

Vorlesung Algorithmische Kartografie

Flächenkartogramme

LEHRSTUHL FÜR ALGORITHMIK I · INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK · FAKULTÄT FÜR INFORMATIK

Benjamin Niedermann · Martin Nöllenburg
07.05.2015/12.05.2015



Räumliche statistische Daten

Wie visualisiert man Statistiken zu räumlichen Daten?

Beispiel: Bevölkerung in den USA

Räumliche statistische Daten

Wie visualisiert man Statistiken zu räumlichen Daten?

Beispiel: Bevölkerung in den USA

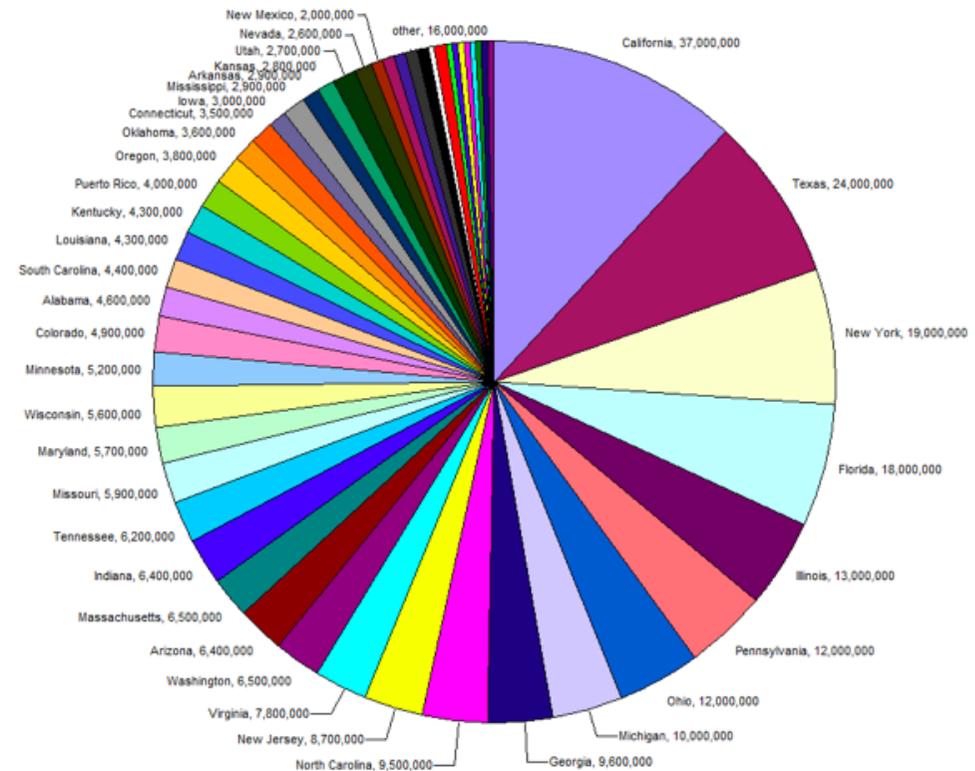
State	2011 pop.
Alabama	4,802,740
Alaska	722,718
Arizona	6,482,505
Arkansas	2,937,979
California	37,691,912
Colorado	5,116,796
Connecticut	3,580,709
Delaware	907,135
DC	617,996
Florida	19,057,542
Georgia	9,815,210
Hawaii	1,374,810
Idaho	1,584,985
Illinois	12,869,257
Indiana	6,516,922
Iowa	3,062,309
Kansas	2,871,238
Kentucky	4,369,356
Louisiana	4,574,836
Maine	1,328,188
Maryland	5,828,289
Massachusetts	6,587,536
Michigan	9,876,187
Minnesota	5,344,861
Mississippi	2,978,512
Missouri	6,010,688
Montana	998,199
Nebraska	1,842,641
Nevada	2,723,322
New Hampshire	1,318,194
New Jersey	8,821,155
New Mexico	2,082,224
New York	19,465,197
North Carolina	9,656,401
North Dakota	683,932
Ohio	11,544,951
Oklahoma	3,791,508
Oregon	3,871,859
Pennsylvania	12,742,886
Rhode Island	1,051,302
South Carolina	4,679,230
South Dakota	824,082
Tennessee	6,403,353
Texas	25,674,681
Utah	2,817,222
Vermont	626,431
Virginia	8,096,604
Washington	6,830,038
West Virginia	1,855,364
Wisconsin	5,711,767
Wyoming	568,158

als Tabelle?

Wie visualisiert man Statistiken zu räumlichen Daten?

Beispiel: Bevölkerung in den USA

State	2011 pop.				
Alabama	4,802,740	Kentucky	4,369,356	Oklahoma	3,791,508
Alaska	722,718	Louisiana	4,574,836	Oregon	3,871,859
Arizona	6,482,505	Maine	1,328,188	Pennsylvania	12,742,886
Arkansas	2,937,979	Maryland	5,828,289	Rhode Island	1,051,302
California	37,691,912	Massachusetts	6,587,536	South Carolina	4,679,230
Colorado	5,116,796	Michigan	9,876,187	South Dakota	824,082
Connecticut	3,580,709	Minnesota	5,344,861	Tennessee	6,403,353
Delaware	907,135	Mississippi	2,978,512	Texas	25,674,681
DC	617,996	Missouri	6,010,688	Utah	2,817,222
Florida	19,057,542	Montana	998,199	Vermont	626,431
Georgia	9,815,210	Nebraska	1,842,641	Virginia	8,096,604
Hawaii	1,374,810	Nevada	2,723,322	Washington	6,830,038
Idaho	1,584,985	New Hampshire	1,318,194	West Virginia	1,855,364
Illinois	12,869,257	New Jersey	8,821,155	Wisconsin	5,711,767
Indiana	6,516,922	New Mexico	2,082,224	Wyoming	568,158
Iowa	3,062,309	New York	19,465,197		
Kansas	2,871,238	North Carolina	9,656,401		
		North Dakota	683,932		
		Ohio	11,544,951		



als Tortendiagramm?

als Tabelle?

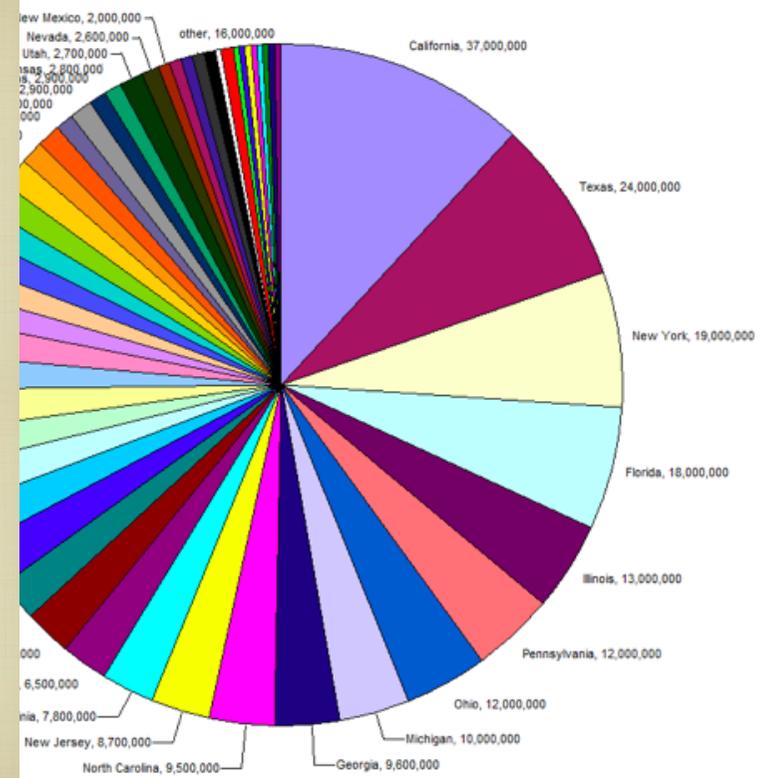
Räumliche statistische Daten

Wie visualisiert man Statistiken zu räumlichen Daten?

Beispiel: Bevölkerung in den USA

State	2011 pop.
Alabama	4,802,740
Alaska	722,718
Arizona	6,482,505
Arkansas	2,937,979
California	37,691,912
Colorado	5,116,796
Connecticut	3,580,709
Delaware	907,135
DC	617,996
Florida	19,057,542
Georgia	9,815,210
Hawaii	1,374,810
Idaho	1,584,985
Illinois	12,869,257
Indiana	6,516,922
Iowa	3,062,309
Kansas	2,871,238

Kentucky	
Louisiana	
Maine	
Maryland	
Massachusetts	
Michigan	
Minnesota	
Mississippi	
Missouri	
Montana	
Nebraska	
Nevada	
New Hampshire	
New Jersey	
New Mexico	
New York	19,057,542
North Carolina	9,656,401
North Dakota	683,932
Ohio	11,544,951



als Balkendiagramm?

als Tortendiagramm?

als Tabelle?

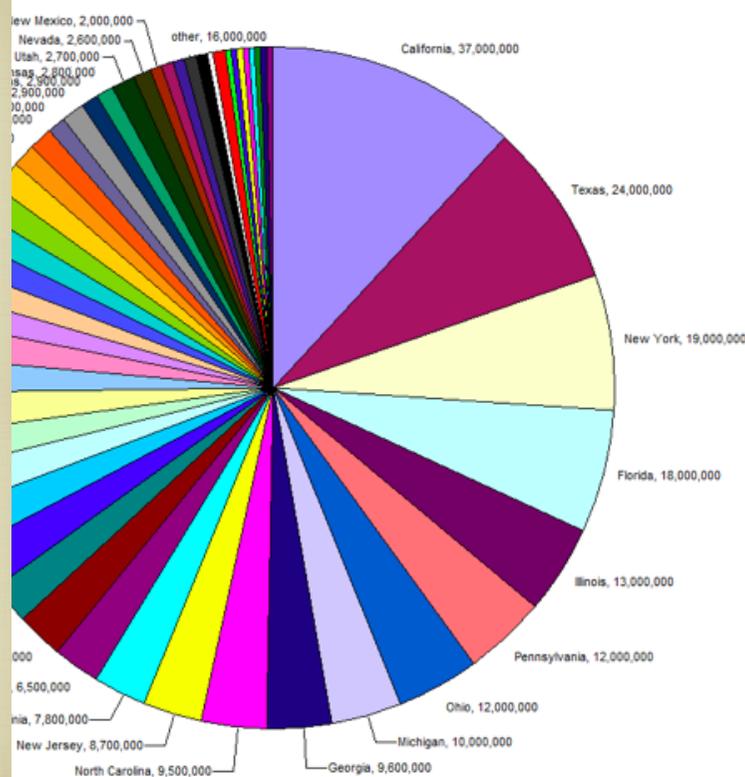
Räumliche statistische Daten

Wie visualisiert man Statistiken zu räumlichen Daten?

Beispiel: Bevölkerung in den USA

State	2011 pop.
Alabama	4,802,740
Alaska	722,718
Arizona	6,482,505
Arkansas	2,937,979
California	37,691,912
Colorado	5,116,796
Connecticut	3,580,709
Delaware	907,135
DC	617,996
Florida	19,057,542
Georgia	9,815,210
Hawaii	1,374,810
Idaho	1,584,985
Illinois	12,869,257
Indiana	6,516,922
Iowa	3,062,309
Kansas	2,871,238

Kentucky	
Louisiana	
Maine	
Maryland	
Massachusetts	
Michigan	
Minnesota	
Mississippi	
Missouri	
Montana	
Nebraska	
Nevada	
New Hampshire	
New Jersey	
New Mexico	
New York	19,057,542
North Carolina	9,656,401
North Dakota	683,932
Ohio	11,544,951

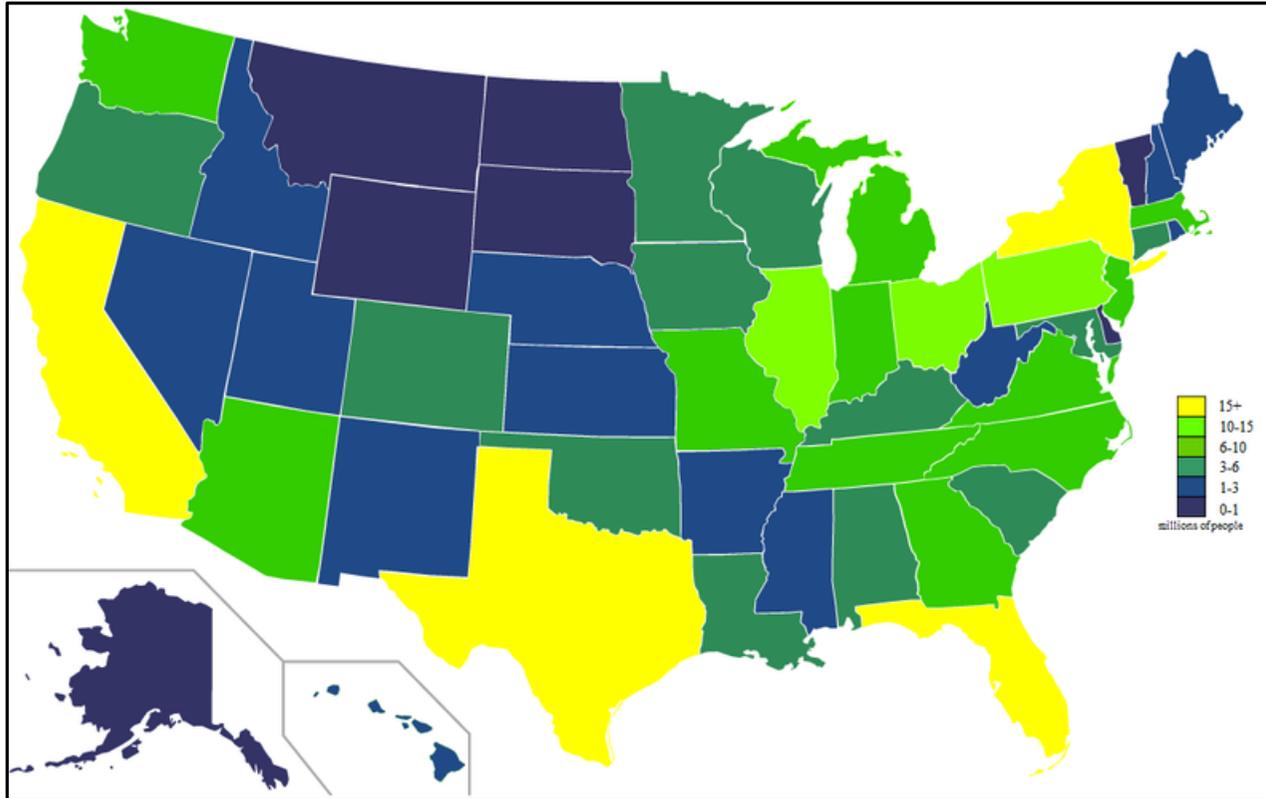


als Balkendiagramm?

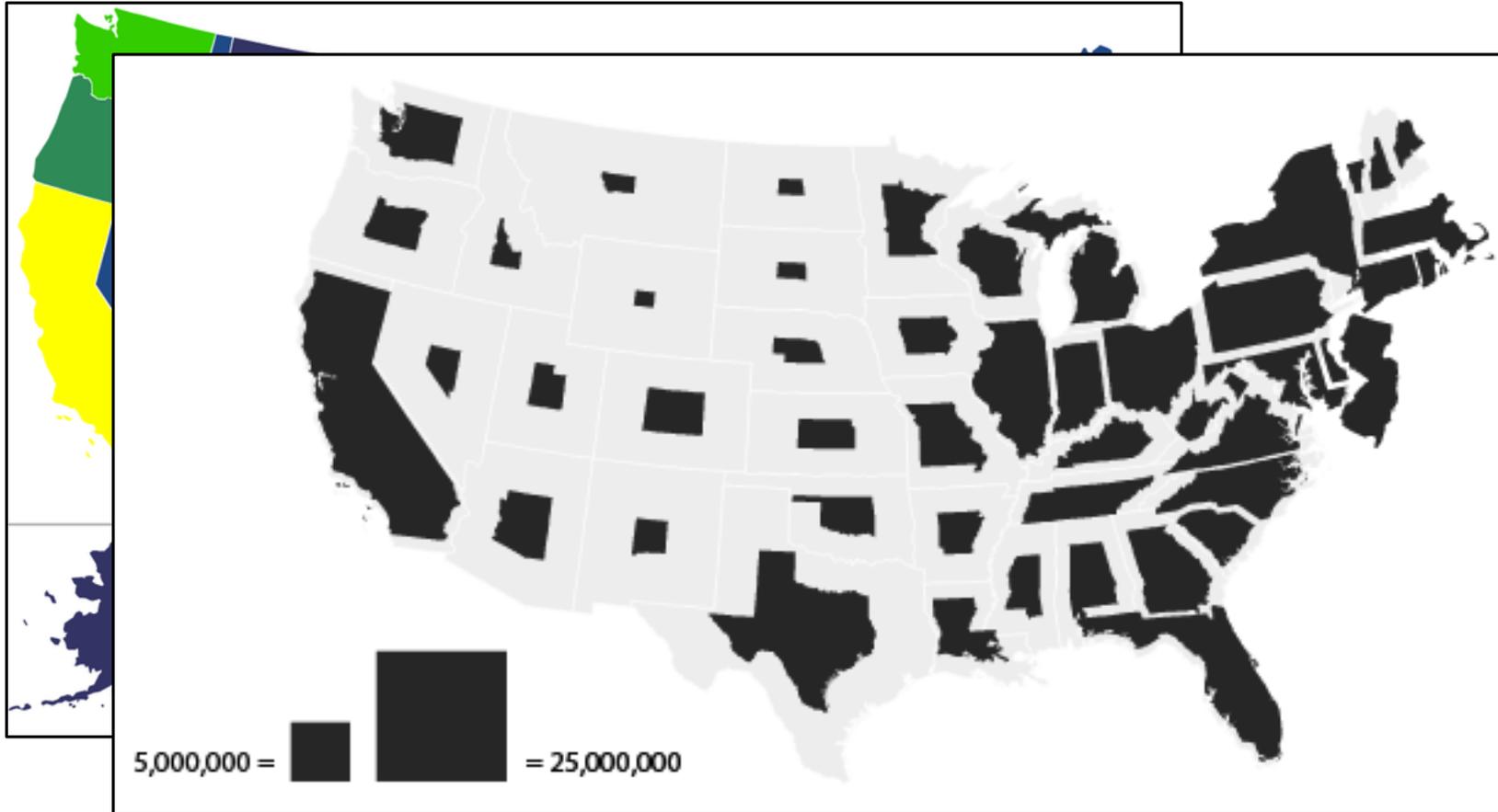
als Tortendiagramm?

als Tabelle?

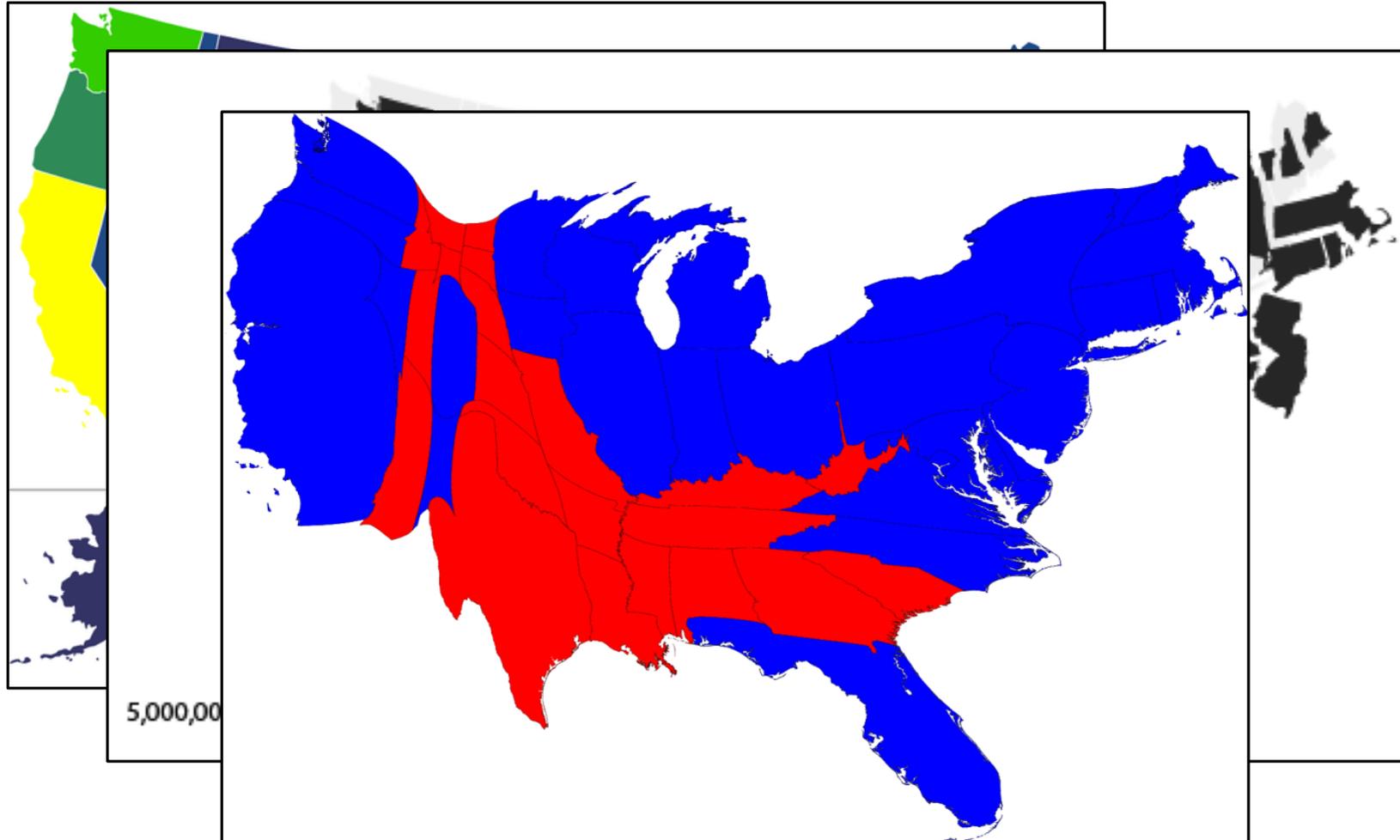
Problem: Standardmethoden zeigen keine räumlichen Muster!



