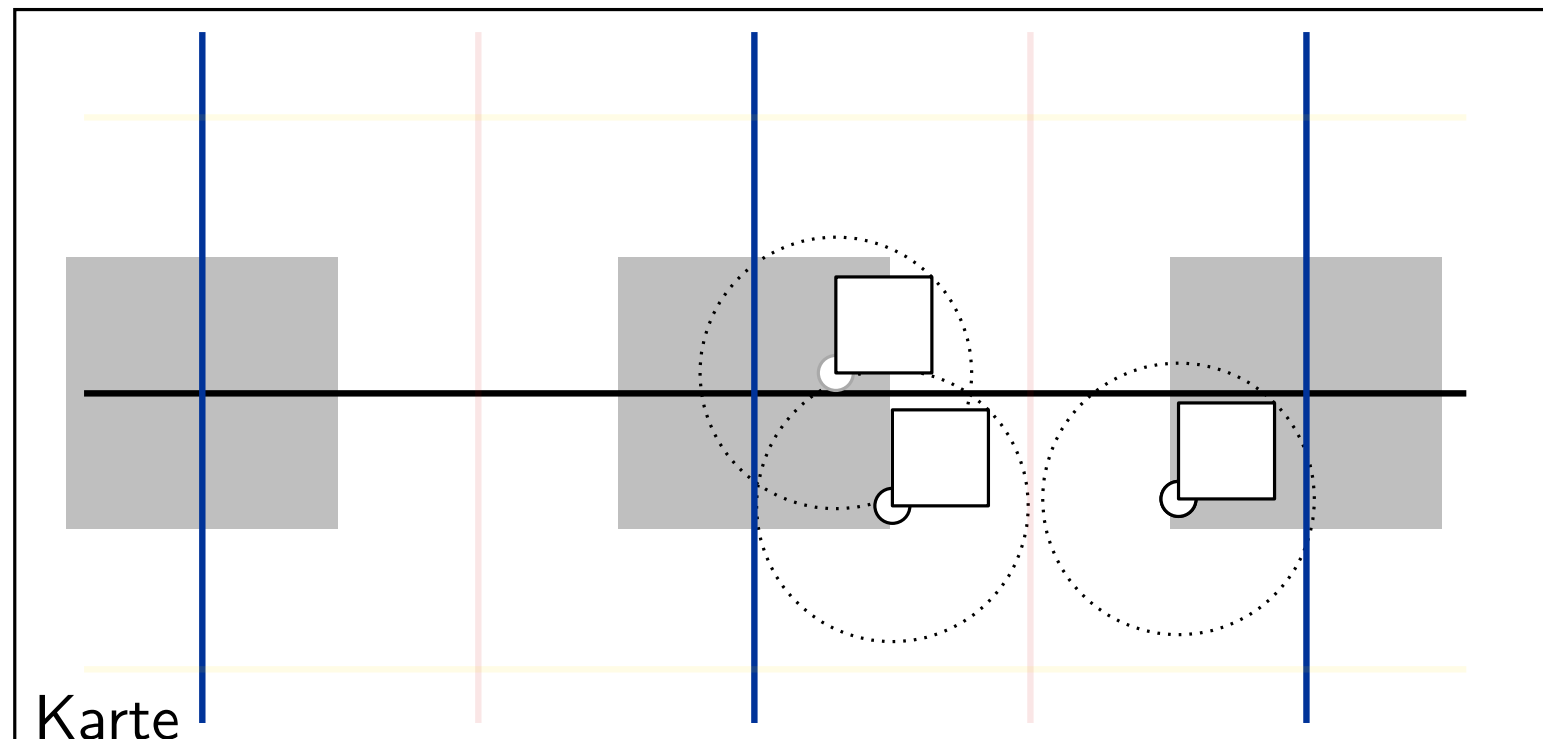
1/4-Approximation für MaxTotal



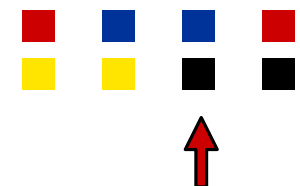
- „steche“ Instanz mit vertikalen Geraden im Abstand $2\sqrt{2}$
- „steche“ Instanz mit horizontalen Geraden im Abstand $2\sqrt{2}$
- zerlege Labelmenge in vier disjunkte Teile



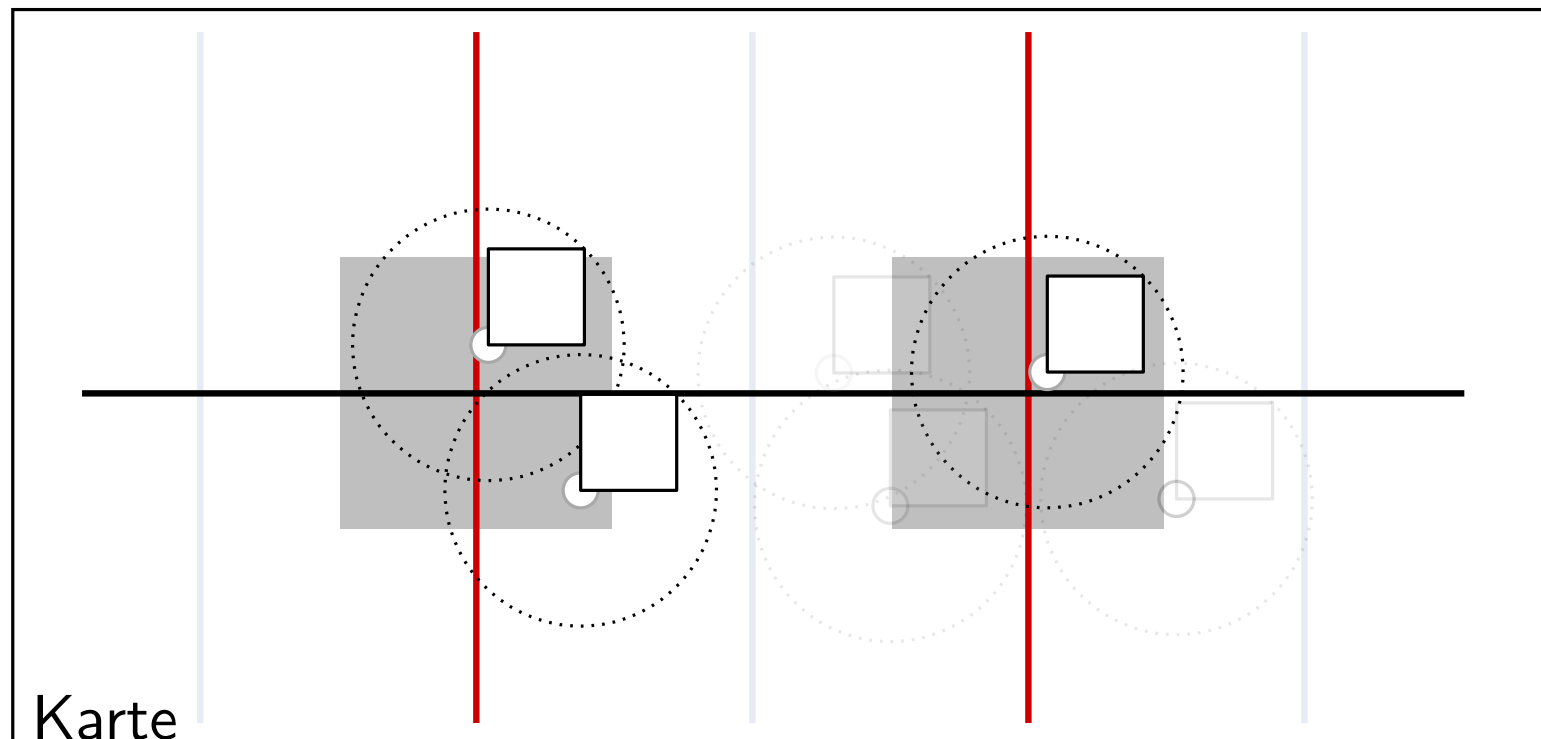
1/4-Approximation für MaxTotal



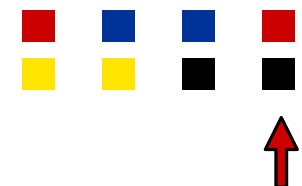
- „steche“ Instanz mit vertikalen Geraden im Abstand $2\sqrt{2}$
- „steche“ Instanz mit horizontalen Geraden im Abstand $2\sqrt{2}$
- zerlege Labelmenge in vier disjunkte Teile



