

Vorlesung Algorithmische Kartografie

Flächenkartogramme

LEHRSTUHL FÜR ALGORITHMIK I · INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK · FAKULTÄT FÜR INFORMATIK

Benjamin Niedermann · Martin Nöllenburg
12.05.2015/19.05.2015



Ein Ausflug in die Theorie: Welche Polygonkomplexität braucht man, um jede Flächenzuweisung als rektilineares Kartogramm realisieren zu können?

Ein Ausflug in die Theorie: Welche Polygonkomplexität braucht man, um jede Flächenzuweisung als rektilineares Kartogramm realisieren zu können?

Satz: Es gibt planare triangulierte Graphen, die mindestens Komplexität 8 zur Kontaktrepräsentation mit rektilinearen Polygonen benötigen.

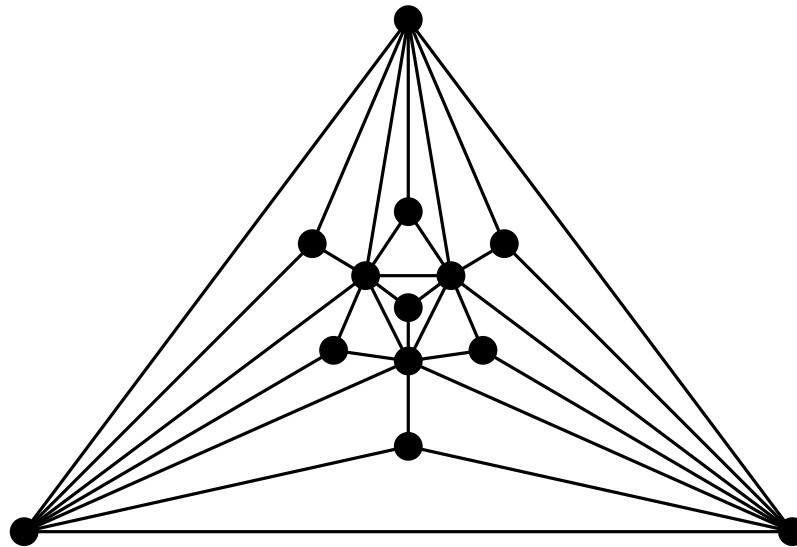
[Yeap, Sarrafzadeh '93]

Ein Ausflug in die Theorie: Welche Polygonkomplexität braucht man, um jede Flächenzuweisung als rektileares Kartogramm realisieren zu können?

Satz: Es gibt planare triangulierte Graphen, die mindestens Komplexität 8 zur Kontaktrepräsentation mit rektilearen Polygonen benötigen.

[Yeap, Sarrafzadeh '93]

Beweis:

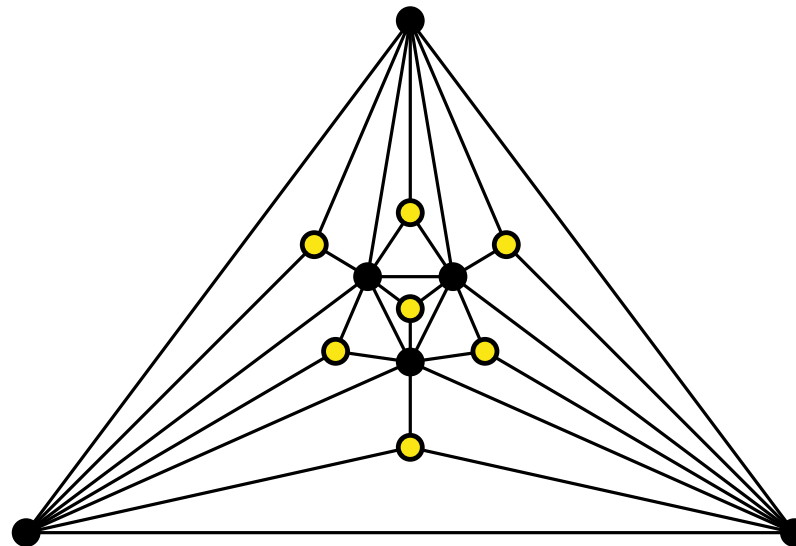


Ein Ausflug in die Theorie: Welche Polygonkomplexität braucht man, um jede Flächenzuweisung als rektilineares Kartogramm realisieren zu können?

Satz: Es gibt planare triangulierte Graphen, die mindestens Komplexität 8 zur Kontaktrepräsentation mit rektilinearen Polygonen benötigen.

[Yeap, Sarrafzadeh '93]

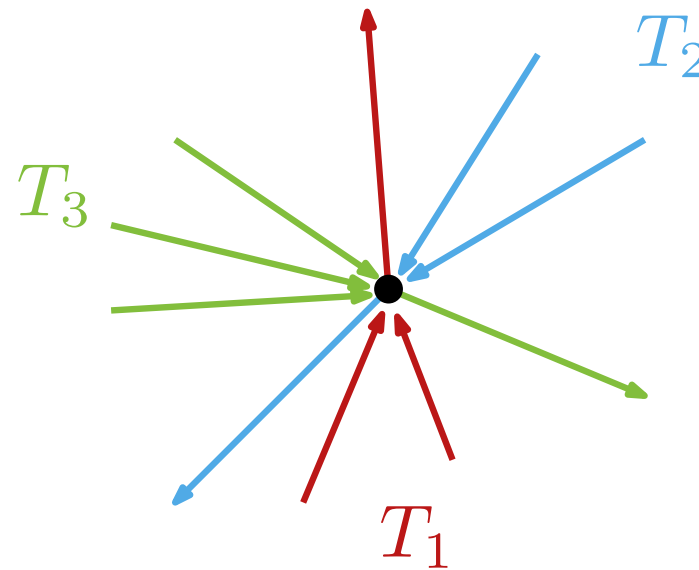
Beweis:



Schnyder Realizer

Sei G ein triangulierter planarer Graph. Ein **Schnyder Realizer** partitioniert die internen Kanten in drei Mengen T_1 , T_2 , T_3 von gerichteten Kanten, so dass

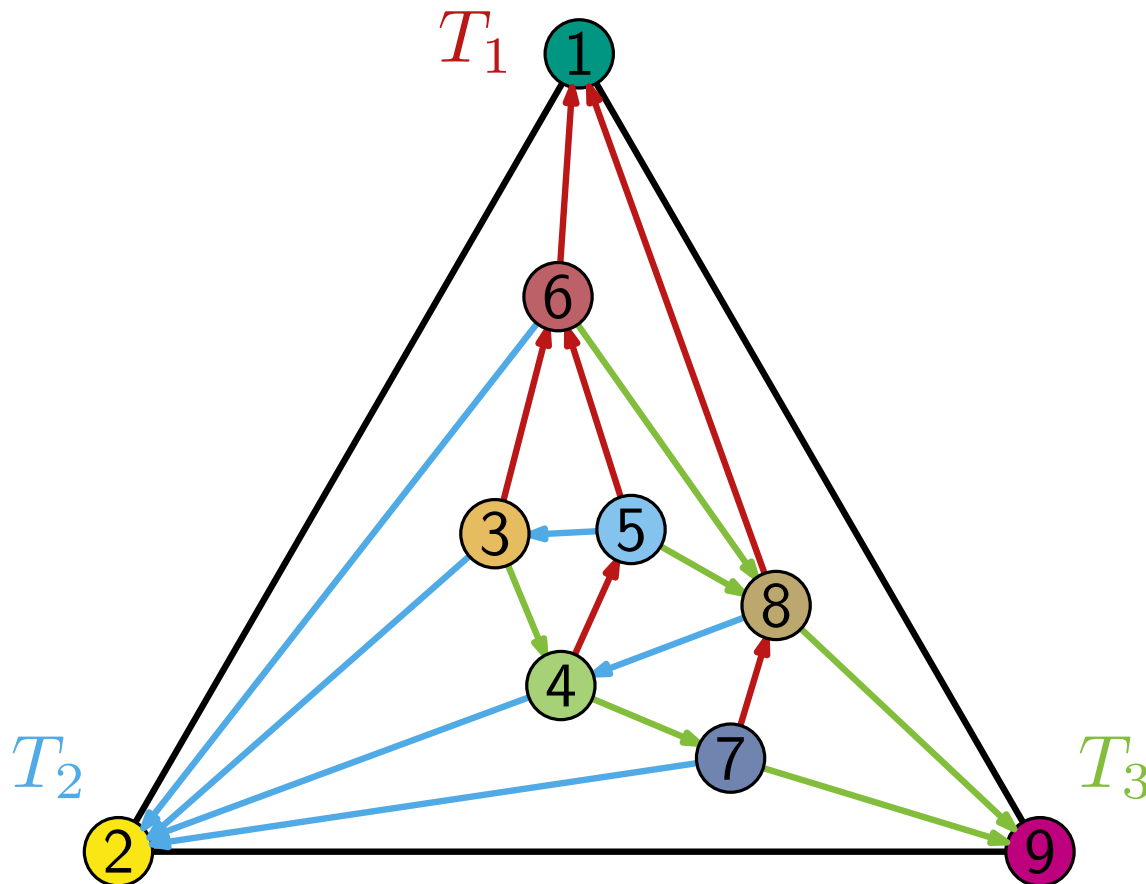
- jeder innere Knoten v hat genau eine Kante in jedem T_i^{out}
- die Ordnung der Kanten um jeden Knoten v im GUZS ist T_1^{in} , T_3^{out} , T_2^{in} , T_1^{out} , T_3^{in} , T_2^{out}



Schnyder Realizer

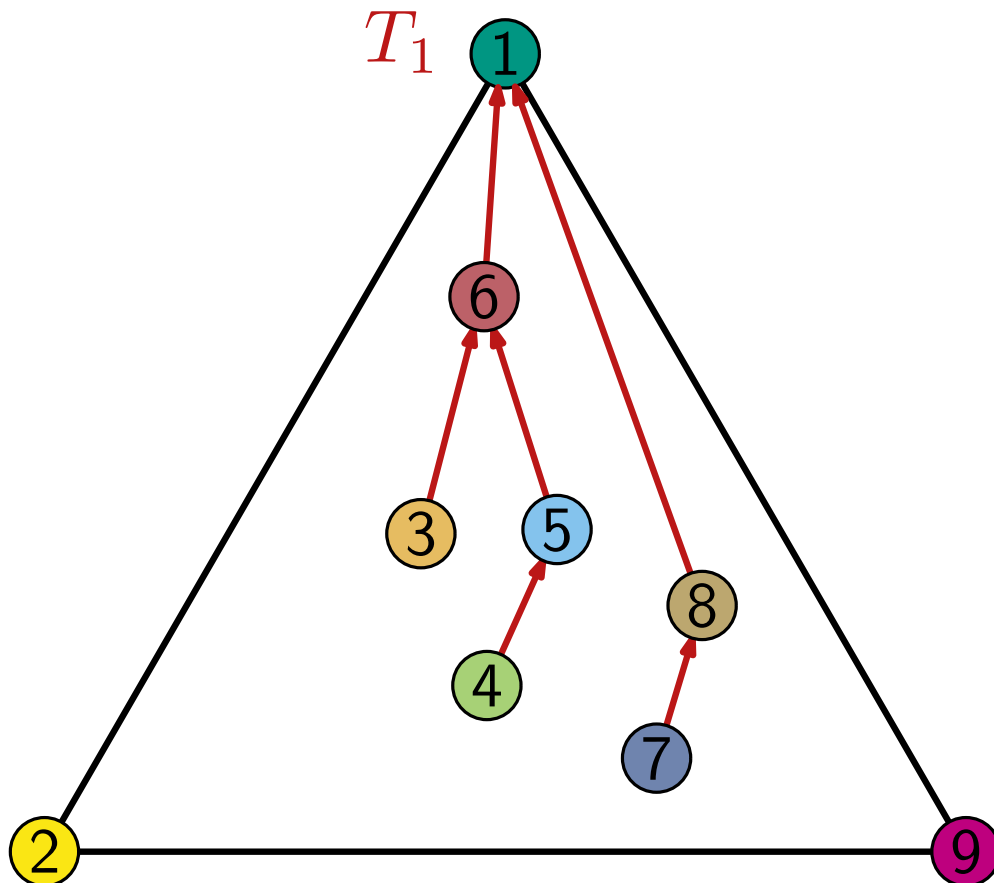
Satz: Jede Menge T_i ($i = 1, 2, 3$) ist ein Spannbaum aller inneren Knoten und eines äußeren Knotens.

Jeder triangulierte Graph besitzt einen Schnyder Realizer und dieser kann in $O(n)$ Zeit berechnet werden.



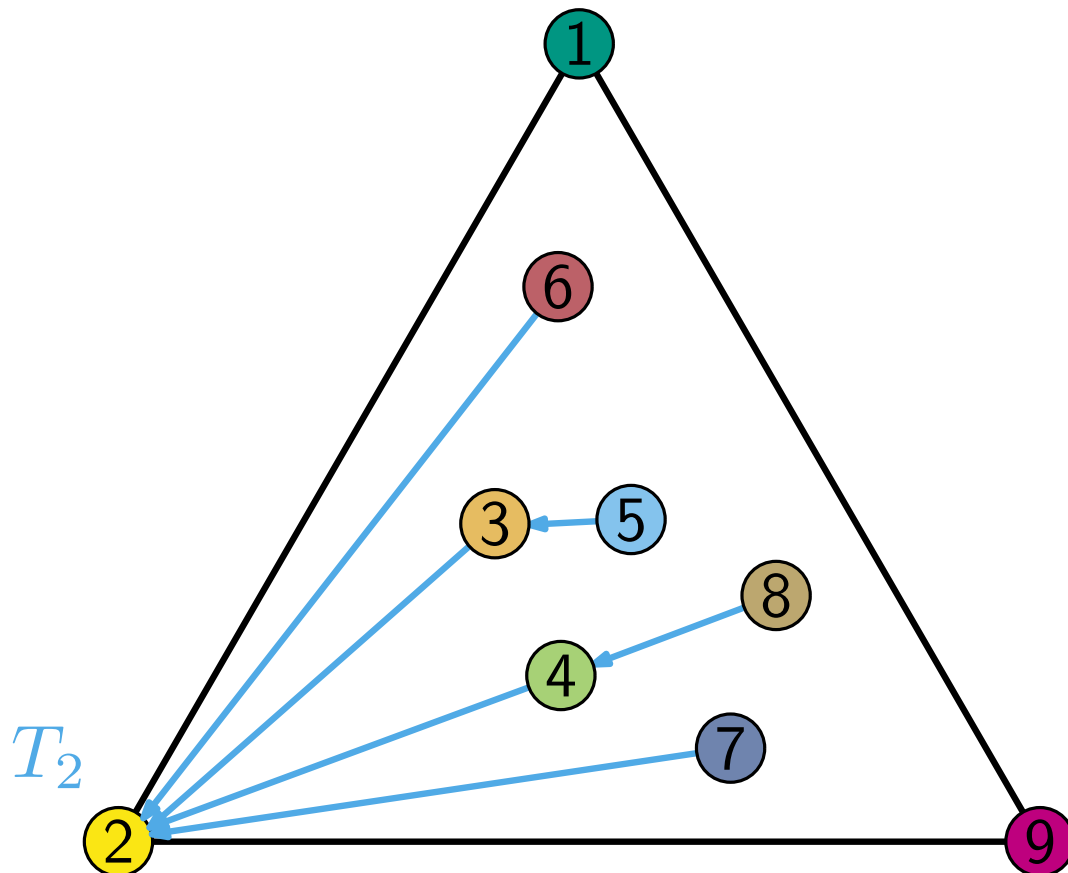
Satz: Jede Menge T_i ($i = 1, 2, 3$) ist ein Spannbaum aller inneren Knoten und eines äußeren Knotens.

Jeder triangulierte Graph besitzt einen Schnyder Realizer und dieser kann in $O(n)$ Zeit berechnet werden.



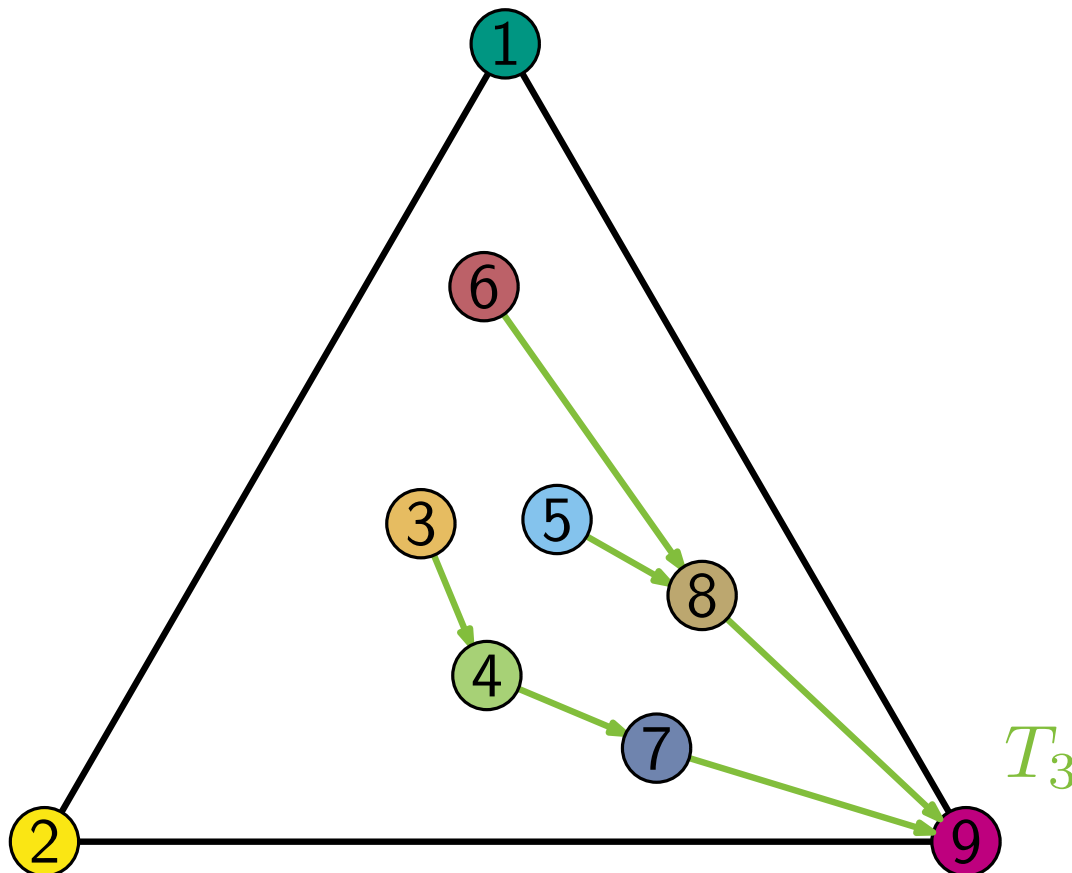
Satz: Jede Menge T_i ($i = 1, 2, 3$) ist ein Spannbaum aller inneren Knoten und eines äußeren Knotens.

Jeder triangulierte Graph besitzt einen Schnyder Realizer und dieser kann in $O(n)$ Zeit berechnet werden.



Satz: Jede Menge T_i ($i = 1, 2, 3$) ist ein Spannbaum aller inneren Knoten und eines äußeren Knotens.

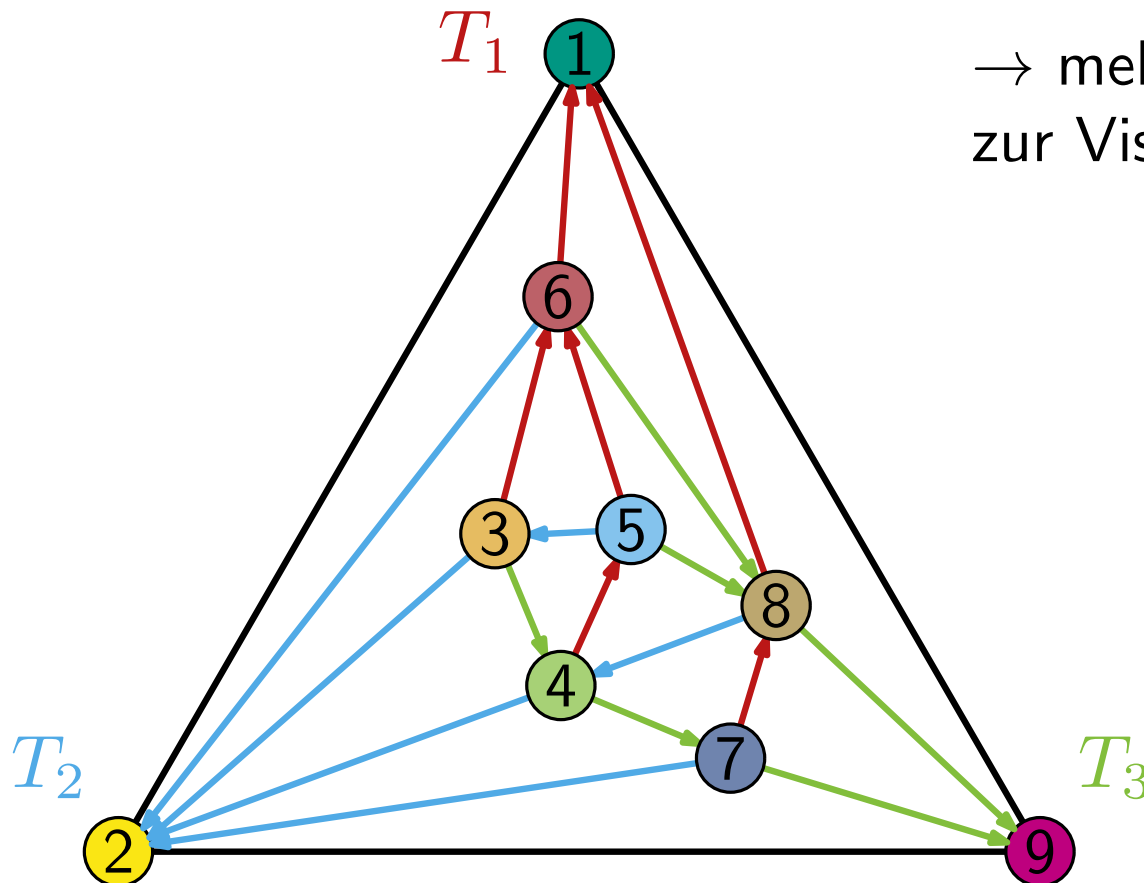
Jeder triangulierte Graph besitzt einen Schnyder Realizer und dieser kann in $O(n)$ Zeit berechnet werden.



Schnyder Realizer

Satz: Jede Menge T_i ($i = 1, 2, 3$) ist ein Spannbaum aller inneren Knoten und eines äußeren Knotens.

Jeder triangulierte Graph besitzt einen Schnyder Realizer und dieser kann in $O(n)$ Zeit berechnet werden.