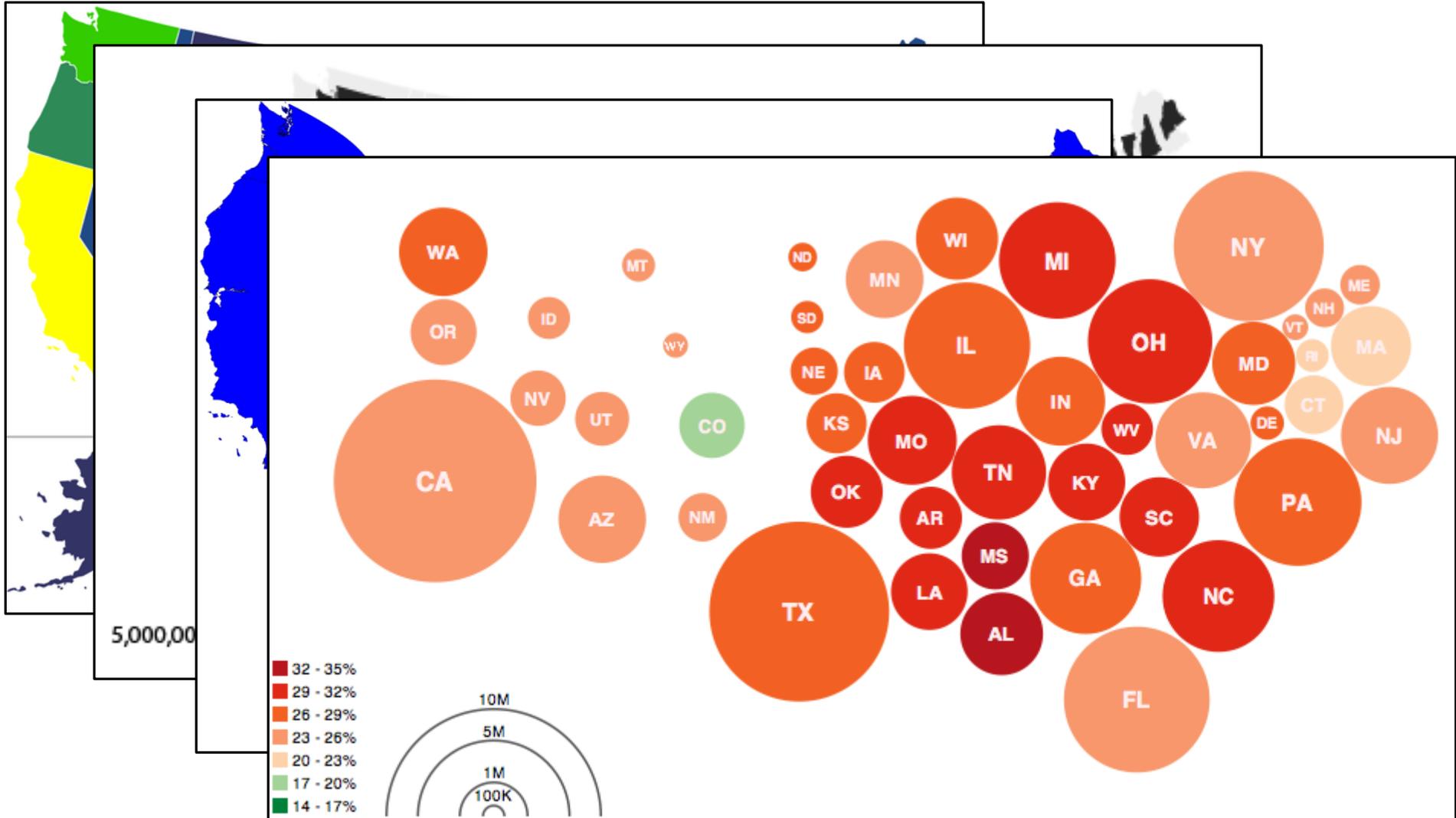
Choroplethenkarte: nutze Farbschema



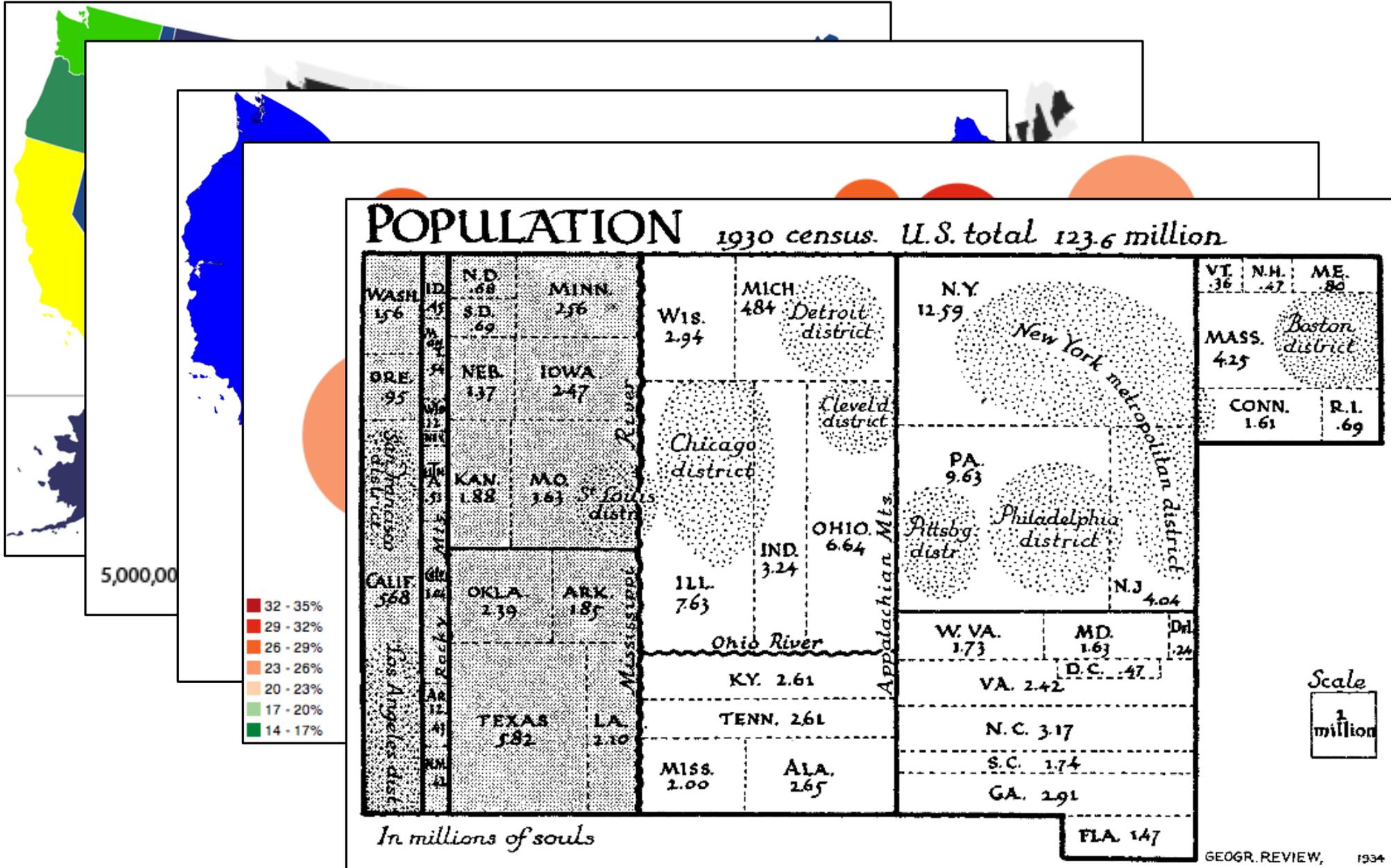
non-contiguous area cartogram:
Fläche proportional zur Bevölkerung



contiguous area cartogram: Diffusionsprozess
(Gastner, Newman 2004)



Dorling cartograms: Kreisscheiben proportionaler Größe



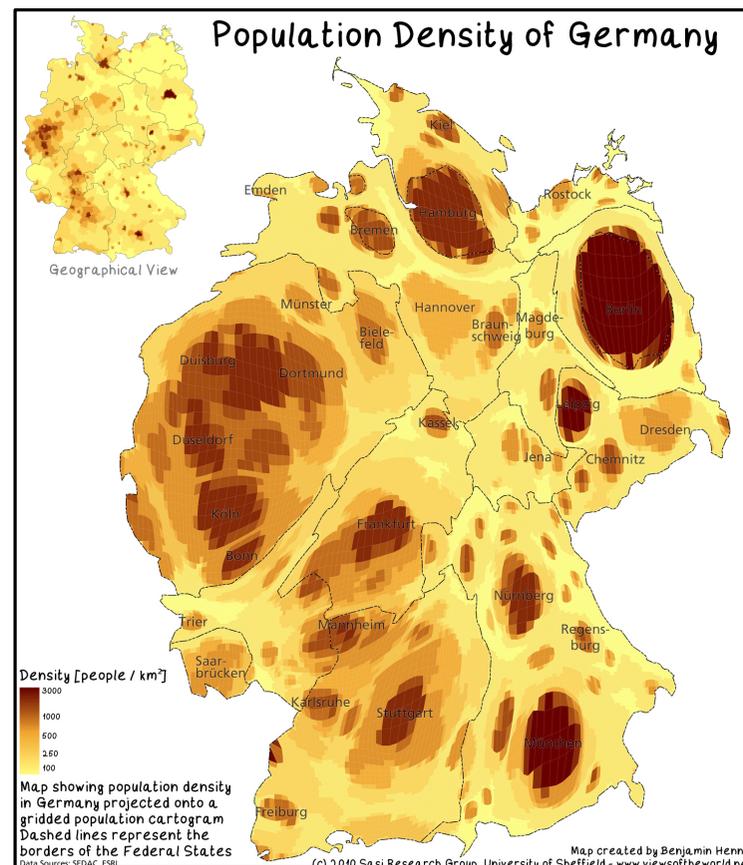
rectangular cartograms: jede Region als Rechteck (Raisz 1934)

Def.: Ein **Flächenkartogramm** (dt. *Kartenanamorphote*) ist eine Kartendarstellung, in der jede Flächeneinheit proportional zu einer externen Größe und nicht mehr zur tatsächlichen Fläche ist (z.B. Bevölkerungszahl).

Flächenkartogramme

Def.: Ein **Flächenkartogramm** (dt. *Kartenanamorphote*) ist eine Kartendarstellung, in der jede Flächeneinheit proportional zu einer externen Größe und nicht mehr zur tatsächlichen Fläche ist (z.B. Bevölkerungszahl).

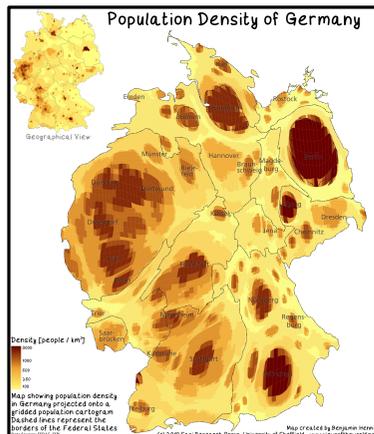
→ Form, Lage und Nachbarschaften der Regionen werden verzerrt



Flächenkartogramme

Def.: Ein **Flächenkartogramm** (dt. *Kartenanamorphote*) ist eine Kartendarstellung, in der jede Flächeneinheit proportional zu einer externen Größe und nicht mehr zur tatsächlichen Fläche ist (z.B. Bevölkerungszahl).

→ Form, Lage und Nachbarschaften der Regionen werden verzerrt

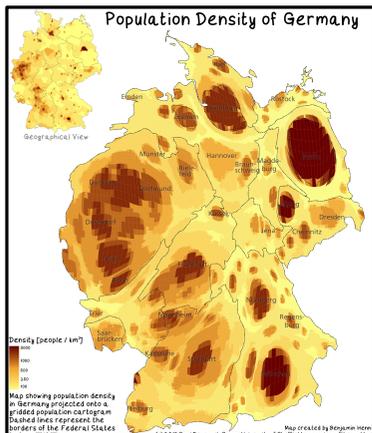


© Benjamin Hennig

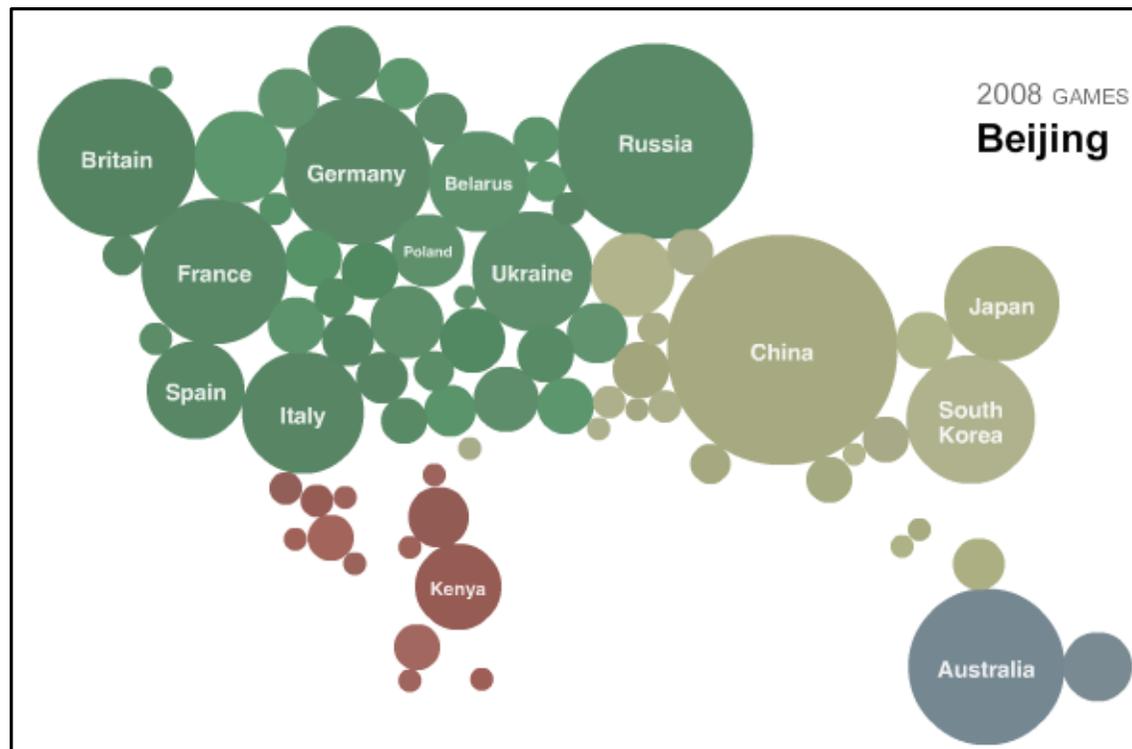
Flächenkartogramme

Def.: Ein **Flächenkartogramm** (dt. *Kartenanamorphote*) ist eine Kartendarstellung, in der jede Flächeneinheit proportional zu einer externen Größe und nicht mehr zur tatsächlichen Fläche ist (z.B. Bevölkerungszahl).

→ Form, Lage und Nachbarschaften der Regionen werden verzerrt



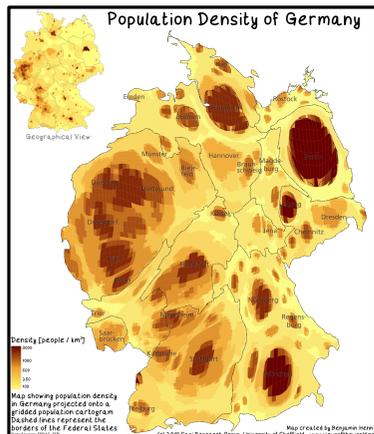
© Benjamin Hennig



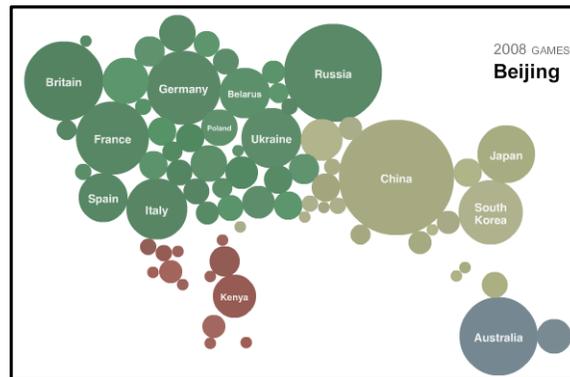
Flächenkartogramme

Def.: Ein **Flächenkartogramm** (dt. *Kartenanamorphote*) ist eine Kartendarstellung, in der jede Flächeneinheit proportional zu einer externen Größe und nicht mehr zur tatsächlichen Fläche ist (z.B. Bevölkerungszahl).

→ Form, Lage und Nachbarschaften der Regionen werden verzerrt



© Benjamin Hennig

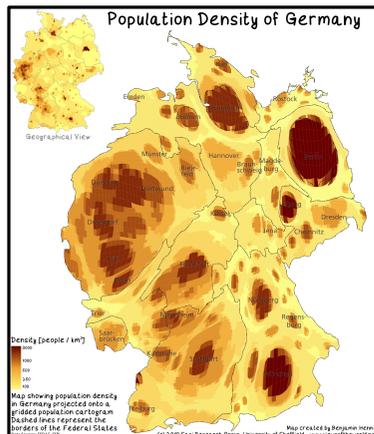


© New York Times

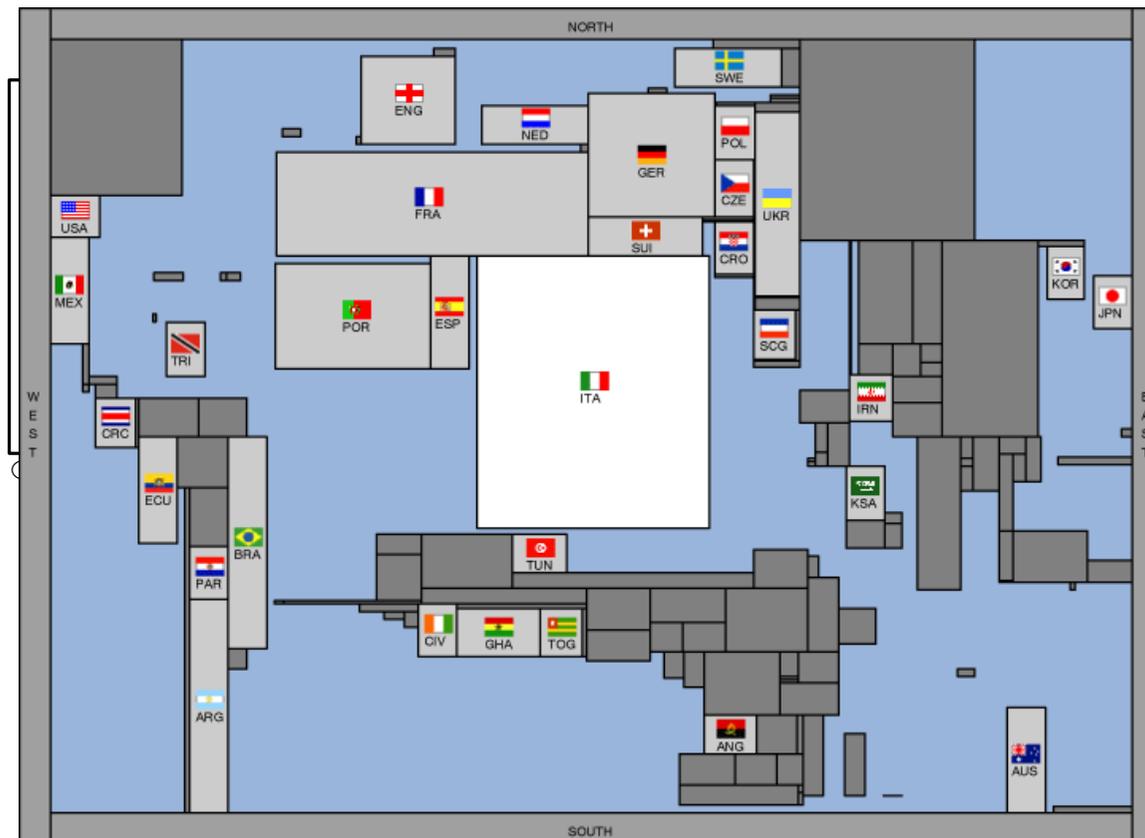
Flächenkartogramme

Def.: Ein **Flächenkartogramm** (dt. *Kartenanamorphote*) ist eine Kartendarstellung, in der jede Flächeneinheit proportional zu einer externen Größe und nicht mehr zur tatsächlichen Fläche ist (z.B. Bevölkerungszahl).

→ Form, Lage und Nachbarschaften der Regionen werden verzerrt



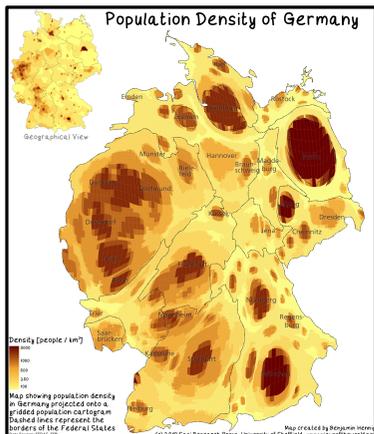
© Benjamin Hennig



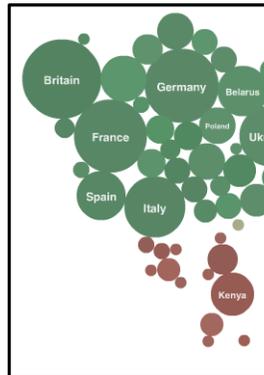
Flächenkartogramme

Def.: Ein **Flächenkartogramm** (dt. *Kartenanamorphote*) ist eine Kartendarstellung, in der jede Flächeneinheit proportional zu einer externen Größe und nicht mehr zur tatsächlichen Fläche ist (z.B. Bevölkerungszahl).

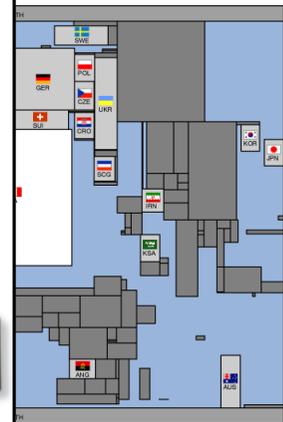
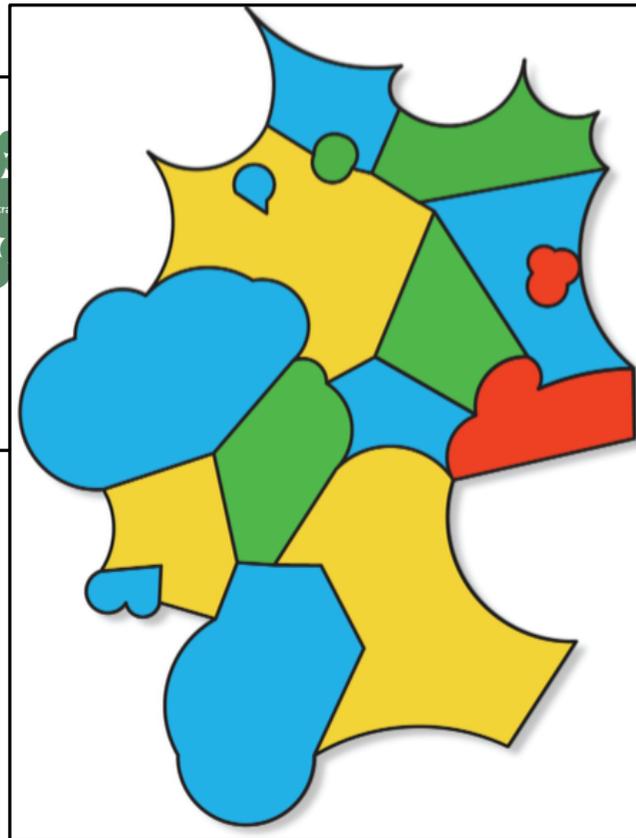
→ Form, Lage und Nachbarschaften der Regionen werden verzerrt



© Benjamin Hennig



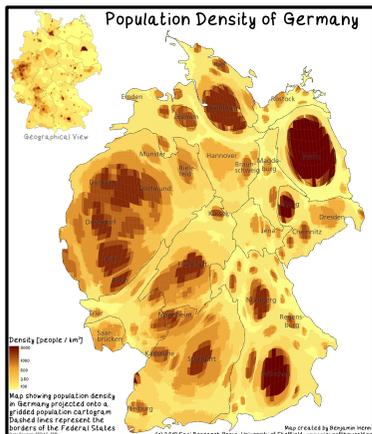
© New York Times



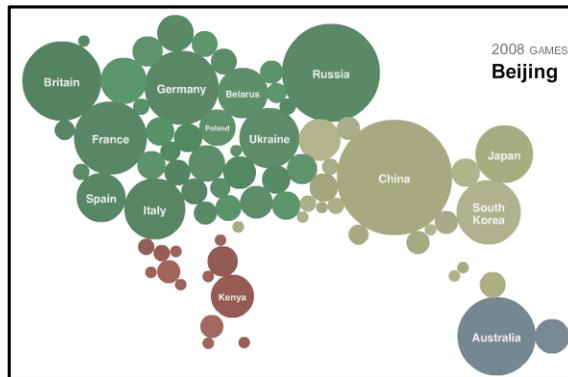
Flächenkartogramme

Def.: Ein **Flächenkartogramm** (dt. *Kartenanamorphote*) ist eine Kartendarstellung, in der jede Flächeneinheit proportional zu einer externen Größe und nicht mehr zur tatsächlichen Fläche ist (z.B. Bevölkerungszahl).

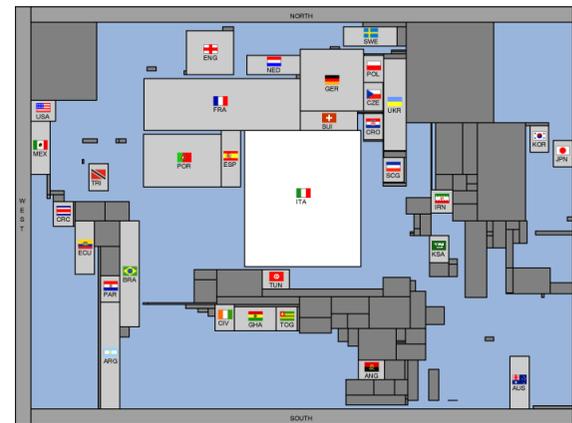
→ Form, Lage und Nachbarschaften der Regionen werden verzerrt



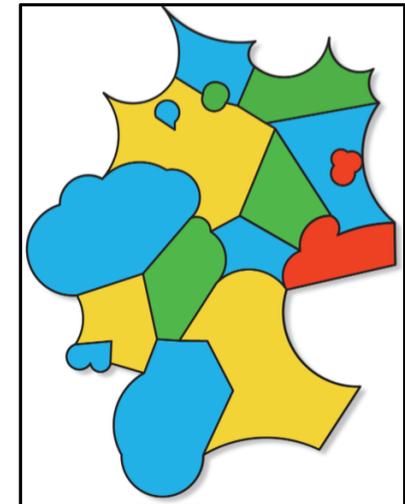
© Benjamin Hennig



© New York Times



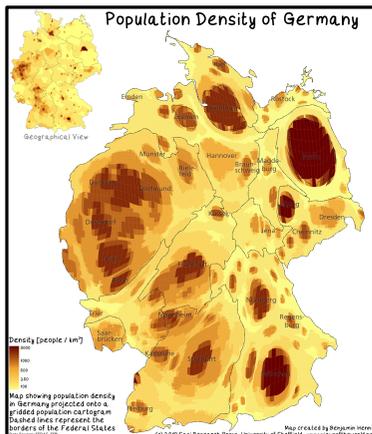
© Bettina Speckmann



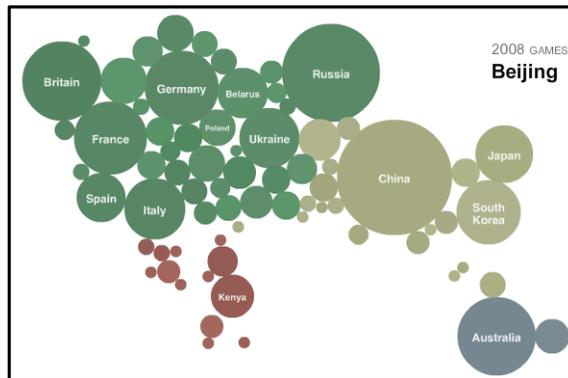
Welche Kriterien bestimmen die Qualität eines Kartogramms?

Def.: Ein **Flächenkartogramm** (dt. *Kartenanamorphote*) ist eine Kartendarstellung, in der jede Flächeneinheit proportional zu einer externen Größe und nicht mehr zur tatsächlichen Fläche ist (z.B. Bevölkerungszahl).