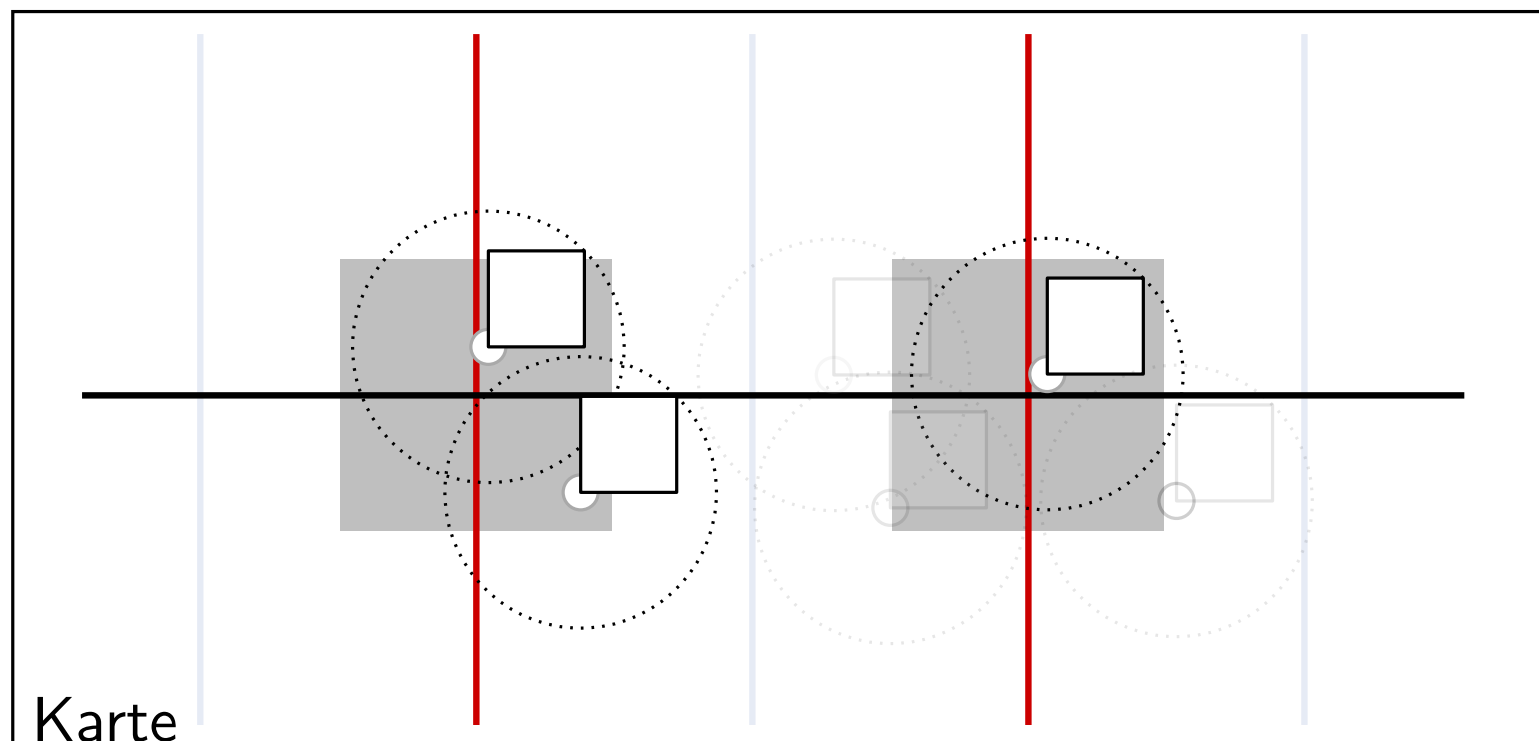
1/4-Approximation für MaxTotal



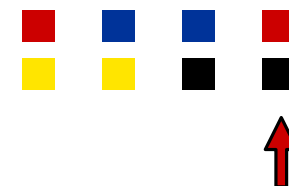
- „steche“ Instanz mit vertikalen Geraden im Abstand $2\sqrt{2}$
- „steche“ Instanz mit horizontalen Geraden im Abstand $2\sqrt{2}$
- zerlege Labelmenge in vier disjunkte Teile



1/4-Approximation für MaxTotal

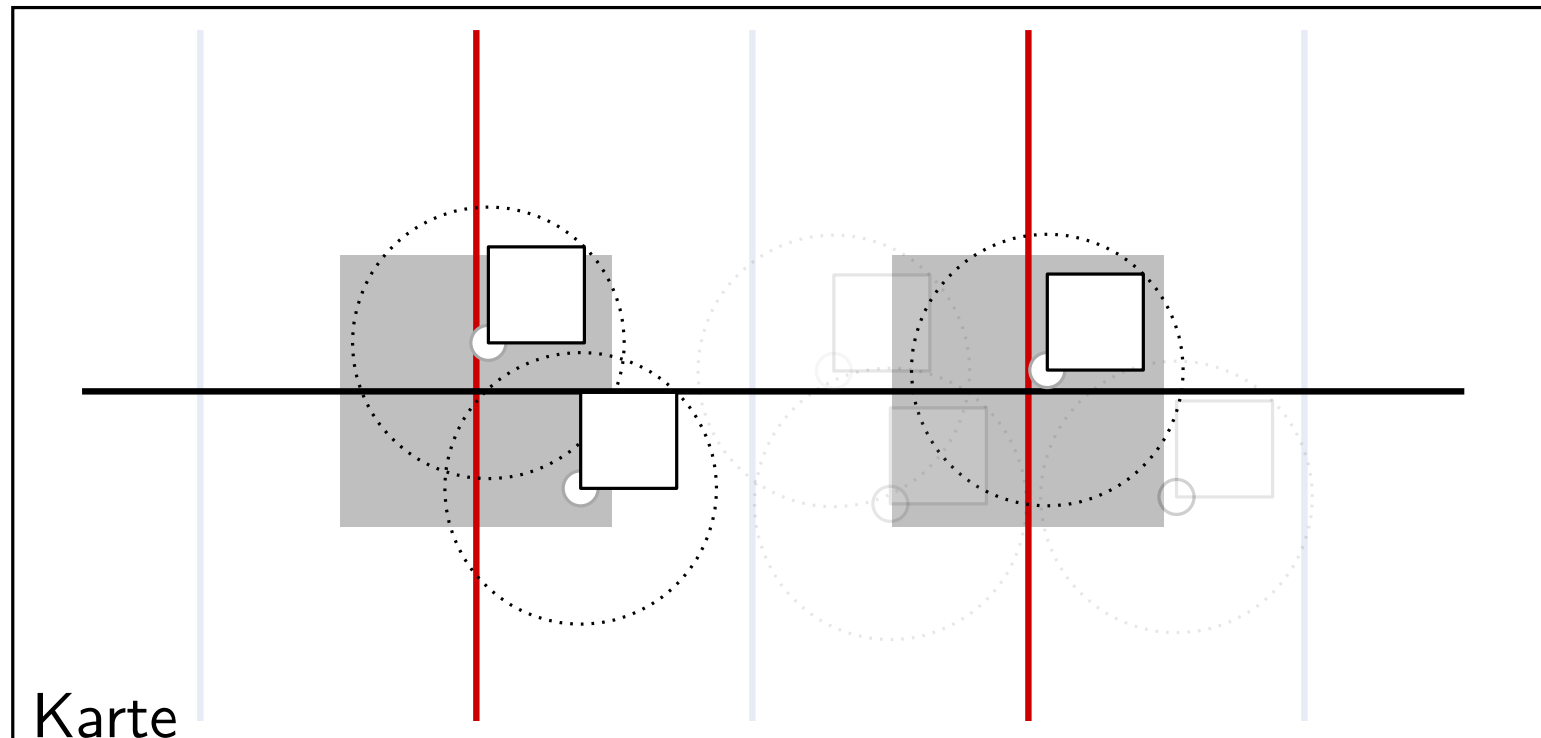


- „steche“ Instanz mit vertikalen Geraden im Abstand $2\sqrt{2}$
- „steche“ Instanz mit horizontalen Geraden im Abstand $2\sqrt{2}$
- zerlege Labelmenge in vier disjunkte Teile
- ergibt 1/4-Approximation mit Beobachtung 1