→ mehr dazu in der VL Algorithmen zur Visualisierung von Graphen

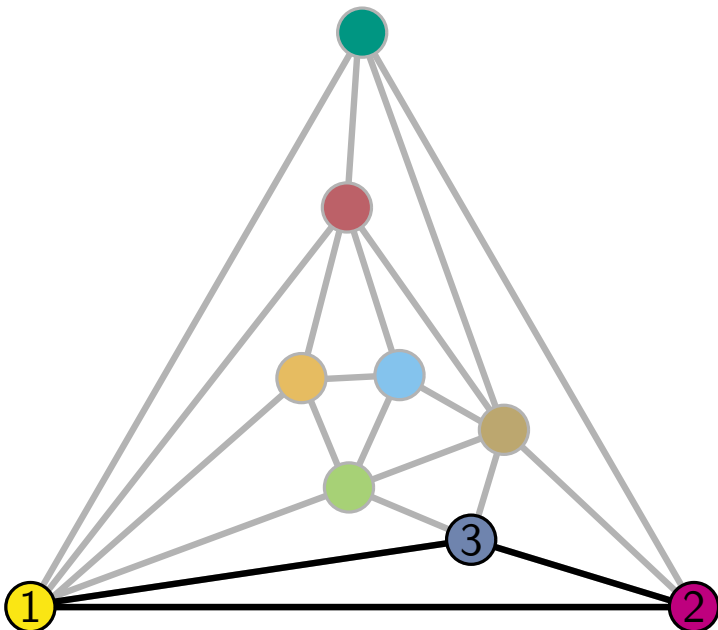
Die **kanonische Ordnung** der Knoten eines triangulierten planaren Graphen G mit den drei äußeren Knoten u, v, w im GUZS ist eine Ordnung $v_1 = u, v_2 = v, v_3, \dots, v_n = w$, so dass für jedes i ($4 \leq i \leq n$) gilt:

- Graph $G_{i-1} \subseteq G$ induziert durch v_1, \dots, v_{i-1} ist 2-fach zshgd. und äußere Facette ist begrenzt durch Kreis C_{i-1} , der v_1v_2 enthält
- Knoten v_i liegt in der äußeren Facette von G_{i-1} und seine Nachbarn in G_{i-1} bilden zusammenhängendes Intervall im Pfad $C_{i-1} \setminus v_1v_2$

Kanonische Ordnung

Die **kanonische Ordnung** der Knoten eines triangulierten planaren Graphen G mit den drei äußeren Knoten u, v, w im GUZS ist eine Ordnung $v_1 = u, v_2 = v, v_3, \dots, v_n = w$, so dass für jedes i ($4 \leq i \leq n$) gilt:

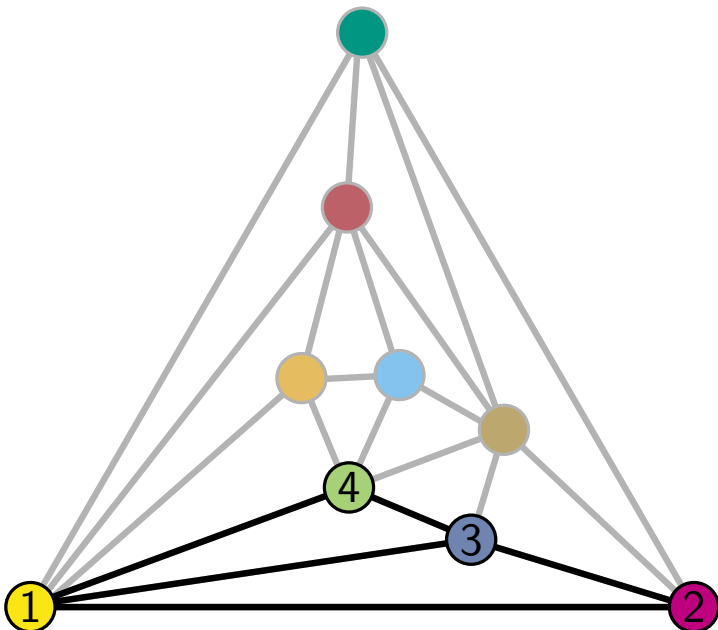
- Graph $G_{i-1} \subseteq G$ induziert durch v_1, \dots, v_{i-1} ist 2-fach zshgd. und äußere Facette ist begrenzt durch Kreis C_{i-1} , der v_1v_2 enthält
- Knoten v_i liegt in der äußeren Facette von G_{i-1} und seine Nachbarn in G_{i-1} bilden zusammenhängendes Intervall im Pfad $C_{i-1} \setminus v_1v_2$



Kanonische Ordnung

Die **kanonische Ordnung** der Knoten eines triangulierten planaren Graphen G mit den drei äußeren Knoten u, v, w im GUZS ist eine Ordnung $v_1 = u, v_2 = v, v_3, \dots, v_n = w$, so dass für jedes i ($4 \leq i \leq n$) gilt:

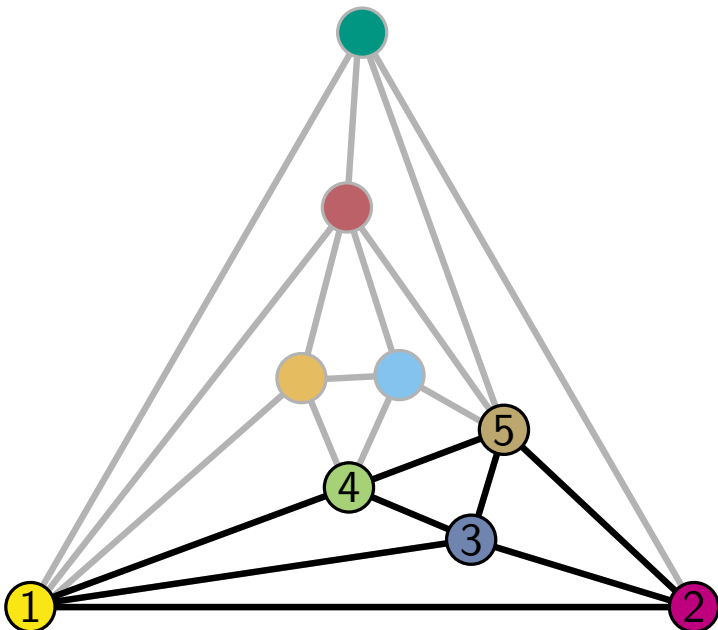
- Graph $G_{i-1} \subseteq G$ induziert durch v_1, \dots, v_{i-1} ist 2-fach zshgd. und äußere Facette ist begrenzt durch Kreis C_{i-1} , der v_1v_2 enthält
- Knoten v_i liegt in der äußeren Facette von G_{i-1} und seine Nachbarn in G_{i-1} bilden zusammenhängendes Intervall im Pfad $C_{i-1} \setminus v_1v_2$



Kanonische Ordnung

Die **kanonische Ordnung** der Knoten eines triangulierten planaren Graphen G mit den drei äußeren Knoten u, v, w im GUZS ist eine Ordnung $v_1 = u, v_2 = v, v_3, \dots, v_n = w$, so dass für jedes i ($4 \leq i \leq n$) gilt:

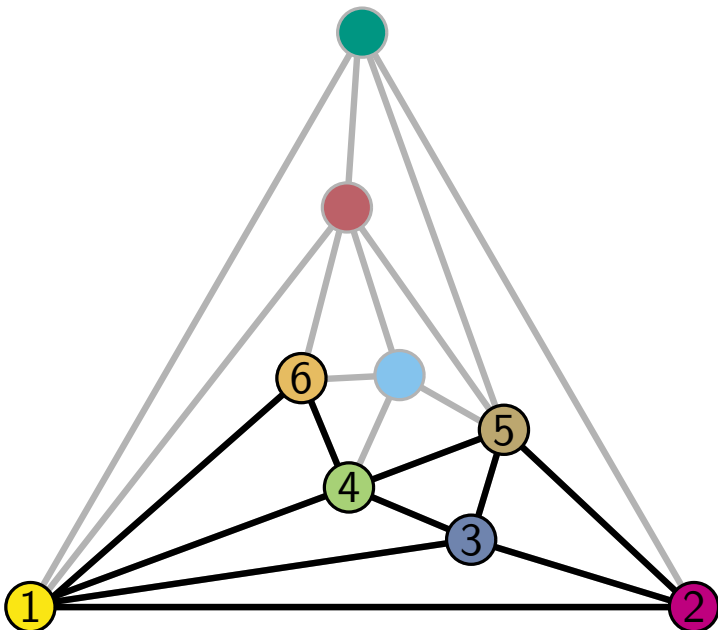
- Graph $G_{i-1} \subseteq G$ induziert durch v_1, \dots, v_{i-1} ist 2-fach zshgd. und äußere Facette ist begrenzt durch Kreis C_{i-1} , der v_1v_2 enthält
- Knoten v_i liegt in der äußeren Facette von G_{i-1} und seine Nachbarn in G_{i-1} bilden zusammenhängendes Intervall im Pfad $C_{i-1} \setminus v_1v_2$



Kanonische Ordnung

Die **kanonische Ordnung** der Knoten eines triangulierten planaren Graphen G mit den drei äußeren Knoten u, v, w im GUZS ist eine Ordnung $v_1 = u, v_2 = v, v_3, \dots, v_n = w$, so dass für jedes i ($4 \leq i \leq n$) gilt:

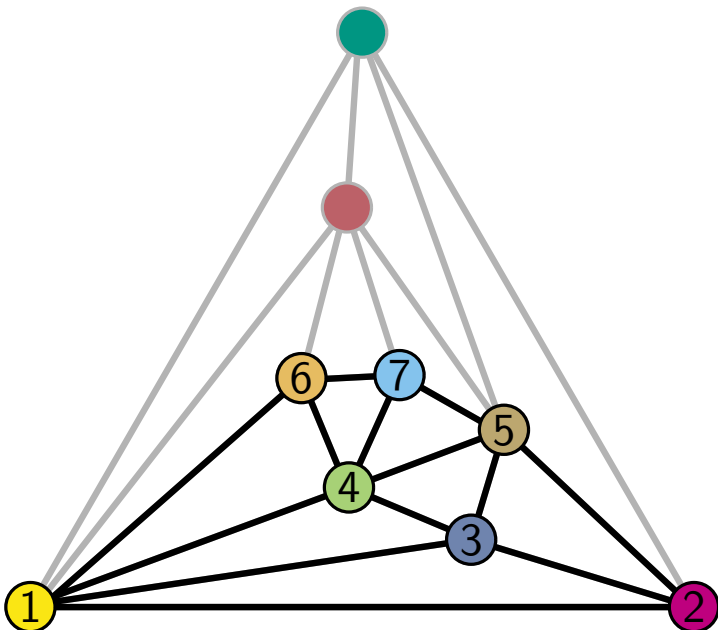
- Graph $G_{i-1} \subseteq G$ induziert durch v_1, \dots, v_{i-1} ist 2-fach zshgd. und äußere Facette ist begrenzt durch Kreis C_{i-1} , der v_1v_2 enthält
- Knoten v_i liegt in der äußeren Facette von G_{i-1} und seine Nachbarn in G_{i-1} bilden zusammenhängendes Intervall im Pfad $C_{i-1} \setminus v_1v_2$



Kanonische Ordnung

Die **kanonische Ordnung** der Knoten eines triangulierten planaren Graphen G mit den drei äußeren Knoten u, v, w im GUZS ist eine Ordnung $v_1 = u, v_2 = v, v_3, \dots, v_n = w$, so dass für jedes i ($4 \leq i \leq n$) gilt:

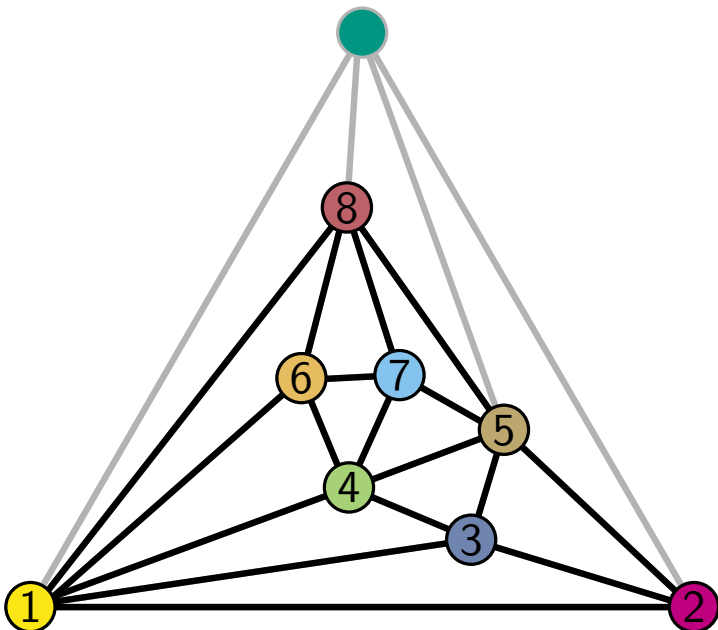
- Graph $G_{i-1} \subseteq G$ induziert durch v_1, \dots, v_{i-1} ist 2-fach zshgd. und äußere Facette ist begrenzt durch Kreis C_{i-1} , der v_1v_2 enthält
- Knoten v_i liegt in der äußeren Facette von G_{i-1} und seine Nachbarn in G_{i-1} bilden zusammenhängendes Intervall im Pfad $C_{i-1} \setminus v_1v_2$



Kanonische Ordnung

Die **kanonische Ordnung** der Knoten eines triangulierten planaren Graphen G mit den drei äußeren Knoten u, v, w im GUZS ist eine Ordnung $v_1 = u, v_2 = v, v_3, \dots, v_n = w$, so dass für jedes i ($4 \leq i \leq n$) gilt:

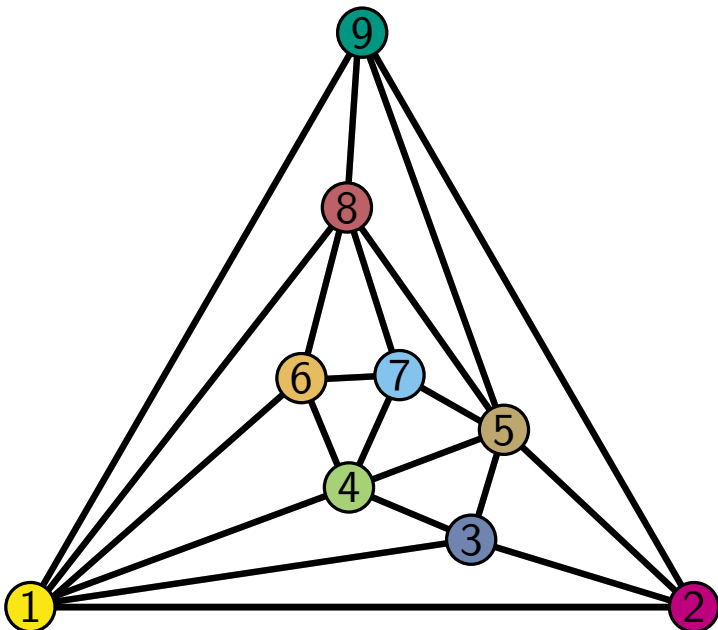
- Graph $G_{i-1} \subseteq G$ induziert durch v_1, \dots, v_{i-1} ist 2-fach zshgd. und äußere Facette ist begrenzt durch Kreis C_{i-1} , der v_1v_2 enthält
- Knoten v_i liegt in der äußeren Facette von G_{i-1} und seine Nachbarn in G_{i-1} bilden zusammenhängendes Intervall im Pfad $C_{i-1} \setminus v_1v_2$



Kanonische Ordnung

Die **kanonische Ordnung** der Knoten eines triangulierten planaren Graphen G mit den drei äußeren Knoten u, v, w im GUZS ist eine Ordnung $v_1 = u, v_2 = v, v_3, \dots, v_n = w$, so dass für jedes i ($4 \leq i \leq n$) gilt:

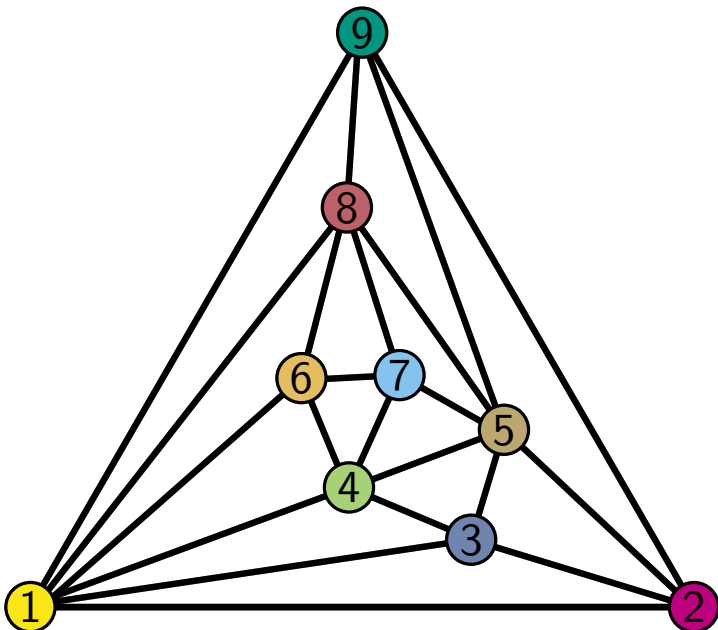
- Graph $G_{i-1} \subseteq G$ induziert durch v_1, \dots, v_{i-1} ist 2-fach zshgd. und äußere Facette ist begrenzt durch Kreis C_{i-1} , der v_1v_2 enthält
- Knoten v_i liegt in der äußeren Facette von G_{i-1} und seine Nachbarn in G_{i-1} bilden zusammenhängendes Intervall im Pfad $C_{i-1} \setminus v_1v_2$



Kanonische Ordnung

Die **kanonische Ordnung** der Knoten eines triangulierten planaren Graphen G mit den drei äußeren Knoten u, v, w im GUZS ist eine Ordnung $v_1 = u, v_2 = v, v_3, \dots, v_n = w$, so dass für jedes i ($4 \leq i \leq n$) gilt:

- Graph $G_{i-1} \subseteq G$ induziert durch v_1, \dots, v_{i-1} ist 2-fach zshgd. und äußere Facette ist begrenzt durch Kreis C_{i-1} , der v_1v_2 enthält
- Knoten v_i liegt in der äußeren Facette von G_{i-1} und seine Nachbarn in G_{i-1} bilden zusammenhängendes Intervall im Pfad $C_{i-1} \setminus v_1v_2$

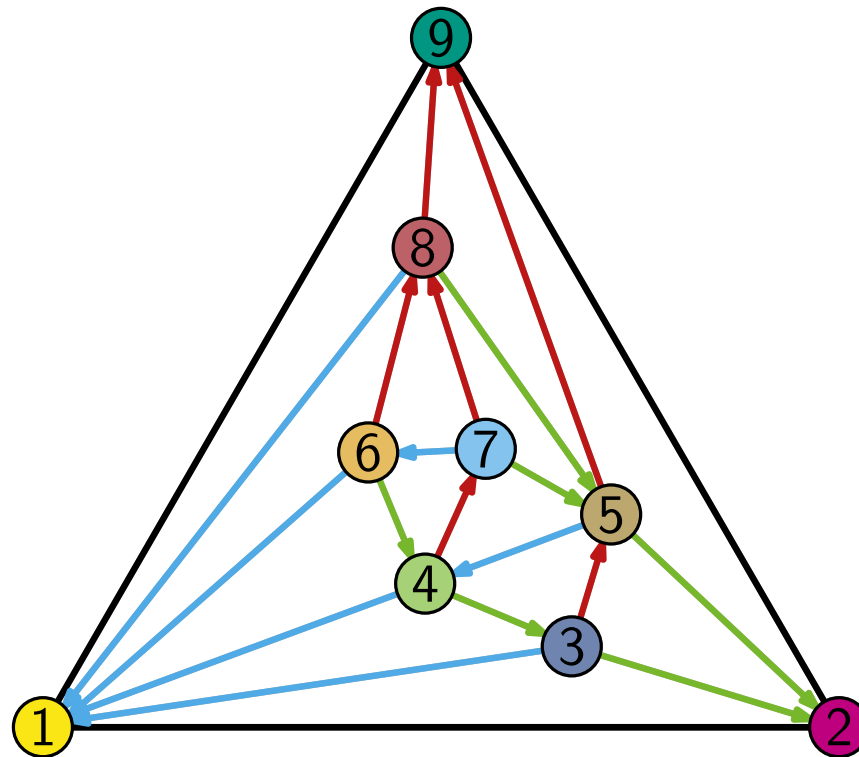


Satz: Jeder triangulierte Graph G besitzt eine kanonische Ordnung; sie kann in $O(n)$ Zeit berechnet werden.

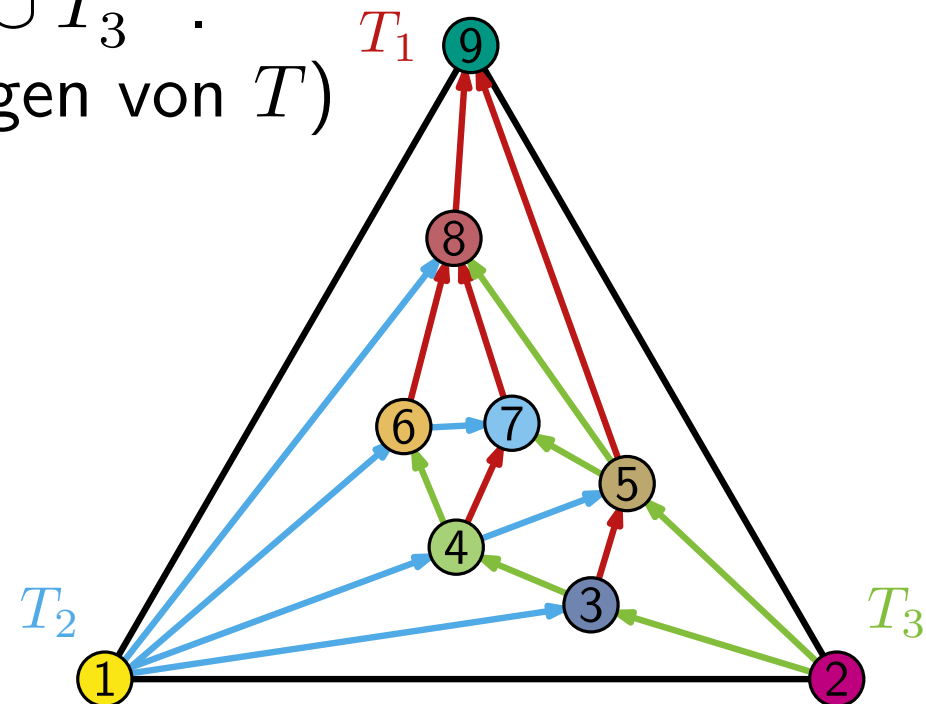
→ mehr dazu in der VL Algorithmen zur Visualisierung von Graphen

Kanonische Ordnung & Schnyder Realizer

- Eine kanonische Ordnung der Knoten von G definiert einen Schnyder Realizer von G , indem jedem Knoten v_i drei ausgehende Kanten zum ersten und letzten Knoten in C_{i-1} und zum Nachfolger mit höchstem Index zugeordnet werden.



- Eine kanonische Ordnung der Knoten von G definiert einen Schnyder Realizer von G , indem jedem Knoten v_i drei ausgehende Kanten zum ersten und letzten Knoten in C_{i-1} und zum Nachfolger mit höchstem Index zugeordnet werden.
- Ein Schnyder Realizer mit Bäumen T_1, T_2, T_3 definiert eine kanonische Ordnung als topologische Ordnung des azyklischen Graphen $T_1 \cup T_2^{-1} \cup T_3^{-1}$.
(T^{-1} : invertiere Kantenrichtungen von T)



8-seitige rektilineare Kartogramme [Alam et al. '11]

Algorithmus hat drei Phasen:

- erzeuge T-Kontaktrepräsentation
- wandle jedes T in T-förmiges Polygon um
- weise verbleibende Löcher den T-Polygonen zu

8-seitige rektilineare Kartogramme [Alam et al. '11]

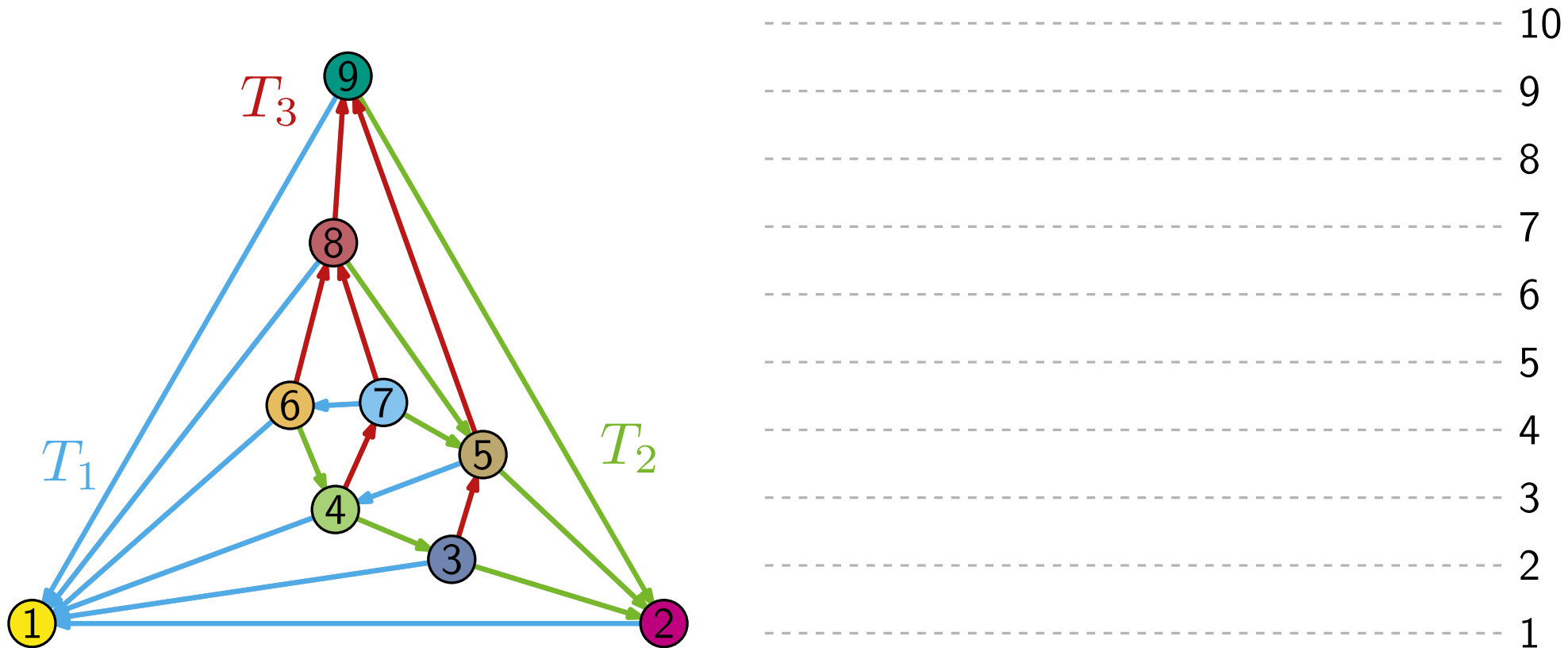
Algorithmus hat drei Phasen:

- erzeuge T-Kontaktrepräsentation
- wandle jedes T in T-förmiges Polygon um
- weise verbleibende Löcher den T-Polygonen zu

Wir zeigen:

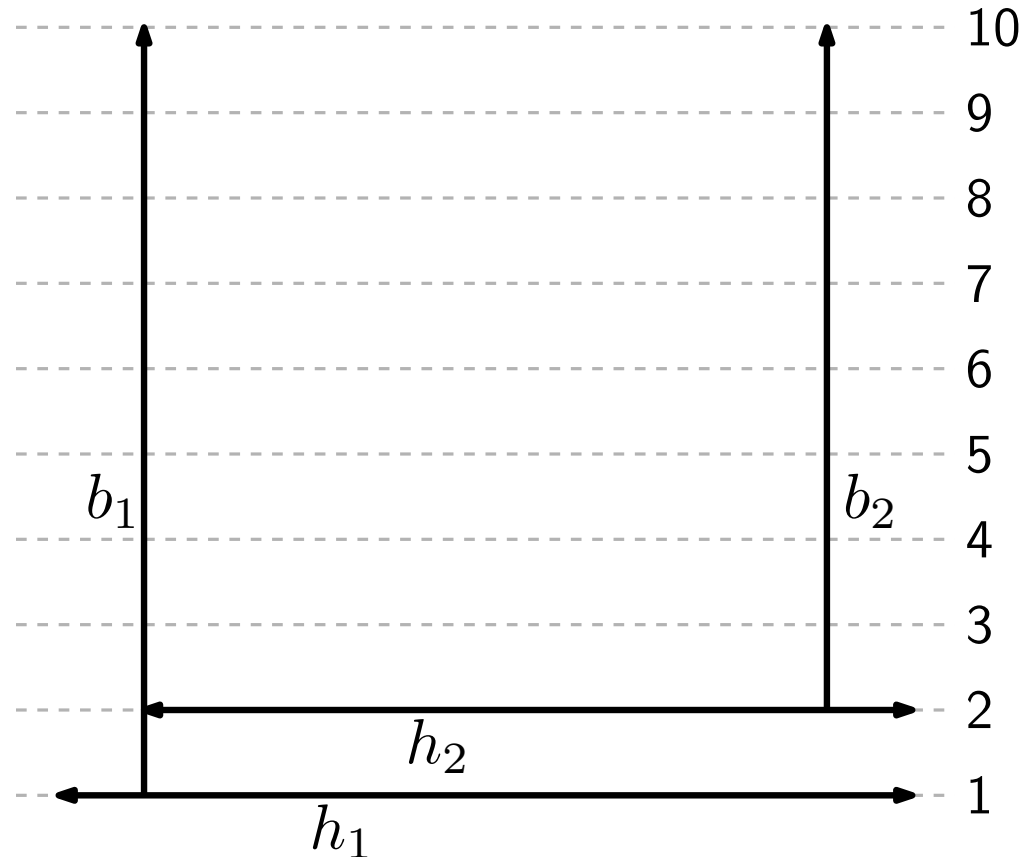
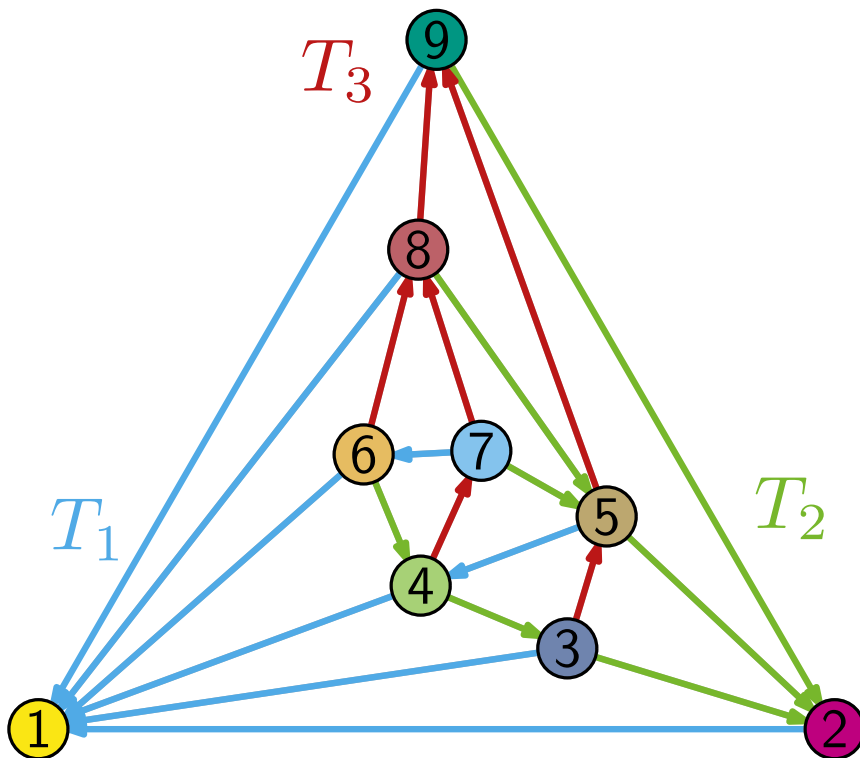
Das entstandene rektilineare Layout ist flächenuniversell und somit existiert immer ein korrektes Kartogramm.