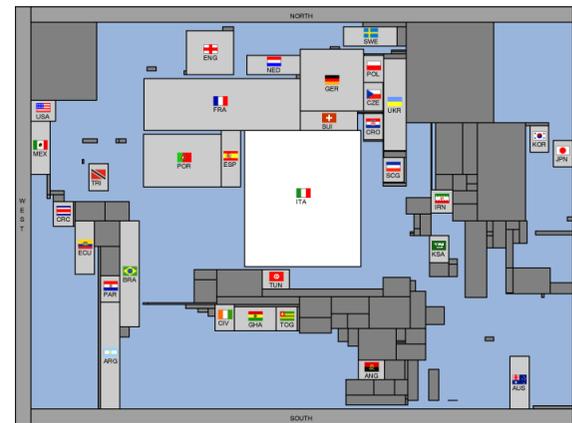
→ Form, Lage und Nachbarschaften der Regionen werden verzerrt



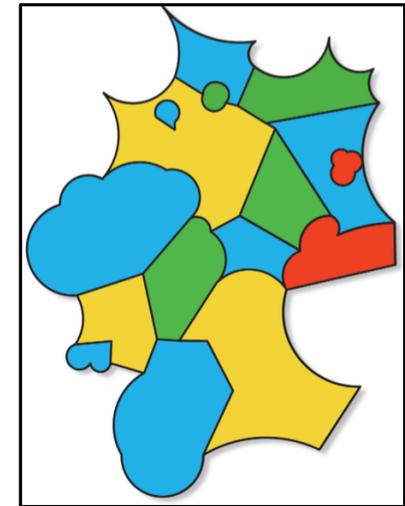
© Benjamin Hennig



© New York Times



© Bettina Speckmann

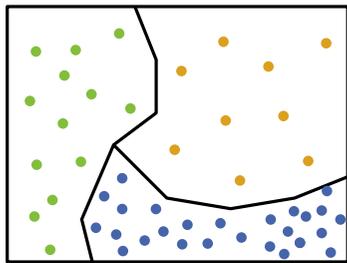


Qualitätskriterien:

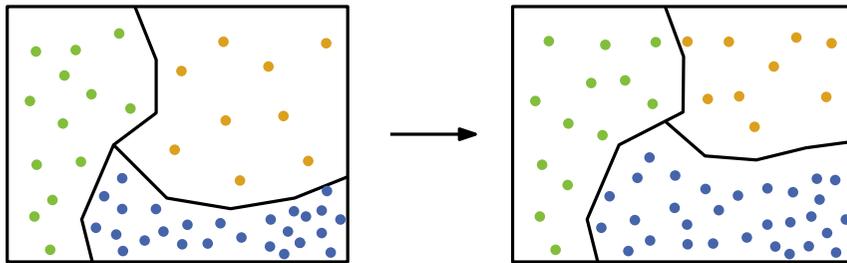
- Wiedererkennbarkeit der Form
- Vergleichbarkeit
- Lage der Regionen

- korrekte Adjazenzen
- kleiner Flächenfehler
- geringe Komplexität
- Ablesen der Fläche

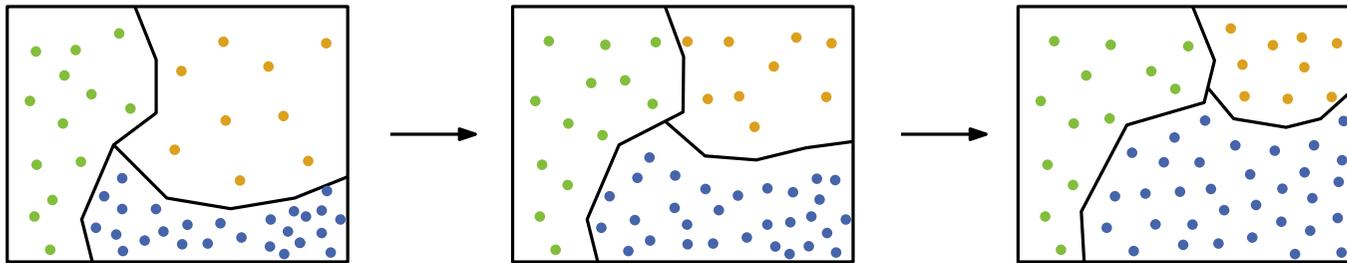
- Bevölkerungsdichte in Standardkarte sehr unterschiedlich
- ideales Kartogramm hat überall die gleiche Dichte
- modelliere Dichteausgleich als physikalischen Diffusionsprozess \rightarrow ergibt Transformation $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$



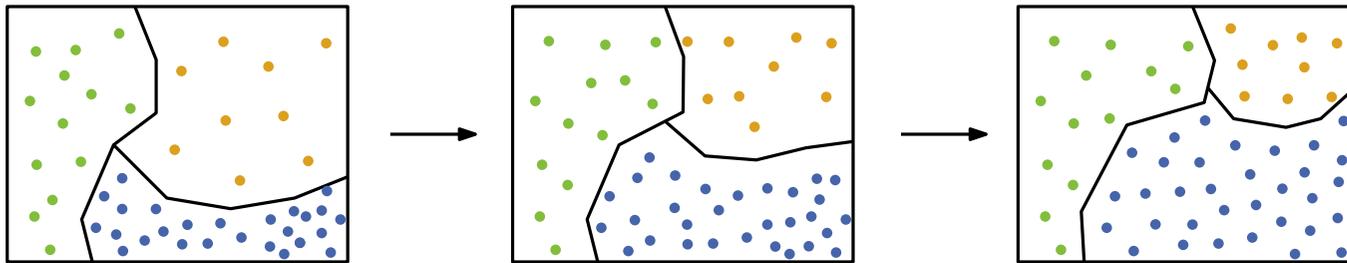
- Bevölkerungsdichte in Standardkarte sehr unterschiedlich
- ideales Kartogramm hat überall die gleiche Dichte
- modelliere Dichteausgleich als physikalischen Diffusionsprozess \rightarrow ergibt Transformation $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$



- Bevölkerungsdichte in Standardkarte sehr unterschiedlich
- ideales Kartogramm hat überall die gleiche Dichte
- modelliere Dichteausgleich als physikalischen Diffusionsprozess \rightarrow ergibt Transformation $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

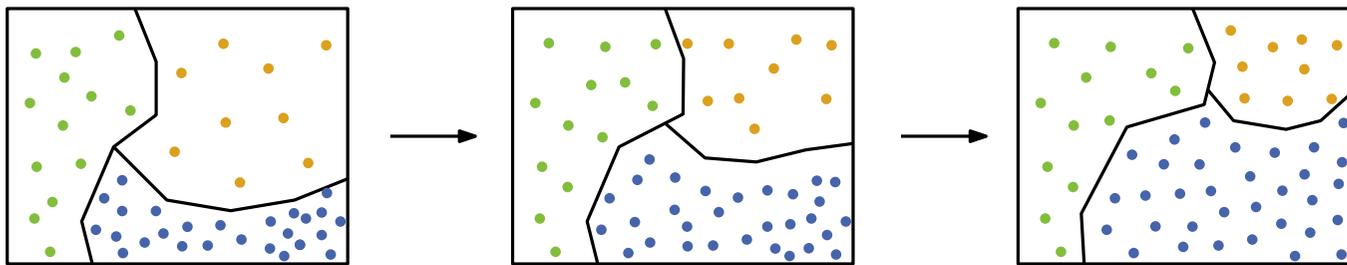


- Bevölkerungsdichte in Standardkarte sehr unterschiedlich
- ideales Kartogramm hat überall die gleiche Dichte
- modelliere Dichteausgleich als physikalischen Diffusionsprozess \rightarrow ergibt Transformation $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

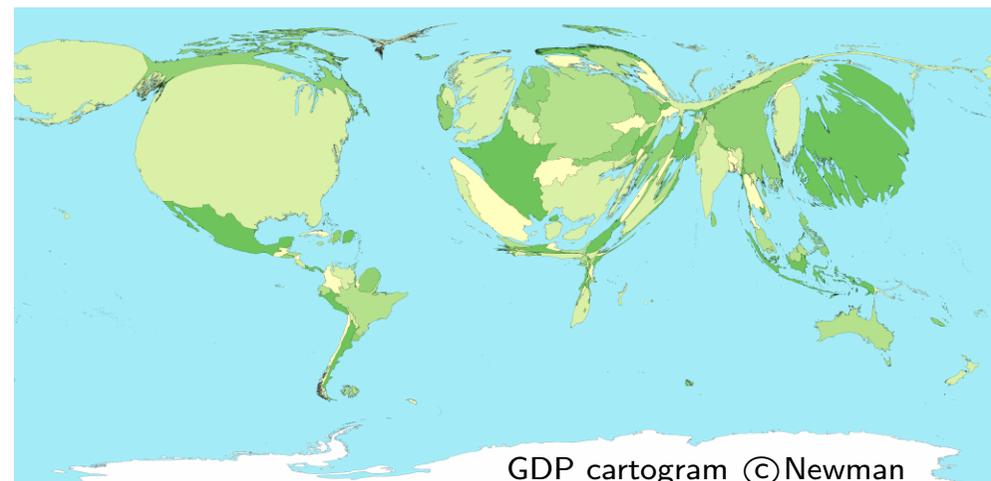


- Diffusionsgleichung ist partielle Differentialgleichung
- Implementierung nutzt Fouriertransformation und numerische Lösungsverfahren
- asymptotisch konstante Dichte in ganzer Karte

- Bevölkerungsdichte in Standardkarte sehr unterschiedlich
- ideales Kartogramm hat überall die gleiche Dichte
- modelliere Dichteausgleich als physikalischen Diffusionsprozess \rightarrow ergibt Transformation $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

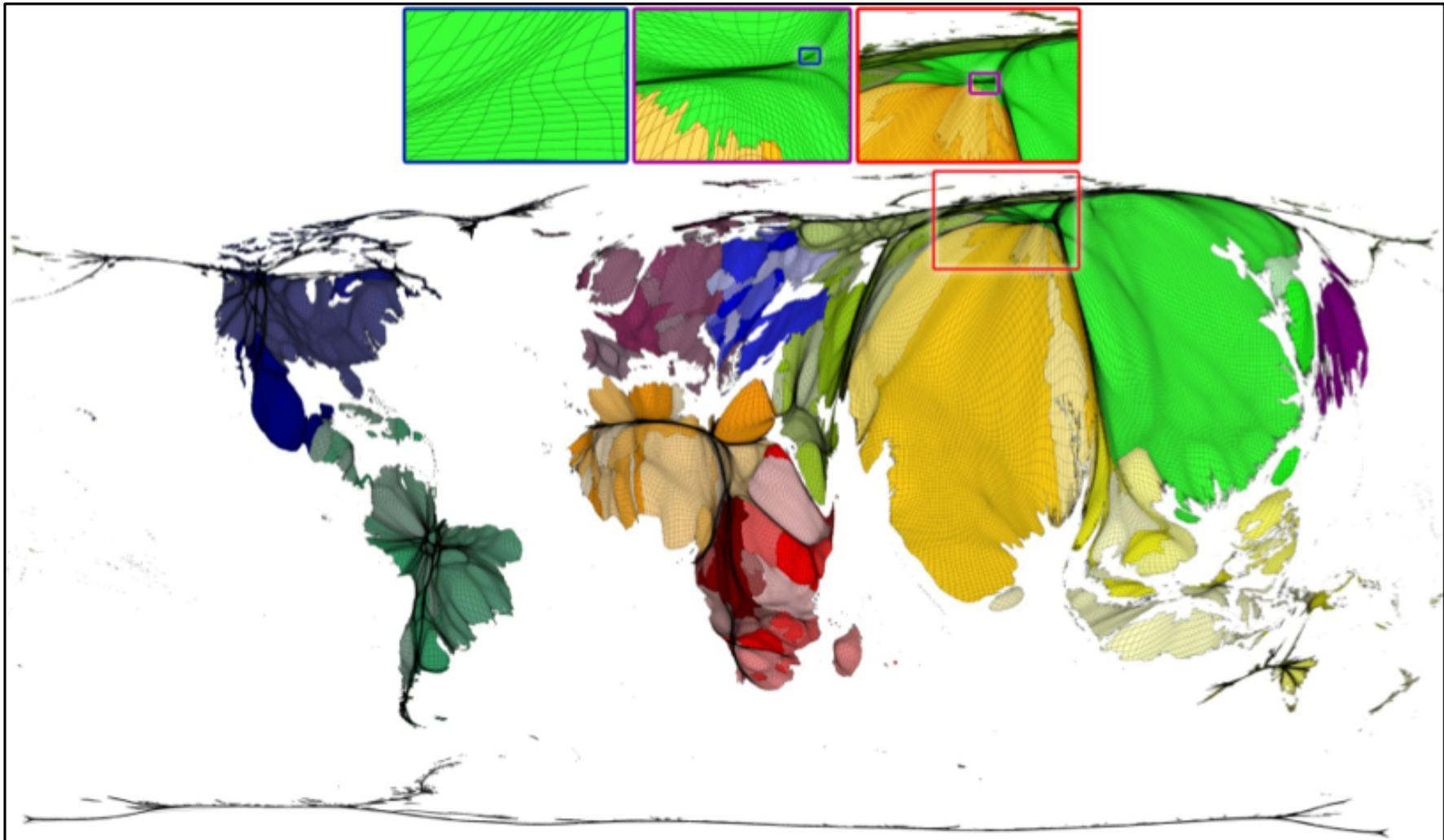


- Diffusionsgleichung ist partielle Differentialgleichung
- Implementierung nutzt Fouriertransformation und numerische Lösungsverfahren
- asymptotisch konstante Dichte in ganzer Karte

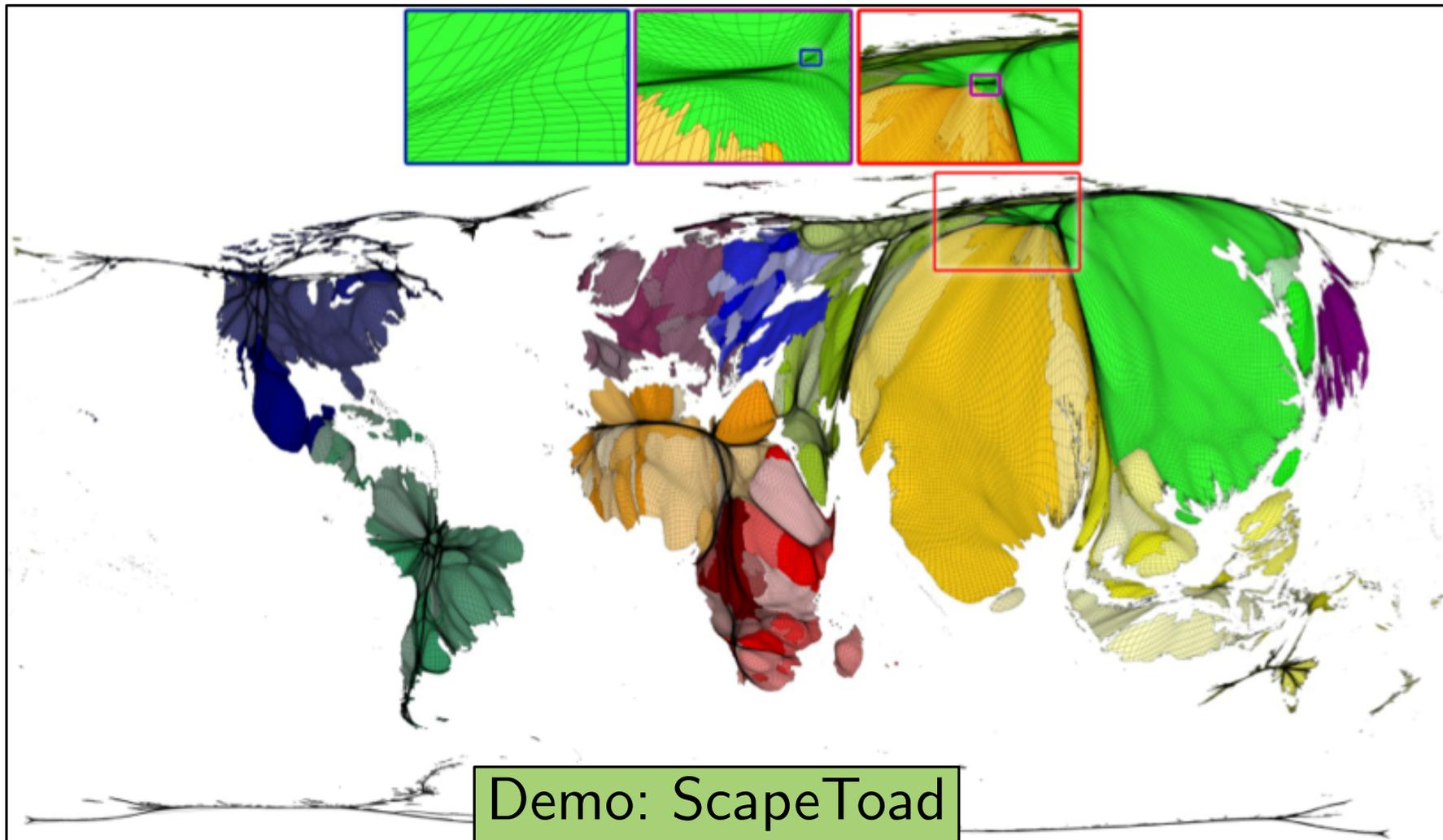


Gitterbasierte Diffusionskartogramme [Hennig '11]

- Erweiterung durch fein aufgelöstes Gitter ($\approx 365K$ Zellen)
- Datenwert für jede Gitterzelle ermöglicht detailliertere Kartogramme (Abbildung von Ballungsräumen etc)

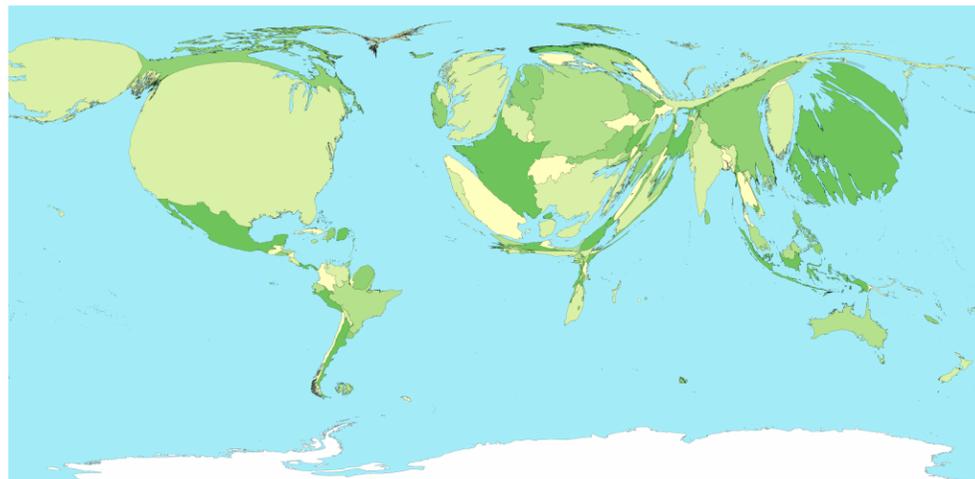


- Erweiterung durch fein aufgelöstes Gitter ($\approx 365K$ Zellen)
- Datenwert für jede Gitterzelle ermöglicht detailliertere Kartogramme (Abbildung von Ballungsräumen etc)



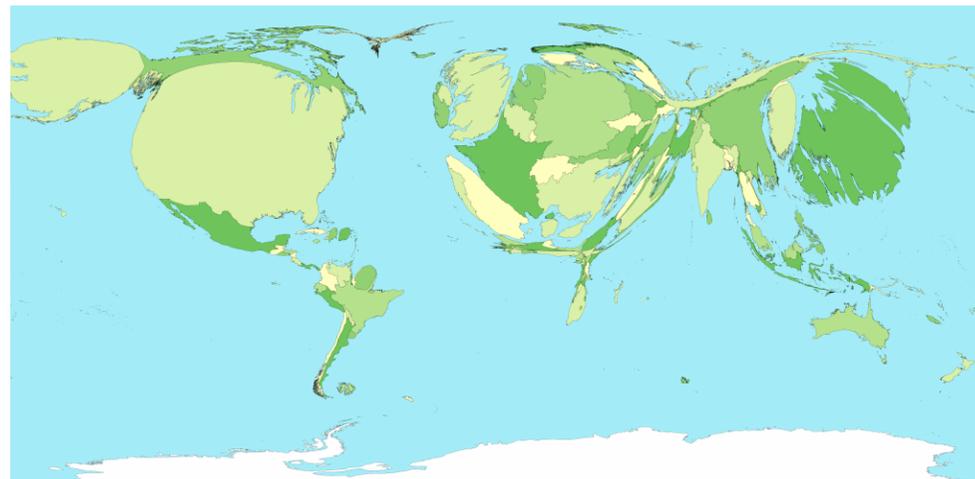
Diskussion:

- Wiedererkennbarkeit der Form
- Vergleichbarkeit
- Lage der Regionen
- korrekte Adjazenzen
- kleiner Flächenfehler
- geringe Komplexität
- Ablesen der Fläche

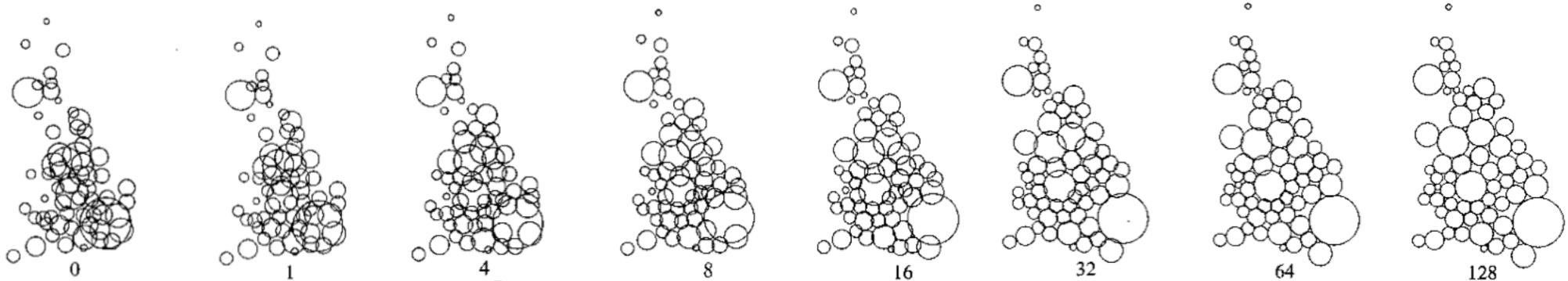


Diskussion:

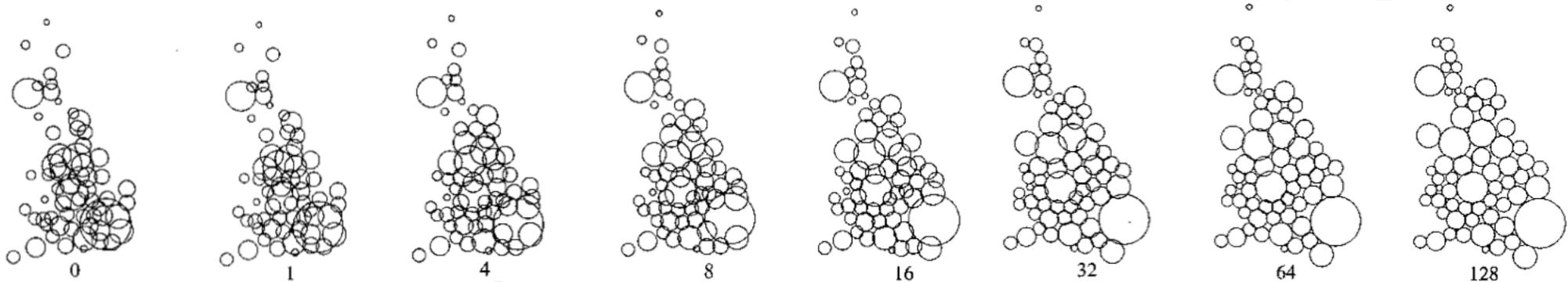
- Wiedererkennbarkeit der Form ○
- Vergleichbarkeit ⊖
- Lage der Regionen ⊕ ○
- korrekte Adjazenzen ⊕
- kleiner Flächenfehler ⊕ ○
- geringe Komplexität ⊖
- Ablesen der Fläche ⊖



- einfache, abstrakte Form: jede Region als Kreisscheibe
- Fläche fest skaliert bzgl. gegebener Größe
- initiale Platzierung im Schwerpunkt der Region
- iteratives Verschieben zum Auflösen der Überlappungen



- einfache, abstrakte Form: jede Region als Kreisscheibe
- Fläche fest skaliert bzgl. gegebener Größe
- initiale Platzierung im Schwerpunkt der Region
- iteratives Verschieben zum Auflösen der Überlappungen



kräftebasierter Algorithmus (ähnl. Spring-Embedder):

while Kräfte $> \varepsilon$ **do**

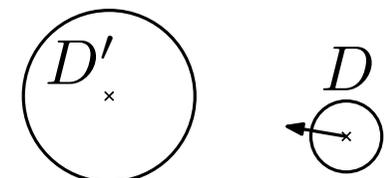
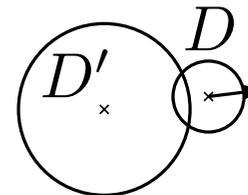
foreach disk D **do**

foreach disk $D' \cap D \neq \emptyset$ **do**

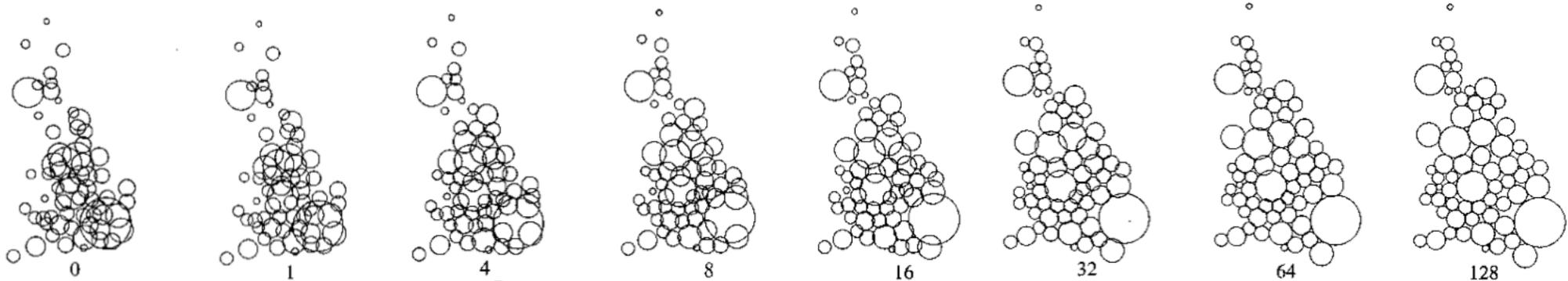
 └ Abstoßung von D' geographischer Nachbar

foreach Nachbar D' von D mit Abstand > 0 **do**

 └ Anziehung zu D'