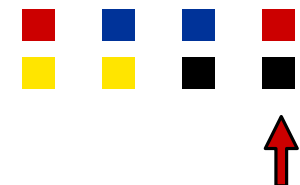


stabbing/shifting Technik

[Hochbaum, Maas '85]



- „steche“ Instanz mit vertikalen Geraden im Abstand $2\sqrt{2}$
- „steche“ Instanz mit horizontalen Geraden im Abstand $2\sqrt{2}$
- zerlege Labelmenge in vier disjunkte Teile
- ergibt 1/4-Approximation mit Beobachtung 1



Satz:

Es gibt einen Faktor-1/4 Approximationsalgorithmus für MaxTotal mit Zeitkomplexität $O(n \log n)$.

Satz:

Es gibt einen Faktor-1/4 Approximationsalgorithmus für MaxTotal mit Zeitkomplexität $O(n \log n)$.

Beweisskizze:

- nutze stabbing/shifting Technik zur Zerlegung in disjunkte Teile
- jede Zelle in jedem Teilproblem enthält $O(1)$ Label
- jedes Paar von Labeln hat höchstens 4 Konflikte
- \exists optimale Lösung in diskreter Menge von aktiven Bereichen
- nicht-leere Zellen lassen sich in $O(n \log n)$ Zeit finden, Lösung jeder Zelle benötigt $O(1)$ Zeit

Satz:

Es gibt einen Faktor- $1/4$ Approximationsalgorithmus für MaxTotal mit Zeitkomplexität $O(n \log n)$.

Satz:

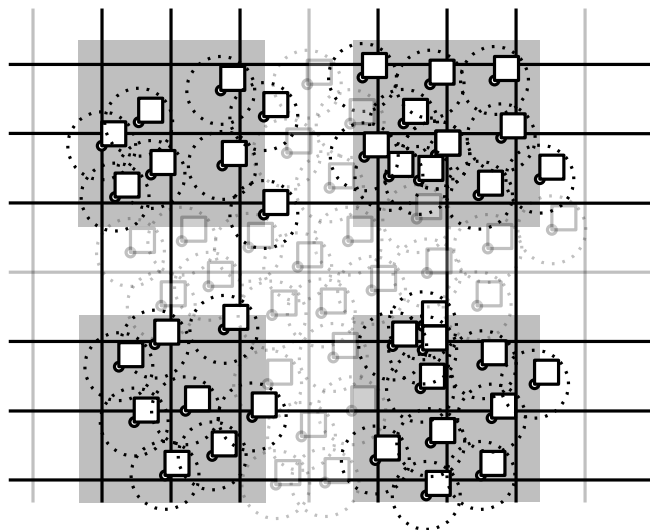
Es gibt einen Faktor- $(1 - \varepsilon)$ Approximationsalgorithmus für MaxTotal mit Zeitkomplexität $O((n \cdot 2^{O(1/\varepsilon^2 \log 1/\varepsilon)} + n \log n)/\varepsilon^2)$ (EPTAS).

Satz:

Es gibt einen Faktor-1/4 Approximationsalgorithmus für MaxTotal mit Zeitkomplexität $O(n \log n)$.

Satz:

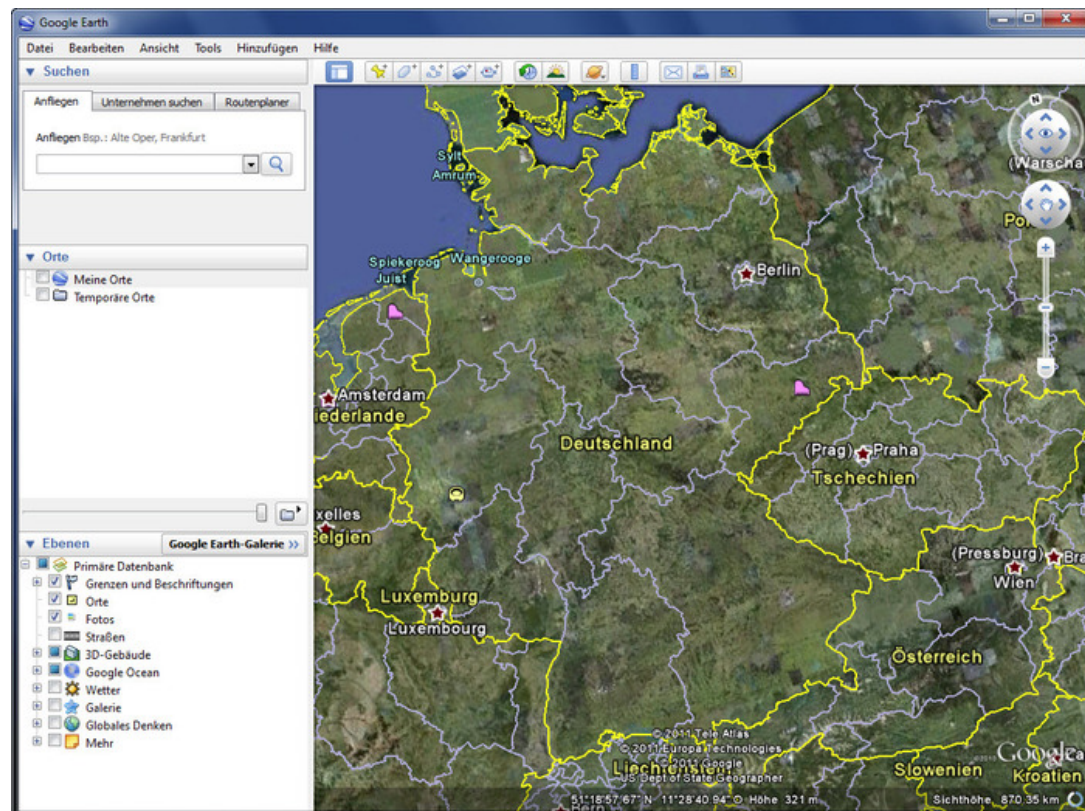
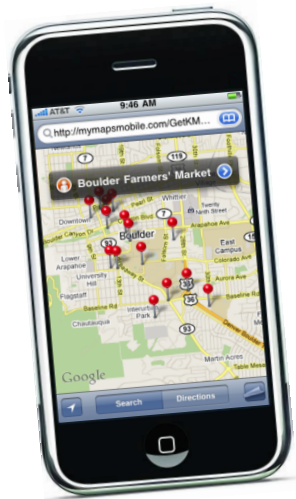
Es gibt einen Faktor- $(1 - \varepsilon)$ Approximationsalgorithmus für MaxTotal mit Zeitkomplexität $O((n \cdot 2^{O(1/\varepsilon^2 \log 1/\varepsilon)} + n \log n)/\varepsilon^2)$ (EPTAS).