Phase 1: T-Kontaktrepräsentation



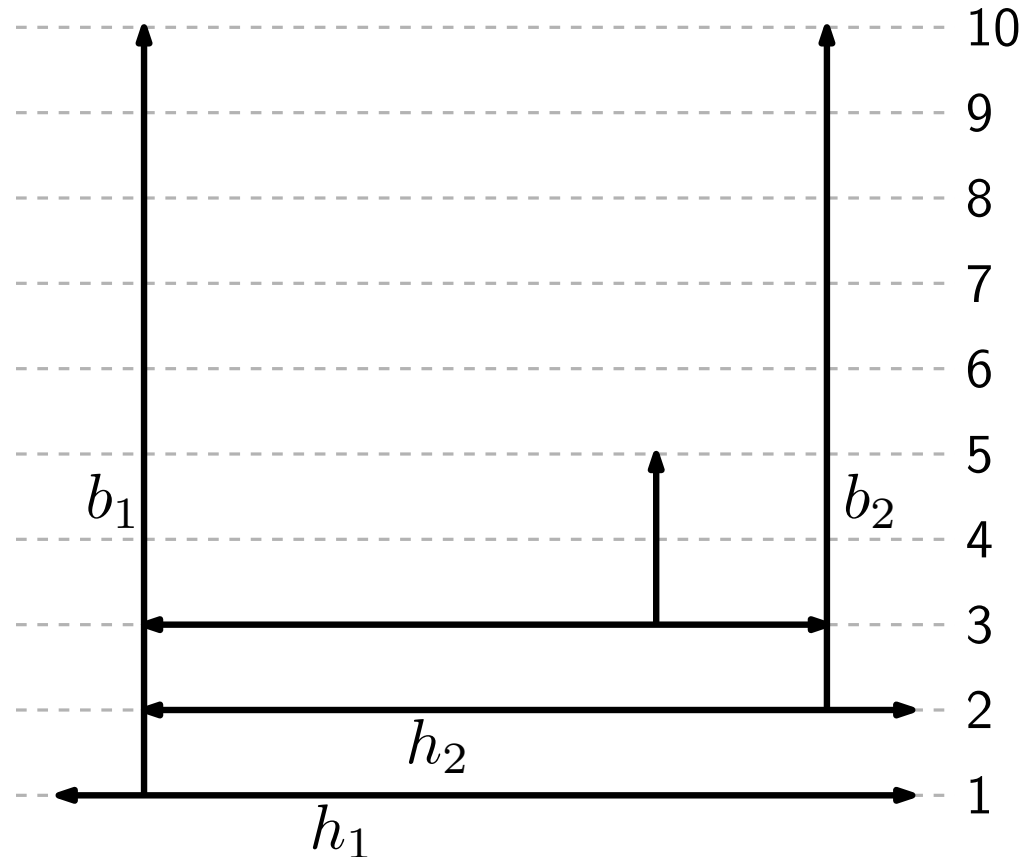
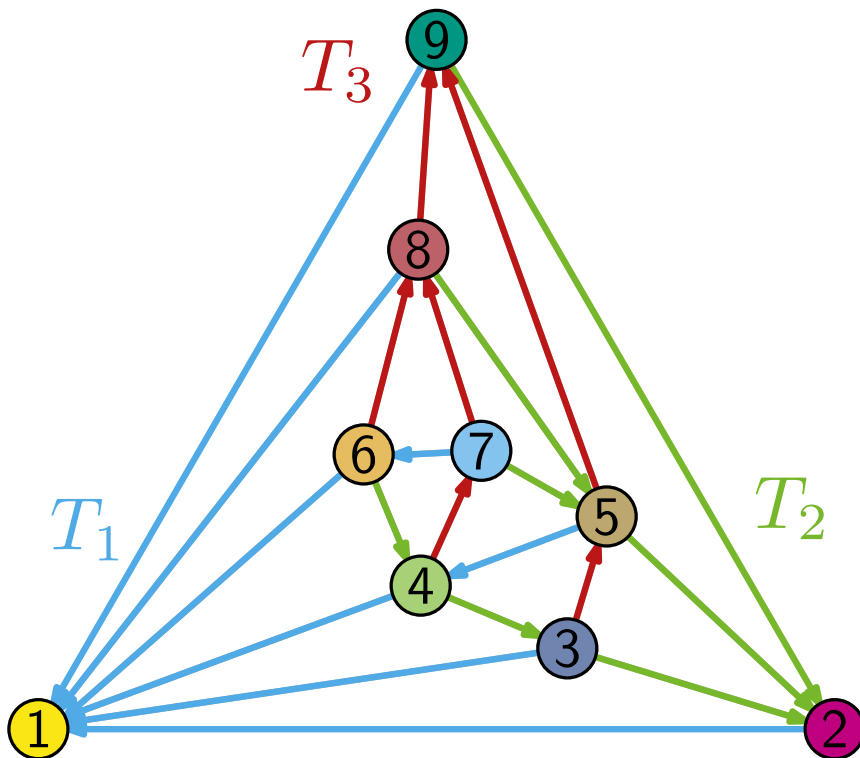
- betrachte Knoten in kanonischer Ordnung und zug. Schnyder Realizer
- $\Phi_i(k)$ sei Vater in T_i des Knotens v_k

Phase 1: T-Kontaktrepräsentation



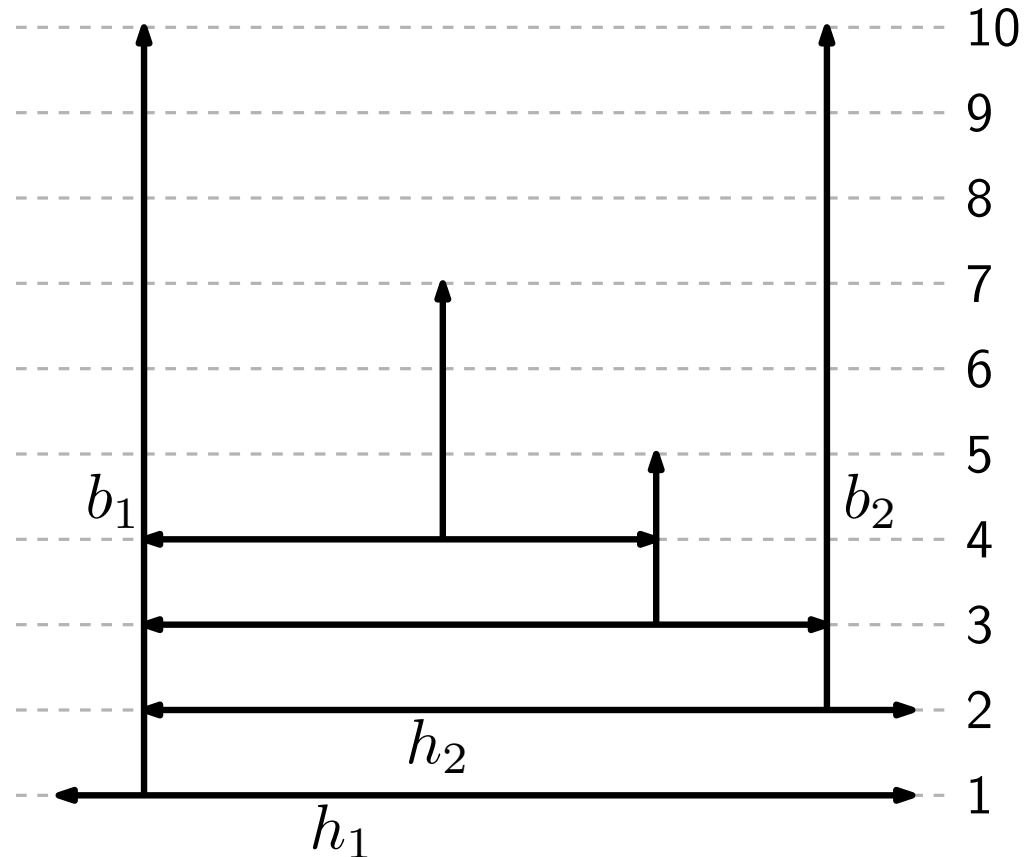
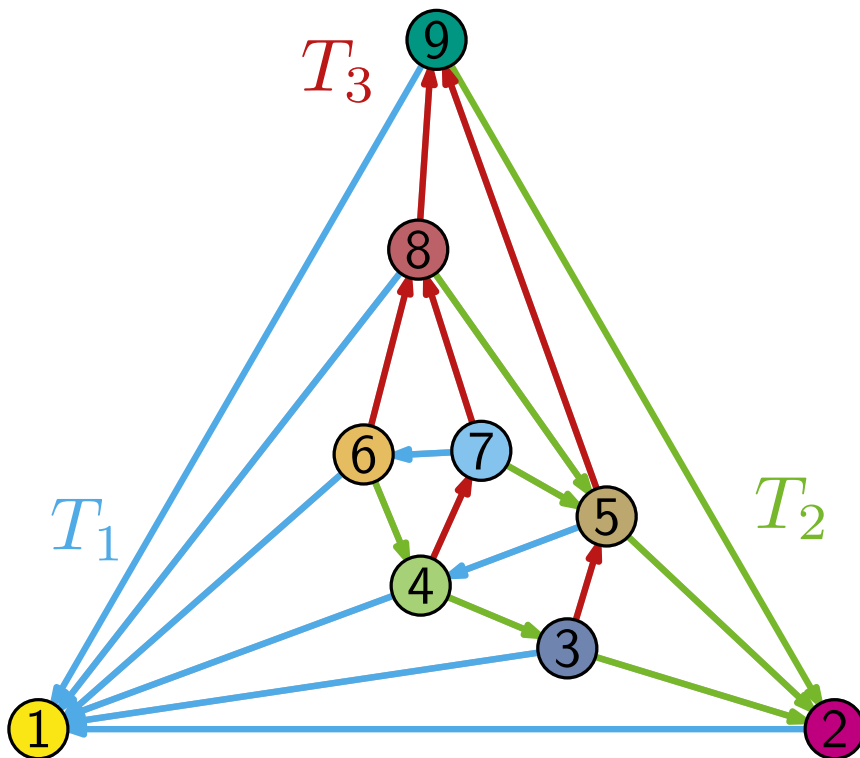
- betrachte Knoten in kanonischer Ordnung und zug. Schnyder Realizer
- $\Phi_i(k)$ sei Vater in T_i des Knotens v_k
- setze T's für v_1 und v_2 auf $y = 1$ und $y = 2$

Phase 1: T-Kontaktrepräsentation



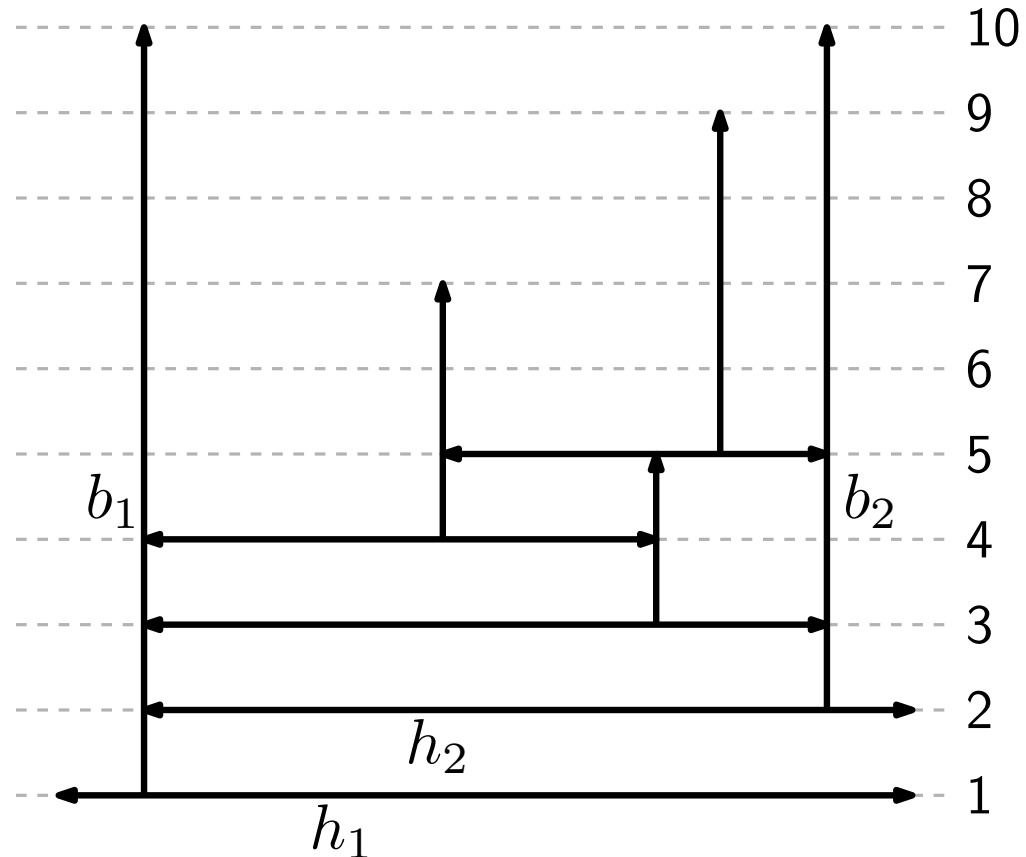
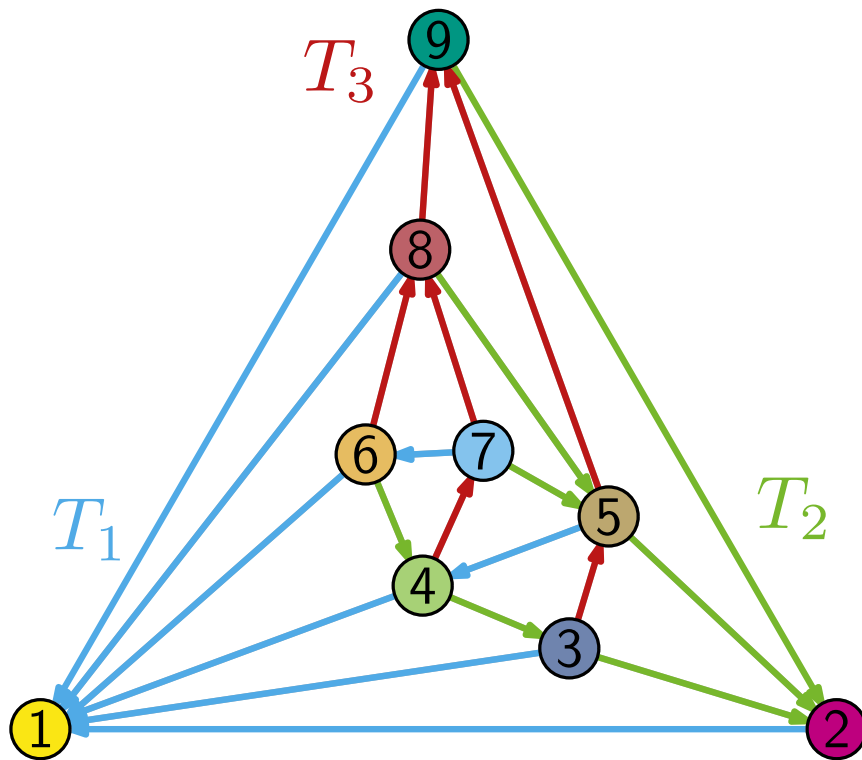
- betrachte Knoten in kanonischer Ordnung und zug. Schnyder Realizer
- $\Phi_i(k)$ sei Vater in T_i des Knotens v_k
- setze T's für v_1 und v_2 auf $y = 1$ und $y = 2$
- setze h_i auf $y = i$ mit linker und rechter Position von $\Phi_1(i)$ und $\Phi_2(i)$ und b_i von $y = i$ bis zum Index von $\Phi_3(i)$

Phase 1: T-Kontaktrepräsentation



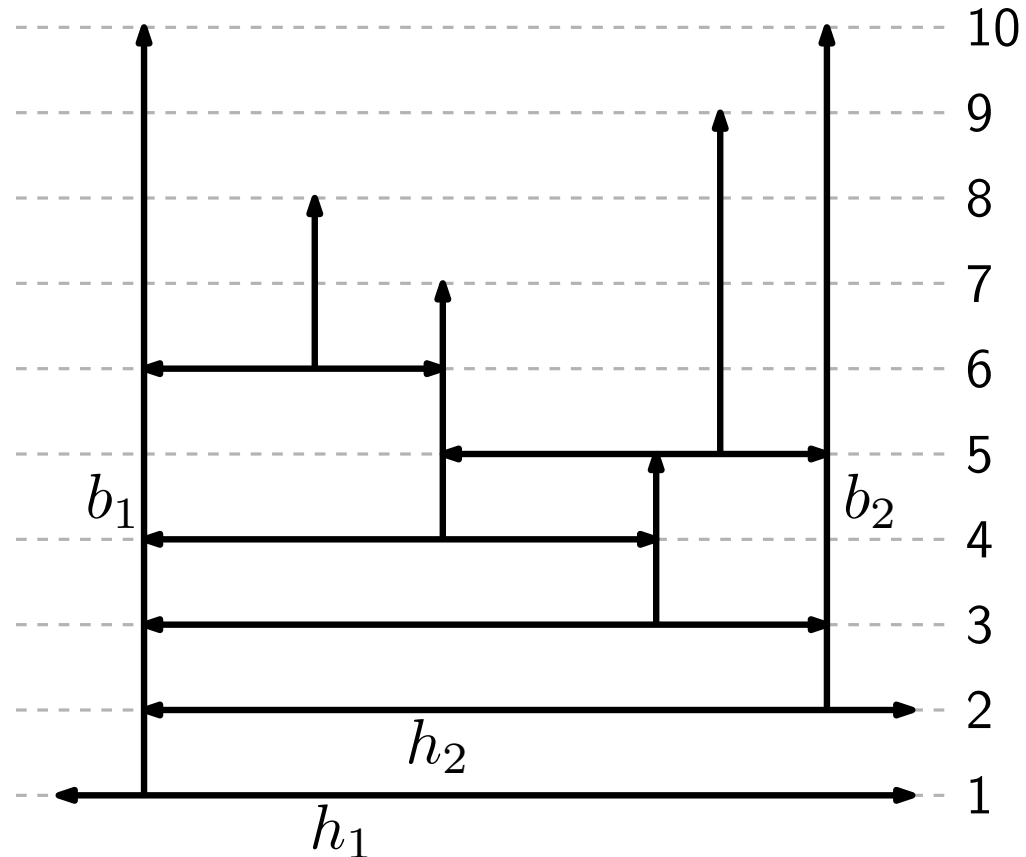
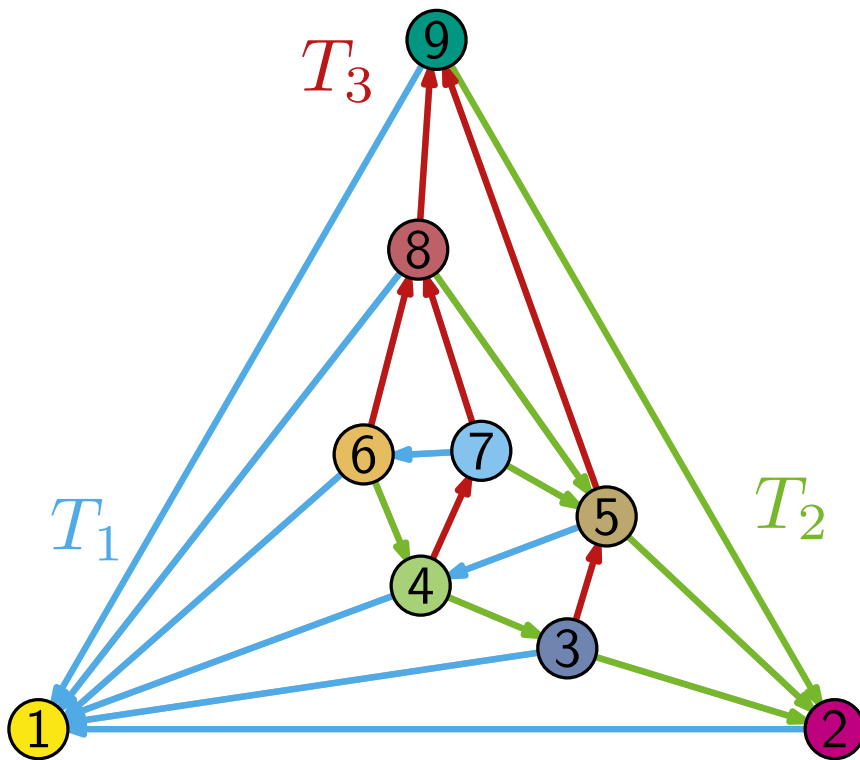
- betrachte Knoten in kanonischer Ordnung und zug. Schnyder Realizer
- $\Phi_i(k)$ sei Vater in T_i des Knotens v_k
- setze T 's für v_1 und v_2 auf $y = 1$ und $y = 2$
- setze h_i auf $y = i$ mit linker und rechter Position von $\Phi_1(i)$ und $\Phi_2(i)$ und b_i von $y = i$ bis zum Index von $\Phi_3(i)$

Phase 1: T-Kontaktrepräsentation



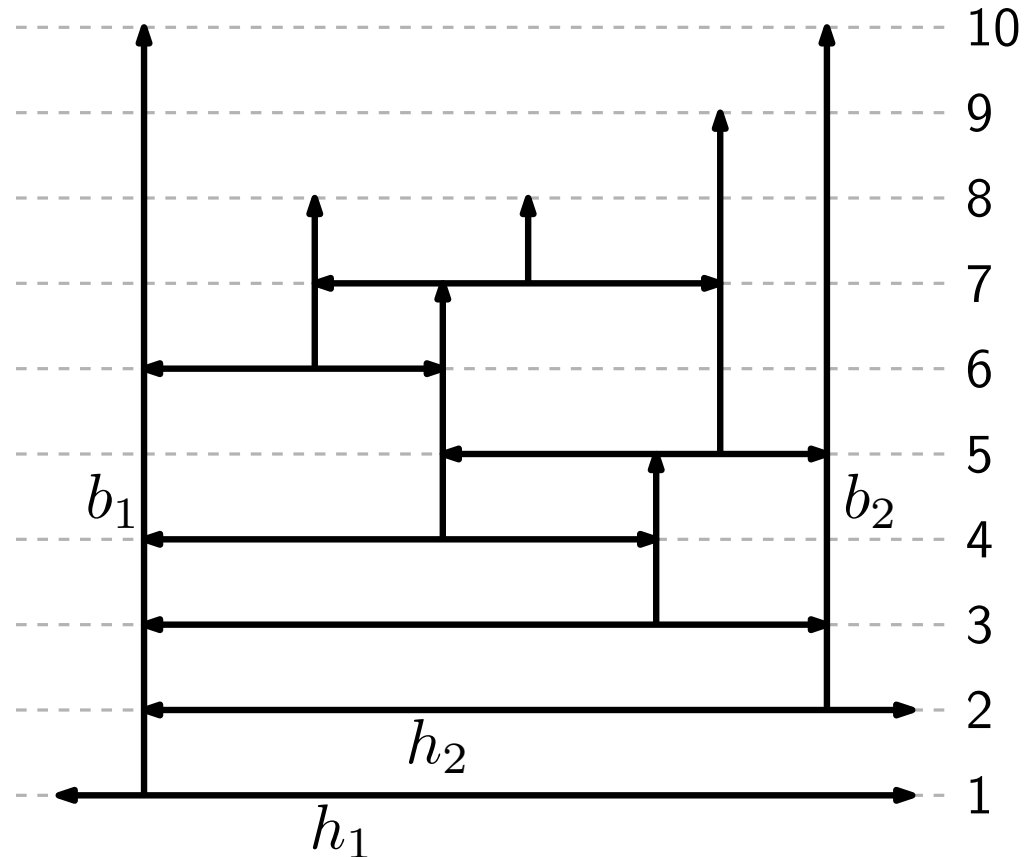
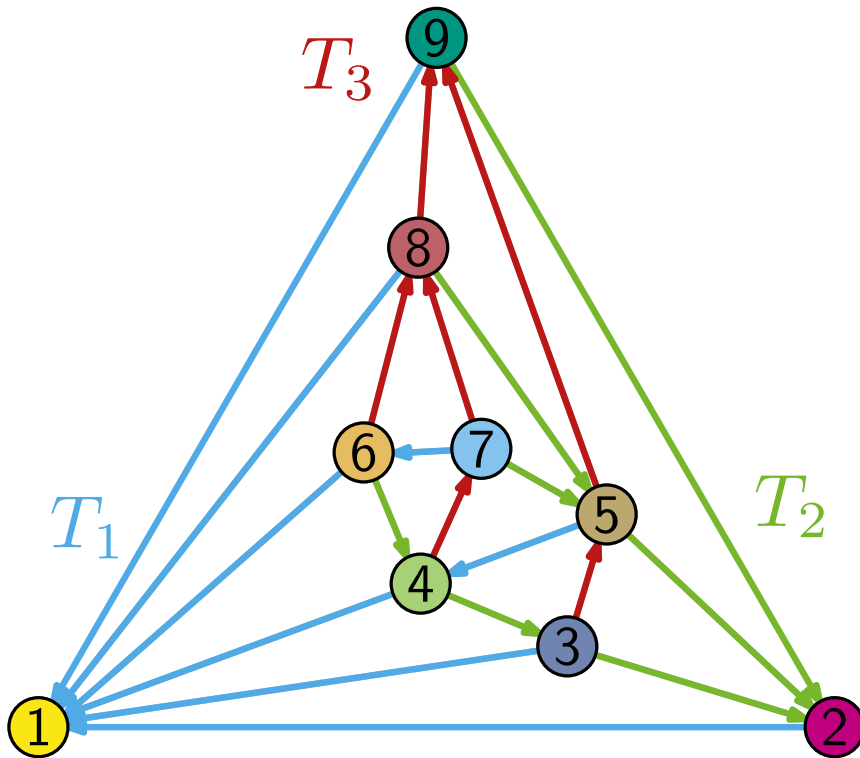
- betrachte Knoten in kanonischer Ordnung und zug. Schnyder Realizer
- $\Phi_i(k)$ sei Vater in T_i des Knotens v_k
- setze T's für v_1 und v_2 auf $y = 1$ und $y = 2$
- setze h_i auf $y = i$ mit linker und rechter Position von $\Phi_1(i)$ und $\Phi_2(i)$ und b_i von $y = i$ bis zum Index von $\Phi_3(i)$