- einfache, abstrakte Form: jede Region als Kreisscheibe
- Fläche fest skaliert bzgl. gegebener Größe
- initiale Platzierung im Schwerpunkt der Region
- iteratives Verschieben zum Auflösen der Überlappungen



kräftebasierter Algorithmus (ähnl. Spring-Embedder):

while Kräfte $> \varepsilon$ **do**

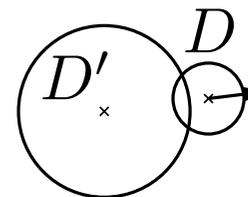
foreach disk D **do**

foreach disk $D' \cap D \neq \emptyset$ **do**

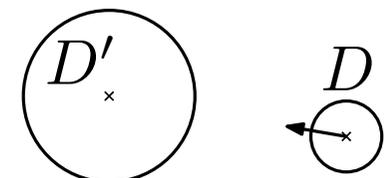
 └ Abstoßung von D' geographischer Nachbar

foreach Nachbar D' von D mit Abstand > 0 **do**

 └ Anziehung zu D'



Demo!



weiteres Kriterium:

- minimiere Abweichung der relativen Lage benachbarter Regionen

Formulierung als nicht-lineares Optimierungsproblem:

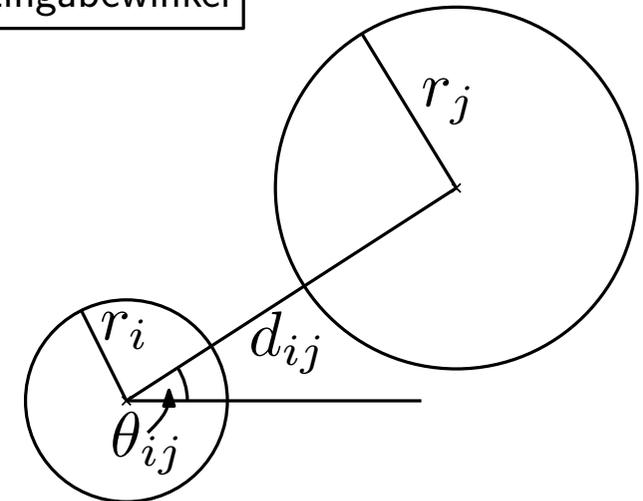
$$\min \sum_{\text{geogr. Nachbarn} \rightarrow (i,j) \in E} \left[\alpha \left(\frac{d_{ij}}{r_i + r_j} - 1 \right)^2 + (1 - \alpha) \left(\theta_{ij} - \theta_{ij}^{(0)} \right)^2 \right]$$

$$\text{s.t. } d_{ij} \geq r_i + r_j \quad \forall i \neq j$$

$$d_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}$$

$$\theta_{ij} = \arctan \frac{y_j - y_i}{x_j - x_i}, \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

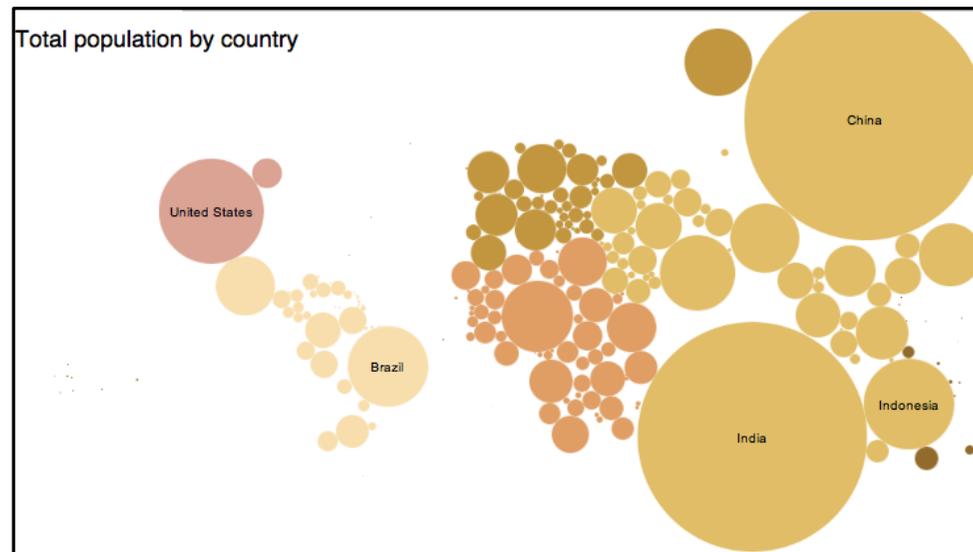
Eingabewinkel



Lösung mit Solver NUOPT

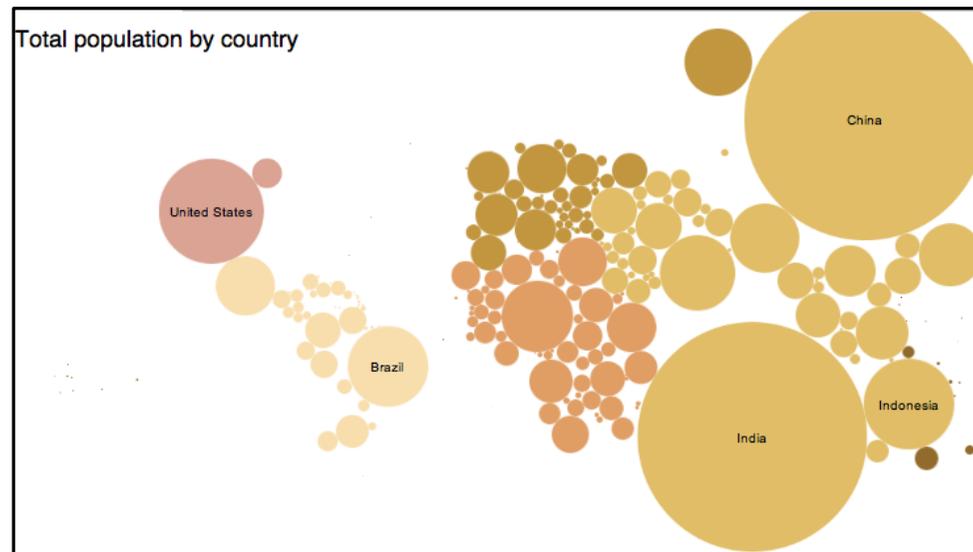
Diskussion:

- Wiedererkennbarkeit der Form
- Vergleichbarkeit
- Lage der Regionen
- korrekte Adjazenzen
- kleiner Flächenfehler
- geringe Komplexität
- Ablesen der Fläche



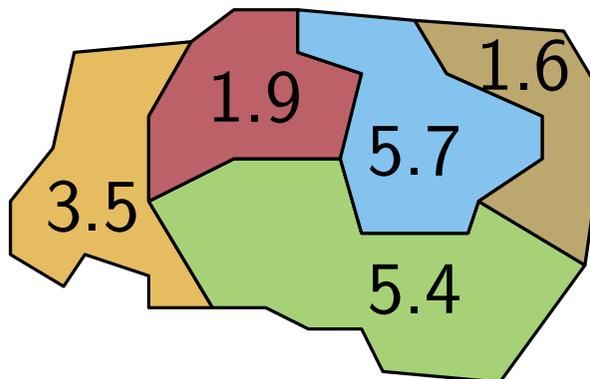
Diskussion:

- Wiedererkennbarkeit der Form 
- Vergleichbarkeit 
- Lage der Regionen  
- korrekte Adjazenzen  
- kleiner Flächenfehler 
- geringe Komplexität 
- Ablesen der Fläche  



Problemstellung

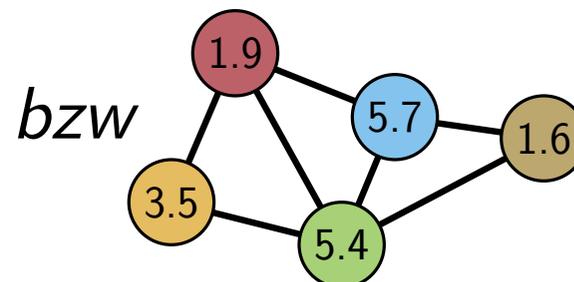
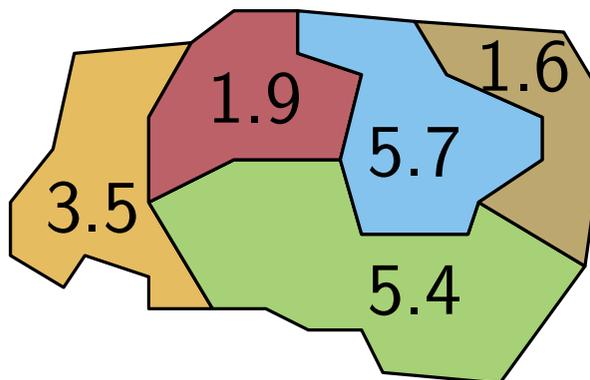
Geg: politische Karte M (Rechtecksunterteilung), positives Gewicht w_i für jede Region R_i



Problemstellung

Geg: politische Karte M (Rechtecksunterteilung), positives Gewicht w_i für jede Region R_i

bzw: knotengewichteter intern triangulierter planar eingeb. Graph G dual zu M , Knoten v_i entspricht Region R_i , Kanten zw. adjazenten Regionen, Knotengewichte w_i

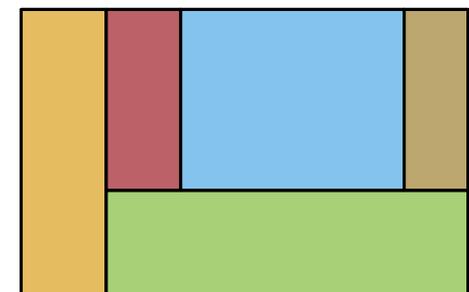
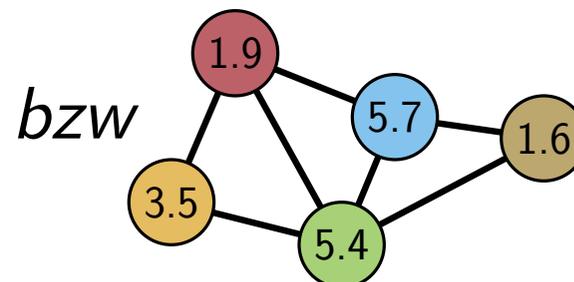
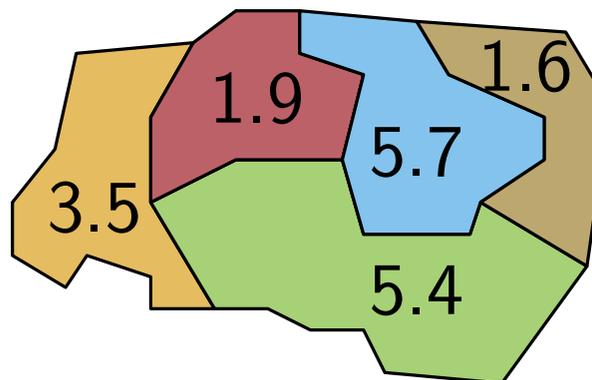


Problemstellung

Geg: politische Karte M (Rechtecksunterteilung), positives Gewicht w_i für jede Region R_i

bzw: knotengewichteter intern triangulierter planar eingeb. Graph G dual zu M , Knoten v_i entspricht Region R_i , Kanten zw. adjazenten Regionen, Knotengewichte w_i

Ges: verzerrte Karte M' äquivalent zu M mit $|R_i| = w_i$



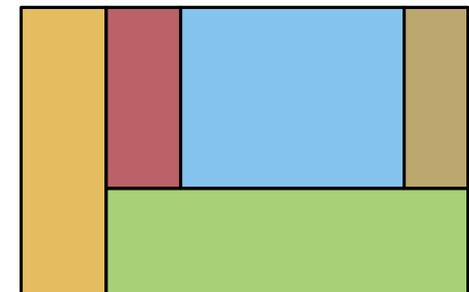
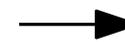
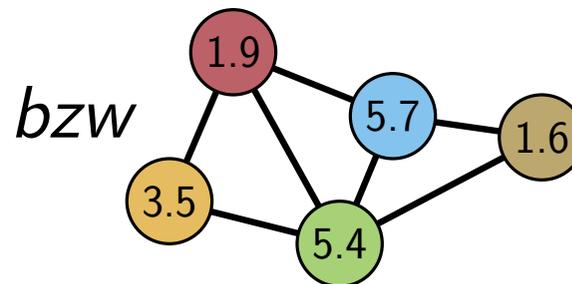
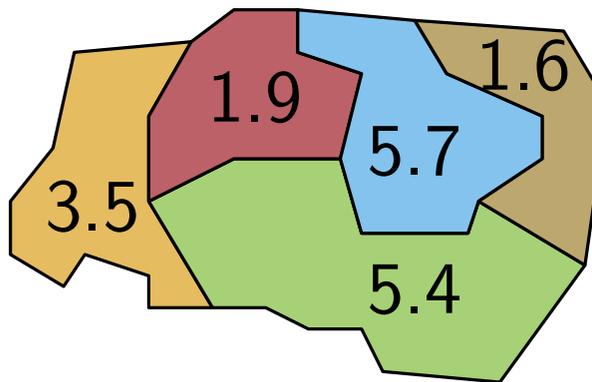
Problemstellung

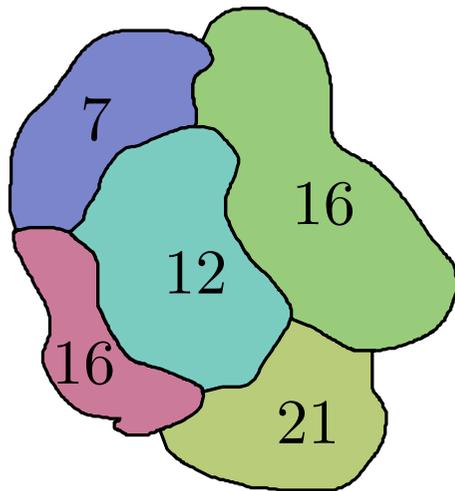
Geg: politische Karte M (Rechtecksunterteilung), positives Gewicht w_i für jede Region R_i

bzw: knotengewichteter intern triangulierter planar eingeb. Graph G dual zu M , Knoten v_i entspricht Region R_i , Kanten zw. adjazenten Regionen, Knotengewichte w_i

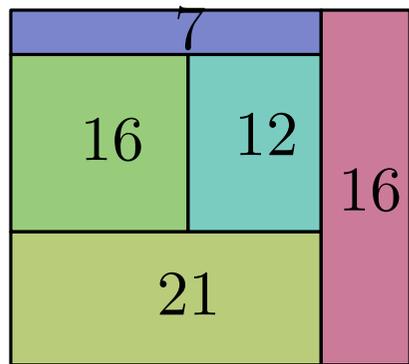
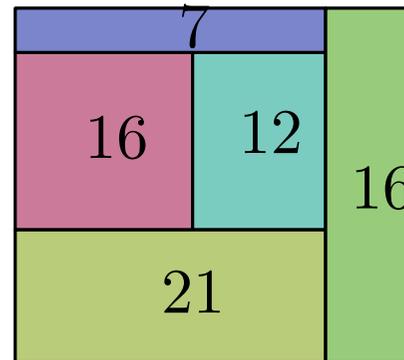
Ges: verzerrte Karte M' äquivalent zu M mit $|R_i| = w_i$

bzw: flächenproportionale Kontaktrepräsentation von G , jeder Knoten v_i als geometrisches Objekt s_i mit Fläche w_i , so dass s_i und s_j sich berühren gdw. $v_i v_j \in E$

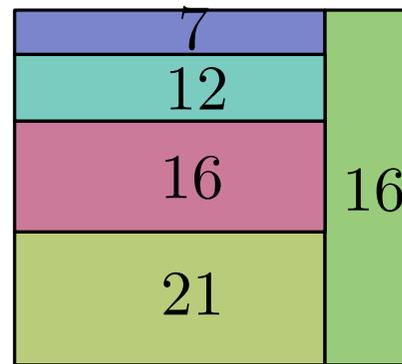




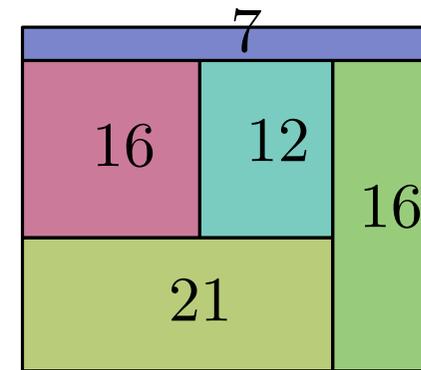
gute Lösung



falsche relative Lage

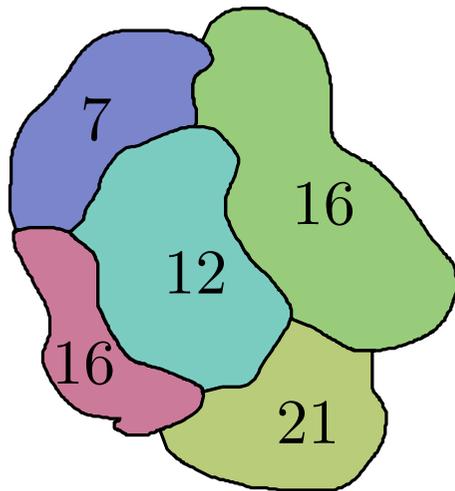


falsche Adjazenzen

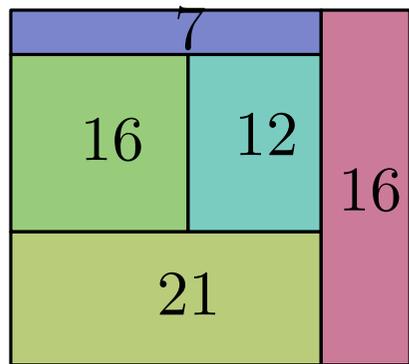
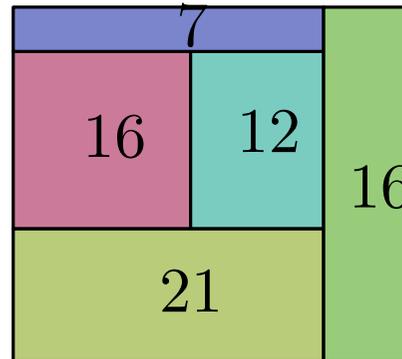


schlechte aspect ratio

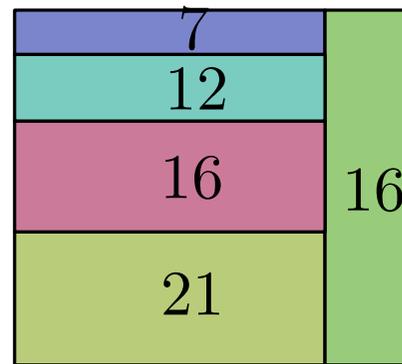
- kleiner Fehler
- korrekte Adjazenzen
- gute aspect ratio
- korrekte relative Positionen



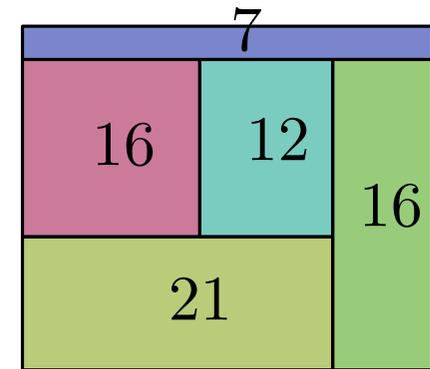
gute Lösung



falsche relative Lage



falsche Adjazenzen

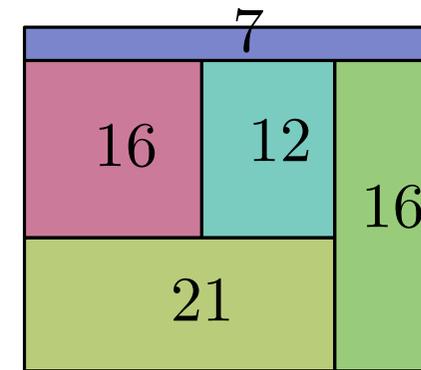
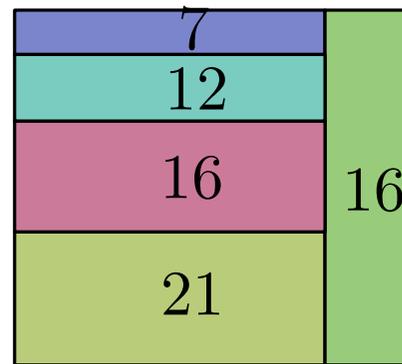
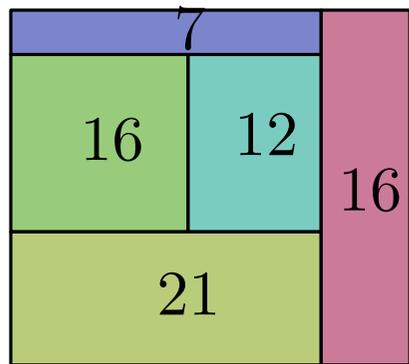
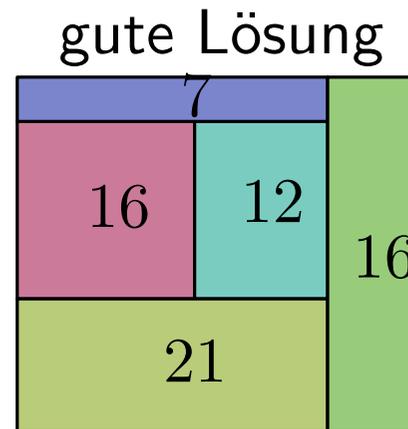
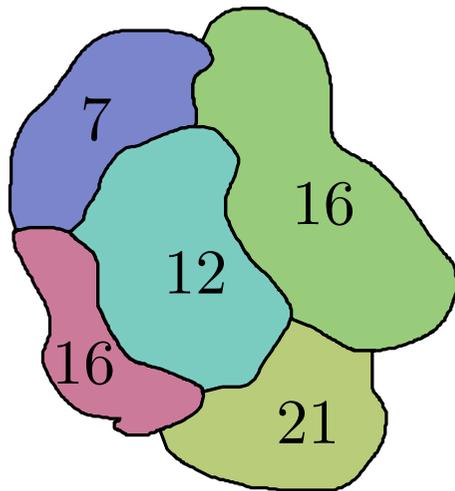


schlechte aspect ratio

- kleiner Fehler
- korrekte Adjazenzen
- gute aspect ratio
- korrekte relative Positionen

Können Flächen **und** Adjazenzen immer erhalten werden?

Qualitätskriterien



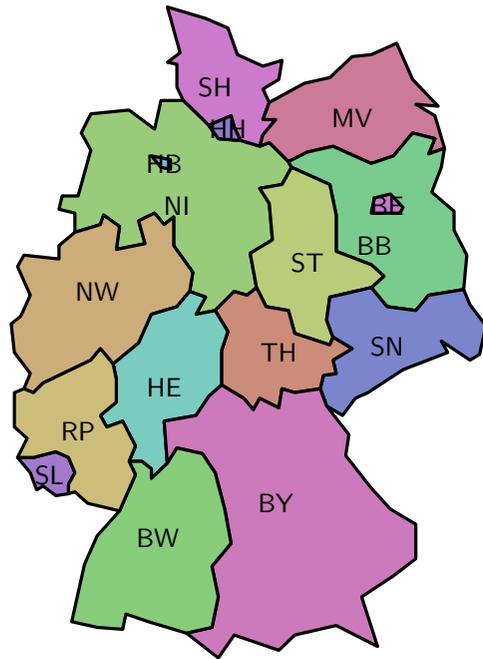
falsche relative Lage

falsche Adjazenzen

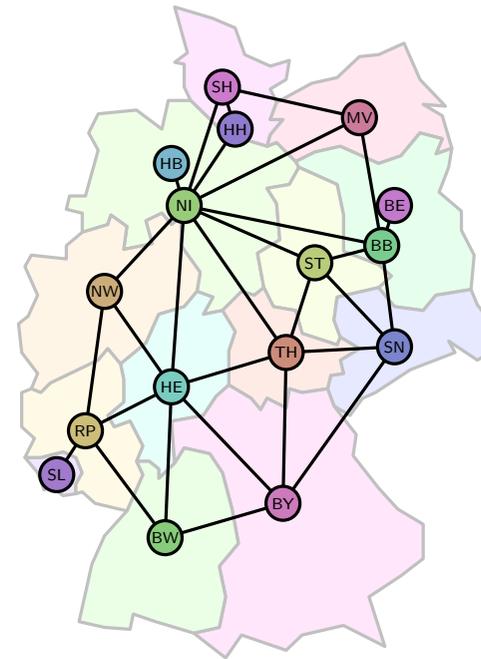
schlechte aspect ratio

- kleiner Fehler
- korrekte Adjazenzen
- gute aspect ratio
- korrekte relative Positionen

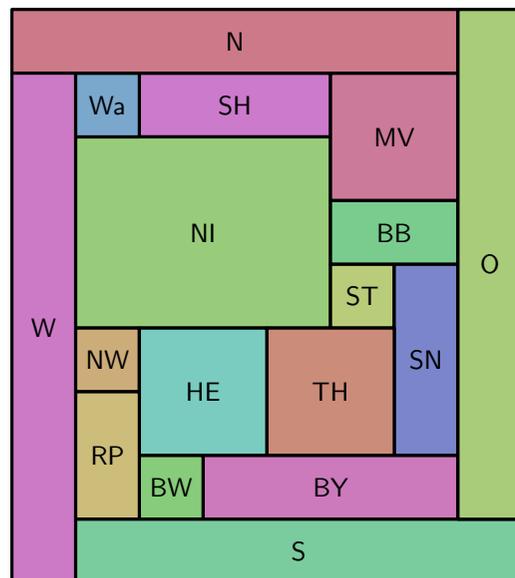
Überblick des Verfahrens [van Kreveld, Speckmann '07]



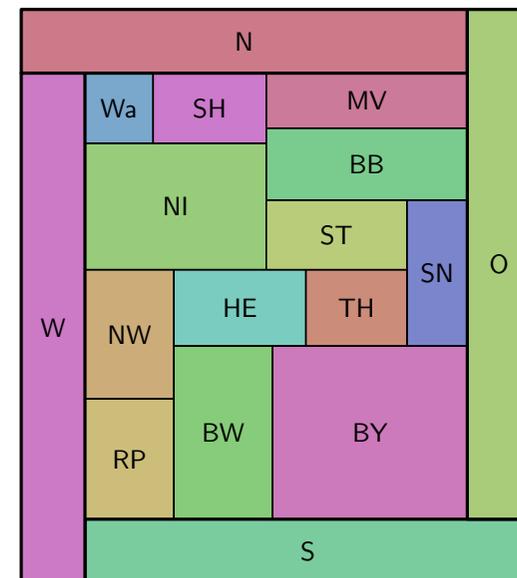
Eingabekarte



Dualgraph



Rechtecksdual



Kartogramm

- Graph heißt intern **trianguliert**, wenn jede (innere) Facette ein Dreieck ist
- ein Kreis C in G heißt **separierend**, wenn sowohl innerhalb als auch außerhalb von C weitere Knoten liegen

- Graph heißt intern **trianguliert**, wenn jede (innere) Facette ein Dreieck ist
- ein Kreis C in G heißt **separierend**, wenn sowohl innerhalb als auch außerhalb von C weitere Knoten liegen

Satz 1: Ein planar eingeb. Graph G hat ein Rechtecksdual R mit vier äußeren Rechtecken gdw.