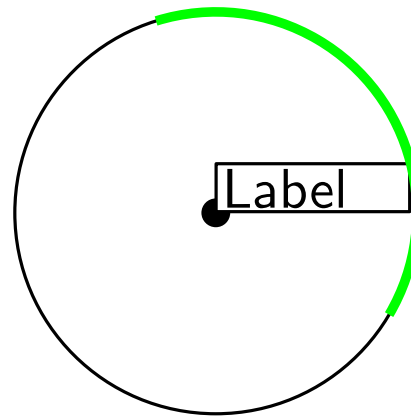
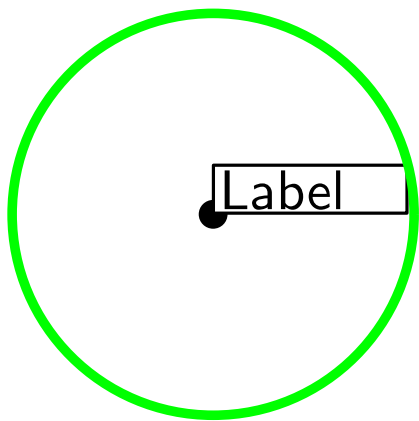


Beweisskizze:

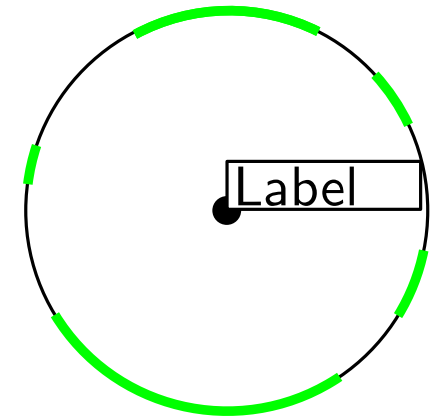
- ähnliche Idee wie oben
- deaktiviere jede k -te Gerade
- k^2 Kombinationen
- setze $k = \lceil 2/\varepsilon \rceil$
- nutze Schubfachprinzip

Wie gut funktioniert das in der Praxis?





...

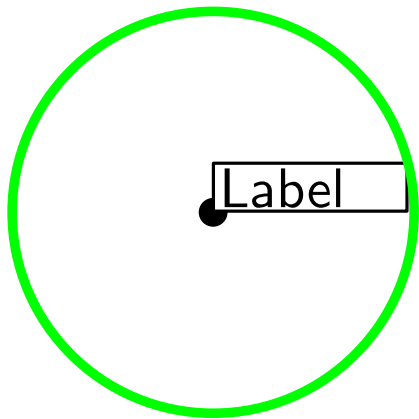


0/1-Modell

Label ganz oder
gar nicht aktiv

+ kein Flackern

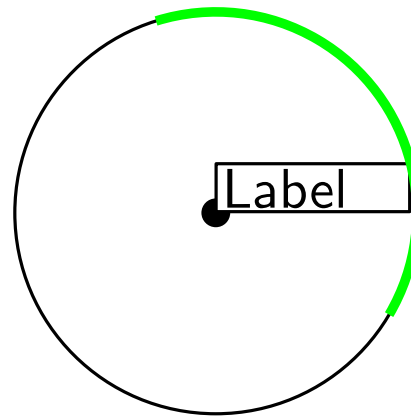
– wenige Labels



0/1-Modell

Label ganz oder
gar nicht aktiv

- + kein Flackern
- wenige Labels

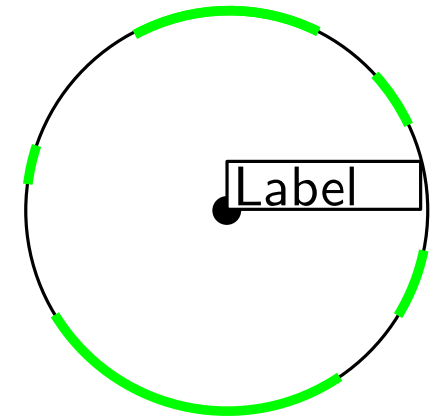


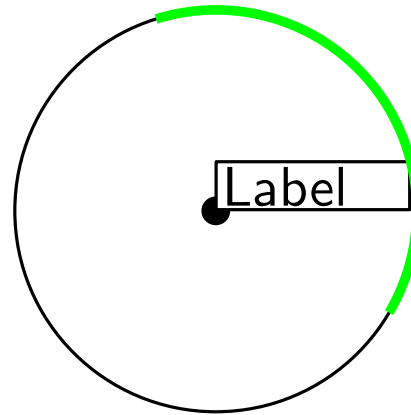
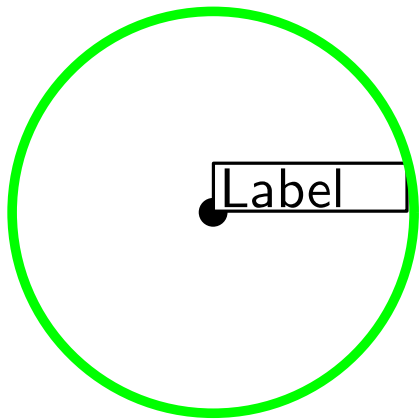
kR-Modell

Label hat max. k
aktive Bereiche

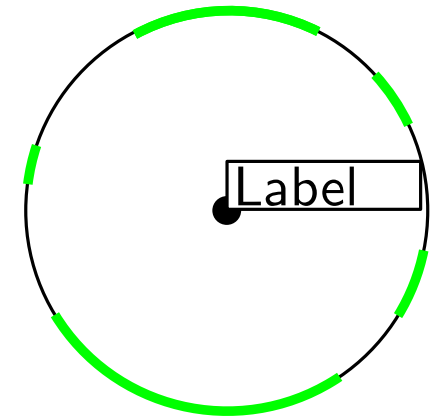
- + mehr Labels
- stärkeres Flackern

...





...



0/1-Modell

Label ganz oder
gar nicht aktiv

+ kein Flackern
– wenige Labels

kR-Modell

Label hat max. k
aktive Bereiche

+ mehr Labels
– stärkeres Flackern

∞ R-Modell

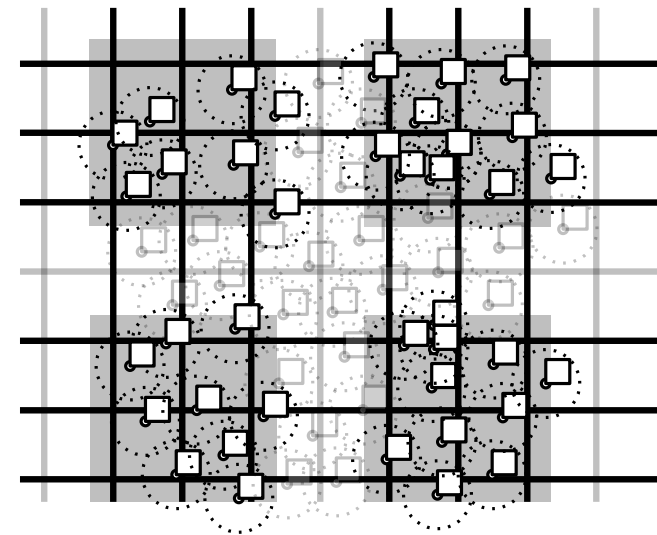
keine Beschränkung
der aktiven Bereiche

++ noch mehr Labels
– – noch stärkeres Flackern

ganzzahlige Programmierung (ILP)
→ optimale Lösungen



1/4-Approximation



einfache Greedy Heuristiken

Greedy Heuristiken

L = set of all labels

while L not empty **do**

 | **select** and remove $\ell \in L$

 | assign ℓ its maximum possible active range

end

GreedyMax

select ℓ mit maximalem Gewinn

Gewinn: Länge des max. möglichen aktiven Bereichs

L = set of all labels

while L not empty **do**

 | **select** and remove $\ell \in L$

 | assign ℓ its maximum possible active range

end

GreedyMax

select ℓ mit maximalem Gewinn

Gewinn: Länge des max. möglichen aktiven Bereichs

GreedyLowCost

select ℓ mit minimalen Kosten

Kosten: um wieviel schrumpfen die aktiven Bereiche der anderen Label?