Phase 1: T-Kontaktrepräsentation



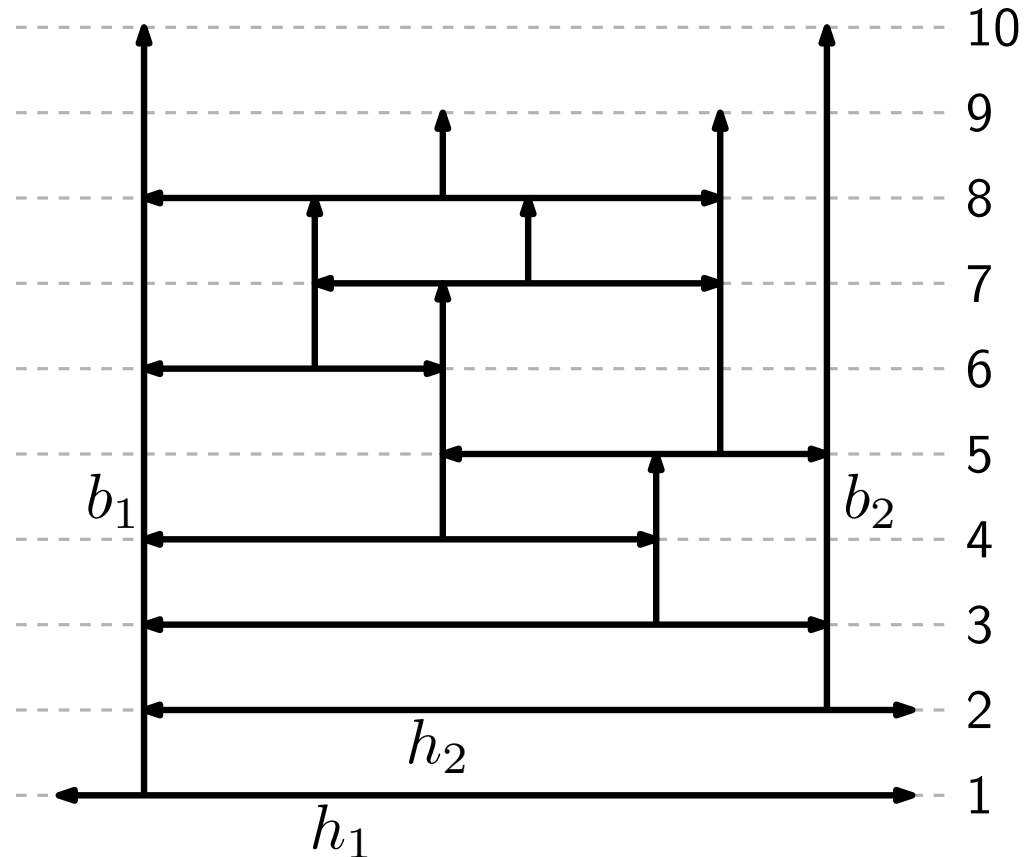
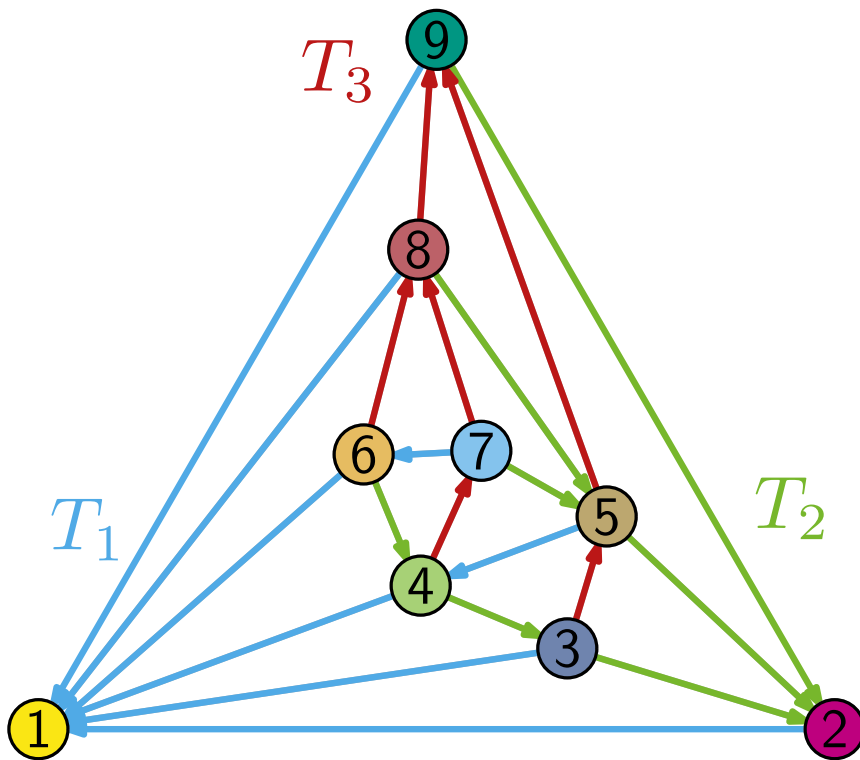
- betrachte Knoten in kanonischer Ordnung und zug. Schnyder Realizer
- $\Phi_i(k)$ sei Vater in T_i des Knotens v_k
- setze T 's für v_1 und v_2 auf $y = 1$ und $y = 2$
- setze h_i auf $y = i$ mit linker und rechter Position von $\Phi_1(i)$ und $\Phi_2(i)$ und b_i von $y = i$ bis zum Index von $\Phi_3(i)$

Phase 1: T-Kontaktrepräsentation



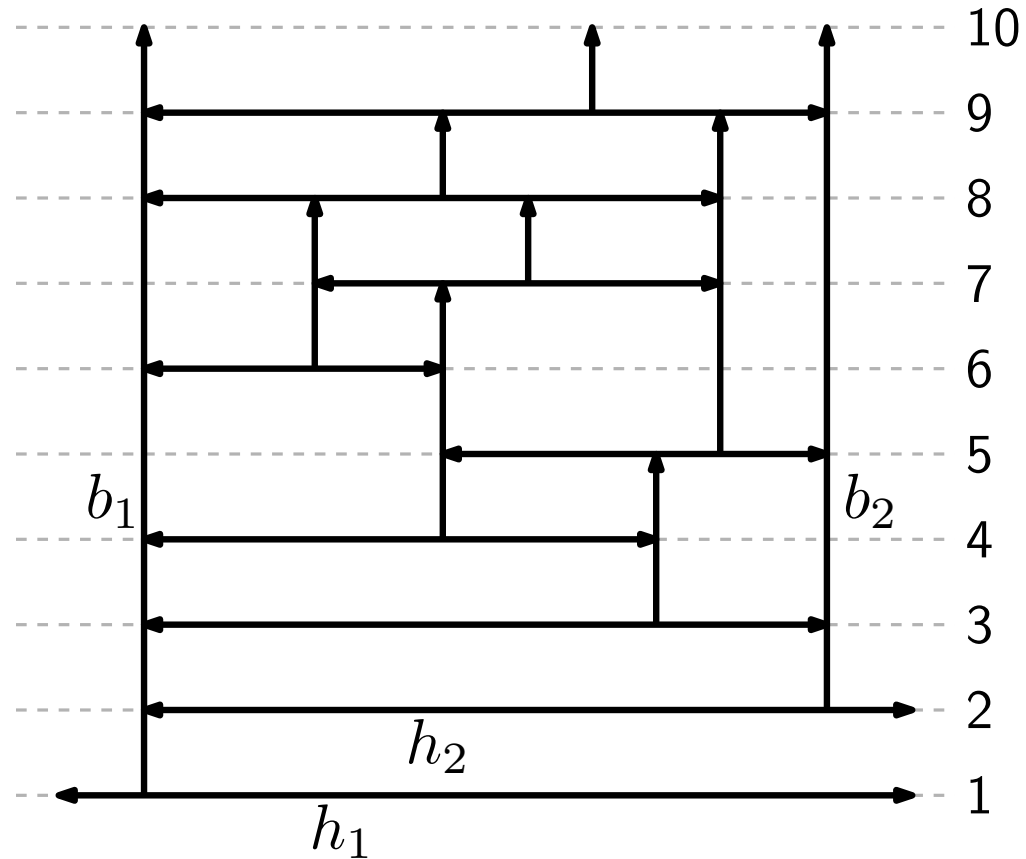
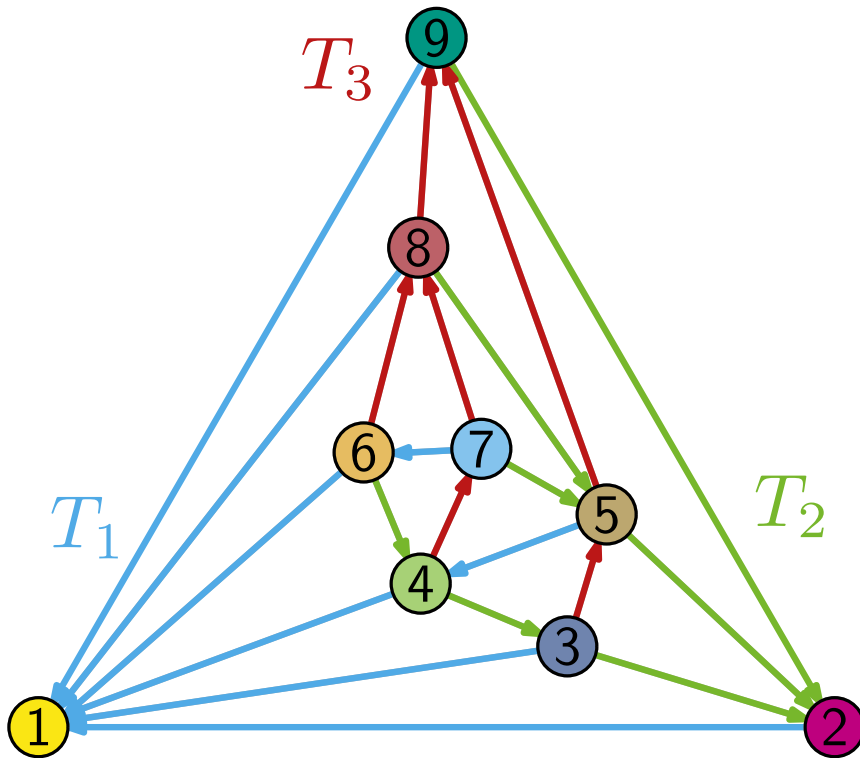
- betrachte Knoten in kanonischer Ordnung und zug. Schnyder Realizer
- $\Phi_i(k)$ sei Vater in T_i des Knotens v_k
- setze T 's für v_1 und v_2 auf $y = 1$ und $y = 2$
- setze h_i auf $y = i$ mit linker und rechter Position von $\Phi_1(i)$ und $\Phi_2(i)$ und b_i von $y = i$ bis zum Index von $\Phi_3(i)$

Phase 1: T-Kontaktrepräsentation



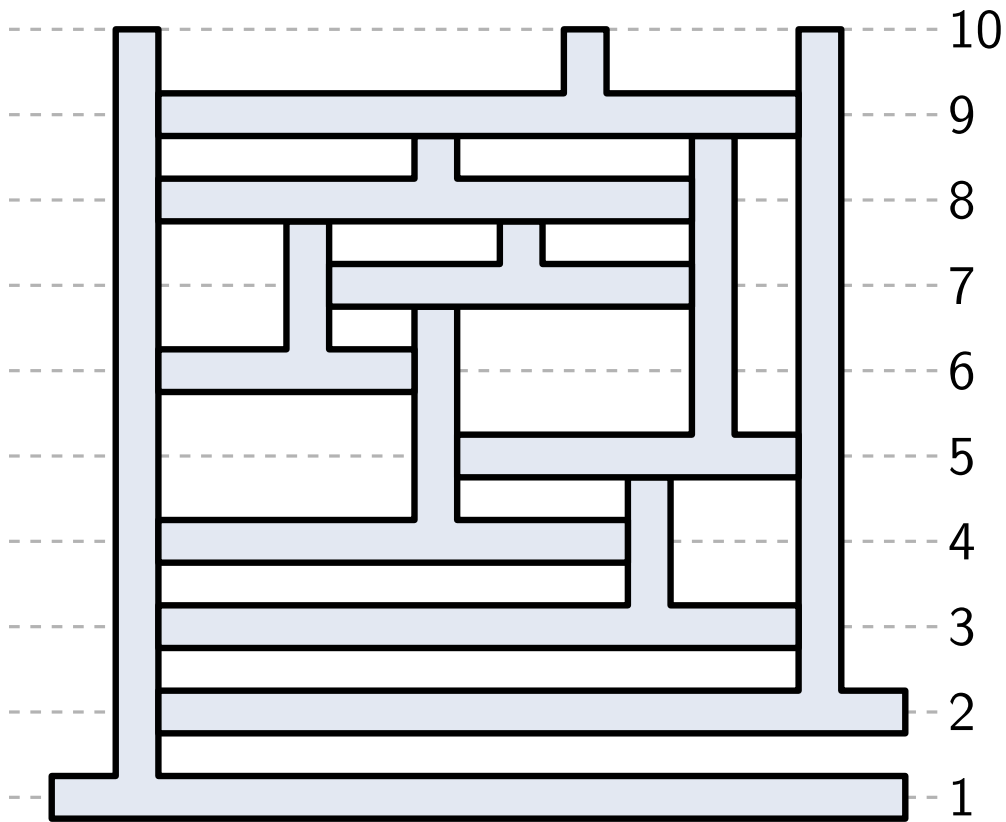
- betrachte Knoten in kanonischer Ordnung und zug. Schnyder Realizer
- $\Phi_i(k)$ sei Vater in T_i des Knotens v_k
- setze T's für v_1 und v_2 auf $y = 1$ und $y = 2$
- setze h_i auf $y = i$ mit linker und rechter Position von $\Phi_1(i)$ und $\Phi_2(i)$ und b_i von $y = i$ bis zum Index von $\Phi_3(i)$

Phase 1: T-Kontaktrepräsentation

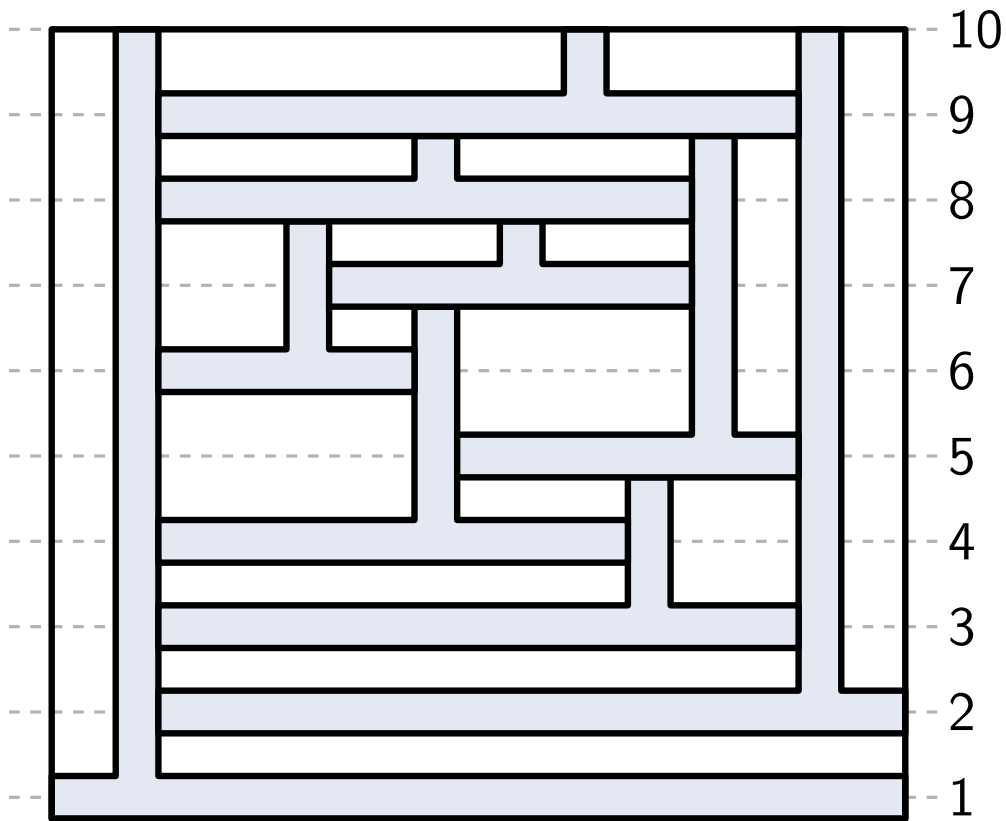


- betrachte Knoten in kanonischer Ordnung und zug. Schnyder Realizer
- $\Phi_i(k)$ sei Vater in T_i des Knotens v_k
- setze T's für v_1 und v_2 auf $y = 1$ und $y = 2$
- setze h_i auf $y = i$ mit linker und rechter Position von $\Phi_1(i)$ und $\Phi_2(i)$ und b_i von $y = i$ bis zum Index von $\Phi_3(i)$

Phase 3: Löcher entfernen

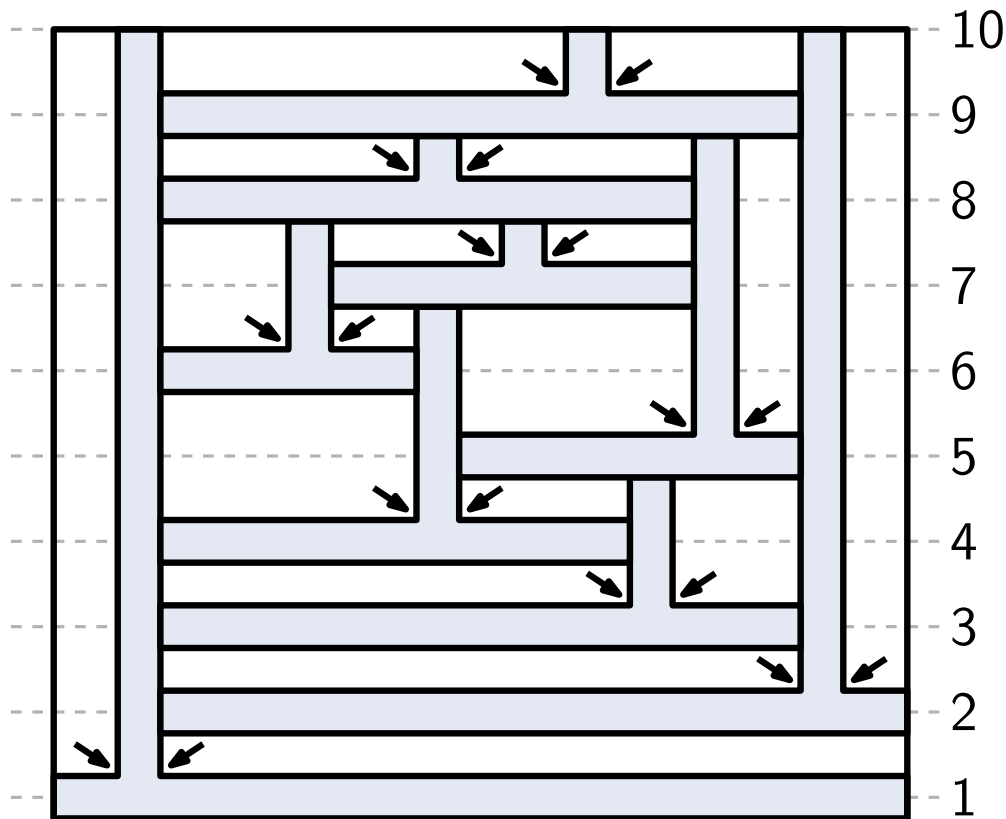


Phase 3: Löcher entfernen



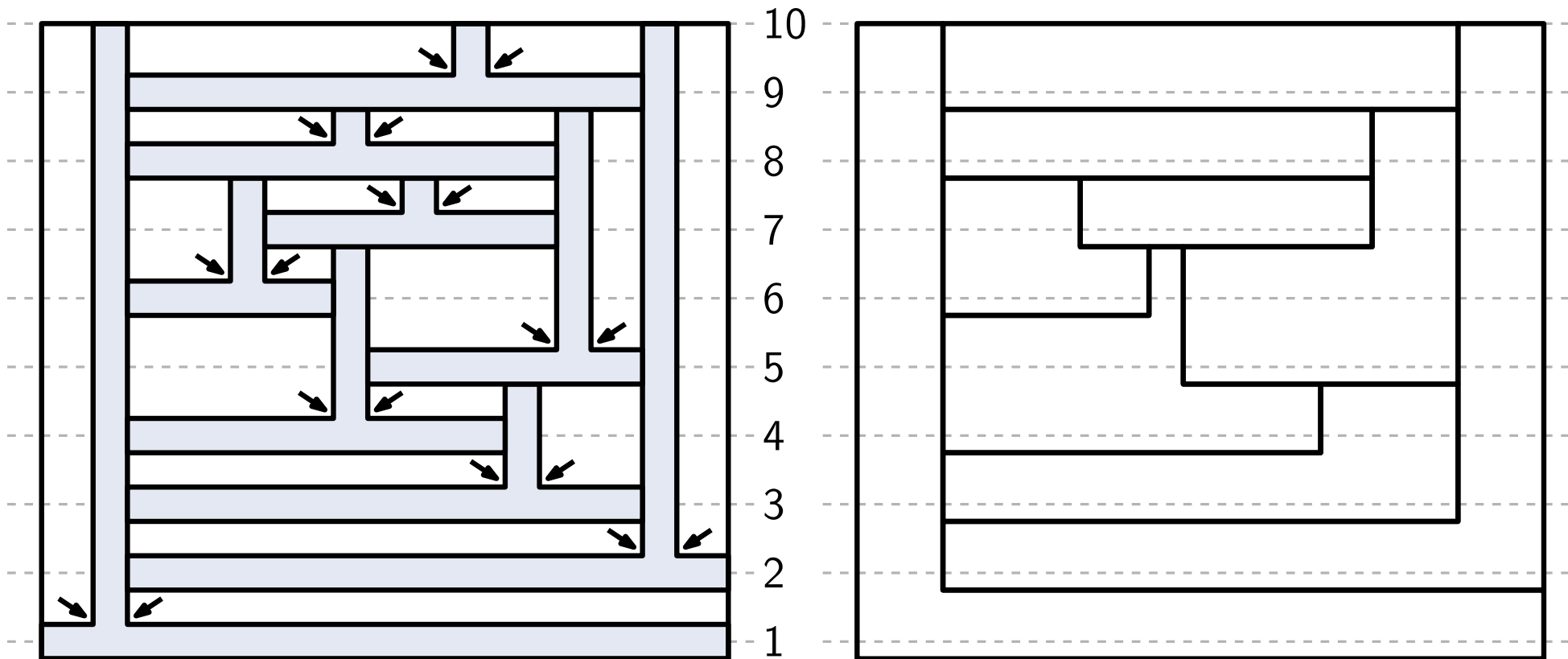
- setze Rahmen um die T-Polygone

Phase 3: Löcher entfernen

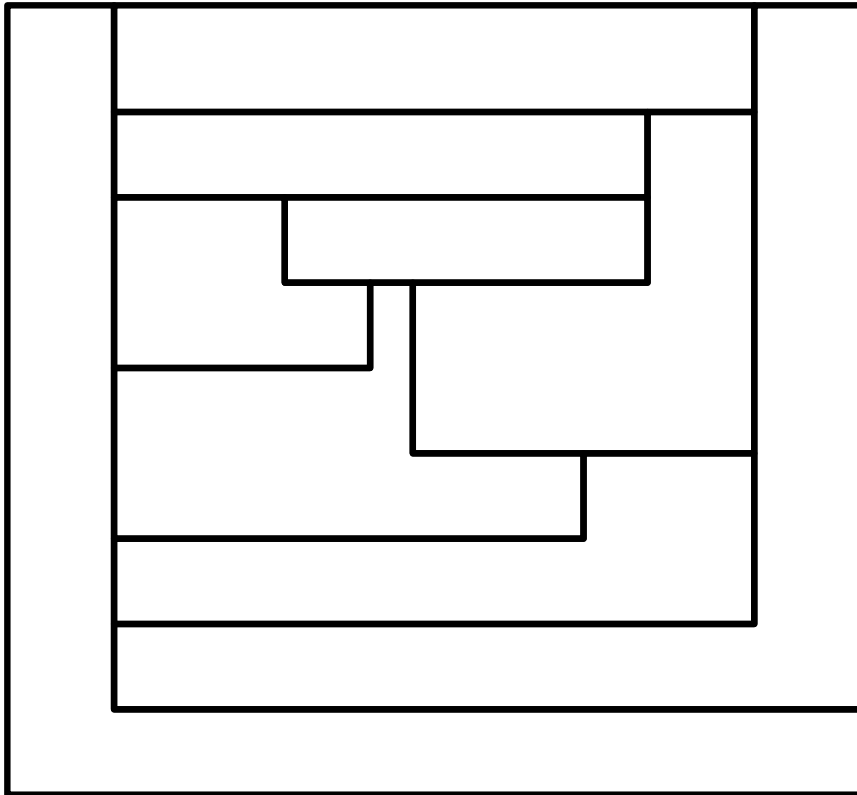


- setze Rahmen um die T-Polygone
- jedes (innere) Loch stammt von Dreiecks-Facette
- weise Löcher den eindeutigen konkaven Ecken zu

Phase 3: Löcher entfernen

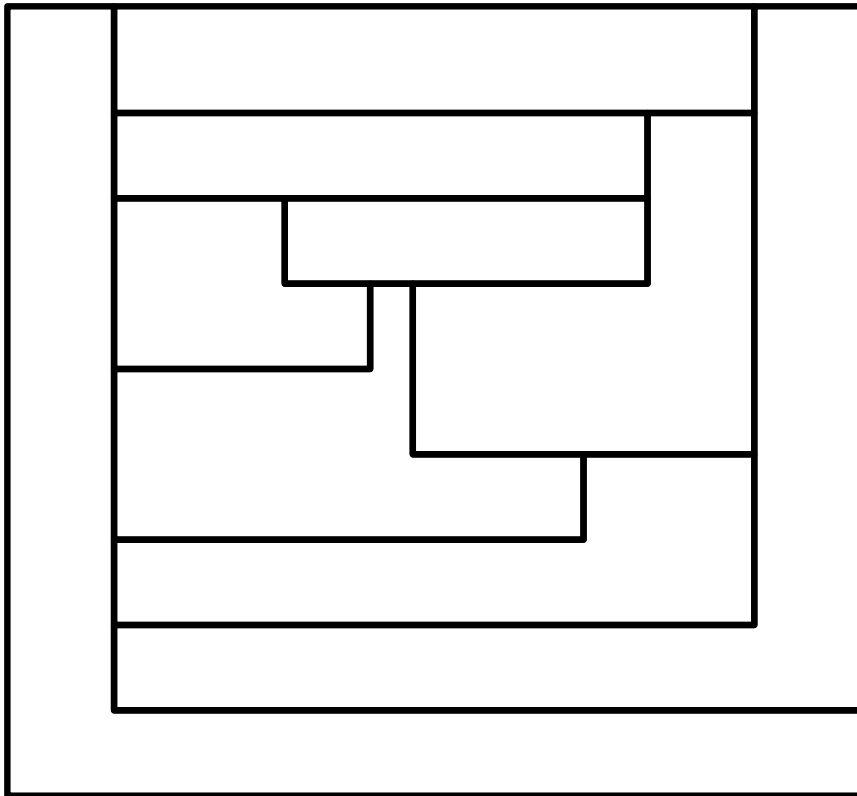


- setze Rahmen um die T-Polygone
- jedes (innere) Loch stammt von Dreiecks-Facette
- weise Löcher den eindeutigen konkaven Ecken zu
- es entsteht ein rektilineares Dual mit maximal 8-seitigen Polygonen



Satz:

Das erhaltene Layout ist flächenuniversell und nutzt nur Polygone mit Komplexität ≤ 8 .