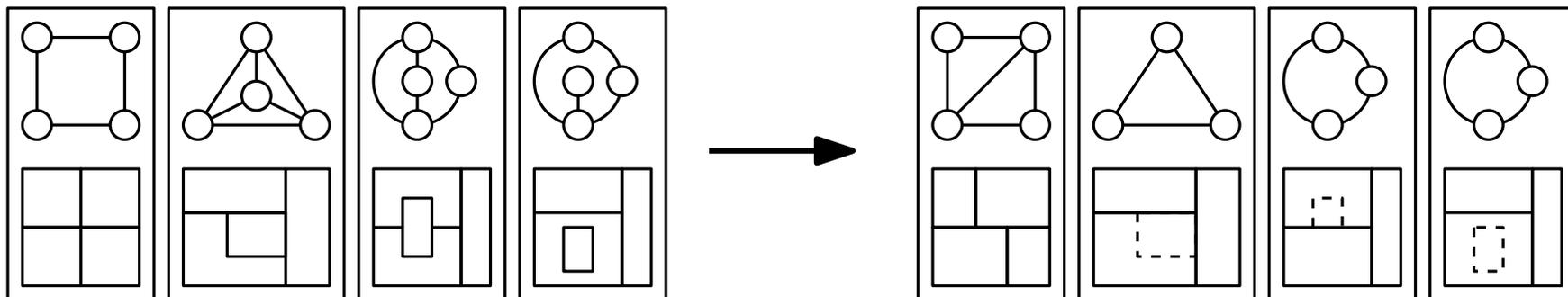
- G intern trianguliert,
- äußere Facette ein Viereck,
- G enthält keine separierenden Dreiecke.

- Graph heißt intern **trianguliert**, wenn jede (innere) Facette ein Dreieck ist
- ein Kreis C in G heißt **separierend**, wenn sowohl innerhalb als auch außerhalb von C weitere Knoten liegen

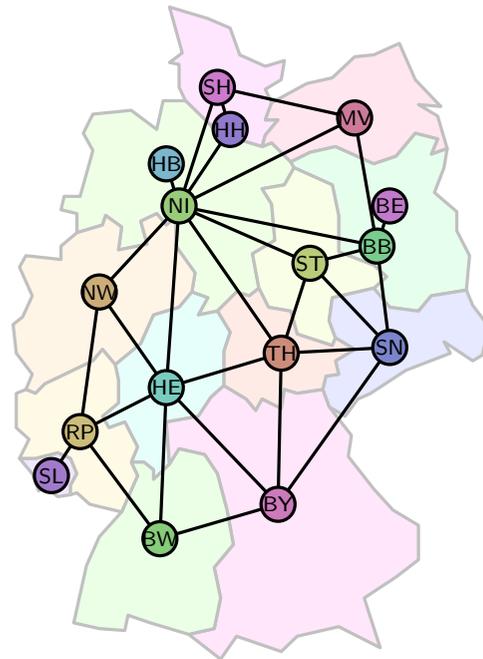
Satz 1: Ein planar eingeb. Graph G hat ein Rechtecksdual R mit vier äußeren Rechtecken gdw.

- G intern trianguliert,
- äußere Facette ein Viereck,
- G enthält keine separierenden Dreiecke.

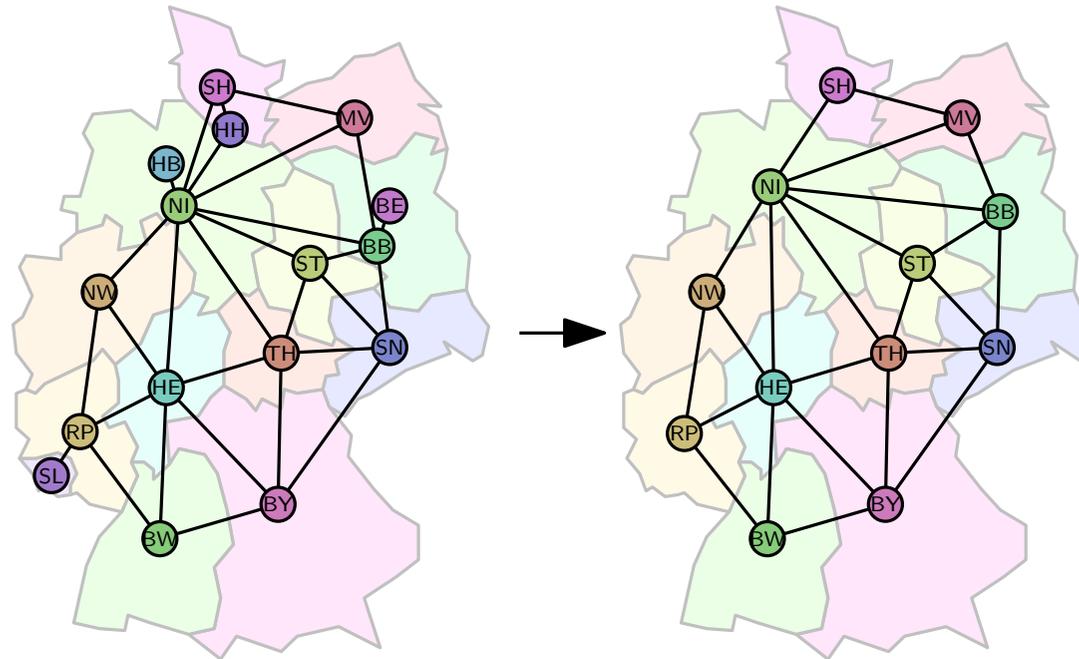
Graph-Modifikationen:



Beispiel Deutschland

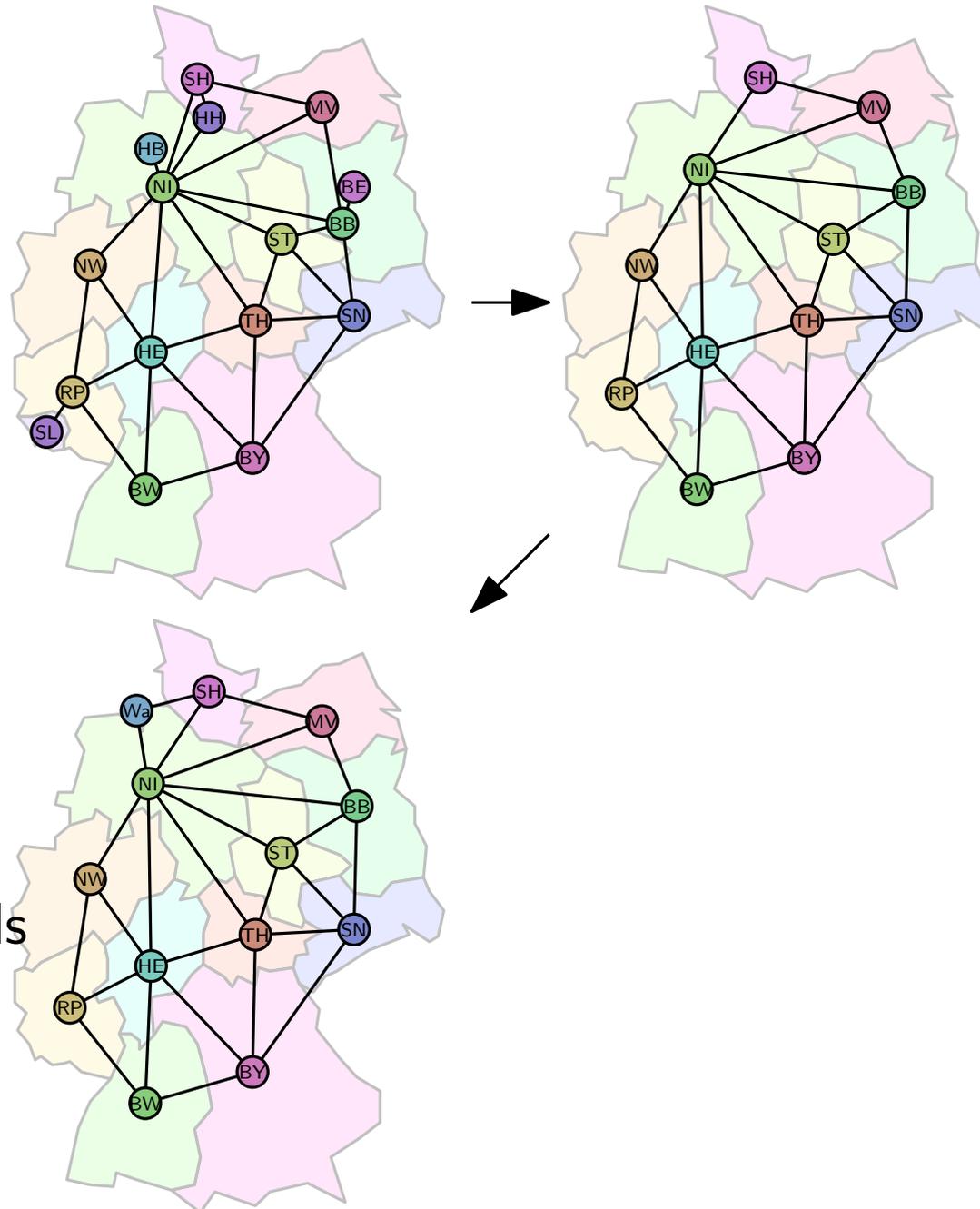


Beispiel Deutschland



entferne Grad-1
und -2 Knoten

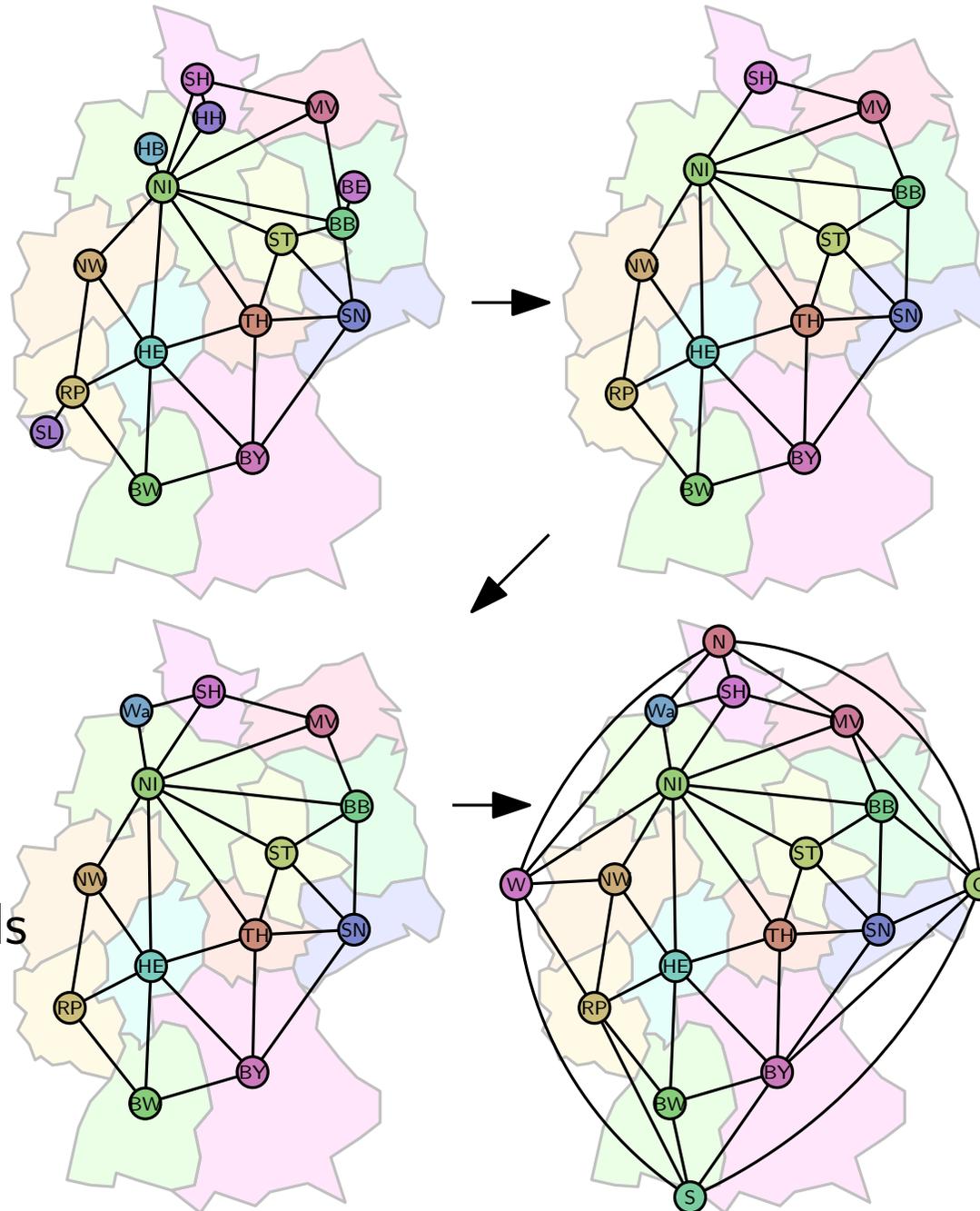
Beispiel Deutschland



entferne Grad-1
und -2 Knoten

füge flexiblen
Meeresknoten als
Puffer hinzu

Beispiel Deutschland



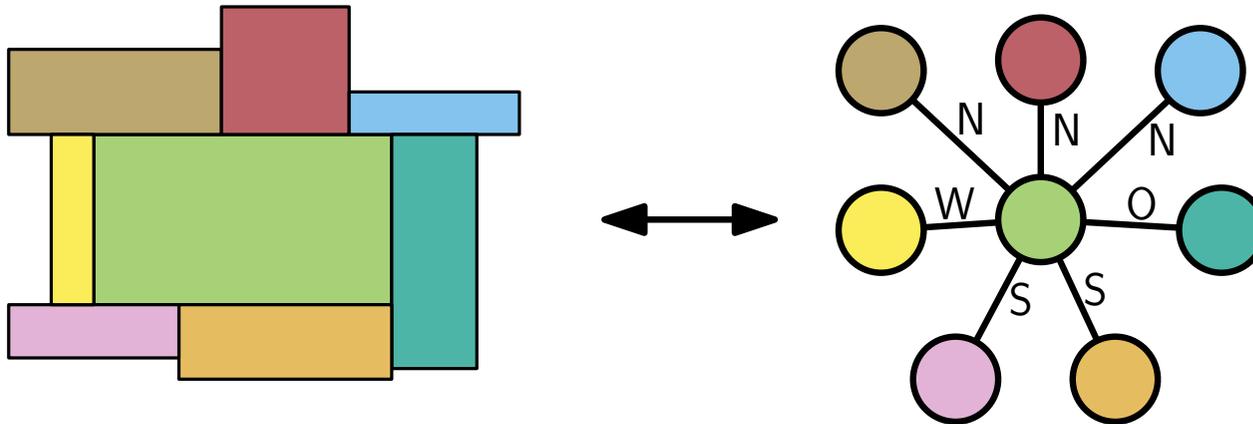
entferne Grad-1
und -2 Knoten

füge flexiblen
Meeresknoten als
Puffer hinzu

erstelle äußeres
Viereck
⇒ Satz 1 gilt

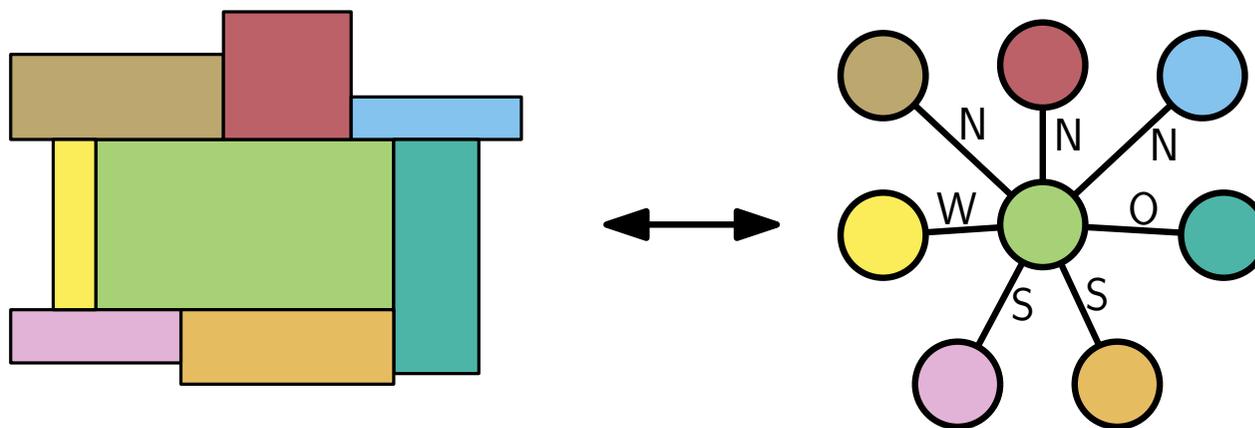
Reguläre Kantenbeschriftung

Die Nachbarn jedes inneren Rechtecks lassen sich in vier nichtleere Gruppen einteilen (N,S,W,O) und bilden in der zyklischen Ordnung vier Blöcke.



Reguläre Kantenbeschriftung

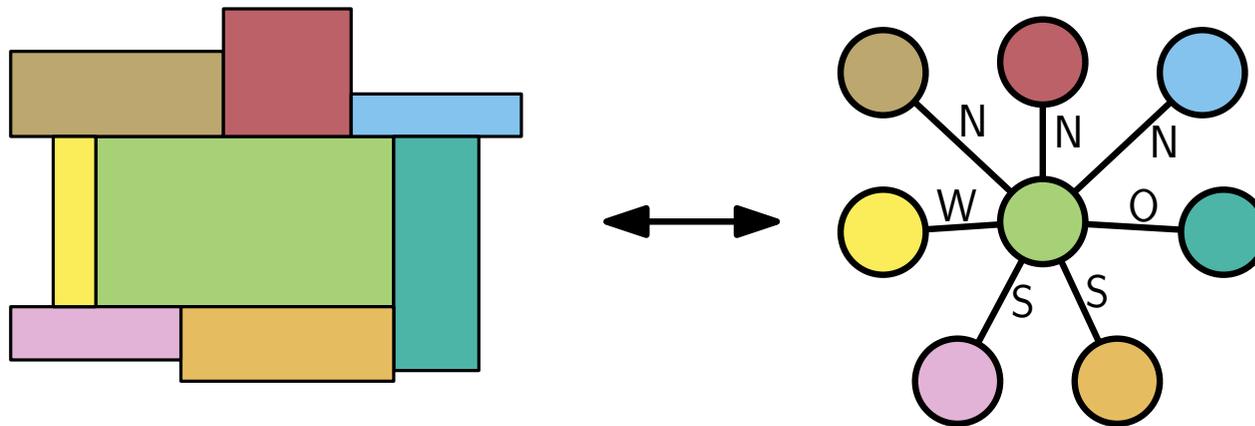
Die Nachbarn jedes inneren Rechtecks lassen sich in vier nichtleere Gruppen einteilen (N,S,W,O) und bilden in der zyklischen Ordnung vier Blöcke.



Eine Beschriftung der Kanten eines Graphen G mit $\{N,S,W,O\}$ heißt **reguläre Kantenbeschriftung**, falls obige Bedingung an jedem inneren Knoten erfüllt ist.

Reguläre Kantenbeschriftung

Die Nachbarn jedes inneren Rechtecks lassen sich in vier nichtleere Gruppen einteilen (N,S,W,O) und bilden in der zyklischen Ordnung vier Blöcke.

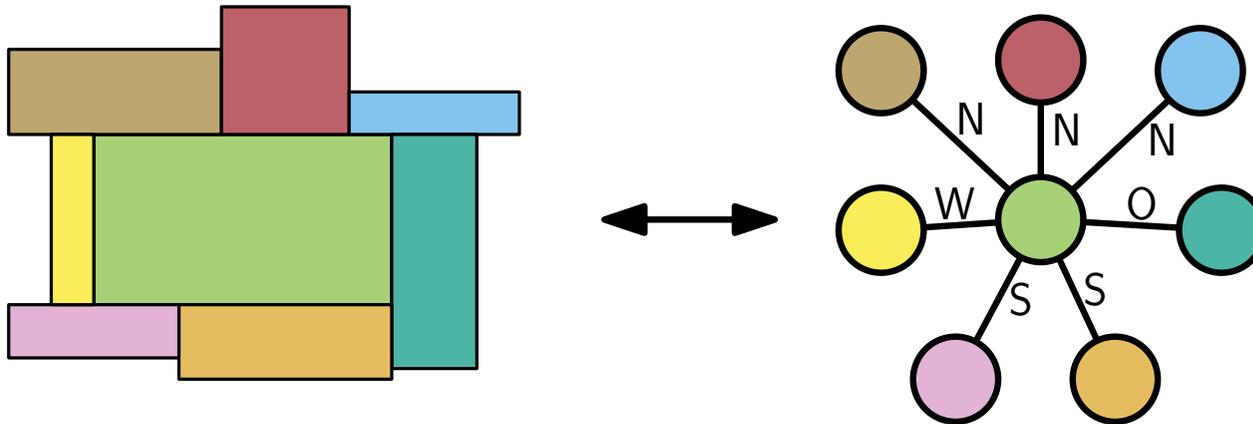


Eine Beschriftung der Kanten eines Graphen G mit $\{N,S,W,O\}$ heißt **reguläre Kantenbeschriftung**, falls obige Bedingung an jedem inneren Knoten erfüllt ist.

ist nicht eindeutig!

Reguläre Kantenbeschriftung

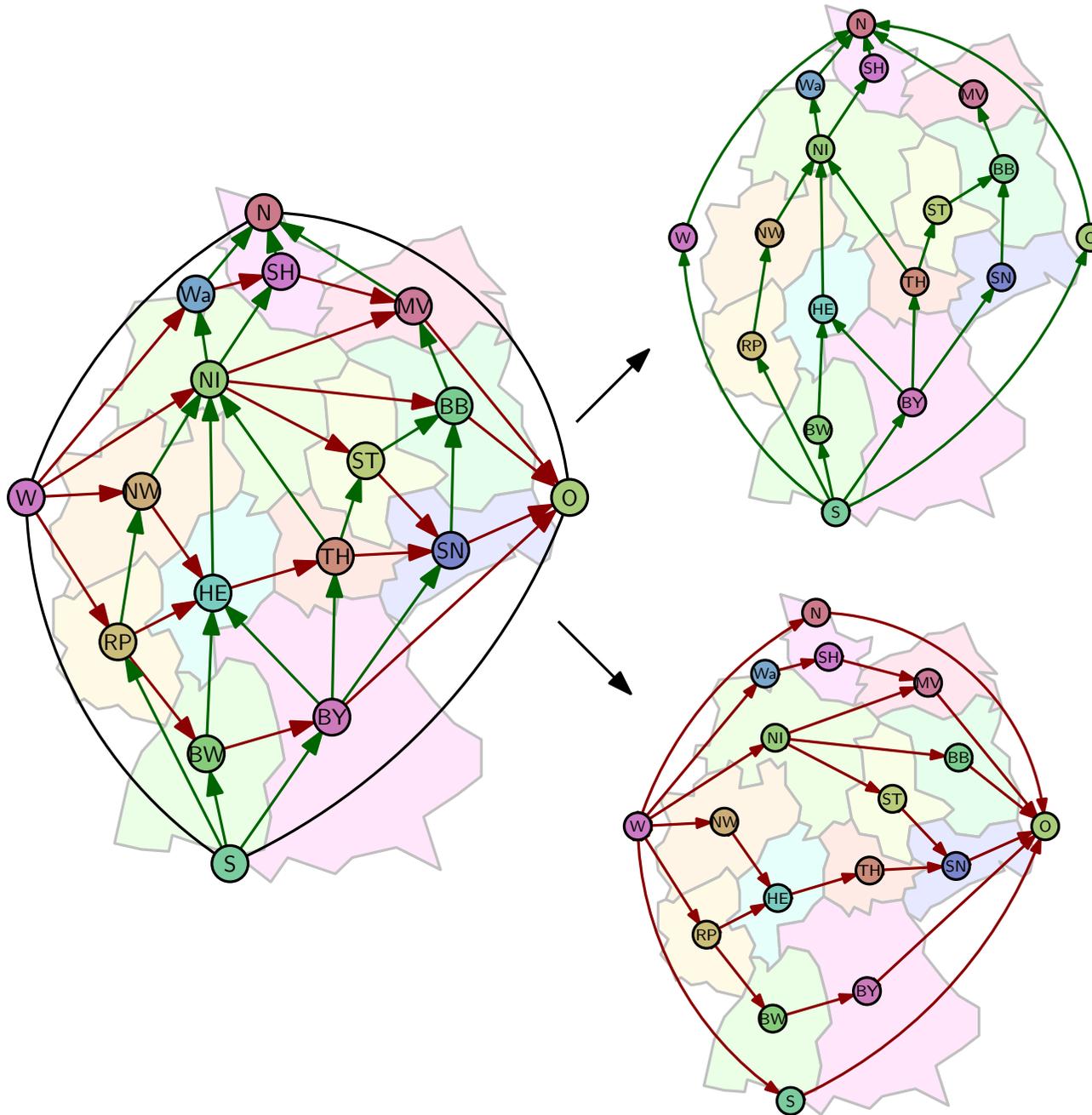
Die Nachbarn jedes inneren Rechtecks lassen sich in vier nichtleere Gruppen einteilen (N,S,W,O) und bilden in der zyklischen Ordnung vier Blöcke.