L = set of all labels

while L not empty **do**

 | **select** and remove $\ell \in L$

 | assign ℓ its maximum possible active range

end

GreedyMax **select** ℓ mit maximalem Gewinn
Gewinn: Länge des max. möglichen aktiven Bereichs

GreedyLowCost **select** ℓ mit minimalen Kosten
Kosten: um wieviel schrumpfen die aktiven
Bereiche der anderen Label?

GreedyBestRatio **select** ℓ mit max. Gewinn/Kosten Verhältnis

Was beschriften?

große Städte (≥ 50.000 Einw.)

OpenStreetMap



Was beschriften?

große Städte (≥ 50.000 Einw.)

OpenStreetMap



Welcher Maßstab?

Google Maps

Was beschriftet?

große Städte (≥ 50.000 Einw.)

OpenStreetMap



Welche Label Positionen?

optimal im 4P Modell mit ILP

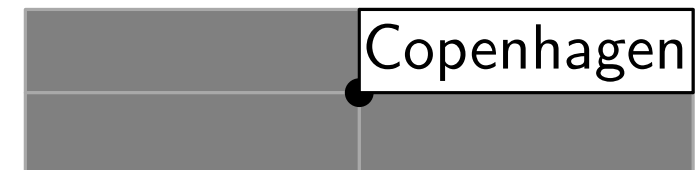


Welcher Maßstab?

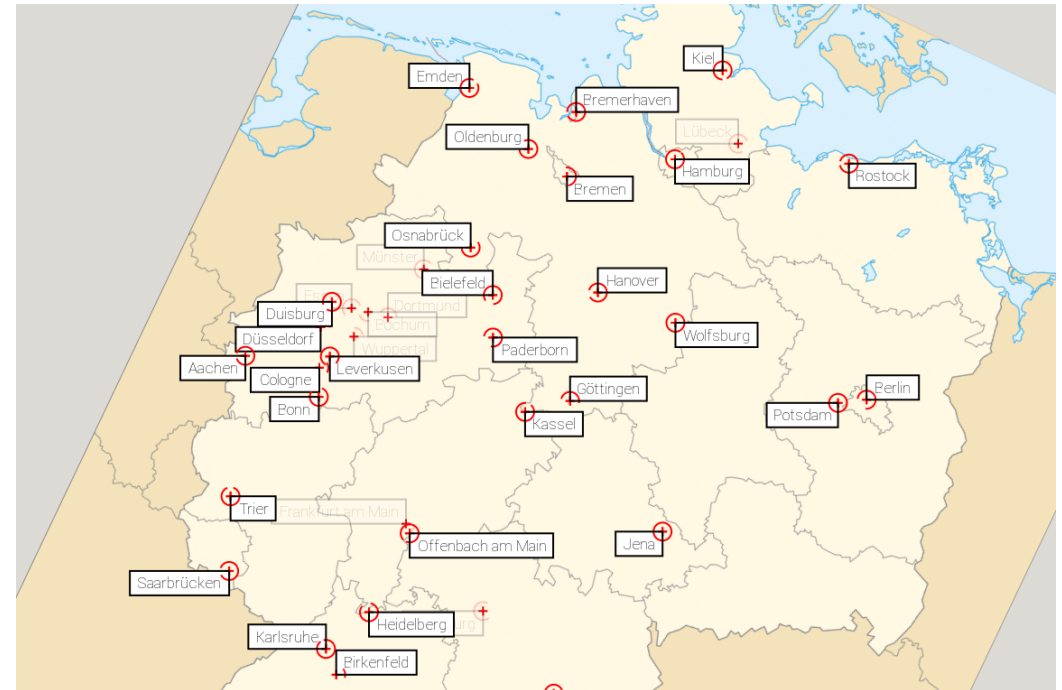
Google Maps

Welche Schrift(größe)?

Google Maps: Roboto Thin



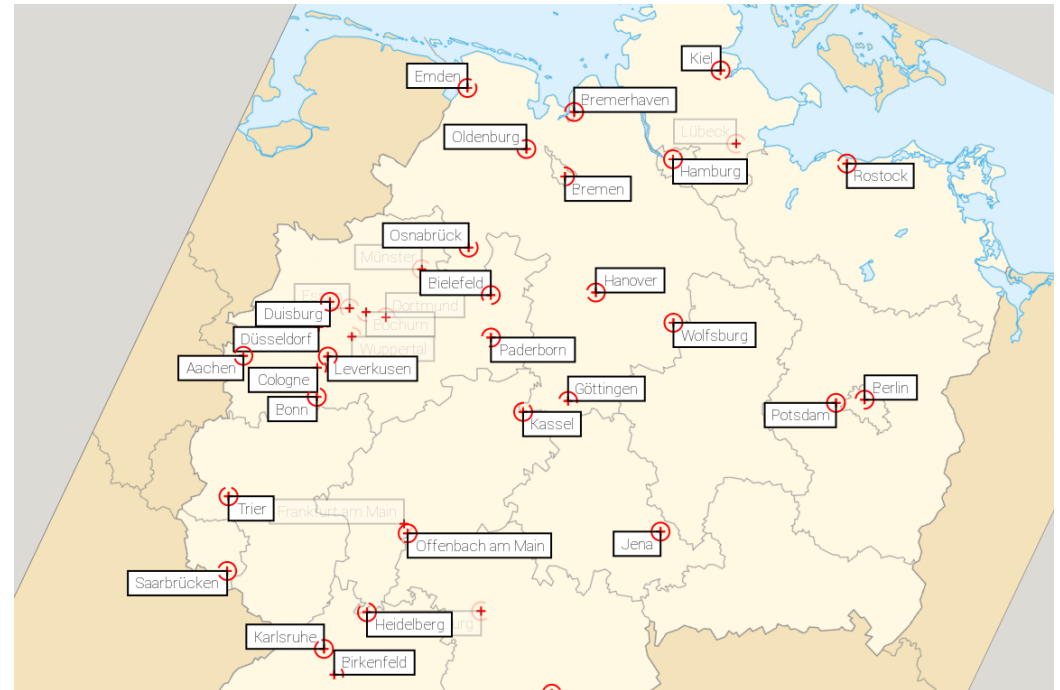
Experimentelle Evaluation



	<i>countries</i>					
	FR	DE	GB	IT	JP	US
<i>scale</i>	#Label					

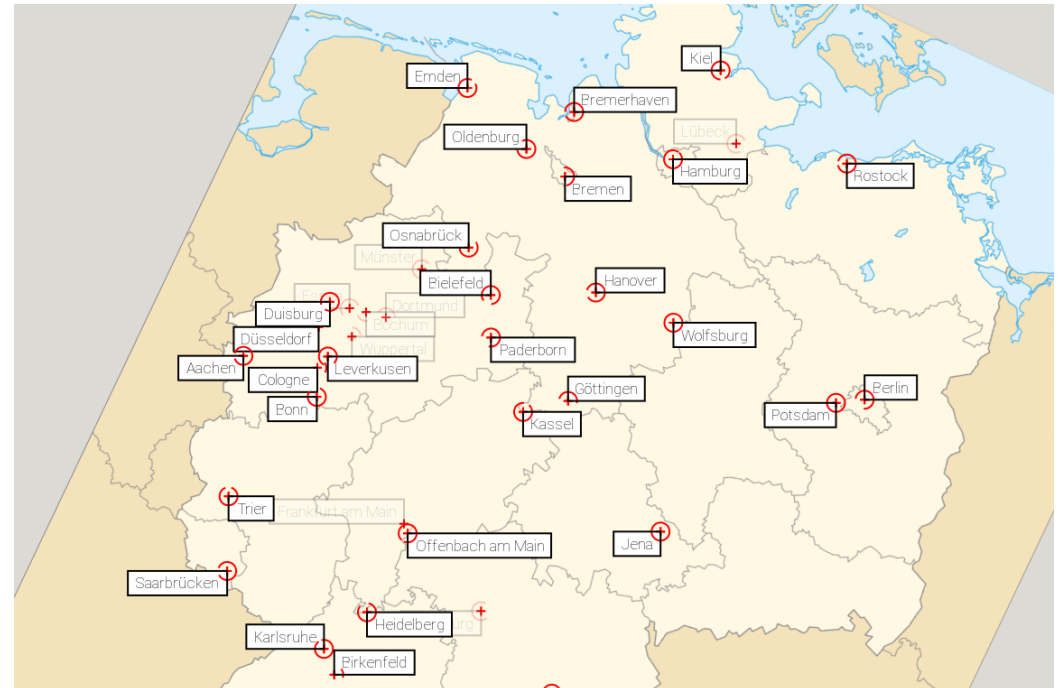
20km	86	52	99	131	99	403
50km	80	43	68	111	80	359
100km	69	33	37	68	49	288