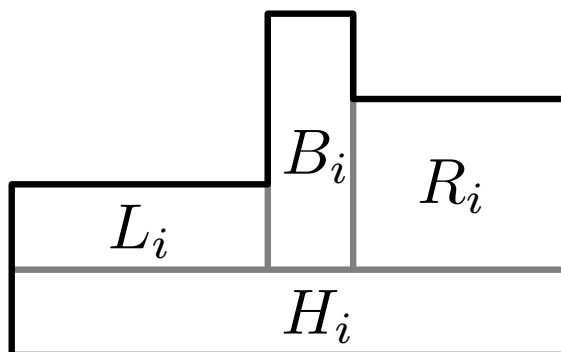


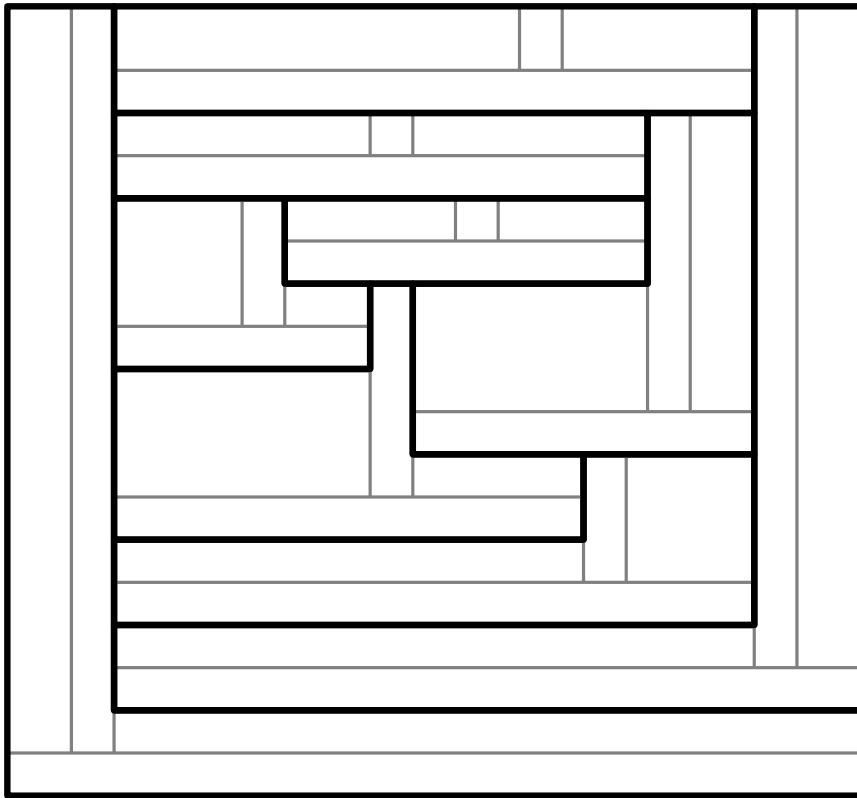
Satz:

Das erhaltene Layout ist flächenuniversell und nutzt nur Polygone mit Komplexität ≤ 8 .

Beweis:

- zerteile jedes T-förmige Polygon in vier Rechtecke
- Rechtecklayout ist einseitig \Rightarrow flächenuniversell
- teile Sollfläche für jede Region beliebig in vier Teile



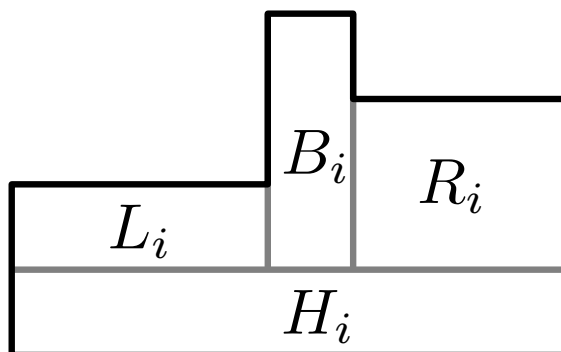


Satz:

Das erhaltene Layout ist flächenuniversell und nutzt nur Polygone mit Komplexität ≤ 8 .

Beweis:

- zerteile jedes T-förmige Polygon in vier Rechtecke
- Rechtecklayout ist einseitig \Rightarrow flächenuniversell
- teile Sollfläche für jede Region beliebig in vier Teile



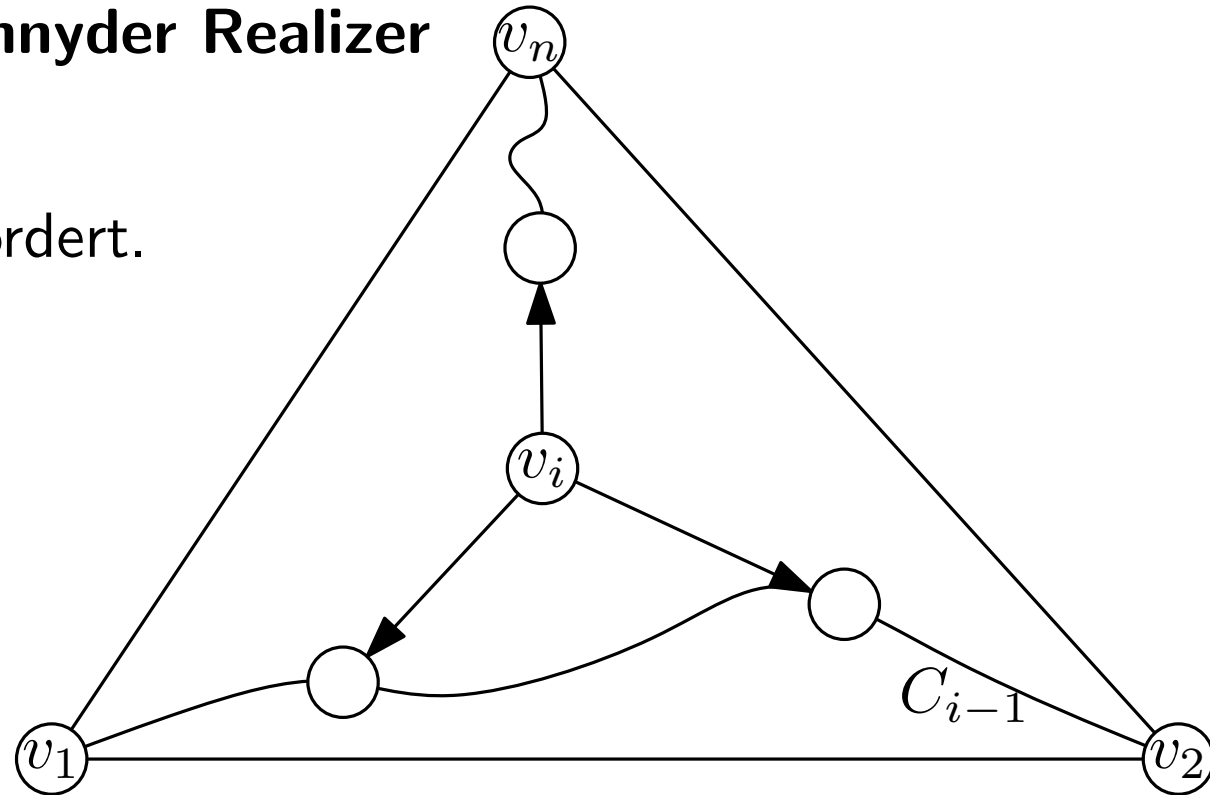
Aus der Vorlesung: Eine kanonische Ordnung der Knoten von G definiert einen Schnyder Realizer von G , indem jedem Knoten v_i drei ausgehende Kanten zum ersten und letzten Knoten in C_{i-1} und zum Nachfolger mit höchstem Index zugeordnet werden.

Wirklich Konstruktionsvorschrift für Schnyder Realizer?

Kanonische Ordnung \rightarrow Schnyder Realizer

Behauptung:

Kantenordnung an v_i wie gefordert.

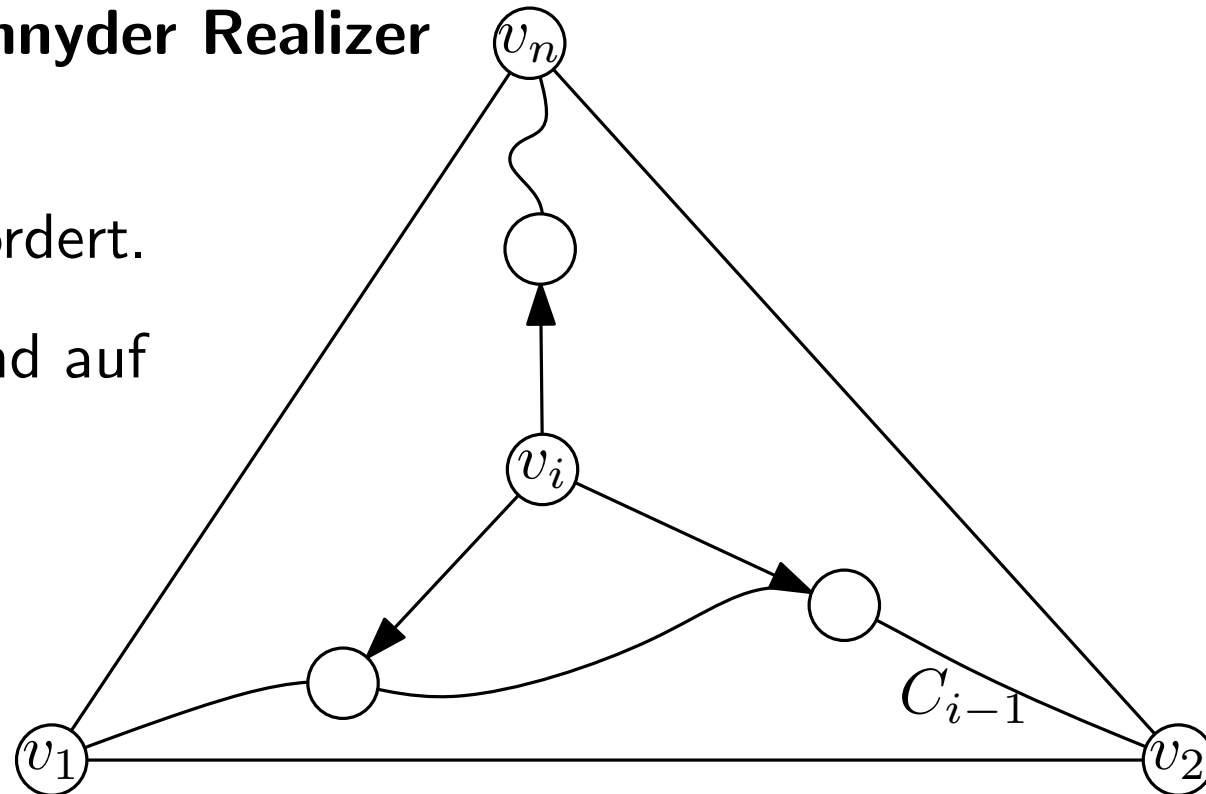


Kanonische Ordnung \rightarrow Schnyder Realizer

Behauptung:

Kantenordnung an v_i wie gefordert.

Betrachte Einbettung basierend auf kanonischer Ordnung.



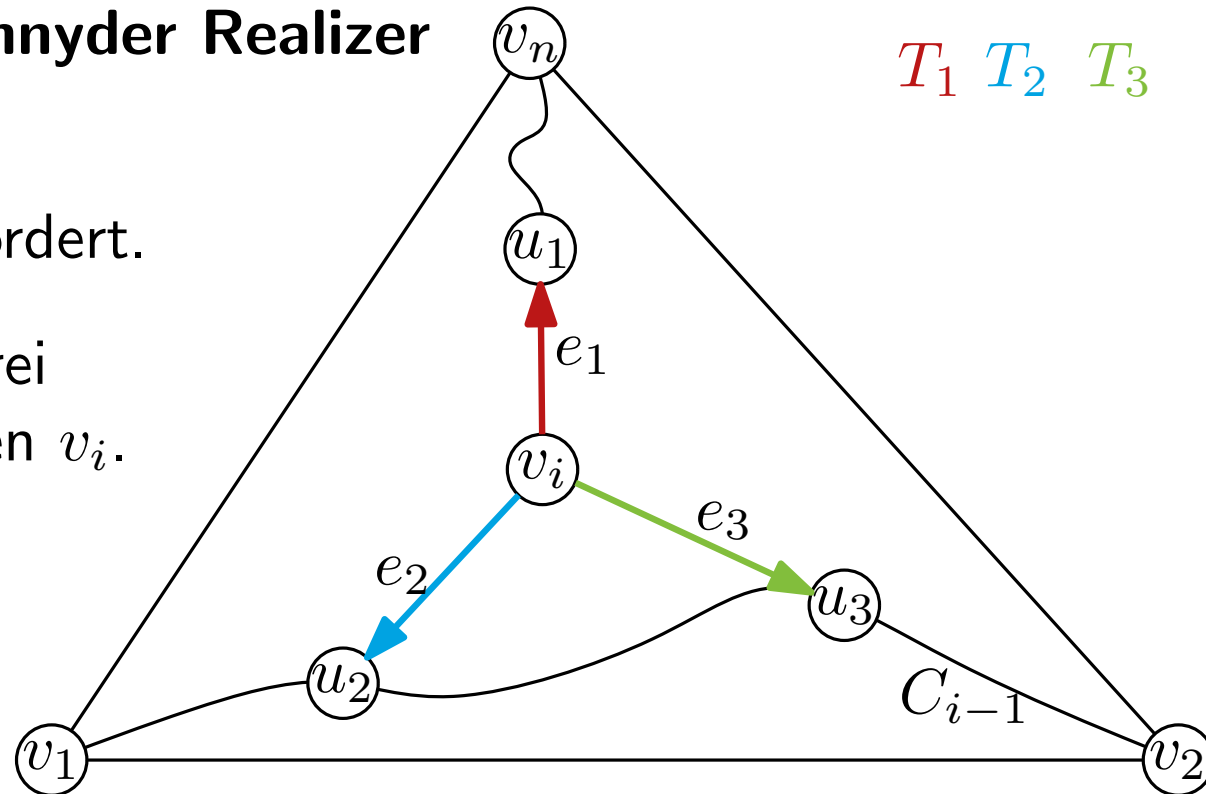
Kanonische Ordnung \rightarrow Schnyder Realizer

T_1 T_2 T_3

Behauptung:

Kantenordnung an v_i wie gefordert.

Nach Konstruktion: Es gibt drei ausgehende Kanten pro Knoten v_i .
Färbe diese wie dargestellt.

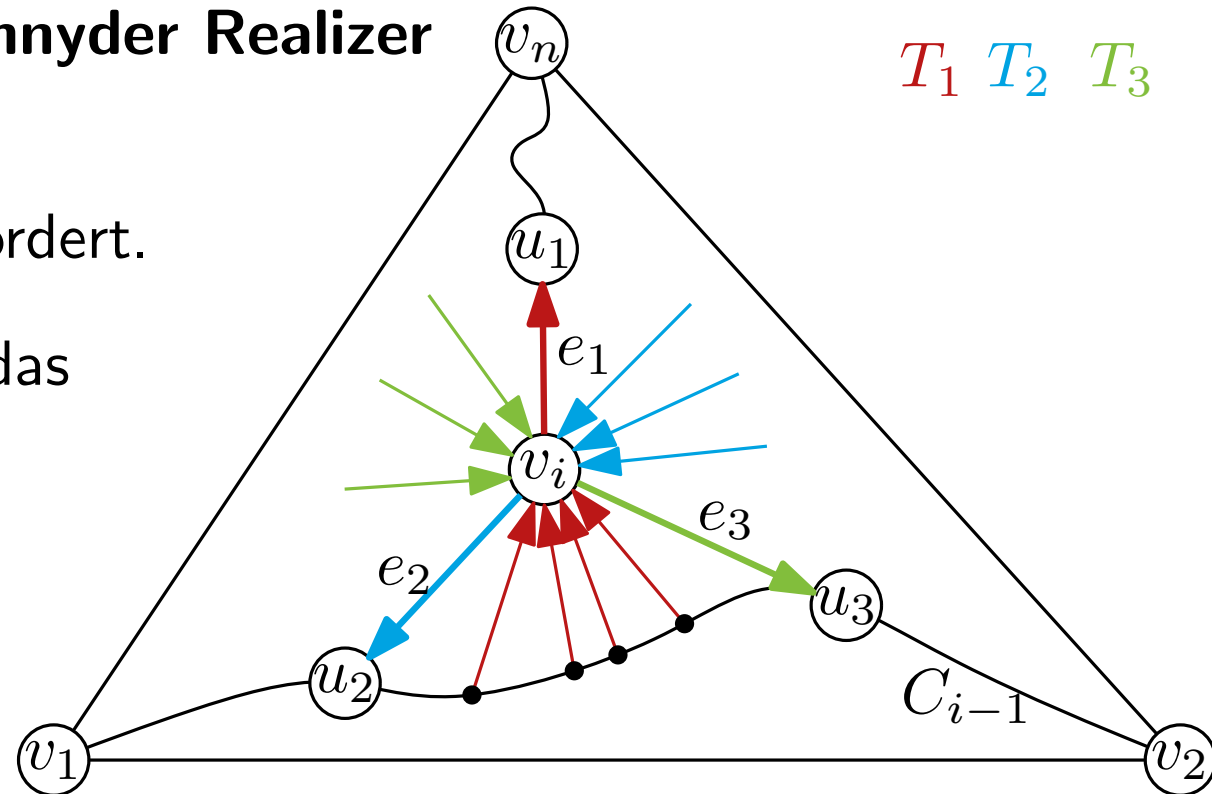


Kanonische Ordnung \rightarrow Schnyder Realizer

Behauptung:

Kantenordnung an v_i wie gefordert.

Zeige für eingehende Kanten das geforderte Ordnung gilt.



T_1 T_2 T_3

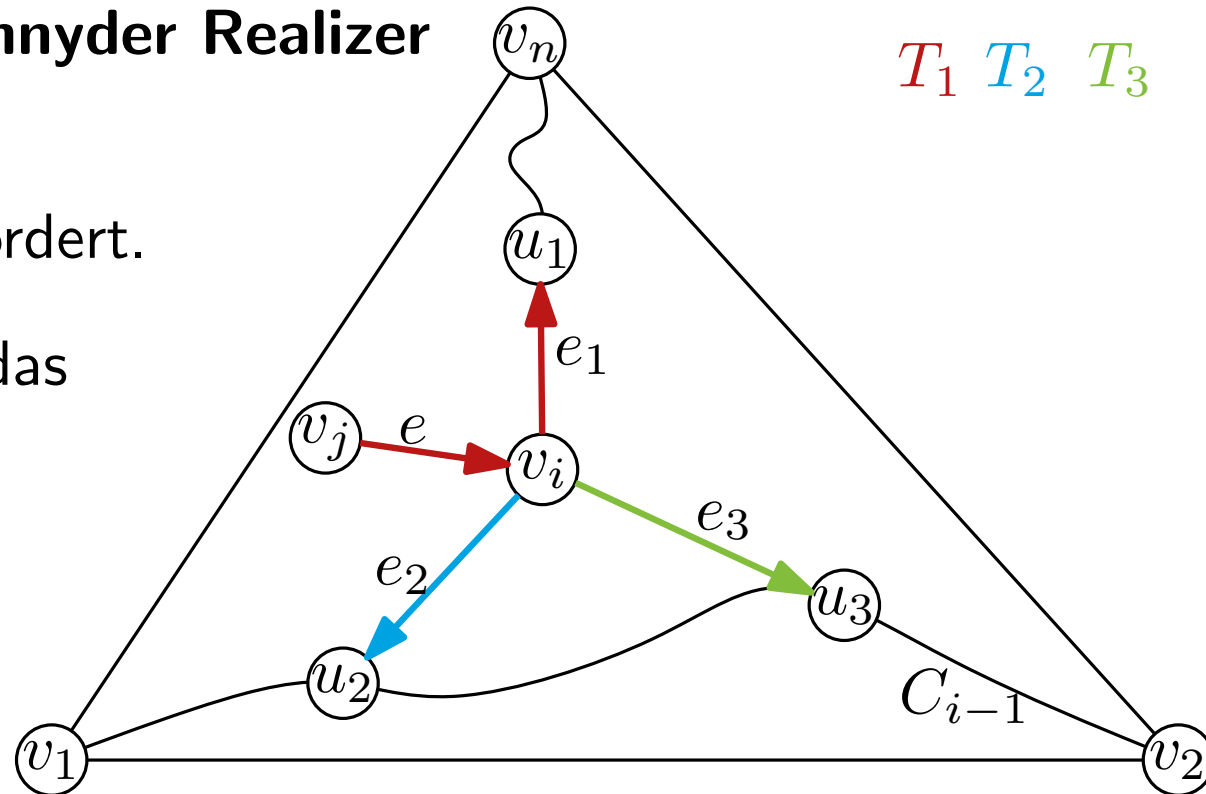
Kanonische Ordnung \rightarrow Schnyder Realizer

T_1 T_2 T_3

Behauptung:

Kantenordnung an v_i wie gefordert.

Zeige für eingehende Kanten das geforderte Ordnung gilt.



Annahme: \exists Kante $e = (v_j, v_i) \in T_1$ rechts von e_2 und links von e_1

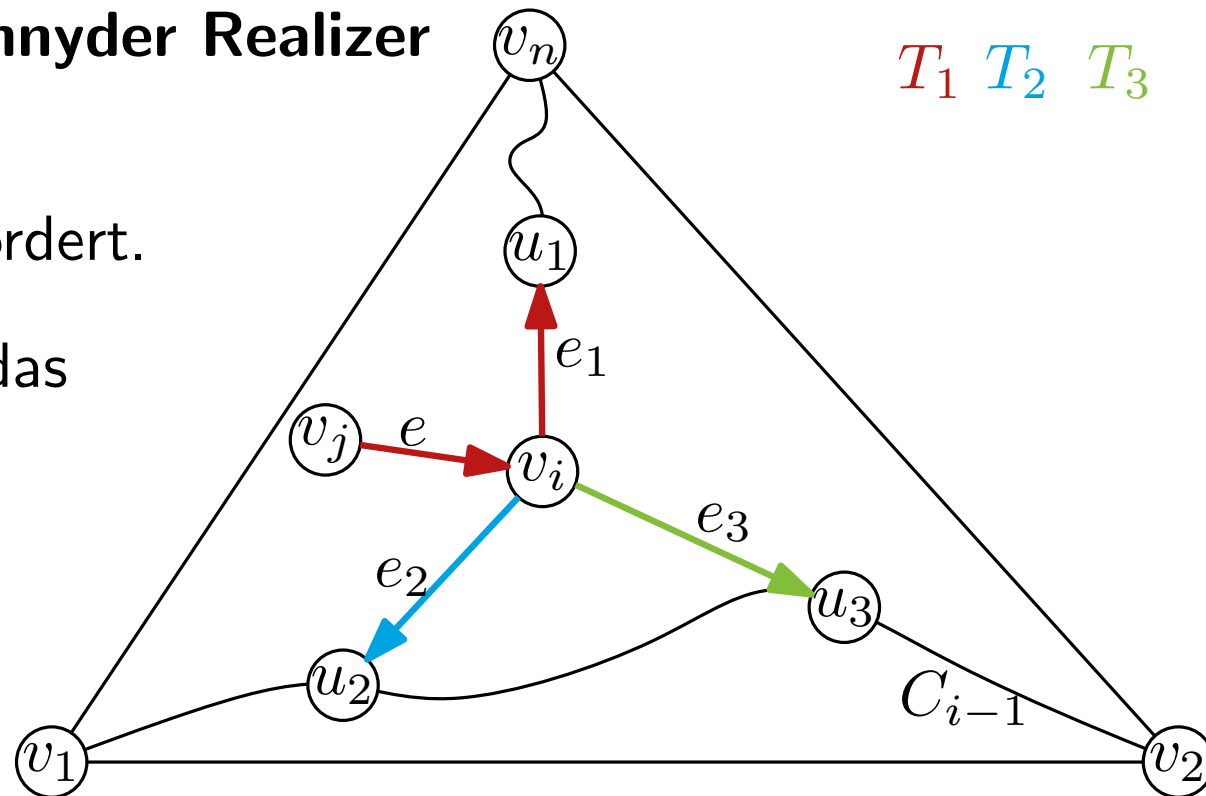
Kanonische Ordnung \rightarrow Schnyder Realizer

T_1 T_2 T_3

Behauptung:

Kantenordnung an v_i wie gefordert.