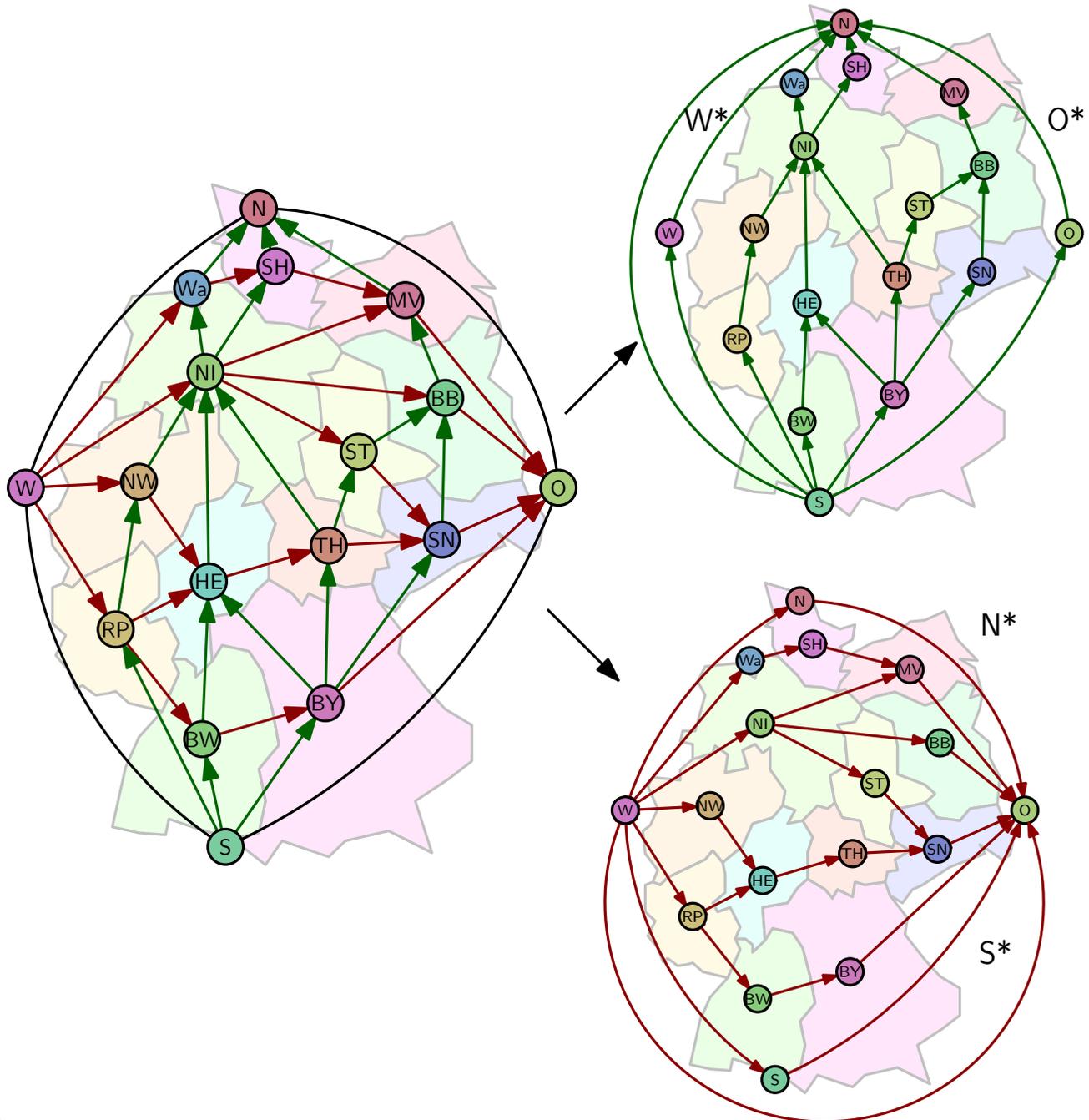
Eine Beschriftung der Kanten eines Graphen G mit $\{N,S,W,O\}$ heißt **reguläre Kantenbeschriftung**, falls obige Bedingung an jedem inneren Knoten erfüllt ist.

- richte Kanten von W nach O und von S nach N
- färbe W–O Kanten rot und S–N Kanten grün

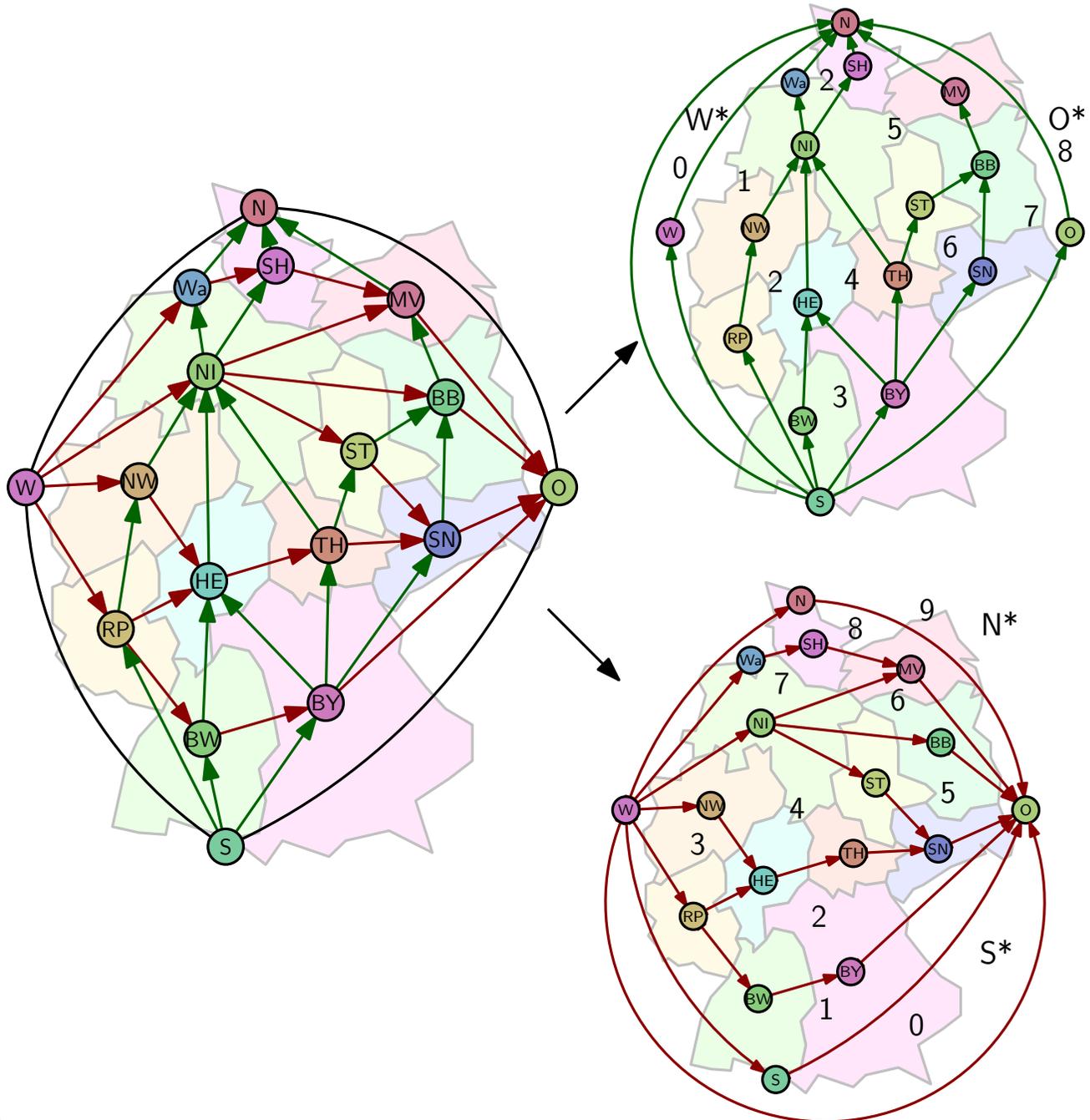
Konstruktion Rechtecksdual [He, Kant '97]



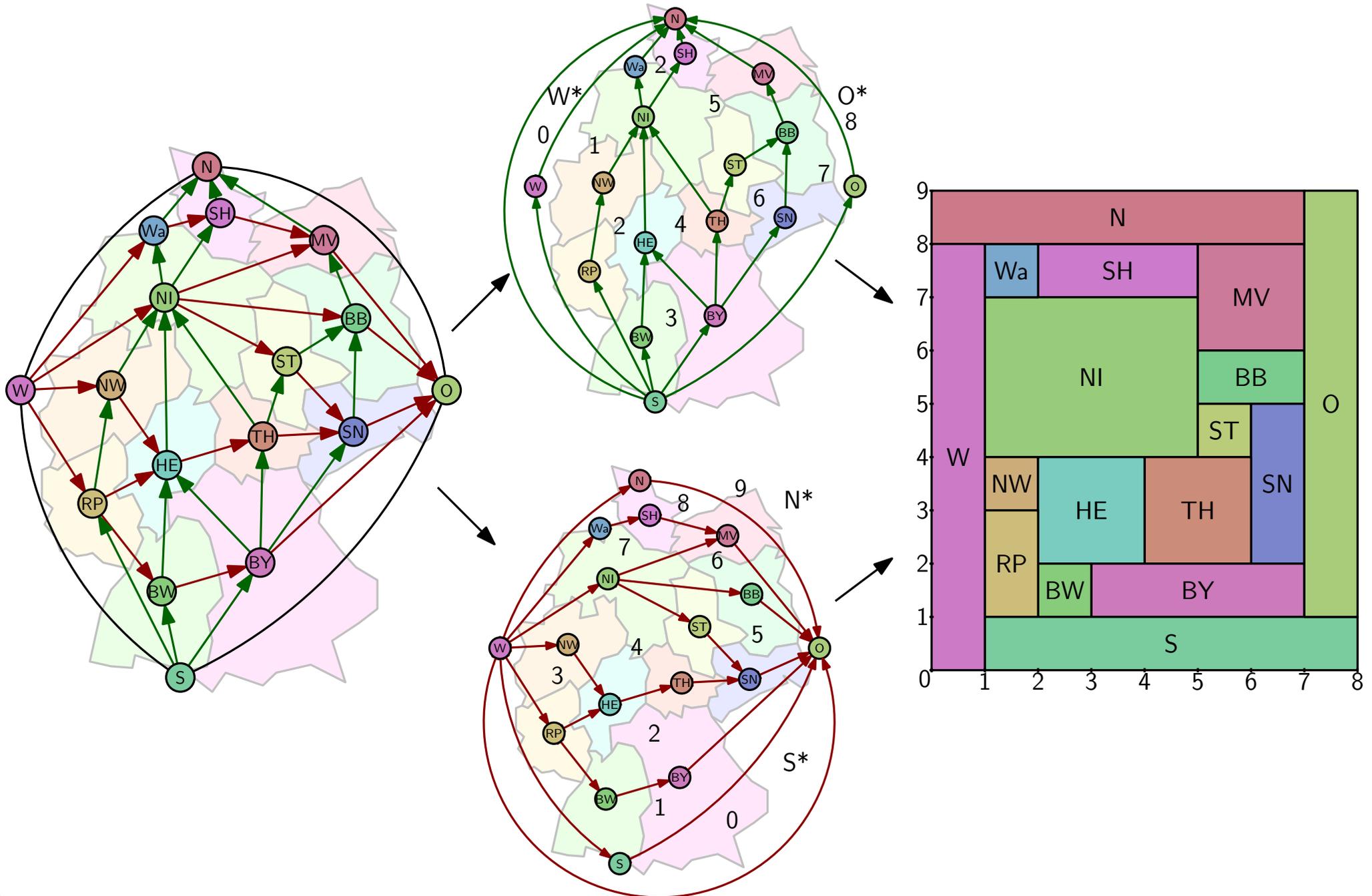
Konstruktion Rechtecksdual [He, Kant '97]



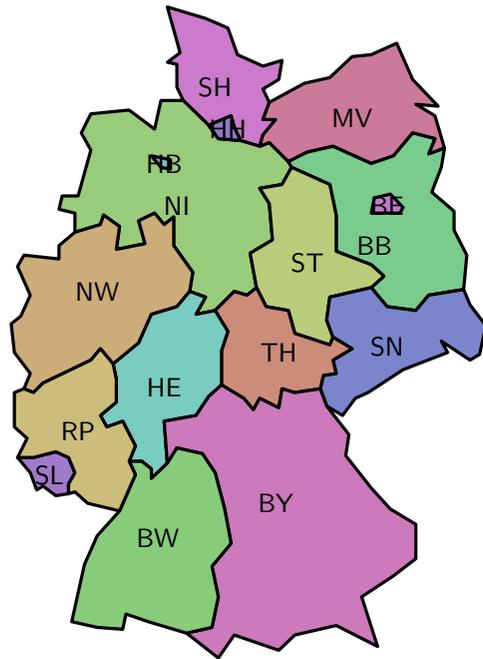
Konstruktion Rechtecksdual [He, Kant '97]



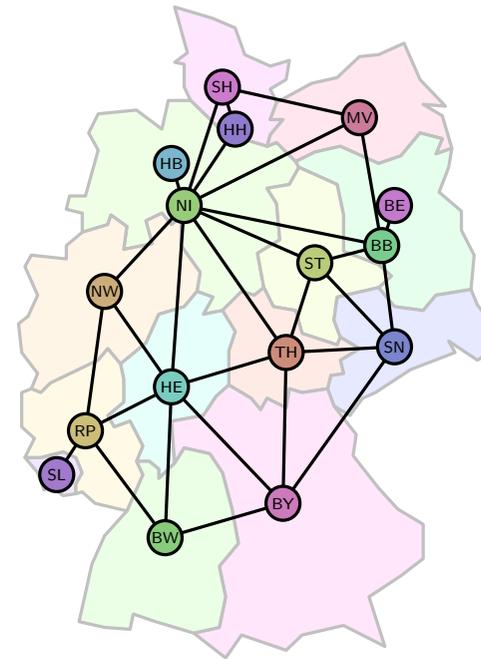
Konstruktion Rechtecksdual [He, Kant '97]



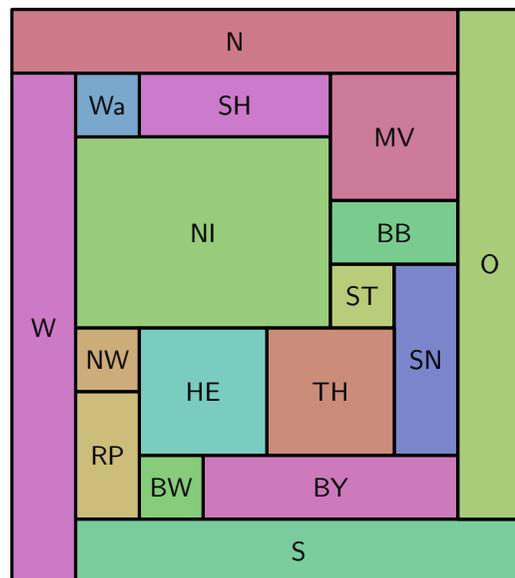
Überblick des Verfahrens [van Kreveld, Speckmann '07]



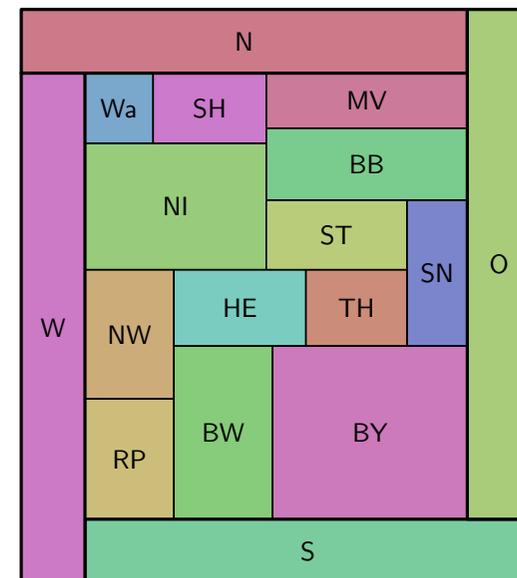
Eingabekarte



Dualgraph



Rechtecksdual

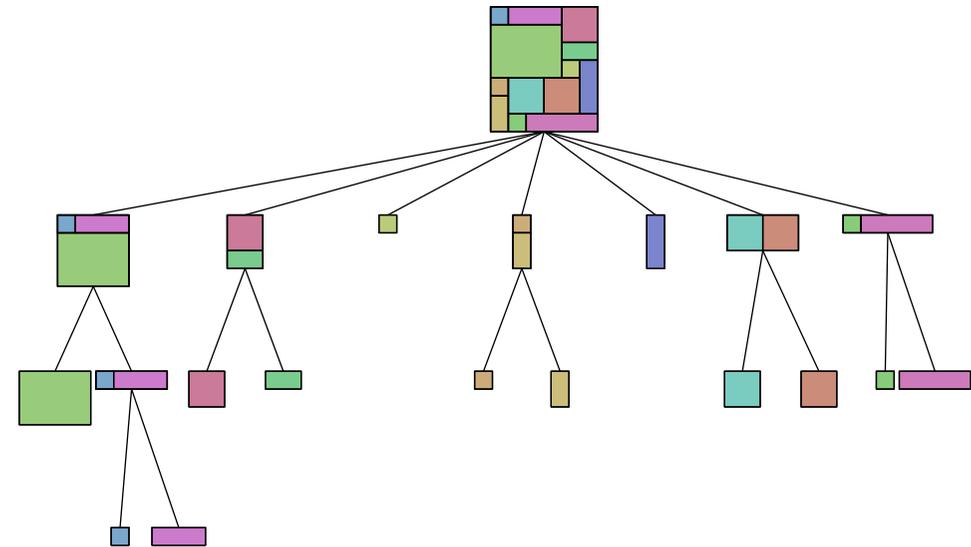
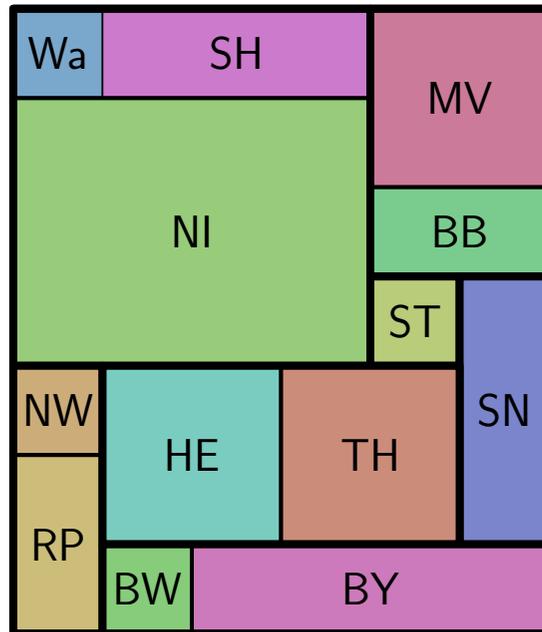


Kartogramm

Problem: Flächenzuweisung

- abstraktes Rechtecksdual benötigt noch korrekte Flächen

betrachte hierarchische Rechteckszerlegung:

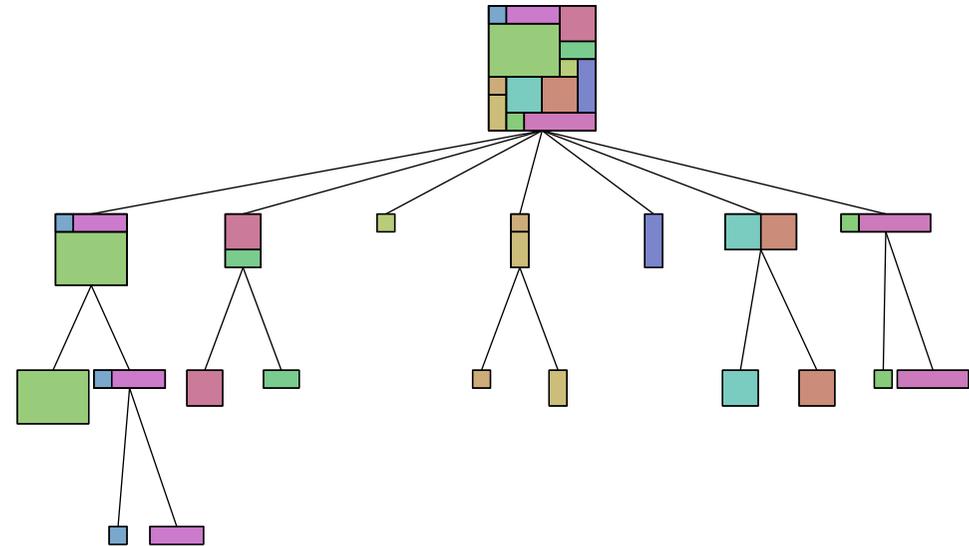
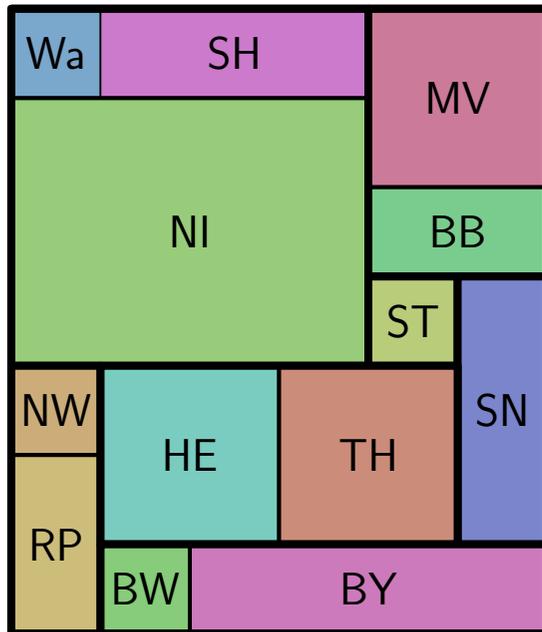


gruppiere Rechtecke, die zusammen größere Rechtecke bilden

Problem: Flächenzuweisung

- abstraktes Rechtecksdual benötigt noch korrekte Flächen

betrachte hierarchische Rechteckszerlegung:



gruppierere Rechtecke, die zusammen größere Rechtecke bilden

- **zerschneidbare** Rechtecke, die in zwei Teile zerfallen
→ leichter Fall (s. Übung)
- komplexere Rechtecke
→ Algorithmus für **L-zerlegbare** Layouts

Aufgabe

Geg.: Rechtecksdual \mathcal{R} bestehend aus

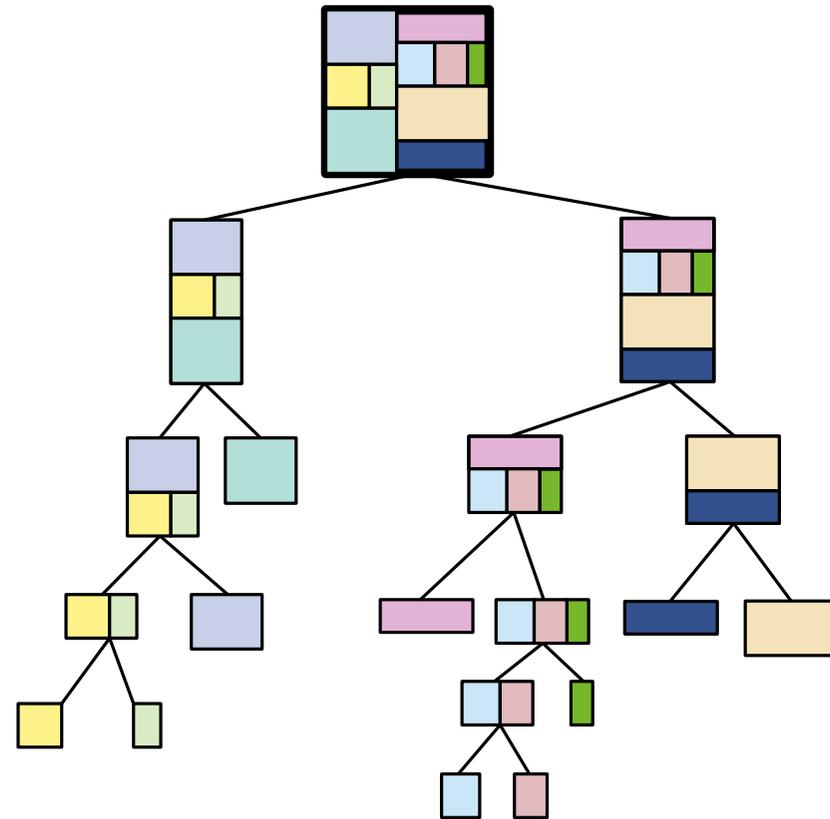
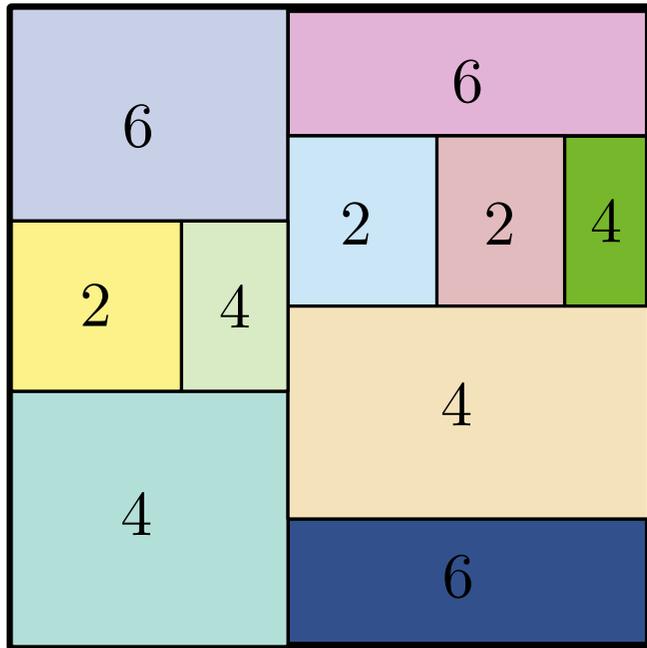
1. Rechtecken R_1, \dots, R_n , und
2. hierarchische Rechteckszerlegung \mathcal{H} .