Experimentelle Evaluation



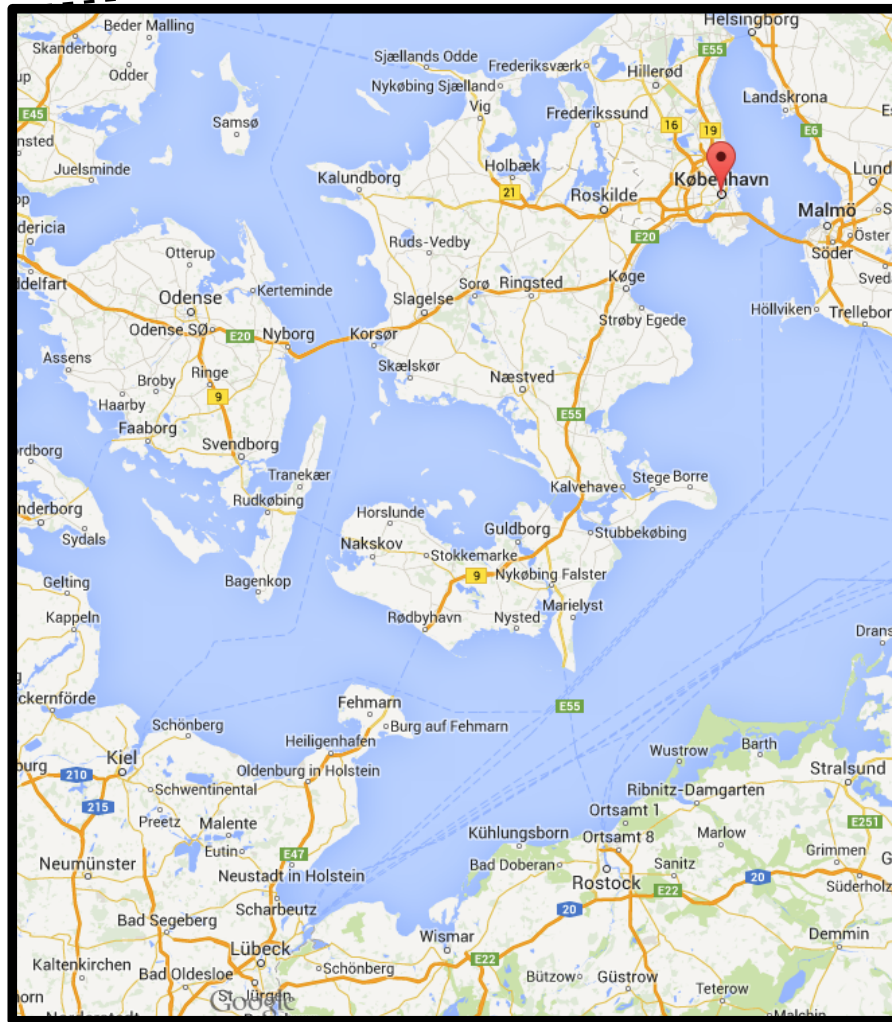
	<i>countries</i>					
	FR	DE	GB	IT	JP	US
<i>scale</i>	#Label					
20km	86	52	99	131	99	403
50km	80	43	68	111	80	359
100km	69	33	37	68	49	288

Experimentelle Evaluation

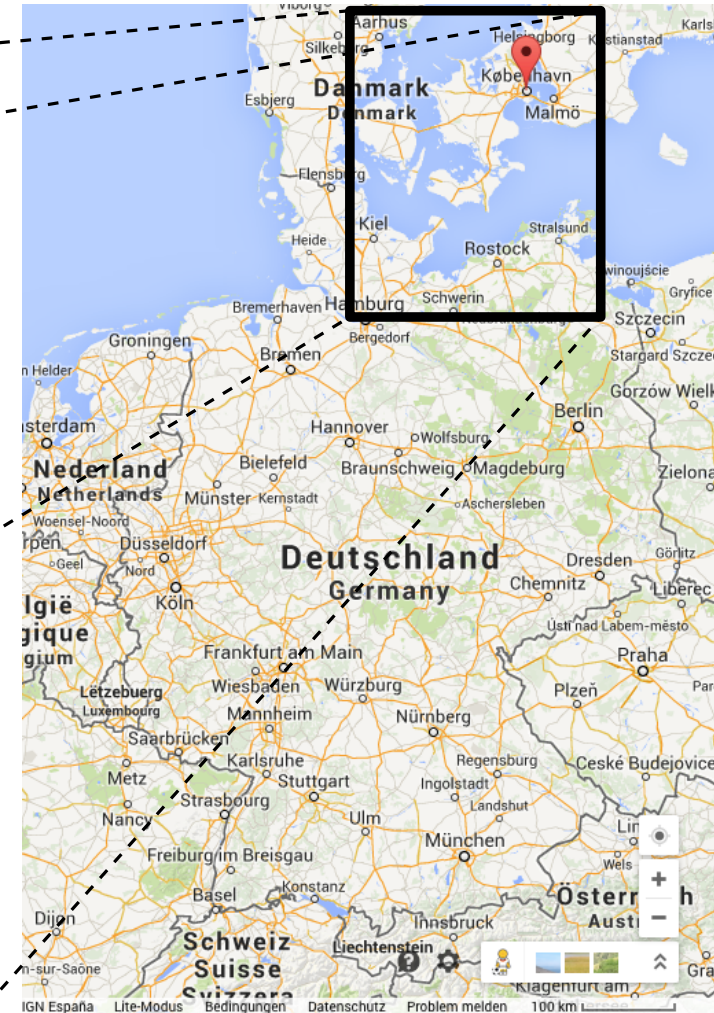


	<i>countries</i>					
	FR	DE	GB	IT	JP	US
<i>scale</i>	#Label					
20km	86	52	99	131	99	403
50km	80	43	68	111	80	359
100km	69	33	37	68	49	288