Zeige für eingehende Kanten das geforderte Ordnung gilt.



Annahme: \exists Kante $e = (v_j, v_i) \in T_1$ rechts von e_2 und links von e_1

Nach Def. von ausgehenden Kanten von v_j gilt $j < i$

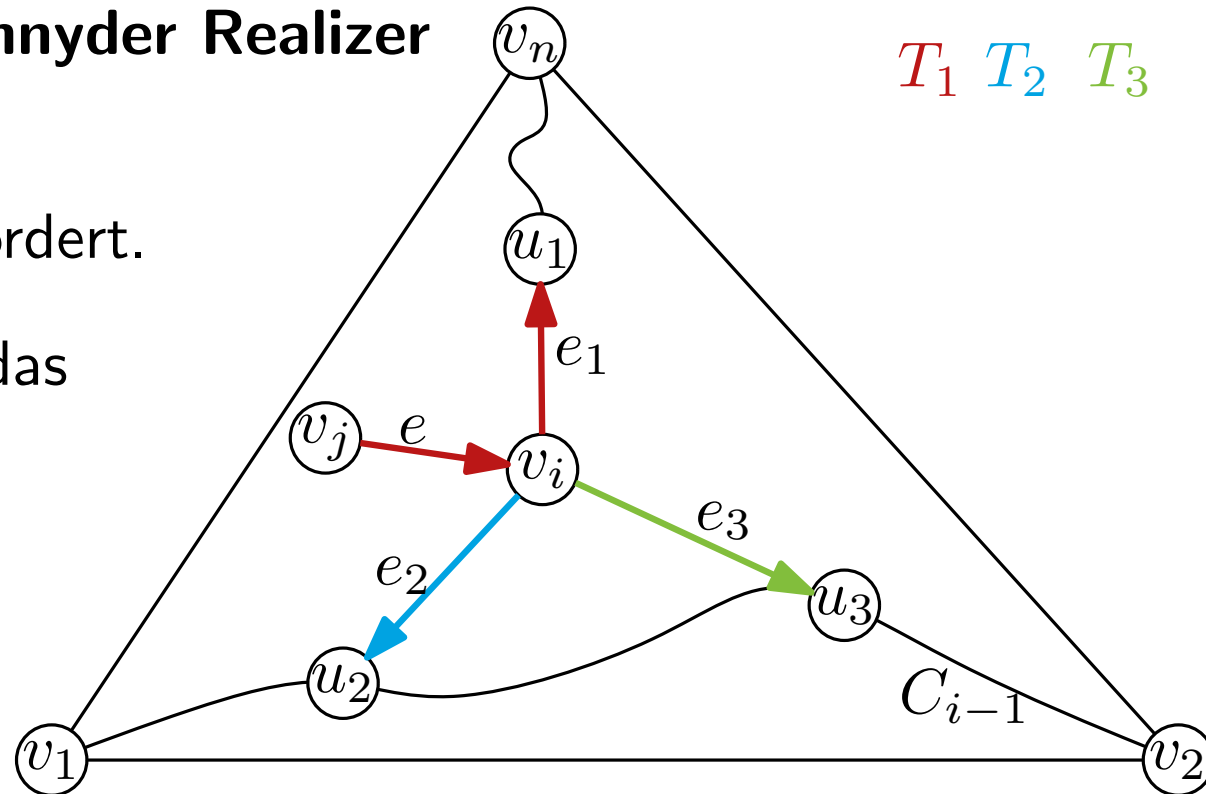
Kanonische Ordnung \rightarrow Schnyder Realizer

T_1 T_2 T_3

Behauptung:

Kantenordnung an v_i wie gefordert.

Zeige für eingehende Kanten das geforderte Ordnung gilt.



Annahme: \exists Kante $e = (v_j, v_i) \in T_1$ rechts von e_2 und links von e_1

Nach Def. von ausgehenden Kanten von v_j gilt $j < i$

$\rightarrow v_j$ liegt auf C_{i-1}  u_2 erster Knoten auf C_{i-1}

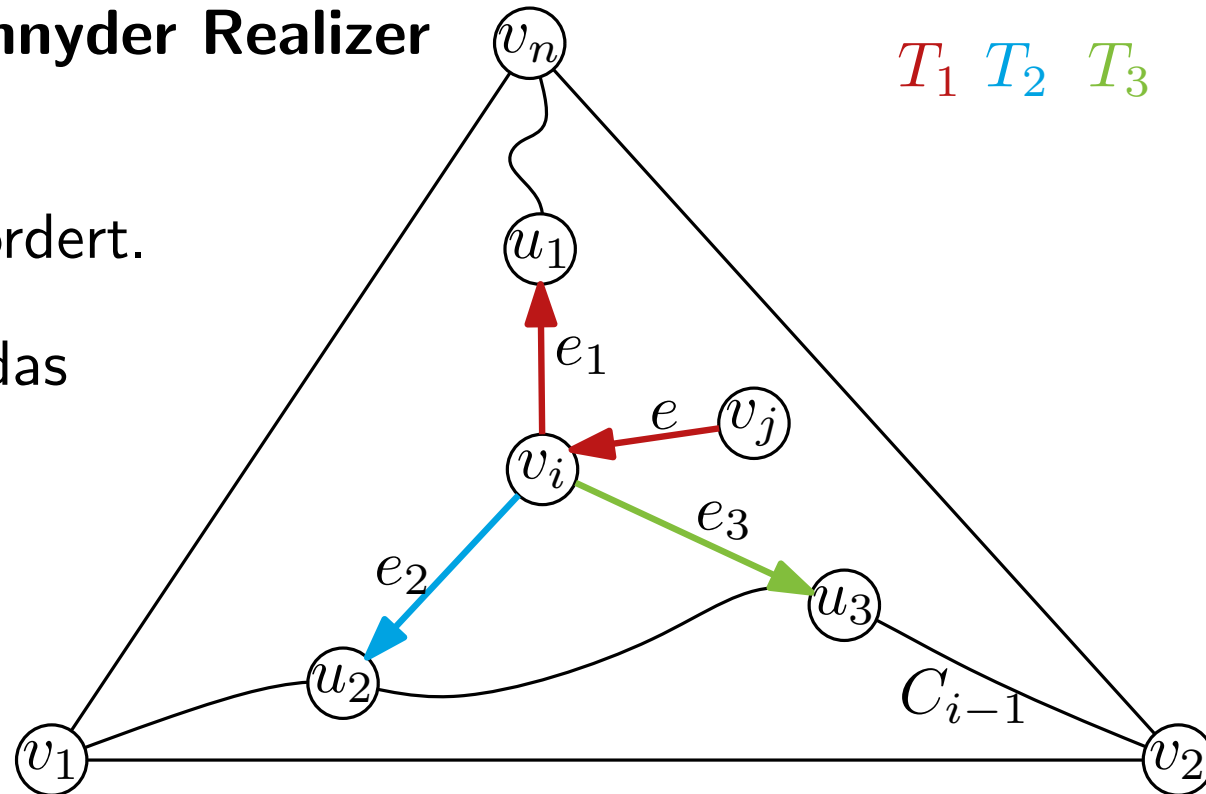
Kanonische Ordnung \rightarrow Schnyder Realizer

T_1 T_2 T_3

Behauptung:

Kantenordnung an v_i wie gefordert.

Zeige für eingehende Kanten das geforderte Ordnung gilt.



Analog: \exists Kante $e = (v_j, v_i) \in T_1$ rechts von e_1 und links von e_3

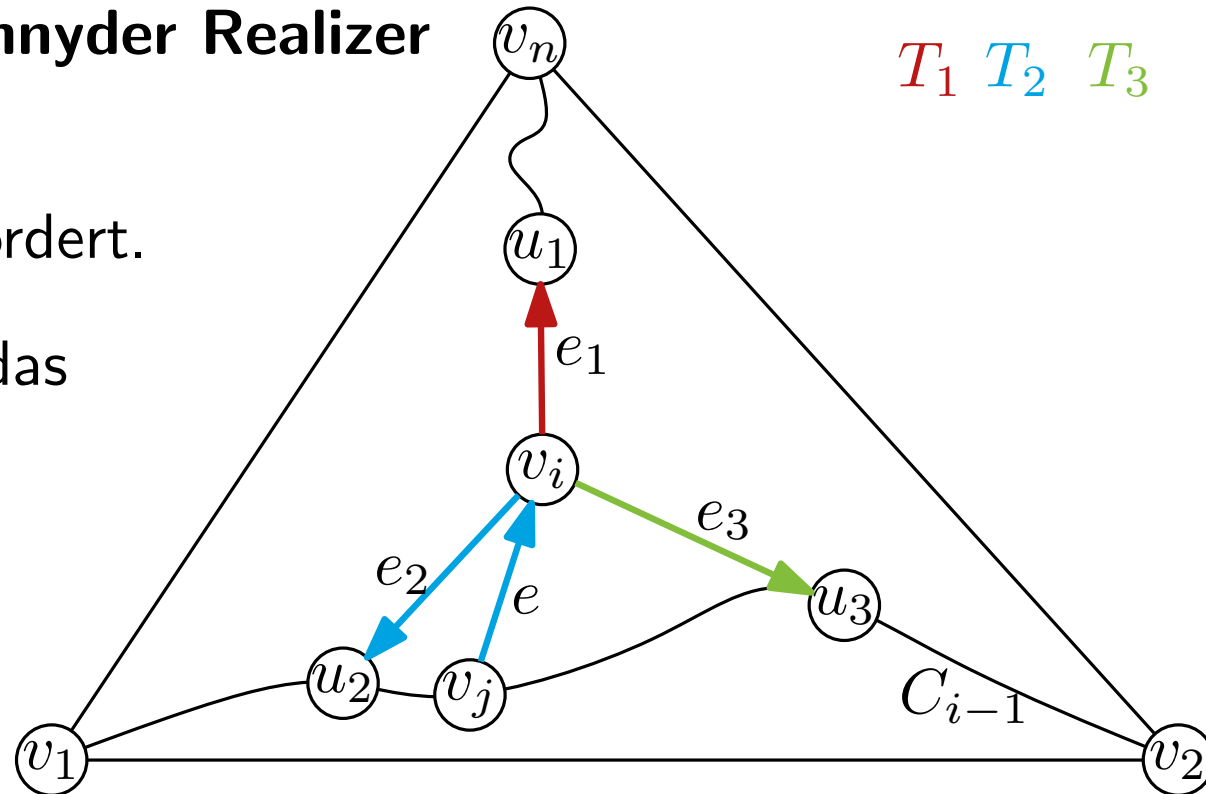
Kanonische Ordnung \rightarrow Schnyder Realizer

T_1 T_2 T_3

Behauptung:

Kantenordnung an v_i wie gefordert.

Zeige für eingehende Kanten das geforderte Ordnung gilt.



Annahme: \exists Kante $e = (v_j, v_i) \in T_2$ links von e_2 und rechts von e_3

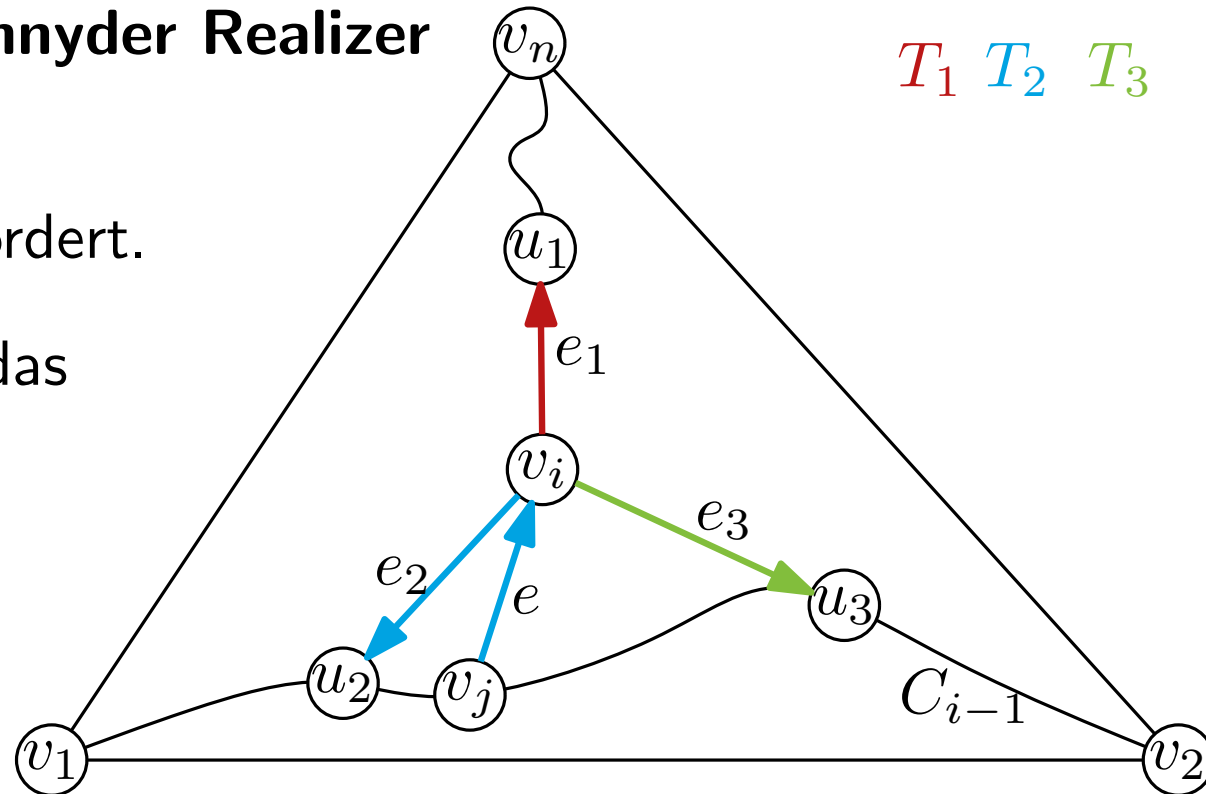
Kanonische Ordnung \rightarrow Schnyder Realizer

T_1 T_2 T_3

Behauptung:

Kantenordnung an v_i wie gefordert.

Zeige für eingehende Kanten das geforderte Ordnung gilt.



Annahme: \exists Kante $e = (v_j, v_i) \in T_2$ links von e_2 und rechts von e_3
 v_j liegt auf C_{i-1} nach def von kanon. Ordnung und Wahl von u_2 und u_3 .

$\rightarrow i > j$



Nach Konstruktion muss $j > i$ gelten.

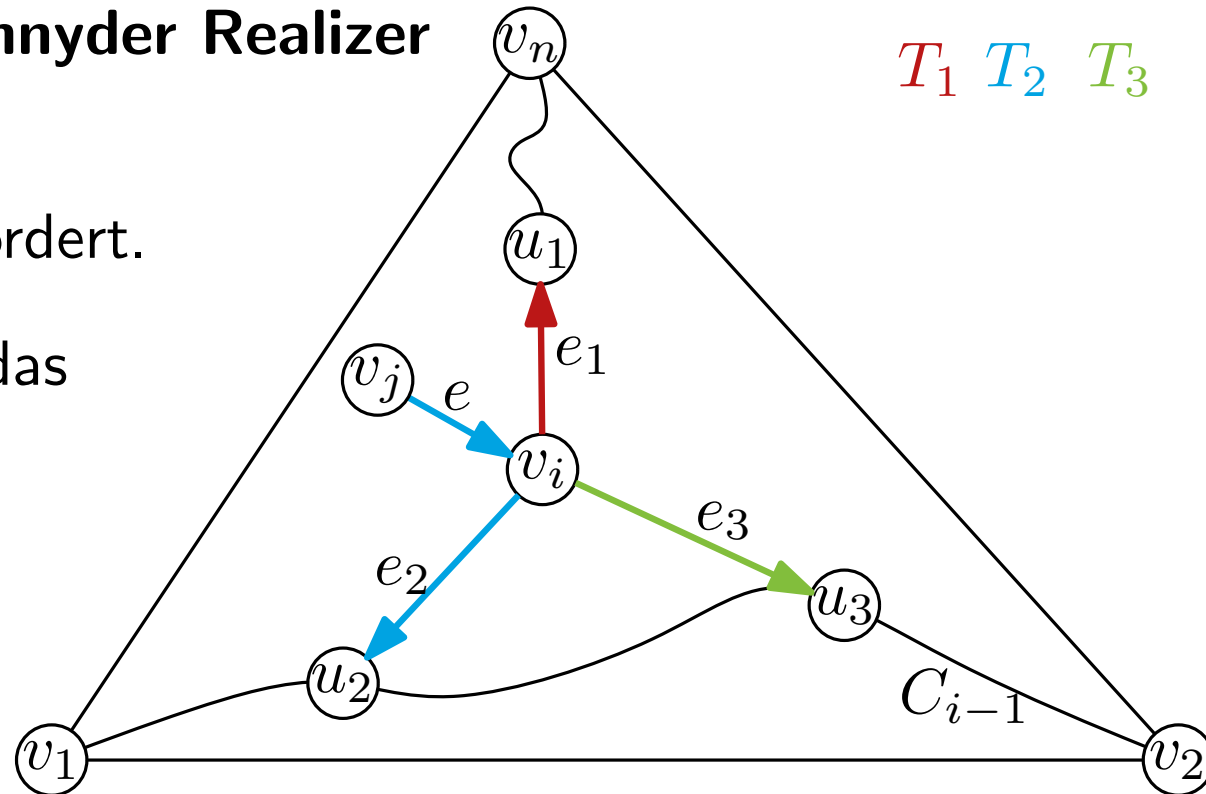
Kanonische Ordnung \rightarrow Schnyder Realizer

T_1 T_2 T_3

Behauptung:

Kantenordnung an v_i wie gefordert.

Zeige für eingehende Kanten das geforderte Ordnung gilt.



Annahme: \exists Kante $e = (v_j, v_i) \in T_2$ links von e_1 und rechts von e_2

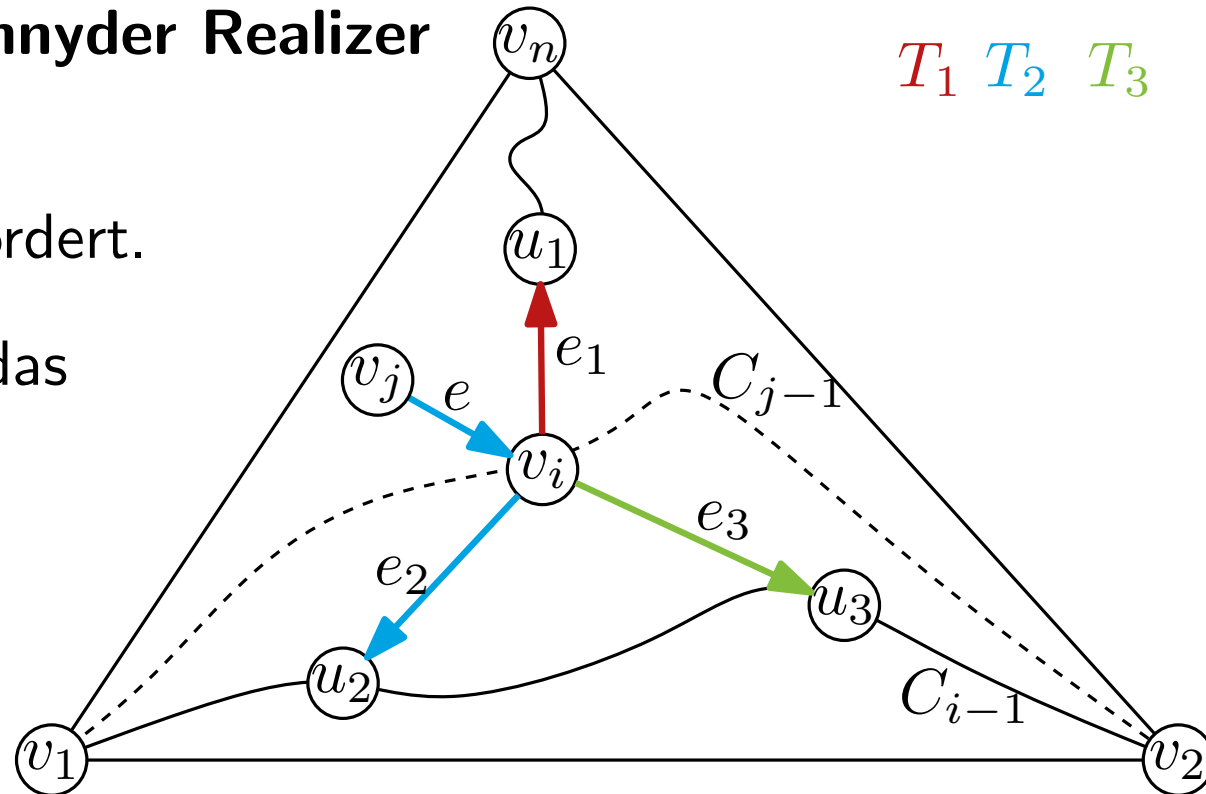
Kanonische Ordnung \rightarrow Schnyder Realizer

T_1 T_2 T_3

Behauptung:

Kantenordnung an v_i wie gefordert.

Zeige für eingehende Kanten das geforderte Ordnung gilt.



Annahme: \exists Kante $e = (v_j, v_i) \in T_2$ links von e_1 und rechts von e_2

v_i ist erster Knoten auf C_{j-1}

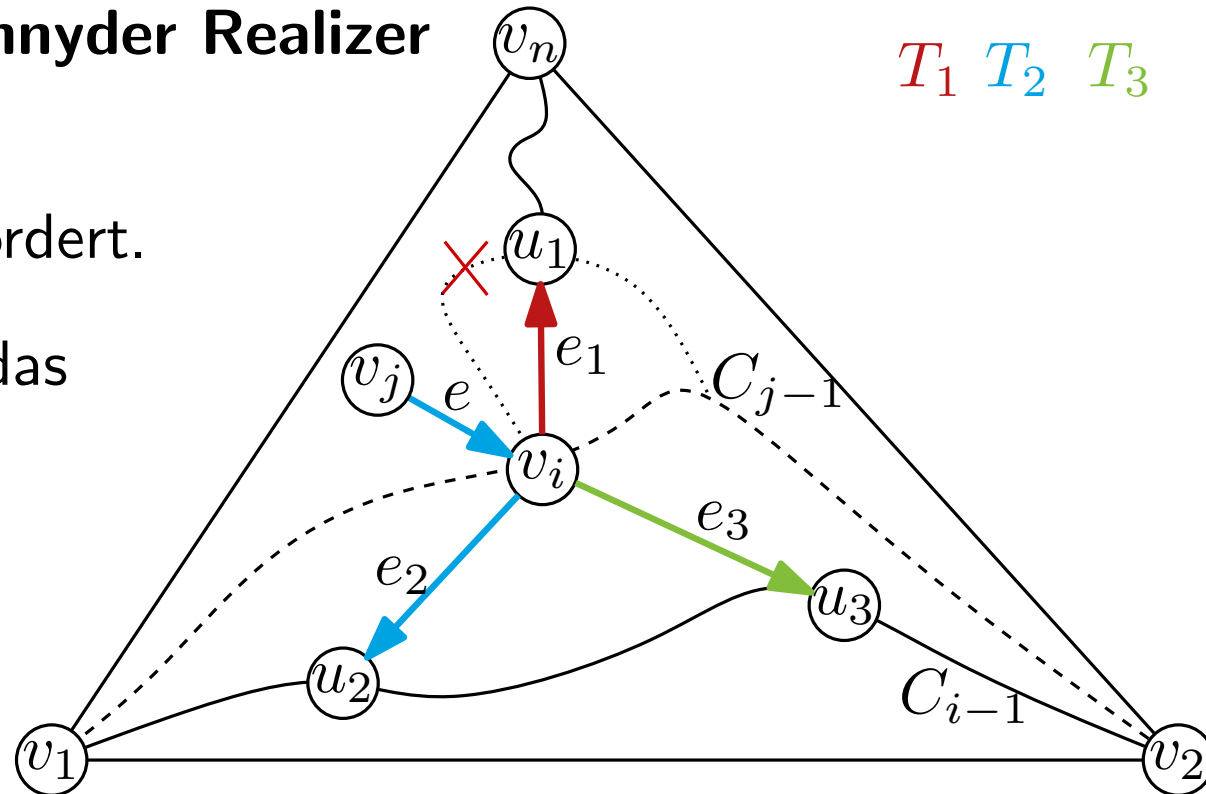
Kanonische Ordnung \rightarrow Schnyder Realizer

T_1 T_2 T_3

Behauptung:

Kantenordnung an v_i wie gefordert.

Zeige für eingehende Kanten das geforderte Ordnung gilt.