Ann.: Jeder Knoten in \mathcal{H} hat maximal zwei Nachfolger

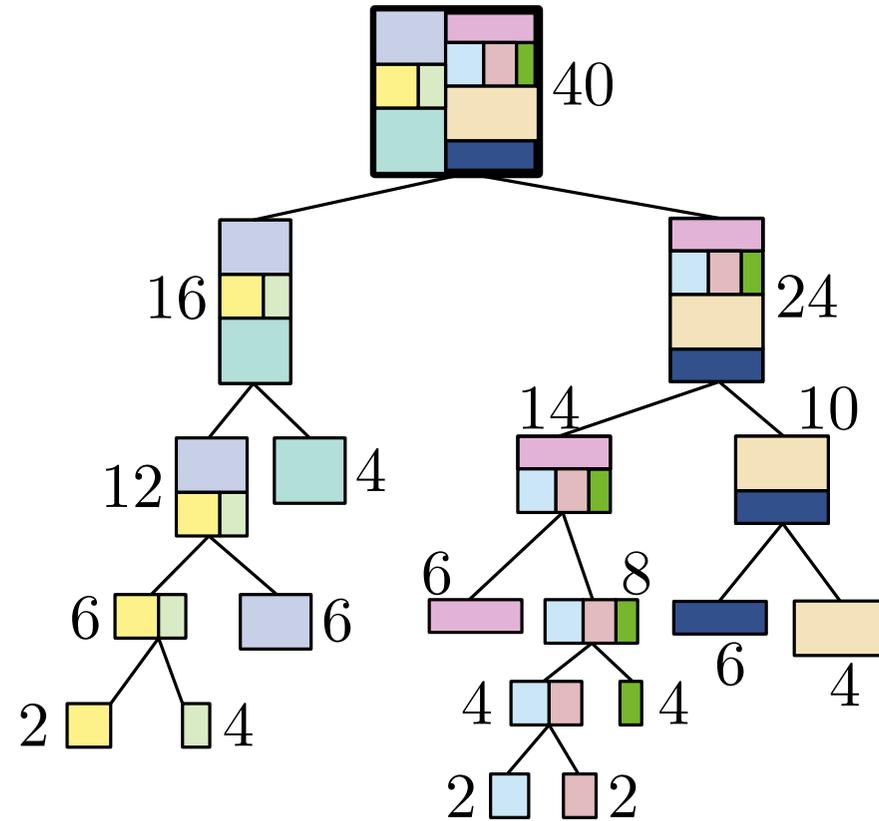
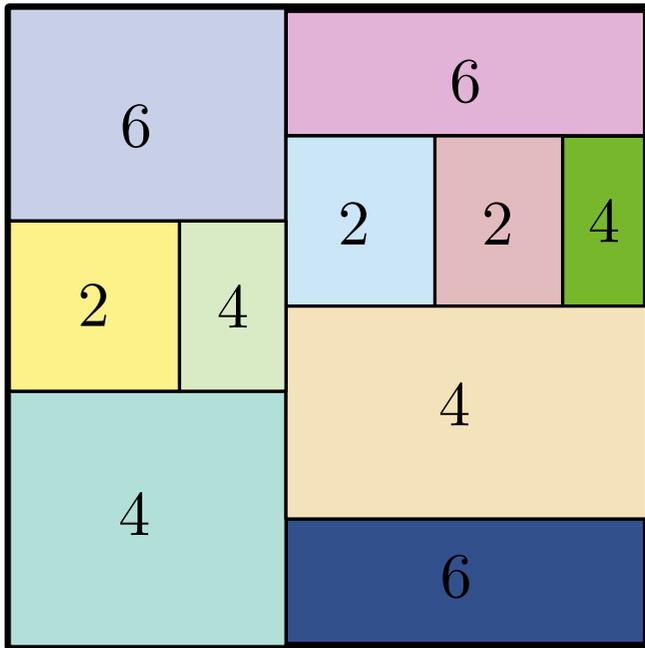
Beschreiben Sie ein Verfahren, das basierend auf \mathcal{R} und \mathcal{H} die Größen von R_1, \dots, R_n so anpasst, dass die entsprechenden Flächen mit vorgegebenen Werten A_1, \dots, A_n übereinstimmen.



Annahme: Rechtecksdual besteht nur aus zerschneibaren Rechtecken.

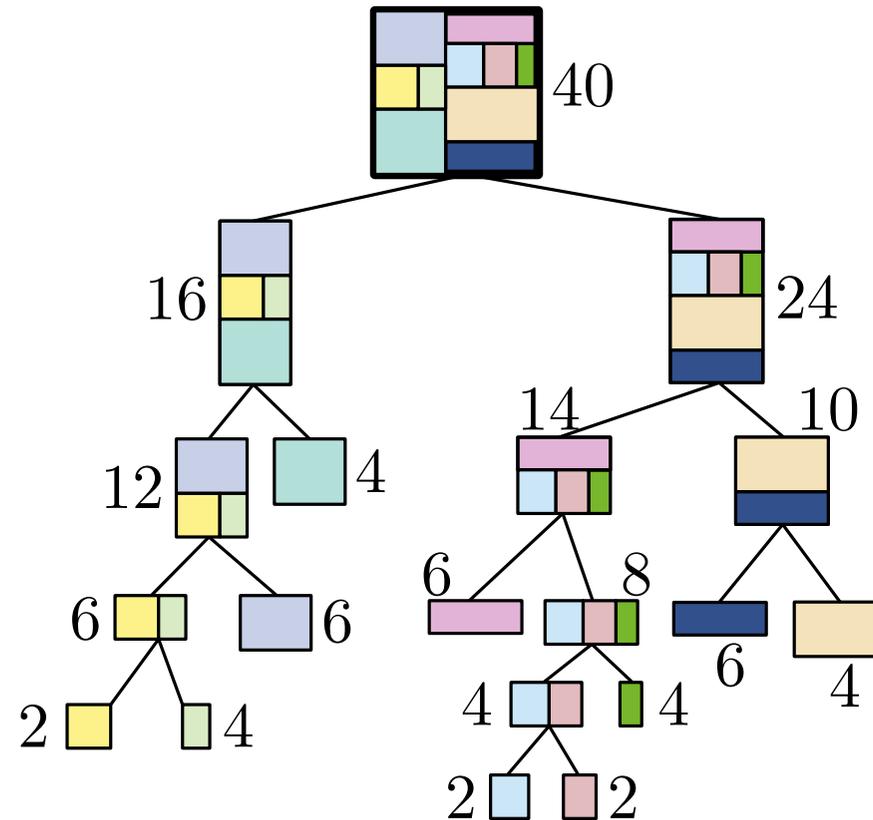
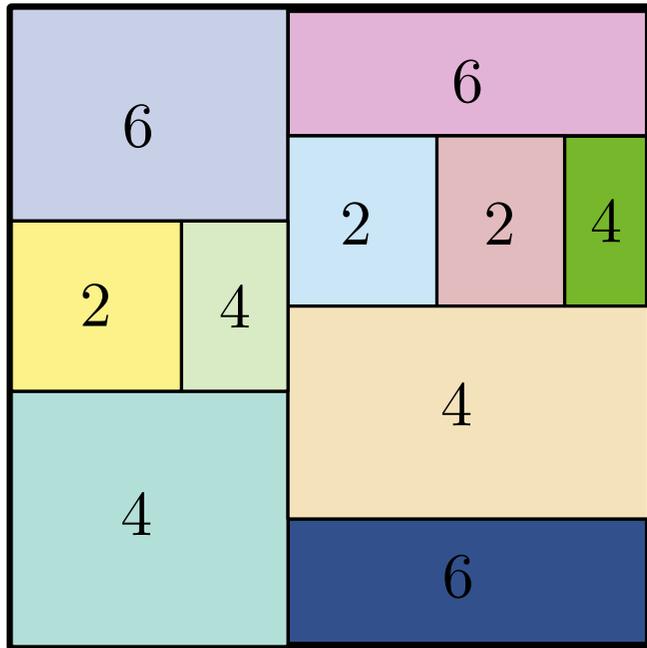


Annahme: Rechtecksdual besteht nur aus zerschneibaren Rechtecken.



Flächenbedarf von jedem *atomaren* Rechteck bekannt
 → Fläche von zusammengesetzten Rechtecken bekannt.

Annahme: Rechtecksdual besteht nur aus zerschneibaren Rechtecken.

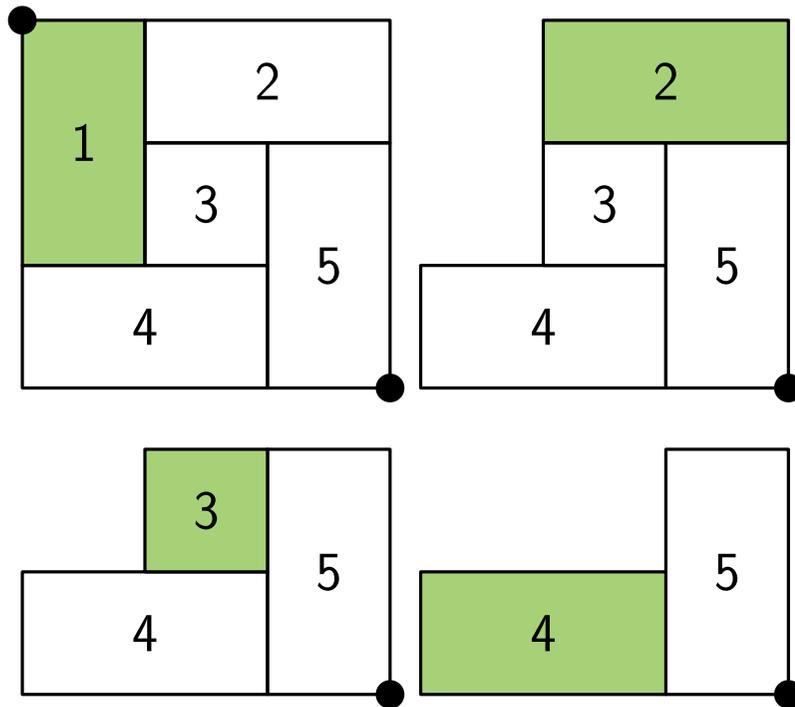


Flächenbedarf von jedem *atomaren* Rechteck bekannt
 → Fläche von zusammengesetzten Rechtecken bekannt.

Top-Down-Ansatz: Steige rekursiv im Baum ab und passe Größe der Rechtecke entsprechend an.

L-zerlegbare Layouts

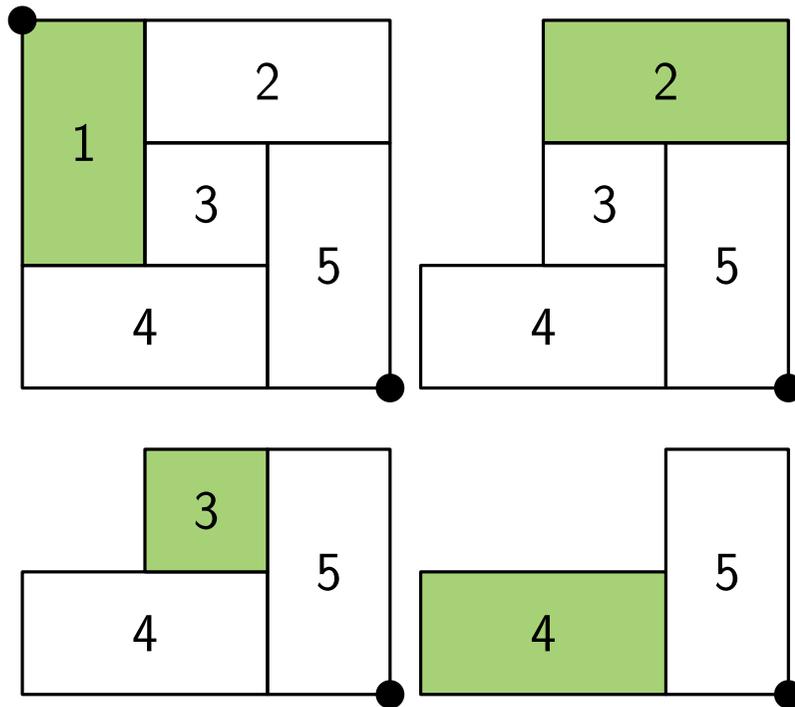
Ein irreduzibles Rechteckslayout \mathcal{R} heißt **L-zerlegbar**, falls es eine Folge (R_1, R_2, \dots, R_n) der Rechtecke von \mathcal{R} gibt, so dass R_1 und R_n in gegenüberliegenden Ecken von \mathcal{R} liegen und jedes Polygon $\cup_{j=i}^n R_j$ L-förmig ist.



L-Zerlegungssequenz

L-zerlegbare Layouts

Ein **irreduzibles** Rechteckslayout \mathcal{R} heißt **L-zerlegbar**, falls es eine Folge (R_1, R_2, \dots, R_n) der Rechtecke von \mathcal{R} gibt, so dass R_1 und R_n in gegenüberliegenden Ecken von \mathcal{R} liegen und jedes Polygon $\cup_{j=i}^n R_j$ L-förmig ist.



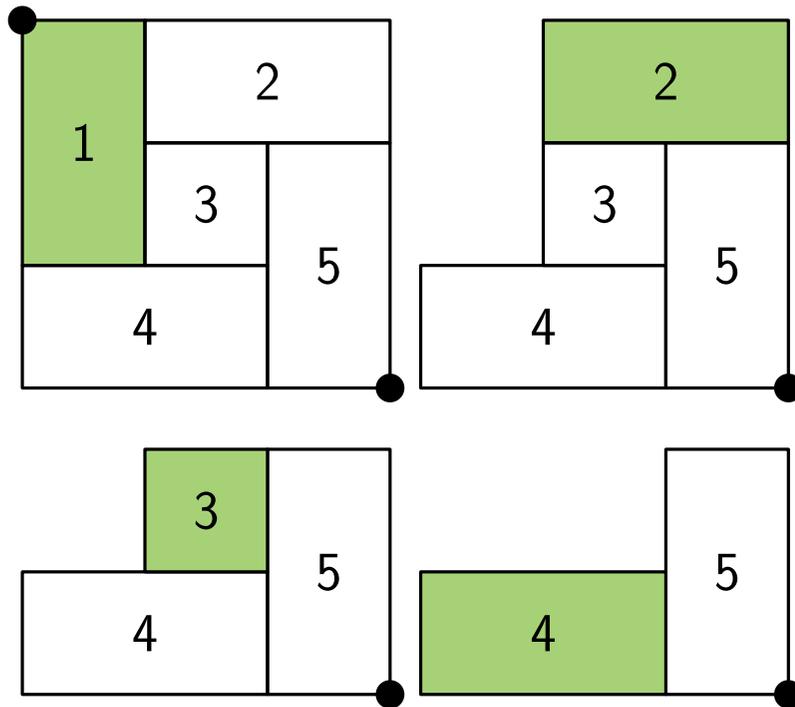
irreduzibel=

Keine Teilmenge $S \subseteq \mathcal{R}$ mit $|S| > 1$ bildet Rechteck.

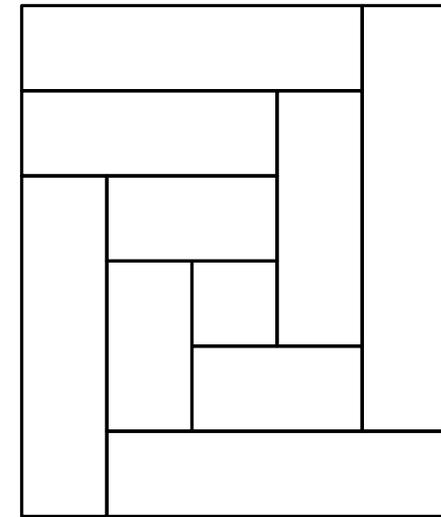
L-Zerlegungssequenz

L-zerlegbare Layouts

Ein irreduzibles Rechteckslayout \mathcal{R} heißt **L-zerlegbar**, falls es eine Folge (R_1, R_2, \dots, R_n) der Rechtecke von \mathcal{R} gibt, so dass R_1 und R_n in gegenüberliegenden Ecken von \mathcal{R} liegen und jedes Polygon $\cup_{j=i}^n R_j$ L-förmig ist.



L-Zerlegungssequenz



nicht L-förmig zerlegbar

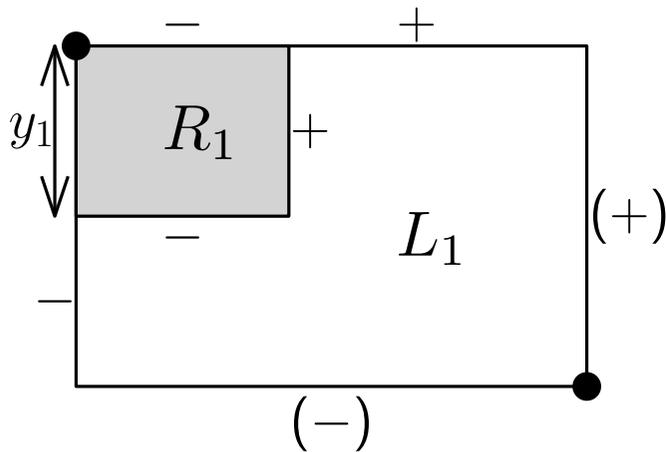
Existenz einer Lösung

Satz 2: Ein L-zerlegbares Layout hat entweder genau eine oder keine Lösung als Kartogramm ohne Flächenfehler und mit korrekten Adjazenzen.

Existenz einer Lösung

Satz 2: Ein L-zerlegbares Layout hat entweder genau eine oder keine Lösung als Kartogramm ohne Flächenfehler und mit korrekten Adjazenzen.

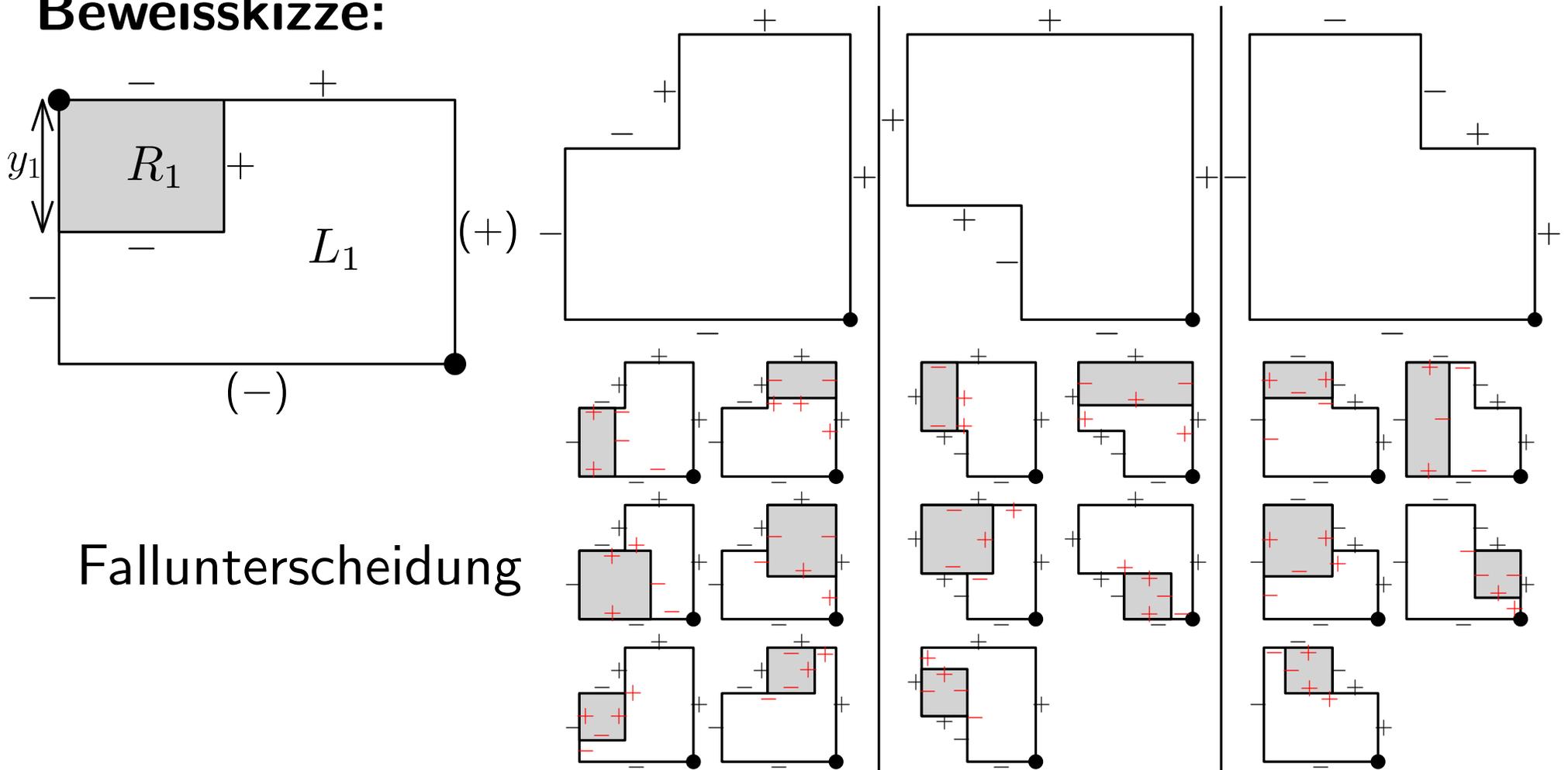
Beweisskizze:



Existenz einer Lösung

Satz 2: Ein L-zerlegbares Layout hat entweder genau eine oder keine Lösung als Kartogramm ohne Flächenfehler und mit korrekten Adjazenzen.

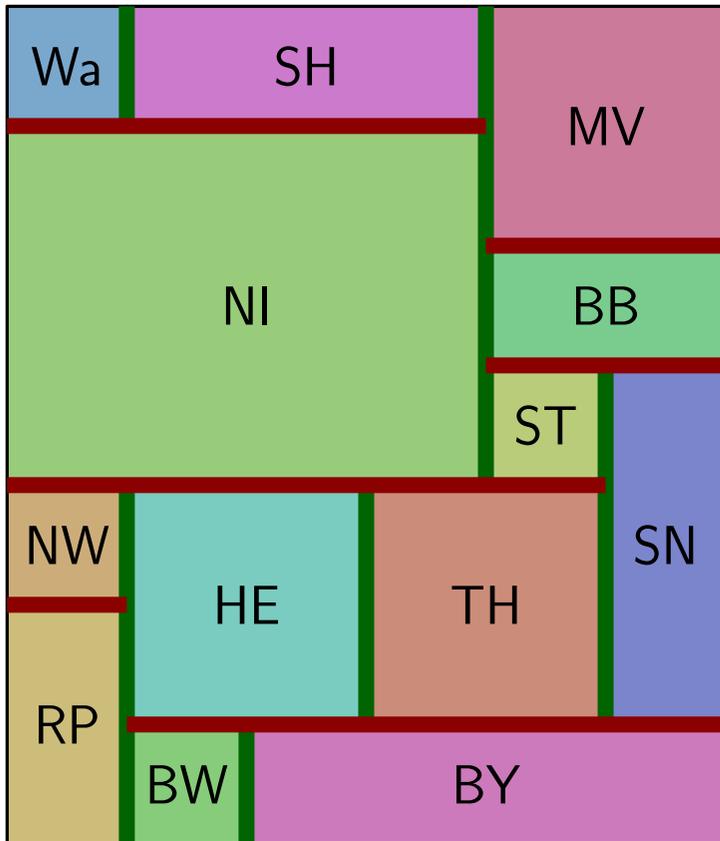
Beweisskizze:



Fallunterscheidung

Heuristik für Rechteckskartogramme

Nicht jedes Rechtecksdual ist L-zerlegbar, nicht jede Flächenzuweisung für L-zerlegbare Layouts hat eine Lösung.



SegmentMoving

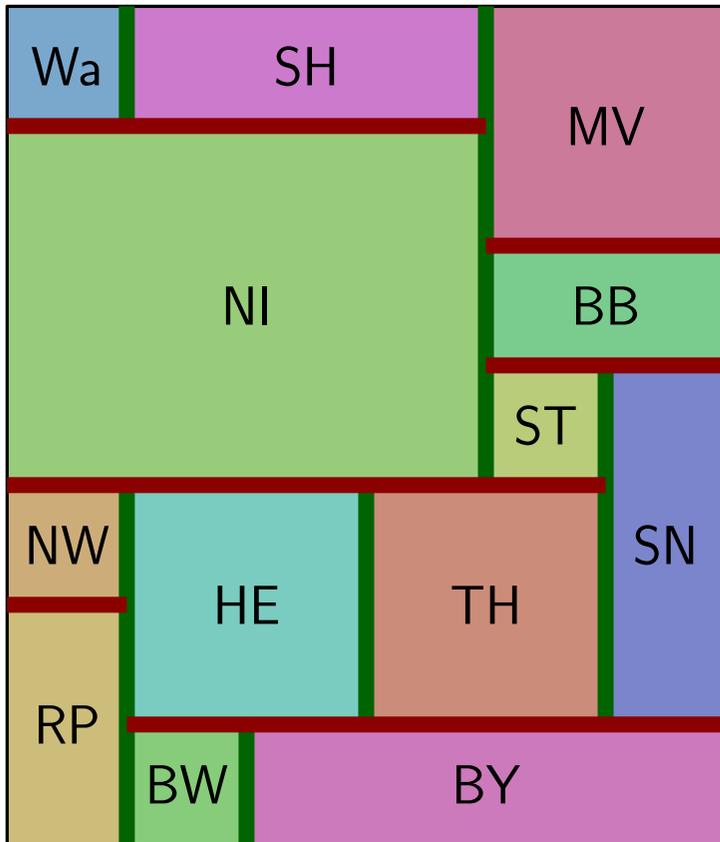
while lokale Verbesserung möglich **do**

$s \leftarrow$ bel. maximales Segment
bewege s in bessere Richtung
ggf. berücksichtige Adjazenzen
ggf. berücksichtige aspect ratio

- liefert immer ein Layout
- findet lokale Optima
- Wasser benötigt keine Zielfläche
- keinerlei Garantie oder Konvergenz bewiesen

Heuristik für Rechteckskartogramme

Nicht jedes Rechtecksdual ist L-zerlegbar, nicht jede Flächenzuweisung für L-zerlegbare Layouts hat eine Lösung.