Experimentelle Evaluation



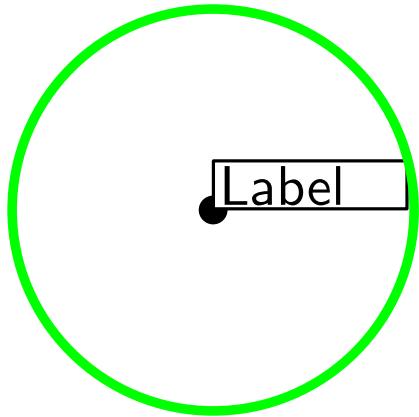
20 km
less dense



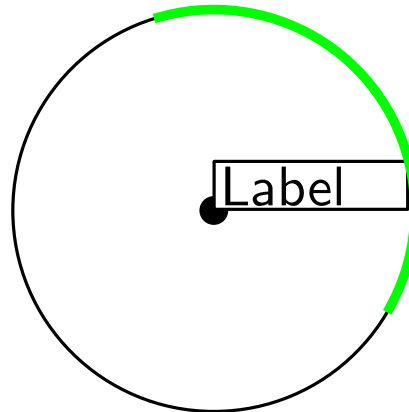
100 km
more dense

Modelle: Anzahl aktiver Bereiche

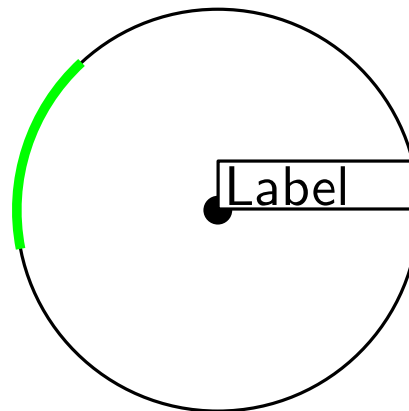
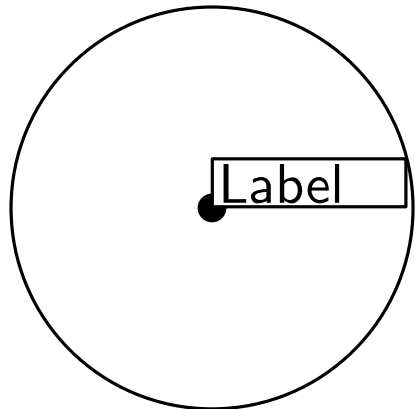
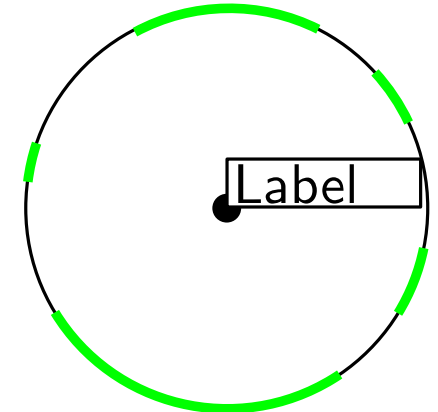
0/1 Modell



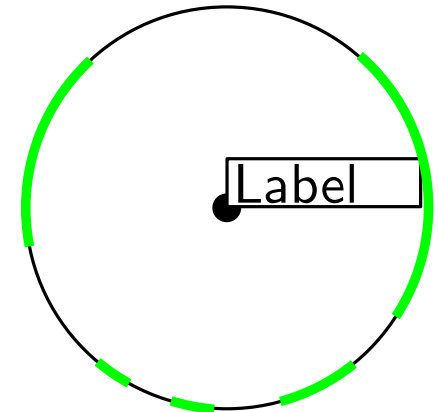
1R Modell



∞ R Modell



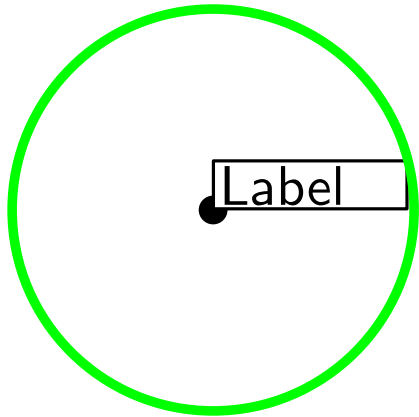
...



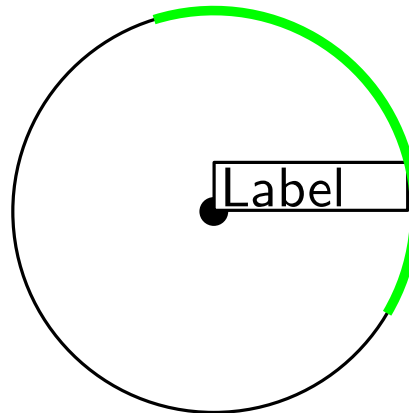
berechne optimale Lösung mit ILP und vergleiche gegen ∞ R Modell

Modelle: Anzahl aktiver Bereiche

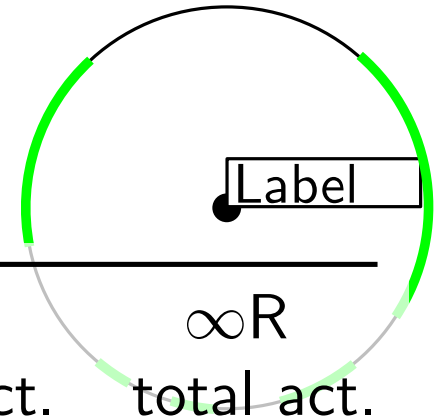
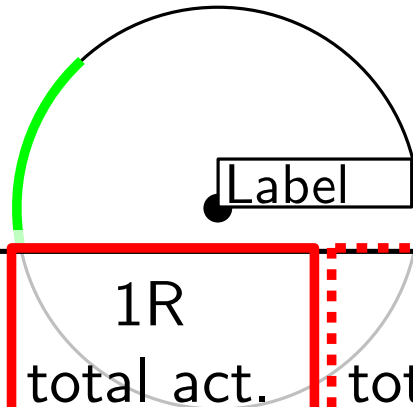
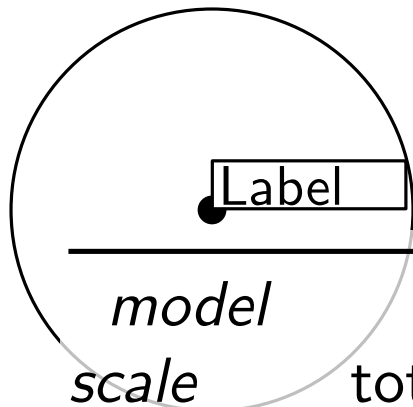
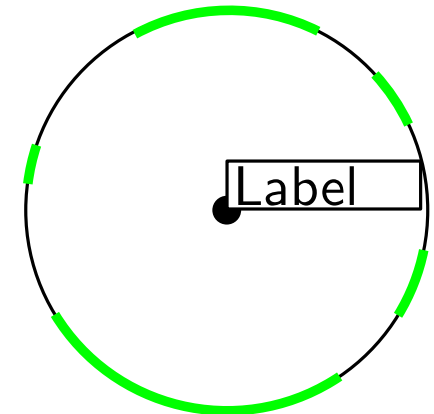
0/1 Modell