Annahme: \exists Kante $e = (v_j, v_i) \in T_2$ links von e_1 und rechts von e_2

v_i ist erster Knoten auf C_{j-1}

Da u_1 Nachfolger mit höchstem Index, kann C_{j-1} weder u_1 noch Nachfolger von u_1 enthalten. ($j < \text{Index von } u_1 \text{ in kanon. Ordnung}$)

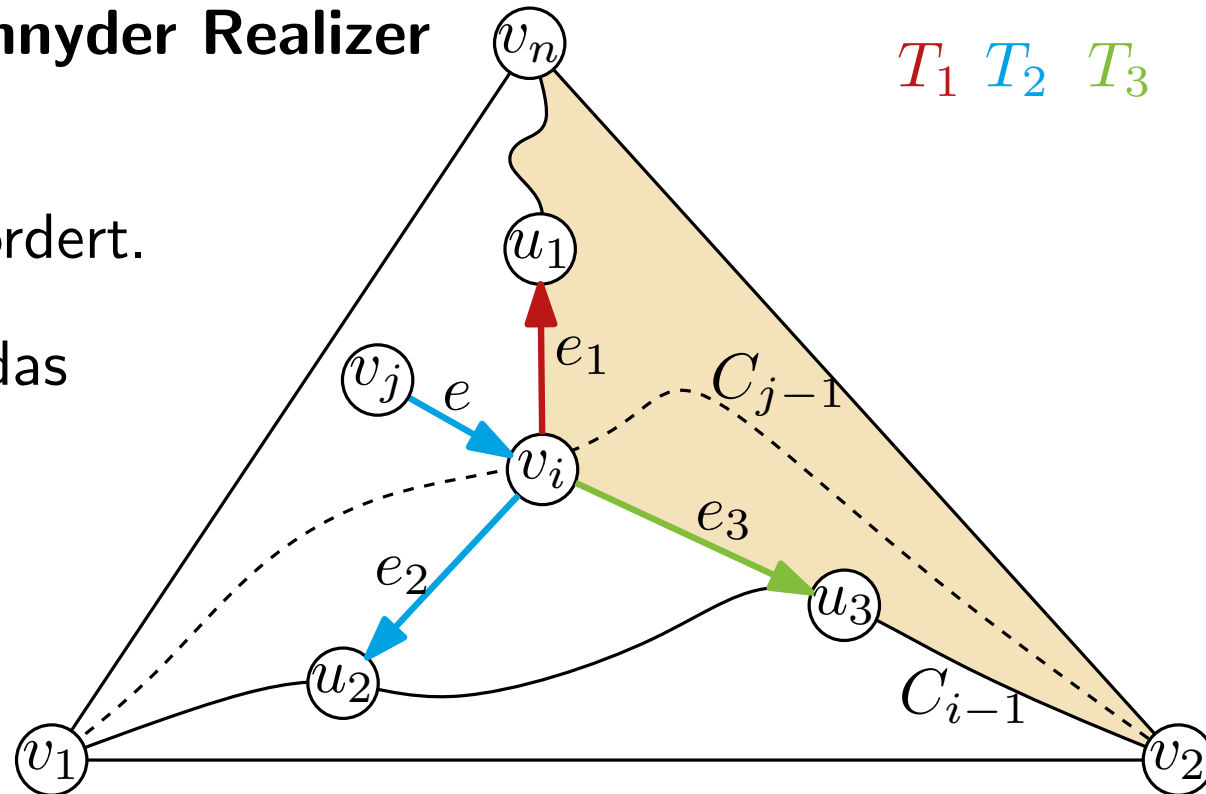
Kanonische Ordnung \rightarrow Schnyder Realizer

T_1 T_2 T_3

Behauptung:

Kantenordnung an v_i wie gefordert.

Zeige für eingehende Kanten das geforderte Ordnung gilt.



Annahme: \exists Kante $e = (v_j, v_i) \in T_2$ links von e_1 und rechts von e_2

v_i ist erster Knoten auf C_{j-1}

Teilstück C' zwischen v_i und v_2 von C_{j-1} liegt damit im orangen Bereich.

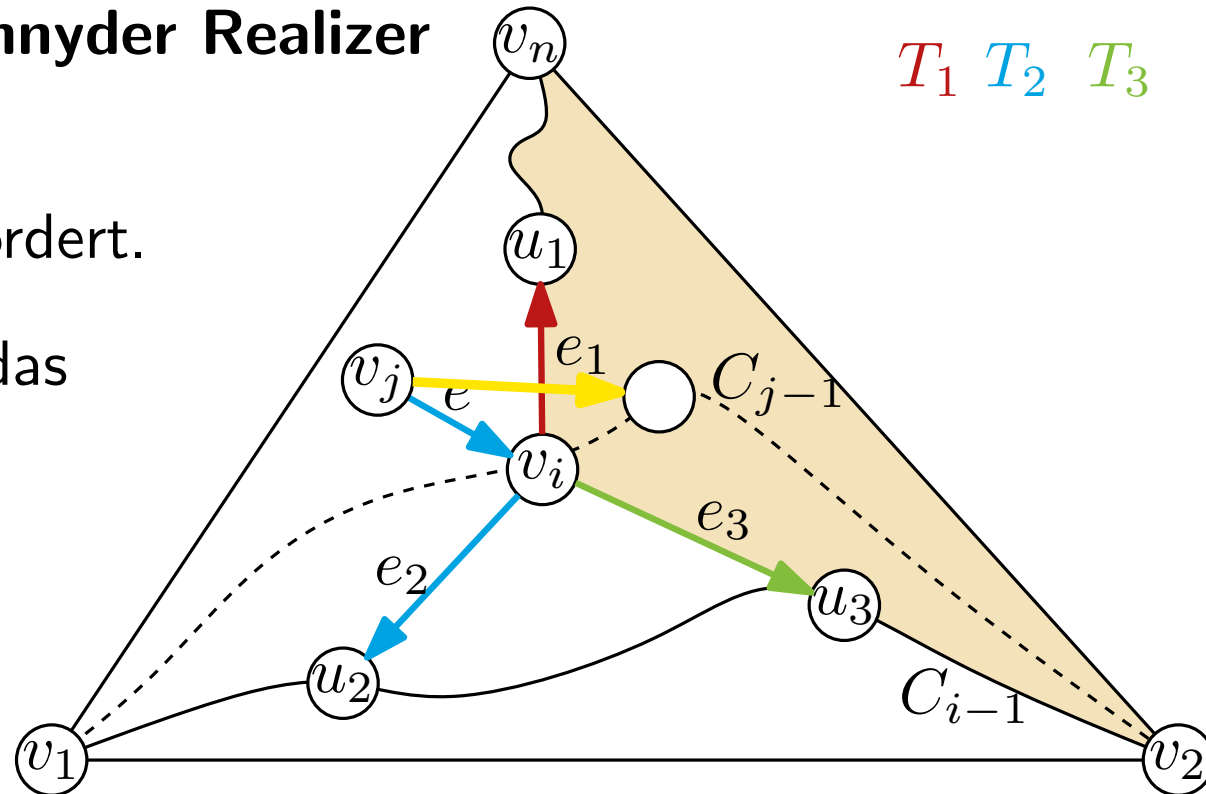
Kanonische Ordnung \rightarrow Schnyder Realizer

T_1 T_2 T_3

Behauptung:

Kantenordnung an v_i wie gefordert.

Zeige für eingehende Kanten das geforderte Ordnung gilt.



Annahme: \exists Kante $e = (v_j, v_i) \in T_2$ links von e_1 und rechts von e_2

v_i ist erster Knoten auf C_{j-1}

Teilstück C' zwischen v_i und v_2 von C_{j-1} liegt damit im orangen Bereich.

Damit G_i 2-fach zusammenhängend: v_j ist verbunden mit Knoten auf C' .

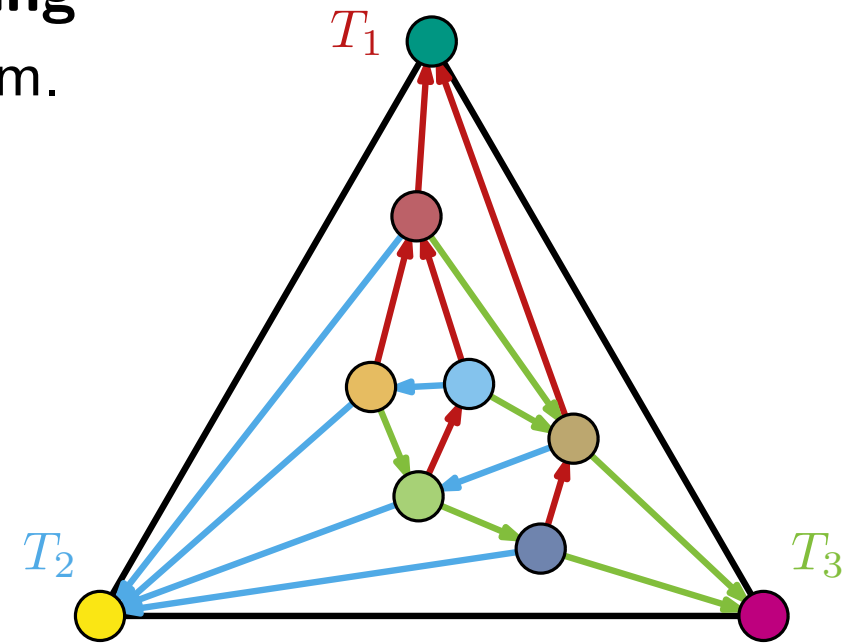
 Planarität

Aus der Vorlesung: Ein Schnyder Realizer mit Bäumen T_1, T_2, T_3 definiert eine kanonische Ordnung als topologische Ordnung des azyklischen Graphen $T_1 \cup T_2^{-1} \cup T_3^{-1}$.
(T^{-1} : invertiere Kantenrichtungen von T)

Wirklich Konstruktionsvorschrift für kanonische Ordnung?

Schnyder Realizer \rightarrow Kanonische Ordnung

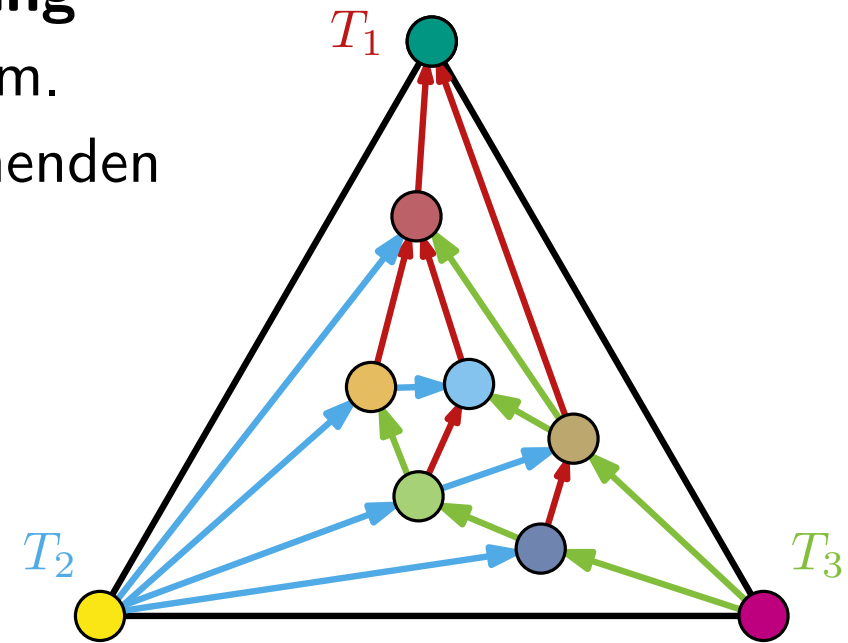
1. Schritt: Drehe Kanten von T_2 und T_3 um.



Schnyder Realizer \rightarrow Kanonische Ordnung

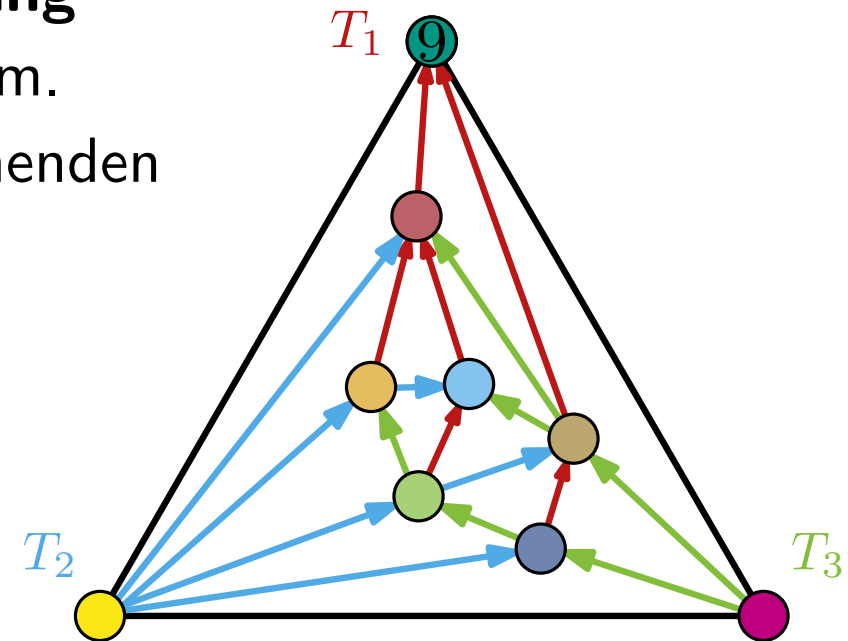
1. **Schritt:** Drehe Kanten von T_2 und T_3 um.

2. **Schritt:** Entferne Knoten mit nur eingehenden Kanten und indiziere ihn entsprechend.



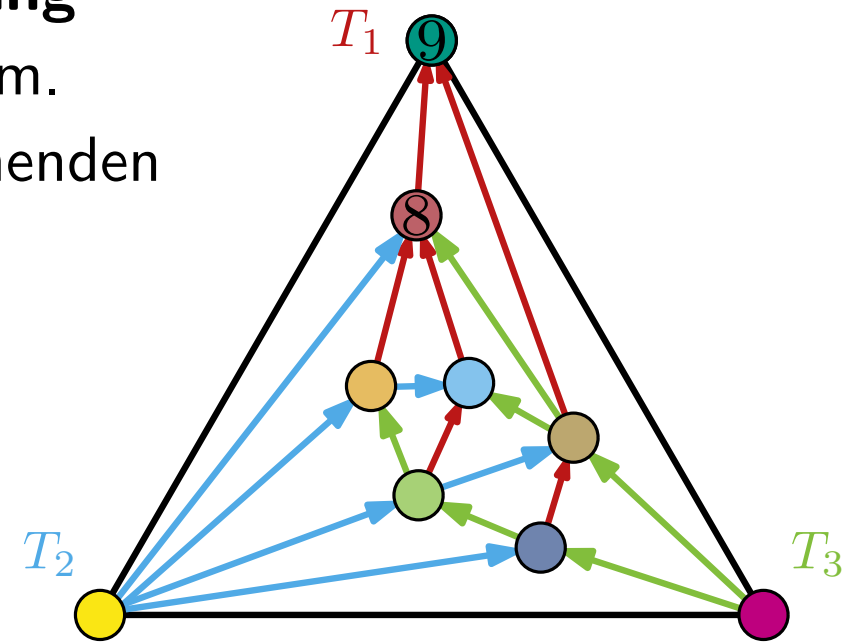
Schnyder Realizer \rightarrow Kanonische Ordnung

- Schritt:** Drehe Kanten von T_2 und T_3 um.
- Schritt:** Entferne Knoten mit nur eingehenden Kanten und indiziere ihn entsprechend.



Schnyder Realizer \rightarrow Kanonische Ordnung

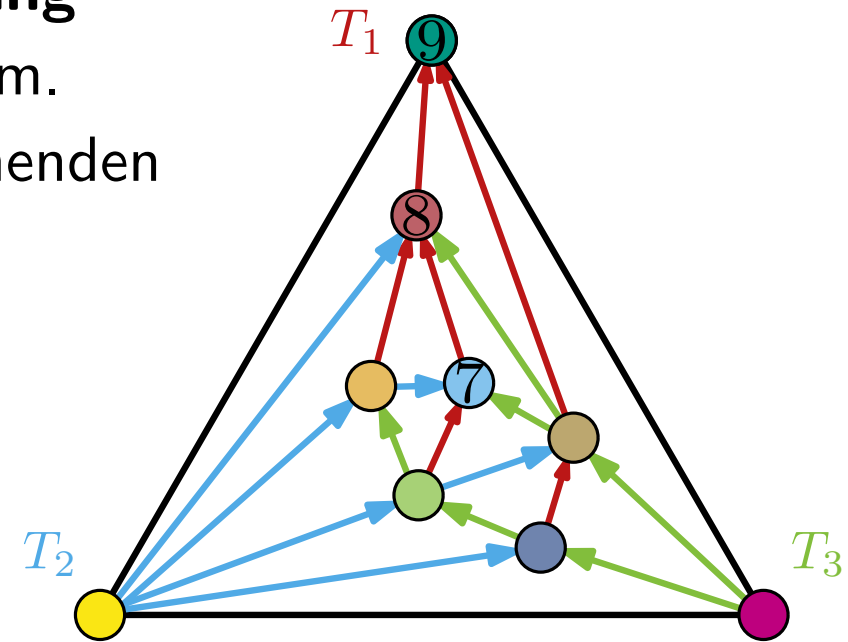
- Schritt:** Drehe Kanten von T_2 und T_3 um.
- Schritt:** Entferne Knoten mit nur eingehenden Kanten und indiziere ihn entsprechend.



Schnyder Realizer \rightarrow Kanonische Ordnung

1. **Schritt:** Drehe Kanten von T_2 und T_3 um.

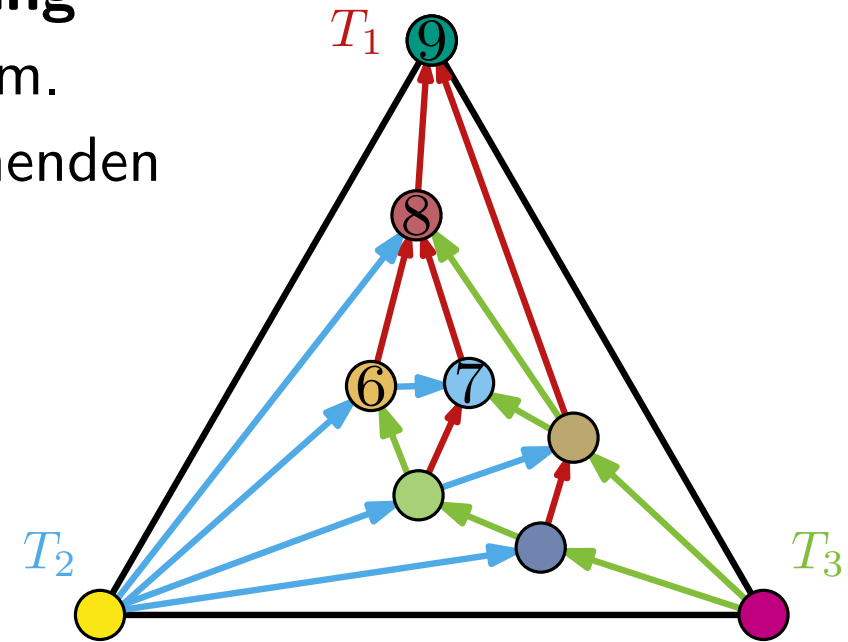
2. **Schritt:** Entferne Knoten mit nur eingehenden Kanten und indiziere ihn entsprechend.



Schnyder Realizer \rightarrow Kanonische Ordnung

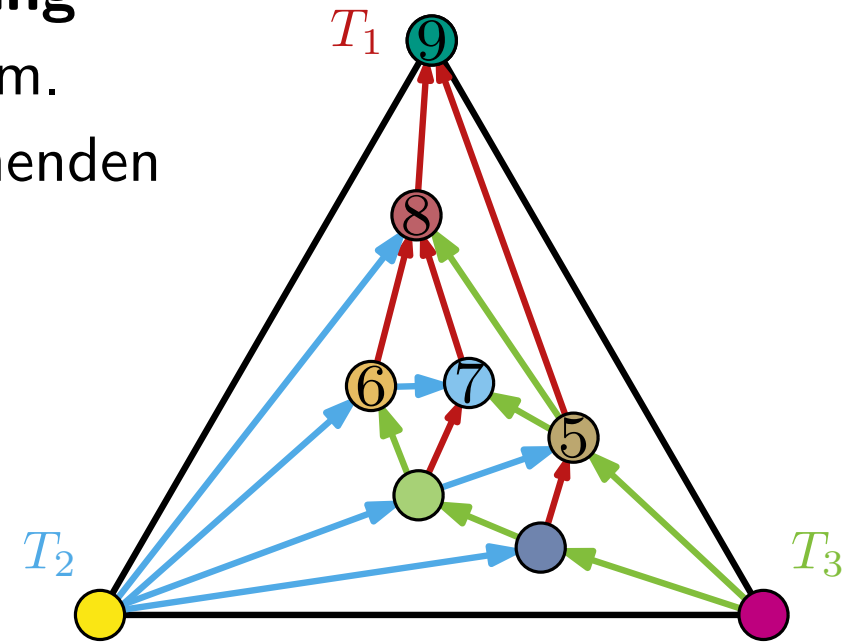
1. **Schritt:** Drehe Kanten von T_2 und T_3 um.

2. **Schritt:** Entferne Knoten mit nur eingehenden Kanten und indiziere ihn entsprechend.



Schnyder Realizer \rightarrow Kanonische Ordnung

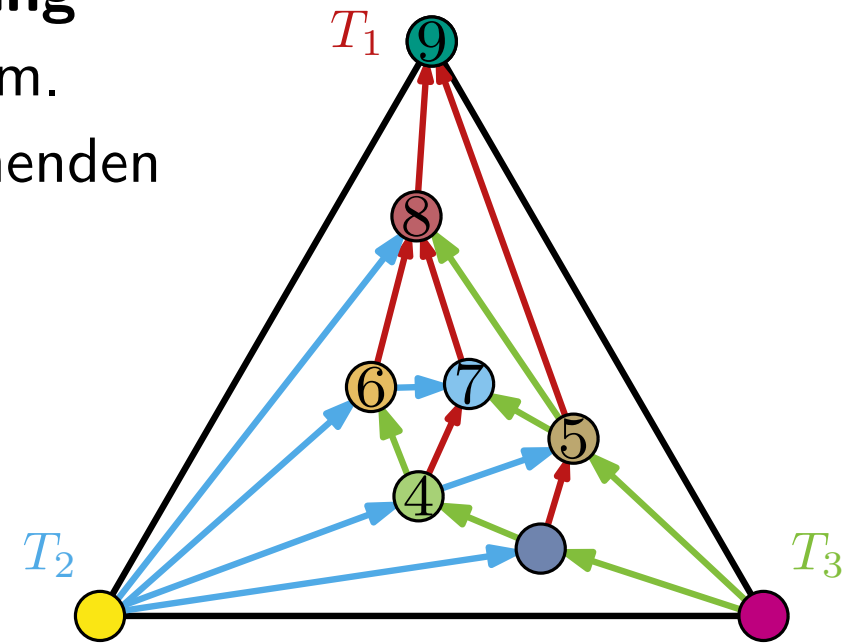
- Schritt:** Drehe Kanten von T_2 und T_3 um.
- Schritt:** Entferne Knoten mit nur eingehenden Kanten und indiziere ihn entsprechend.



Schnyder Realizer \rightarrow Kanonische Ordnung

1. **Schritt:** Drehe Kanten von T_2 und T_3 um.

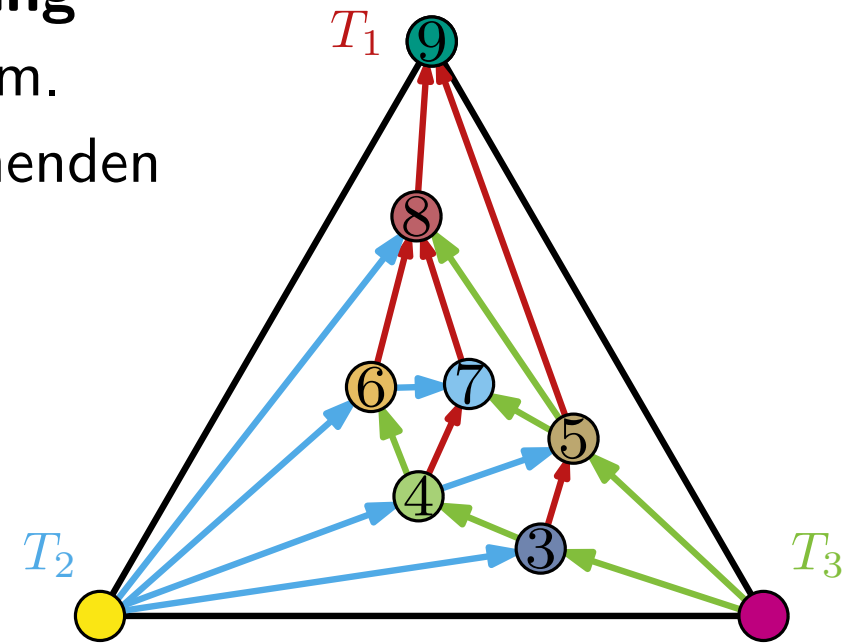
2. **Schritt:** Entferne Knoten mit nur eingehenden Kanten und indiziere ihn entsprechend.



Schnyder Realizer \rightarrow Kanonische Ordnung

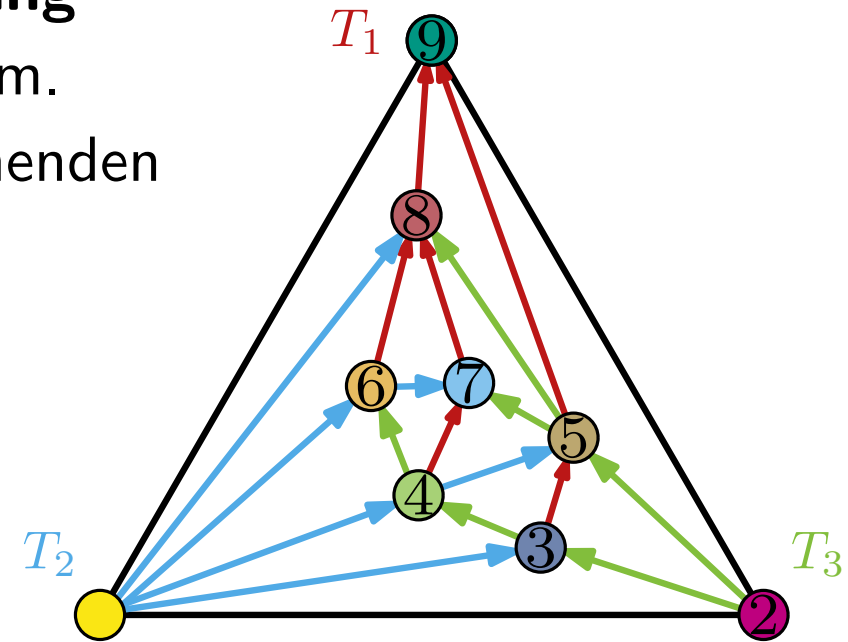
1. **Schritt:** Drehe Kanten von T_2 und T_3 um.