1R Modell

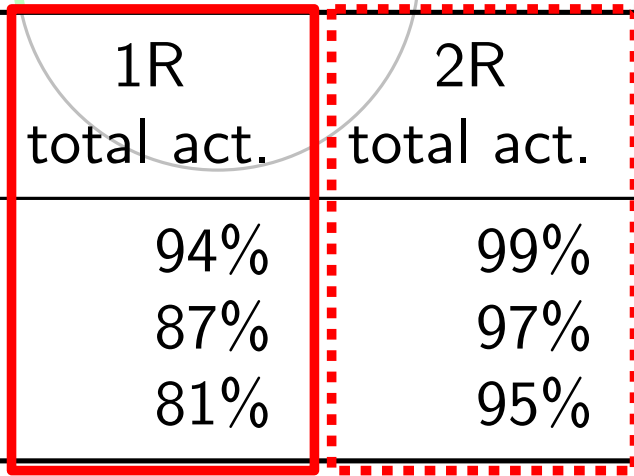


∞ R Modell

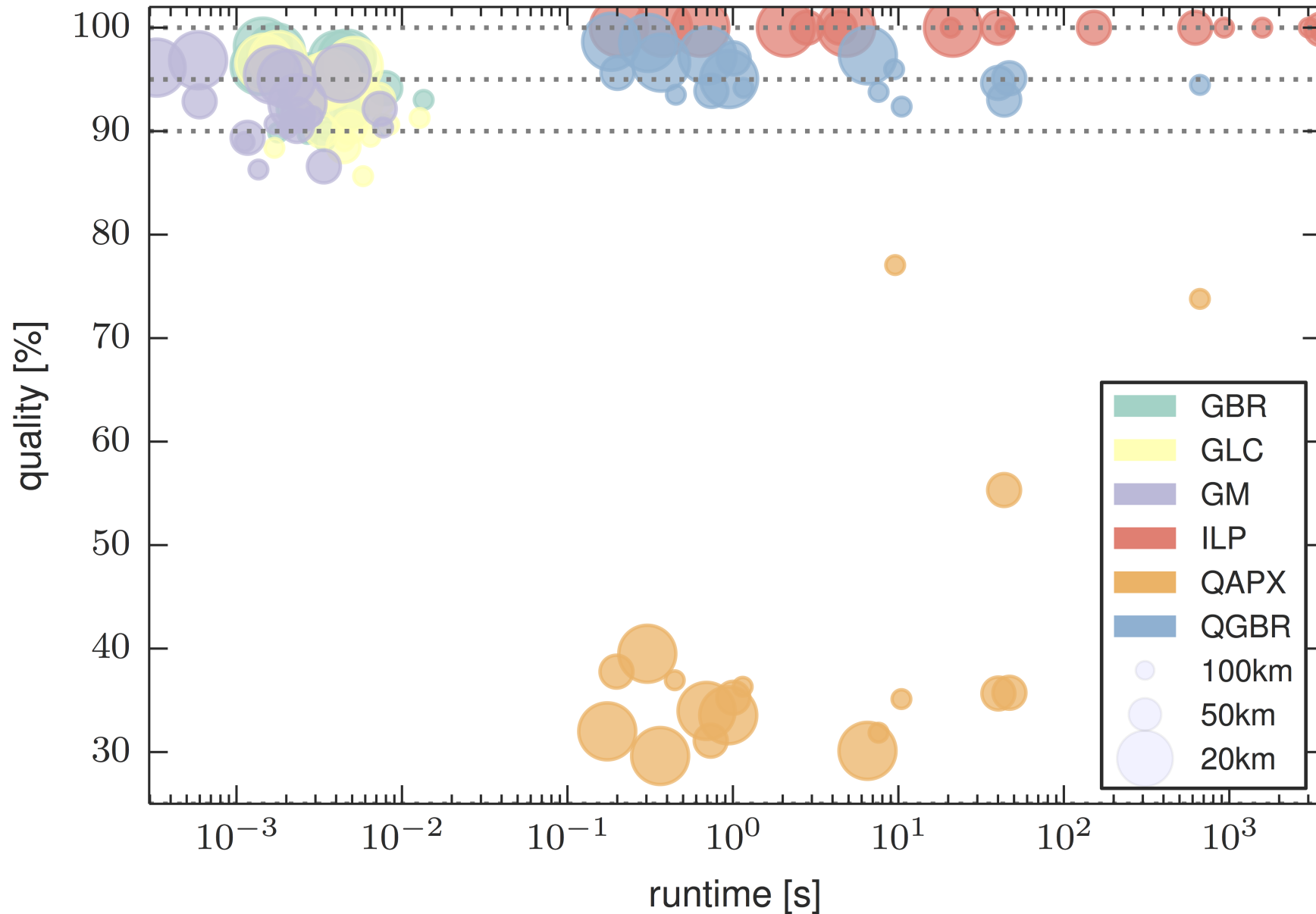


...

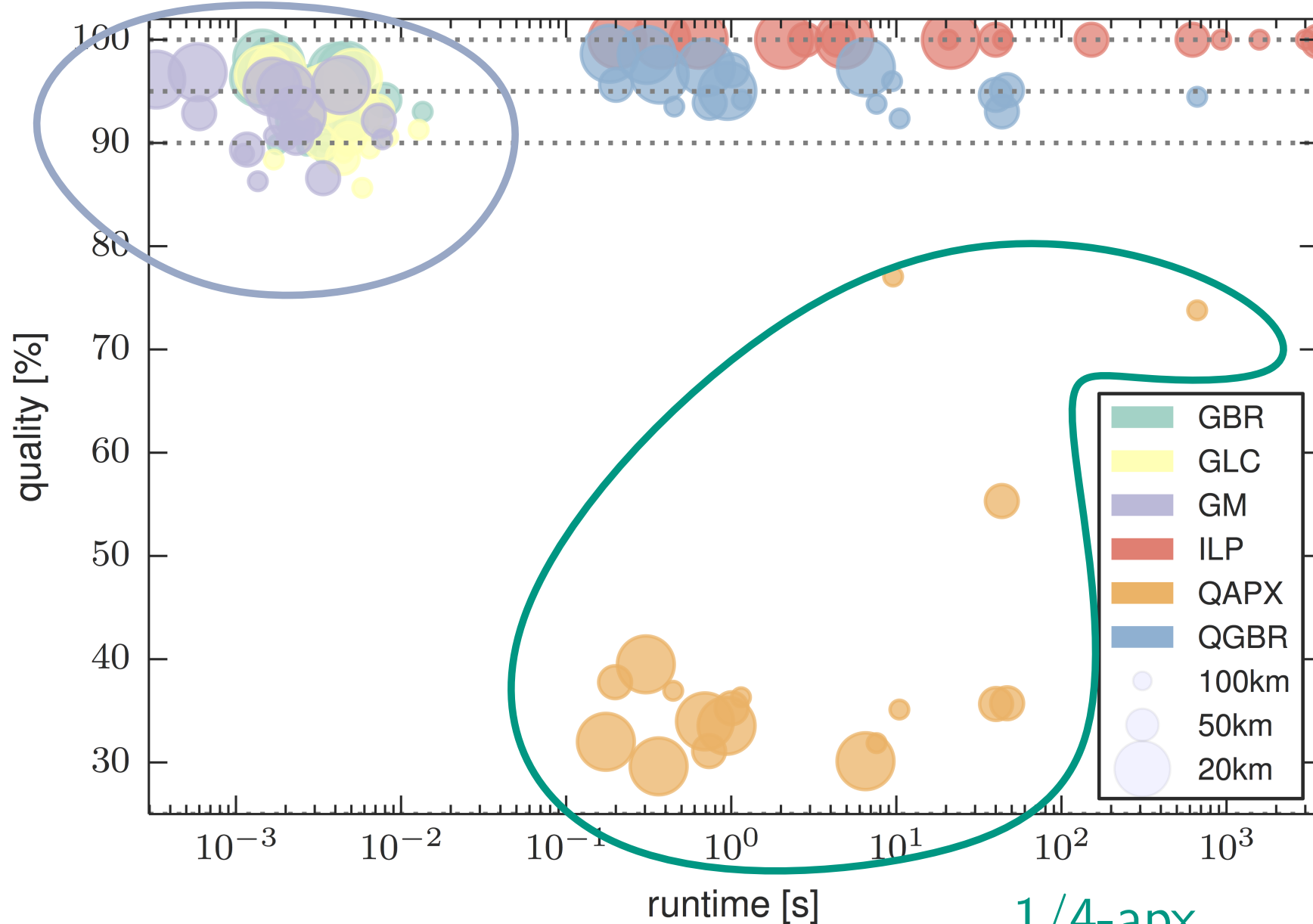
<i>model</i>	0/1	1R	2R	3R	∞ R
<i>scale</i>	total act.	total act.	total act.	total act.	total act.
20km	54%	94%	99%	99%	100%
50km	22%	87%	97%	99%	100%
100km	6%	81%	95%	99%	100%



Algorithmen: Laufzeit und Qualität



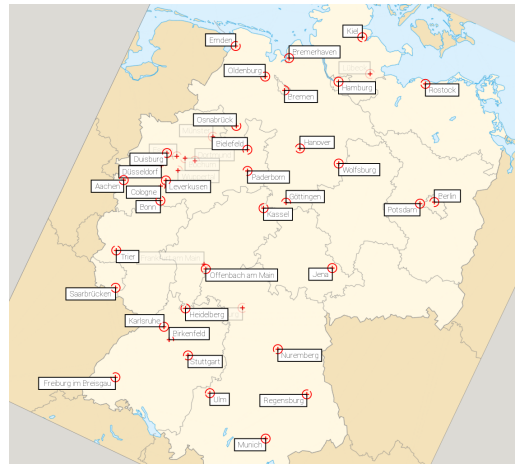
Greedy algorithms



1/4-apx

Evaluation der Modelle

- 1R Modell als guter Kompromiss



Evaluation der Algorithmen

- Greedy Heuristiken schnelle und gute Lösungen (real time)
- 1/4-Approximation + Greedy langsamer, aber etwas besser
- ILP optimal, aber sehr langsam, manchmal keine Lösung