2. **Schritt:** Entferne Knoten mit nur eingehenden Kanten und indiziere ihn entsprechend.



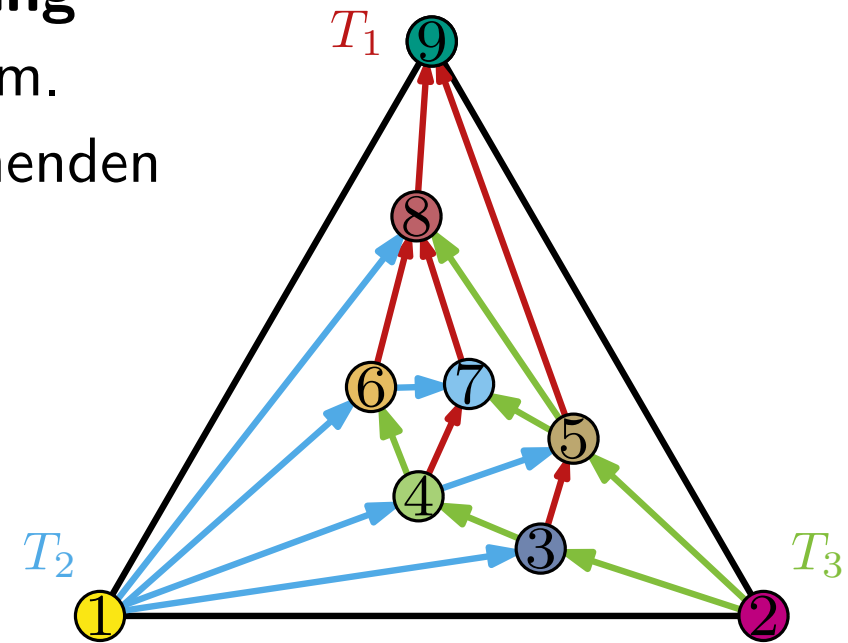
Schnyder Realizer \rightarrow Kanonische Ordnung

- Schritt:** Drehe Kanten von T_2 und T_3 um.
- Schritt:** Entferne Knoten mit nur eingehenden Kanten und indiziere ihn entsprechend.



Schnyder Realizer \rightarrow Kanonische Ordnung

- Schritt:** Drehe Kanten von T_2 und T_3 um.
- Schritt:** Entferne Knoten mit nur eingehenden Kanten und indiziere ihn entsprechend.



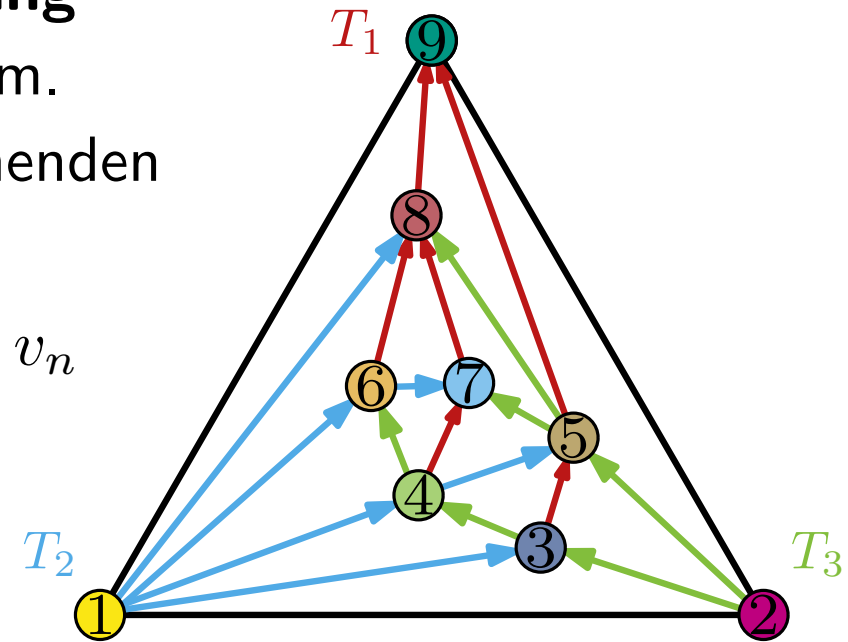
Schnyder Realizer \rightarrow Kanonische Ordnung

1. **Schritt:** Drehe Kanten von T_2 und T_3 um.

2. **Schritt:** Entferne Knoten mit nur eingehenden Kanten und indiziere ihn entsprechend.

Baue G in umgekehrte Reihenfolge v_1, \dots, v_n wieder auf. (Induktion)

- Wurzeln von T_2 und T_3 zuletzt gelöscht.
- Beginne mit Dreieck $v_1 v_2 v_3$



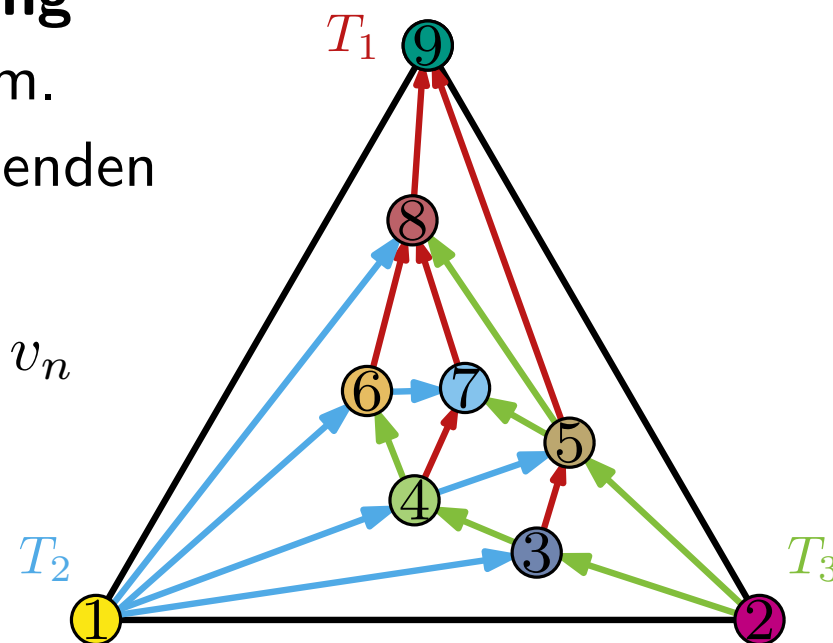
Schnyder Realizer \rightarrow Kanonische Ordnung

1. **Schritt:** Drehe Kanten von T_2 und T_3 um.

2. **Schritt:** Entferne Knoten mit nur eingehenden Kanten und indiziere ihn entsprechend.

Baue G in umgekehrte Reihenfolge v_1, \dots, v_n wieder auf. (Induktion)

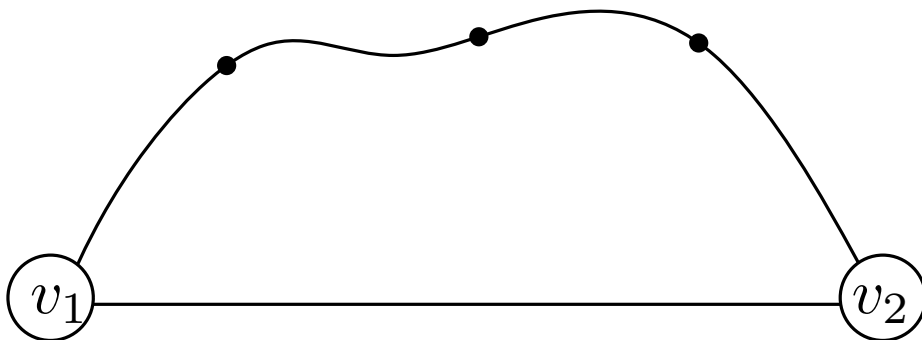
- Wurzeln von T_2 und T_3 zuletzt gelöscht.
- Beginne mit Dreieck $v_1 v_2 v_3$



Hinweis: Da Graph G trianguliert und äußere Facette durch v_1 , v_2 und v_n vorgegeben ist, ist die Einbettung eindeutig \rightarrow betrachte diese.

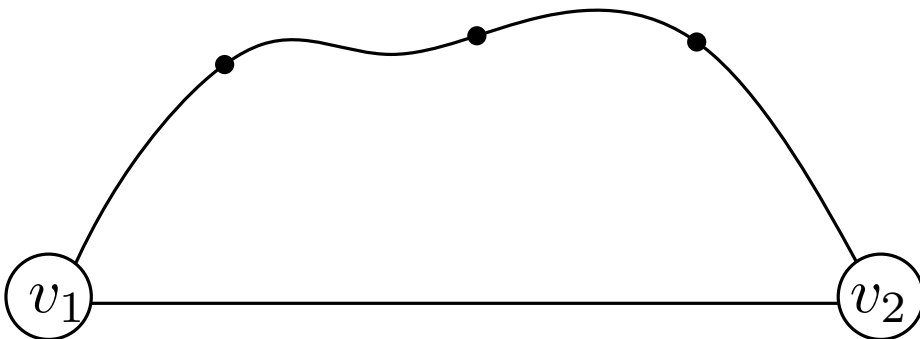
Betrachte Einfügen von v_i :

IV: v_1, \dots, v_{i-1} induzieren 2-fach zshgd. Graph G_{i-1} , sodass



Betrachte Einfügen von v_i :

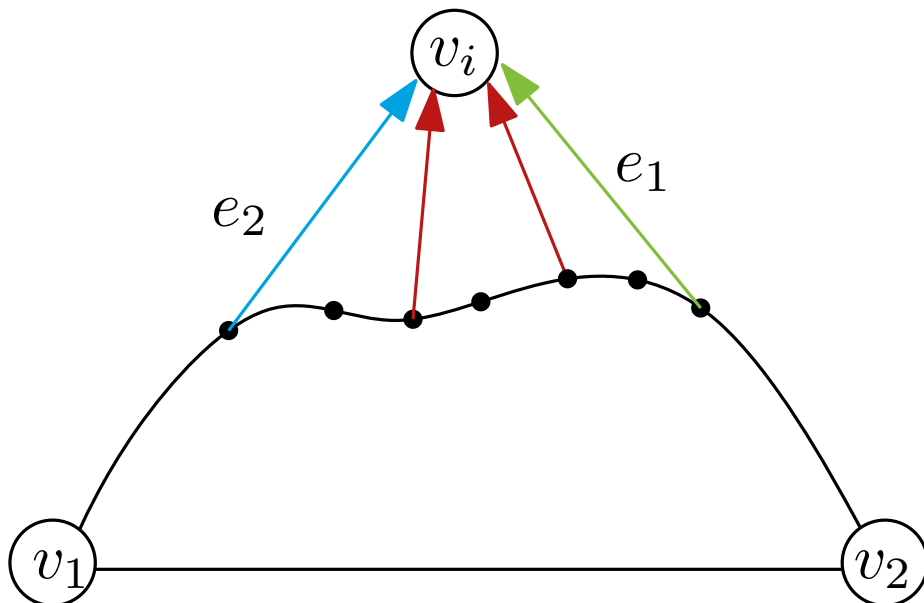
IV: v_1, \dots, v_{i-1} induzieren 2-fach zshgd. Graph G_{i-1} , sodass alle Knoten die Kanten zu Knoten v_i, \dots, v_n haben, auf der äußeren Facette liegen.



Betrachte Einfügen von v_i :

IV: v_1, \dots, v_{i-1} induzieren 2-fach zshgd. Graph G_{i-1} , sodass alle Knoten die Kanten zu Knoten v_i, \dots, v_n haben, auf der äußeren Facette liegen.

Setze v_i in äußere Facette von G_{i-1} . Nach IV entstehen keine Kreuzungen.



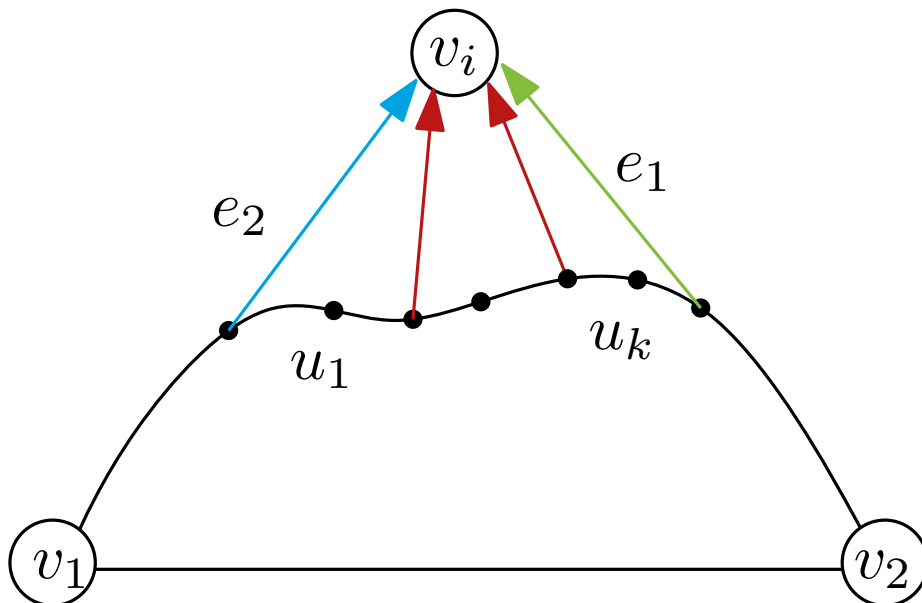
Betrachte Einfügen von v_i :

IV: v_1, \dots, v_{i-1} induzieren 2-fach zshgd. Graph G_{i-1} , sodass alle Knoten die Kanten zu Knoten v_i, \dots, v_n haben, auf der äußeren Facette liegen.

Setze v_i in äußere Facette von G_{i-1} . Nach IV entstehen keine Kreuzungen.

Seien u_1, \dots, u_k Knoten auf äußerer Facette zwischen e_2 und e_1 .

Zeige: u_1, \dots, u_k haben keine Kanten zu v_{i+1}, \dots, v_n in G



Betrachte Einfügen von v_i :

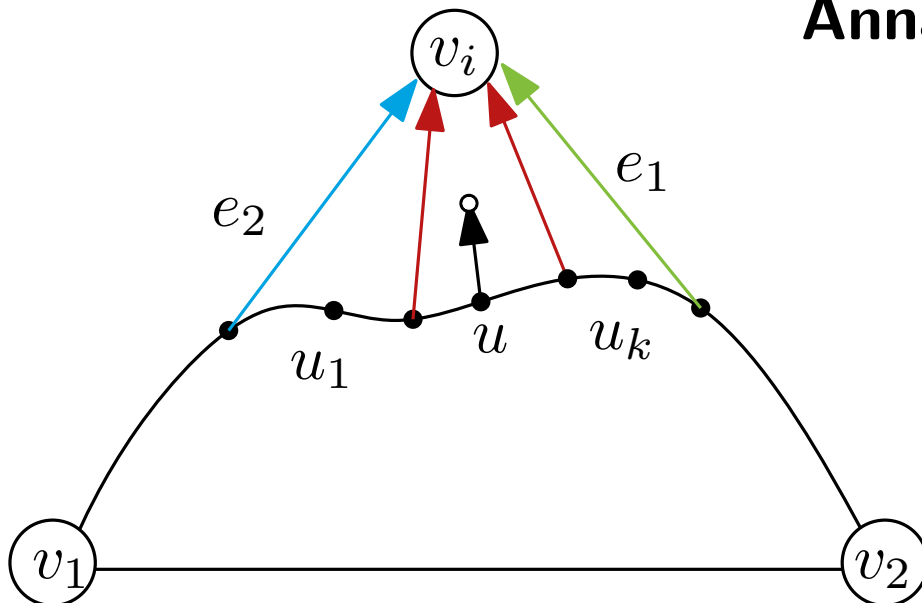
IV: v_1, \dots, v_{i-1} induzieren 2-fach zshgd. Graph G_{i-1} , sodass alle Knoten die Kanten zu Knoten v_i, \dots, v_n haben, auf der äußeren Facette liegen.

Setze v_i in äußere Facette von G_{i-1} . Nach IV entstehen keine Kreuzungen.

Seien u_1, \dots, u_k Knoten auf äußerer Facette zwischen e_2 und e_1 .

Zeige: u_1, \dots, u_k haben keine Kanten zu v_{i+1}, \dots, v_n in G

Annahme: Es gibt solchen Knoten u in G



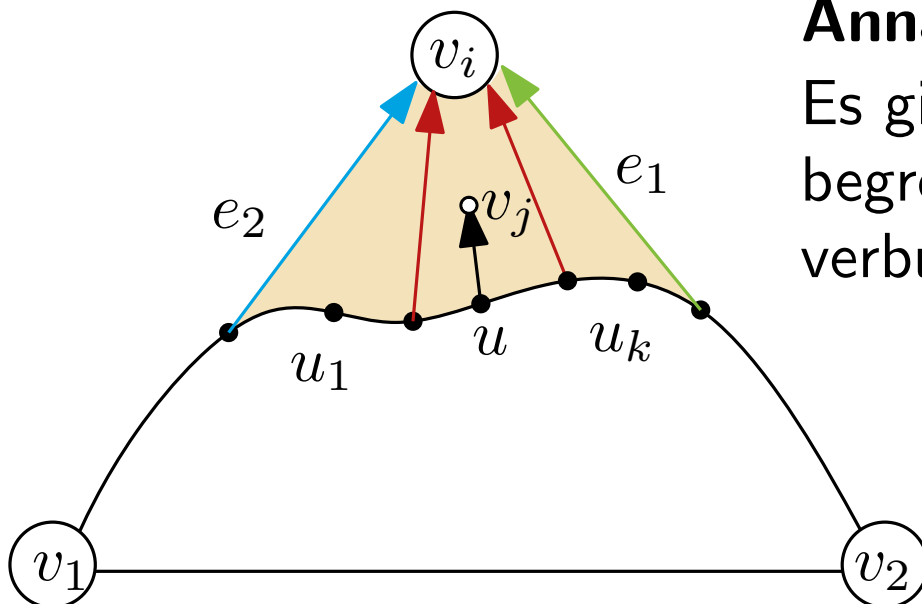
Betrachte Einfügen von v_i :

IV: v_1, \dots, v_{i-1} induzieren 2-fach zshgd. Graph G_{i-1} , sodass alle Knoten die Kanten zu Knoten v_i, \dots, v_n haben, auf der äußeren Facette liegen.

Setze v_i in äußere Facette von G_{i-1} . Nach IV entstehen keine Kreuzungen.

Seien u_1, \dots, u_k Knoten auf äußerer Facette zwischen e_2 und e_1 .

Zeige: u_1, \dots, u_k haben keine Kanten zu v_{i+1}, \dots, v_n in G



Annahme: Es gibt solchen Knoten u in G
Es gibt Knoten v_j mit $j \geq i + 1$ in Region begrenzt durch e_1 , e_2 und C_{i-1} , der mit u verbunden ist.

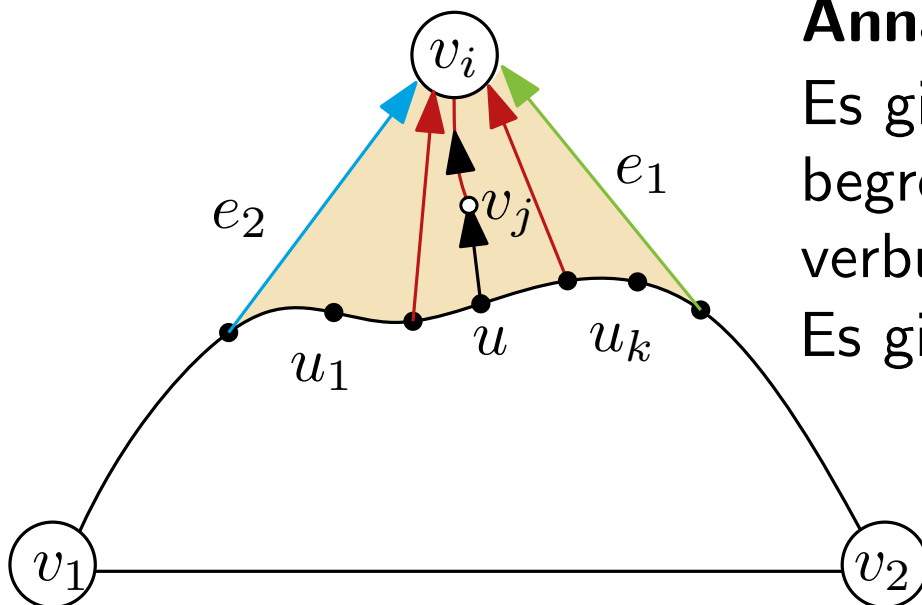
Betrachte Einfügen von v_i :

IV: v_1, \dots, v_{i-1} induzieren 2-fach zshgd. Graph G_{i-1} , sodass alle Knoten die Kanten zu Knoten v_i, \dots, v_n haben, auf der äußeren Facette liegen.

Setze v_i in äußere Facette von G_{i-1} . Nach IV entstehen keine Kreuzungen.

Seien u_1, \dots, u_k Knoten auf äußerer Facette zwischen e_2 und e_1 .

Zeige: u_1, \dots, u_k haben keine Kanten zu v_{i+1}, \dots, v_n in G



Annahme: Es gibt solchen Knoten u in G
Es gibt Knoten v_j mit $j \geq i + 1$ in Region
begrenzt durch e_1, e_2 und C_{i-1} , der mit u
verbunden ist.

Es gibt gerichteten Pfad in T_1 von v_j nach v_i .

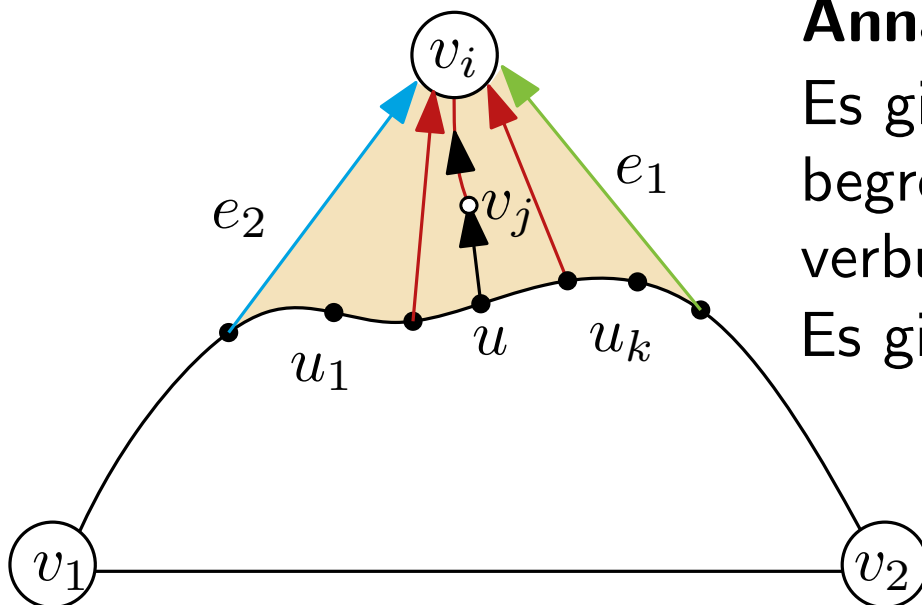
Betrachte Einfügen von v_i :

IV: v_1, \dots, v_{i-1} induzieren 2-fach zshgd. Graph G_{i-1} , sodass alle Knoten die Kanten zu Knoten v_i, \dots, v_n haben, auf der äußeren Facette liegen.

Setze v_i in äußere Facette von G_{i-1} . Nach IV entstehen keine Kreuzungen.

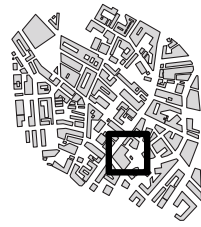
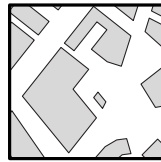
Seien u_1, \dots, u_k Knoten auf äußerer Facette zwischen e_2 und e_1 .

Zeige: u_1, \dots, u_k haben keine Kanten zu v_{i+1}, \dots, v_n in G



Annahme: Es gibt solchen Knoten u in G
Es gibt Knoten v_j mit $j \geq i + 1$ in Region
begrenzt durch e_1 , e_2 und C_{i-1} , der mit u
verbunden ist.

Es gibt gerichteten Pfad in T_1 von v_j nach v_i .
 v_j wird vor v_i eingefügt $\rightarrow j < i$



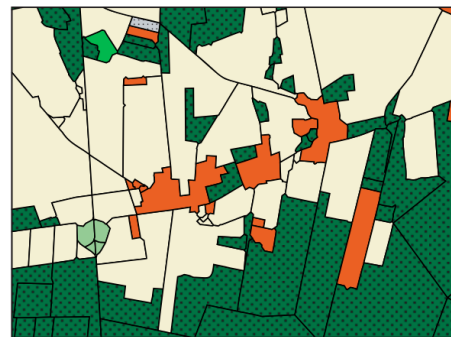
Original

Vereinfachung

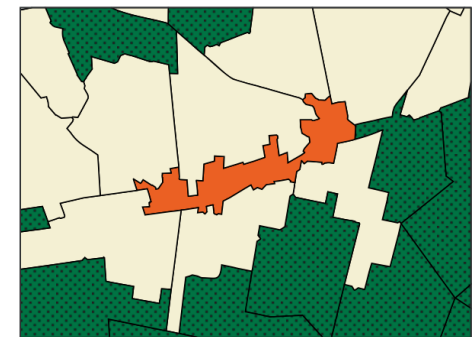
- Vereinfachung von rektilin. Polygonen.
- Vereinfachung von bel. Polygonen.
- Schematisierung von Polygonen.

Flächenvereinfachung

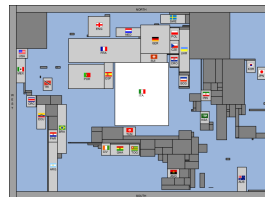
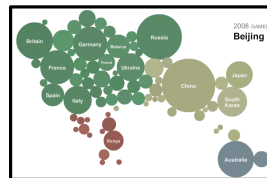
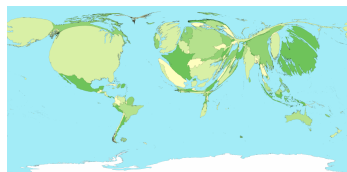
- Einfache Heuristik
- Varianten MIP



↓ Aggregation



Flächenaggregation



Kartogramme

- Verschiedene Typen
- Heuristiken
- Theoretische Ergebnisse.