Demo!

SegmentMoving

while lokale Verbesserung möglich **do**

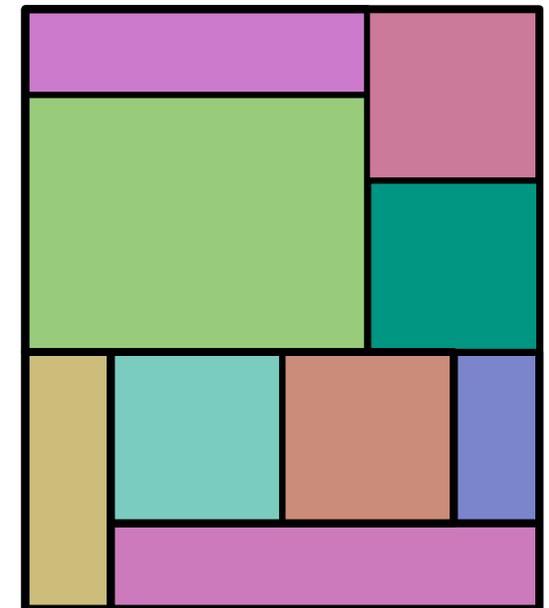
$s \leftarrow$ bel. maximales Segment
bewege s in bessere Richtung
ggf. berücksichtige Adjazenzen
ggf. berücksichtige aspect ratio

- liefert immer ein Layout
- findet lokale Optima
- Wasser benötigt keine Zielfläche
- keinerlei Garantie oder Konvergenz bewiesen

Aufgabe: Weitere Heuristik

Gegeben:

- Ein Rechtecksdual \mathcal{R} bestehend aus den Rechtecken R_1, \dots, R_n .
- Zielbreiten $w_1, \dots, w_n \in \mathbb{R}^+$
- Zielhöhen $h_1, \dots, h_n \in \mathbb{R}^+$



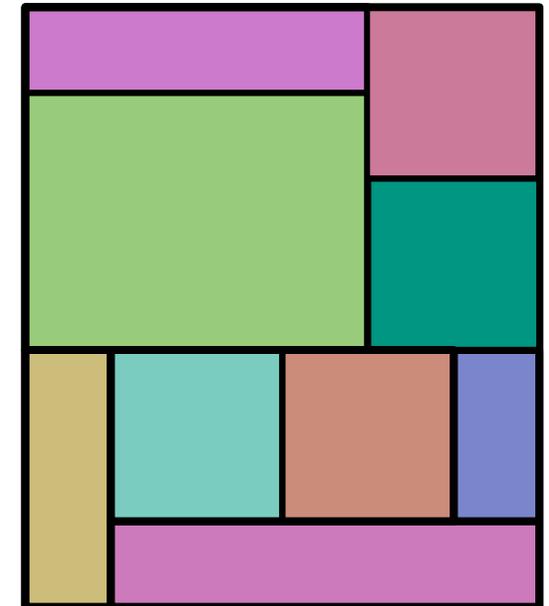
Aufgabe: Weitere Heuristik

Gegeben:

- Ein Rechtecksdual \mathcal{R} bestehend aus den Rechtecken R_1, \dots, R_n .
- Zielbreiten $w_1, \dots, w_n \in \mathbb{R}^+$
- Zielhöhen $h_1, \dots, h_n \in \mathbb{R}^+$

Gesucht: Für jedes Rechteck R_i Breite w'_i und Höhe h'_i sodass

- die Adjazenzen aus \mathcal{R} erhalten bleiben, und
- $w'_i \geq w_i$ und $h'_i \geq h_i$ für alle $1 \leq i \leq n$, und
- $\sum_{i=1}^n w'_i + \sum_{i=1}^n h'_i$ minimiert wird.



Allgemeines Flussmodell

Gegeben: Netzwerk $N = (D = (V, A), b, l, u)$

Allgemeines Flussmodell

Gegeben: Netzwerk $N = (D = (V, A), b, l, u)$

↳ gerichteter Graph $D = (V, A)$

Allgemeines Flussmodell

Gegeben: Netzwerk $N = (D = (V, A), b, l, u)$

↳ gerichteter Graph $D = (V, A)$

Knotenbewertung $b: V \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\sum_{v \in V} b(i) = 0$

$b(v) > 0$: Quelle $b(v) < 0$: Senke

Allgemeines Flussmodell

Gegeben: Netzwerk $N = (D = (V, A), b, l, u)$

↳ gerichteter Graph $D = (V, A)$

Knotenbewertung $b: V \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\sum_{v \in V} b(v) = 0$

untere Kapazitäten $l: A \rightarrow \mathbb{R}_0^+$

obere Kapazitäten $u: A \rightarrow \mathbb{R}_0^+$

$b(v) > 0$: Quelle $b(v) < 0$: Senke

Allgemeines Flussmodell

Gegeben: Netzwerk $N = (D = (V, A), b, l, u)$

↳ gerichteter Graph $D = (V, A)$

Knotenbewertung $b: V \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\sum_{v \in V} b(v) = 0$

untere Kapazitäten $l: A \rightarrow \mathbb{R}_0^+$

obere Kapazitäten $u: A \rightarrow \mathbb{R}_0^+$

$b(v) > 0$: Quelle $b(v) < 0$: Senke

Allgemeines Flussmodell

Gegeben: Netzwerk $N = (D = (V, A), b, l, u)$

↳ gerichteter Graph $D = (V, A)$

Knotenbewertung $b: V \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\sum_{v \in V} b(v) = 0$

untere Kapazitäten $l: A \rightarrow \mathbb{R}_0^+$

obere Kapazitäten $u: A \rightarrow \mathbb{R}_0^+$

$b(v) > 0$: Quelle $b(v) < 0$: Senke

Abbildung $X: A \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ heißt *Fluss*, wenn

Allgemeines Flussmodell

Gegeben: Netzwerk $N = (D = (V, A), b, l, u)$

↳ gerichteter Graph $D = (V, A)$

Knotenbewertung $b: V \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\sum_{v \in V} b(i) = 0$

untere Kapazitäten $l: A \rightarrow \mathbb{R}_0^+$

obere Kapazitäten $u: A \rightarrow \mathbb{R}_0^+$

$b(v) > 0$: Quelle $b(v) < 0$: Senke

Abbildung $X: A \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ heißt *Fluss*, wenn

1. Kapazitätsbedingung:

$$\forall (i, j) \in A : l(i, j) \leq X(i, j) \leq u(i, j)$$

2. Flusserhaltungsbedingung:

$$\forall i \in V \setminus \{s, t\} : \sum_{j: (i, j) \in A} X(i, j) - \sum_{j: (j, i) \in A} X(j, i) = b(i)$$

Allgemeines Flussmodell

Gegeben: Netzwerk $N = (D = (V, A), b, l, u)$

↳ gerichteter Graph $D = (V, A)$

Knotenbewertung $b: V \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\sum_{v \in V} b(v) = 0$

untere Kapazitäten $l: A \rightarrow \mathbb{R}_0^+$

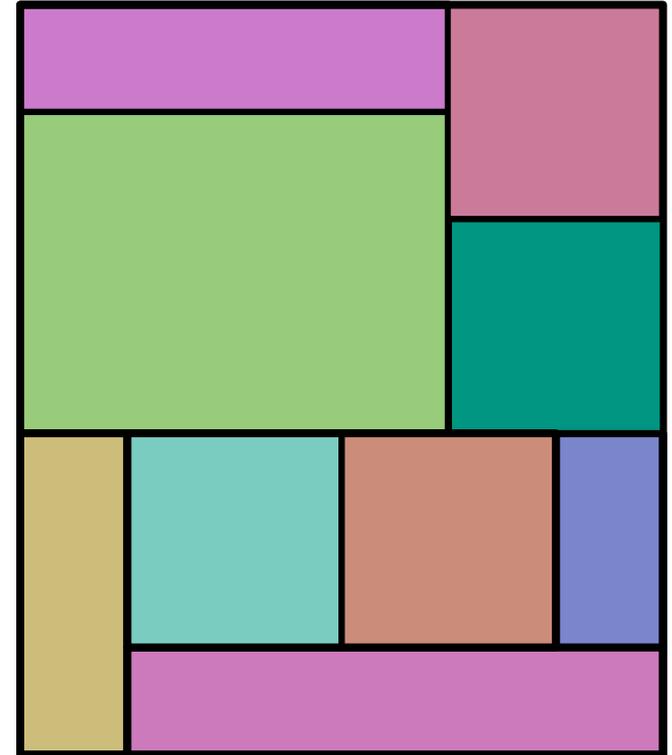
obere Kapazitäten $u: A \rightarrow \mathbb{R}_0^+$

$b(v) > 0$: Quelle $b(v) < 0$: Senke

Gesucht: Fluss X sodass

$$\text{cost}(X) = \sum_{(i,j) \in A} \text{cost}(i,j) \cdot X(i,j)$$

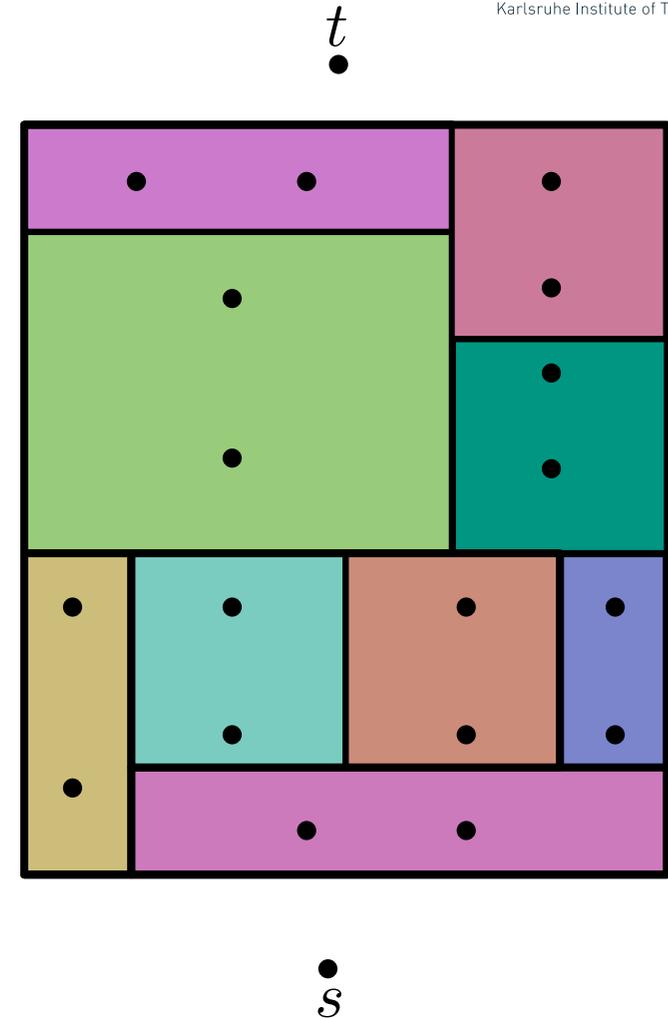
minimiert wird, wobei $\text{cost}: A \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ gegebene Kostenfunktion ist.



Lösung

Idee: Flussnetzwerk N_H für horz. Kanten.

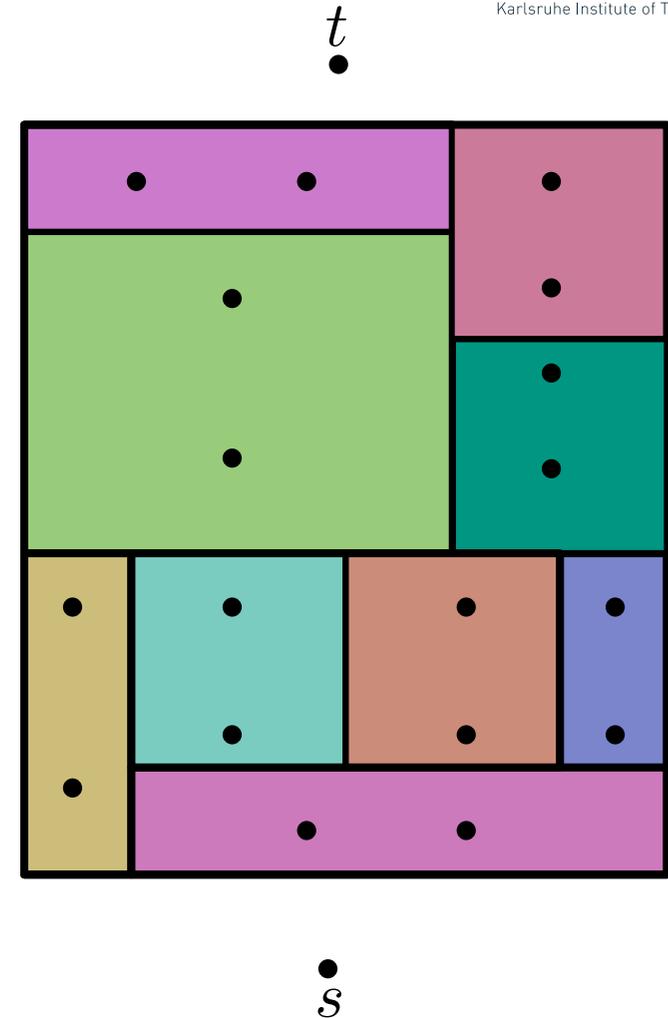
1. Für jedes R_i zwei Knoten u_i, v_i
2. Knoten s und t



Lösung

Idee: Flussnetzwerk N_H für horz. Kanten.

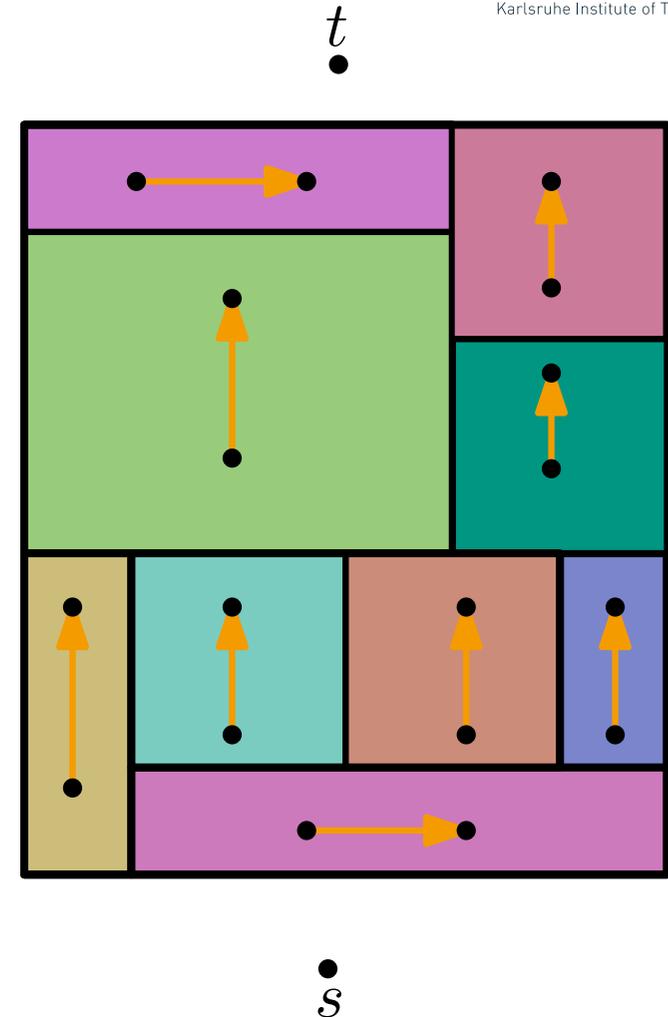
1. Für jedes R_i zwei Knoten u_i, v_i
2. Knoten s und t



Lösung

Idee: Flussnetzwerk N_H für horz. Kanten.

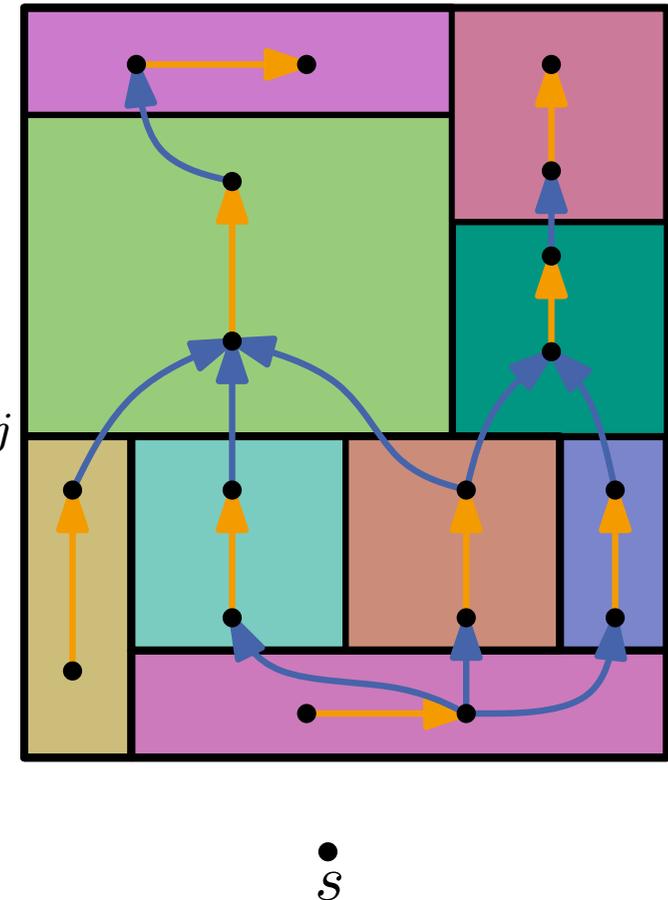
1. Für jedes R_i zwei Knoten u_i, v_i
2. Knoten s und t
3. Kante $e_i = (u_i, v_i)$
mit $l(e_i) = w_i$, $u(e_i) = \infty$, $cost(e_i) = 1$



Lösung

Idee: Flussnetzwerk N_H für horz. Kanten.

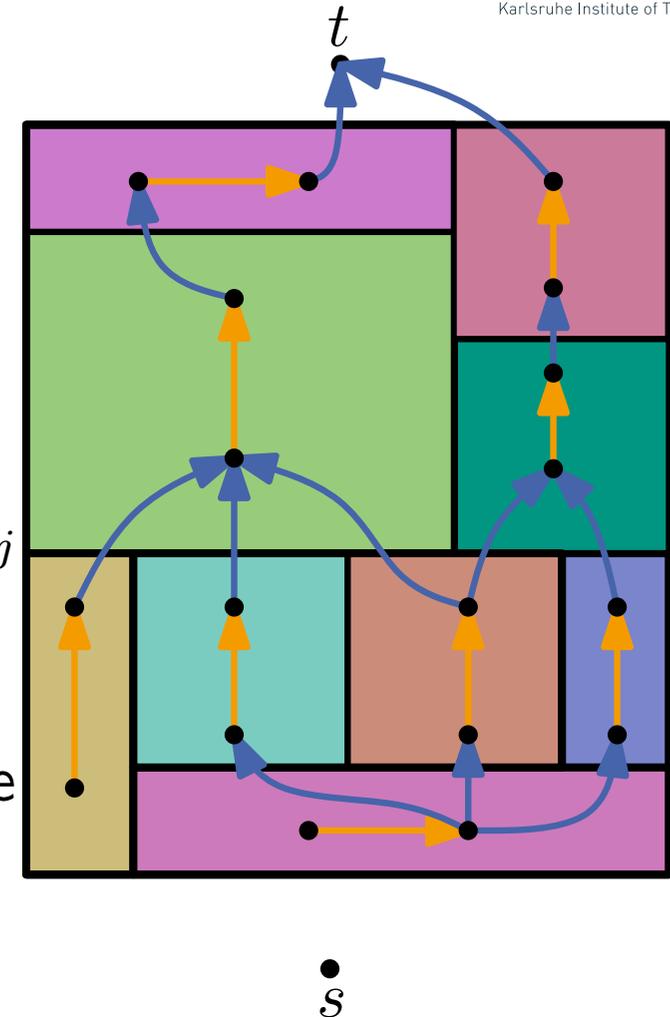
1. Für jedes R_i zwei Knoten u_i, v_i
2. Knoten s und t
3. Kante $e_i = (u_i, v_i)$
mit $l(e_i) = w_i$, $u(e_i) = \infty$, $cost(e_i) = 1$
4. Kante e zwischen je zwei Knoten v_i und u_j
getrennt durch horz. Kante (aufwärts).
 $l(e) = 0$, $u(e) = \infty$ und $cost(e) = 0$



Lösung

Idee: Flussnetzwerk N_H für horz. Kanten.

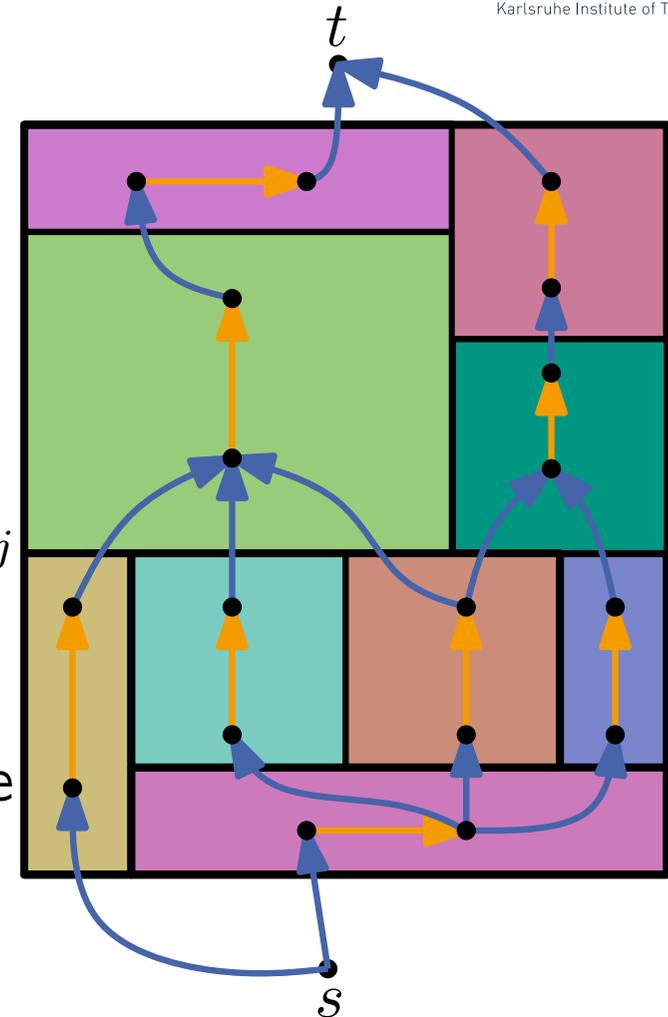
1. Für jedes R_i zwei Knoten u_i, v_i
2. Knoten s und t
3. Kante $e_i = (u_i, v_i)$
mit $l(e_i) = w_i$, $u(e_i) = \infty$, $cost(e_i) = 1$
4. Kante e zwischen je zwei Knoten v_i und u_j
getrennt durch horz. Kante (aufwärts).
 $l(e) = 0$, $u(e) = \infty$ und $cost(e) = 0$
5. Kante e zwischen Knoten der oberen Reihe
Rechtecke und t .
 $l(e) = 0$, $u(e) = \infty$ und $cost(e) = 0$



Lösung

Idee: Flussnetzwerk N_H für horz. Kanten.

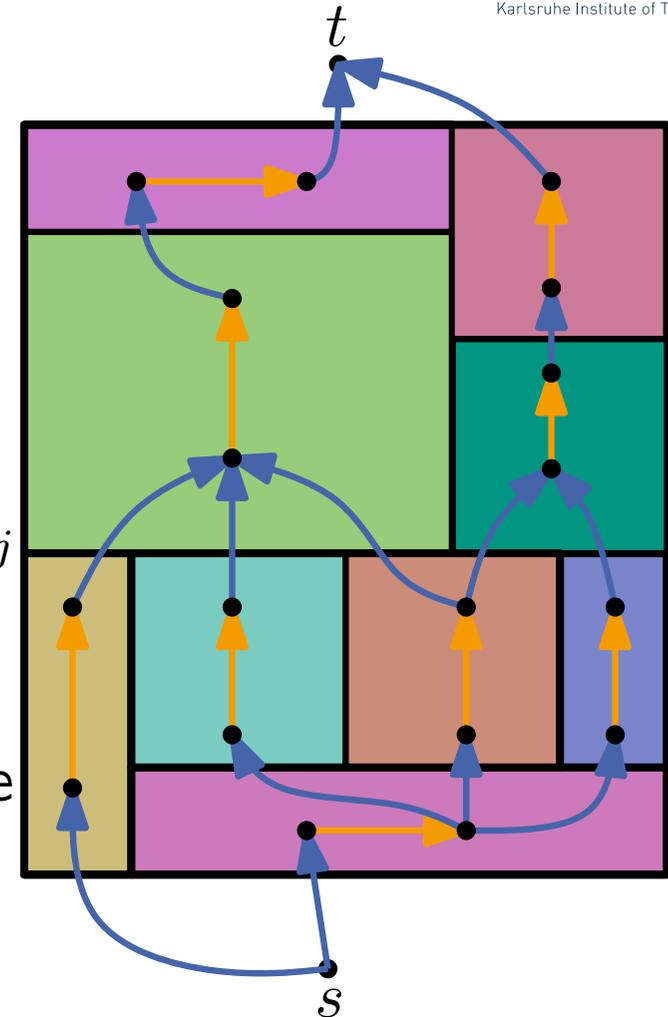
1. Für jedes R_i zwei Knoten u_i, v_i
2. Knoten s und t
3. Kante $e_i = (u_i, v_i)$
mit $l(e_i) = w_i$, $u(e_i) = \infty$, $cost(e_i) = 1$
4. Kante e zwischen je zwei Knoten v_i und u_j
getrennt durch horz. Kante (aufwärts).
 $l(e) = 0$, $u(e) = \infty$ und $cost(e) = 0$
5. Kante e zwischen Knoten der oberen Reihe
Rechtecke und t .
 $l(e) = 0$, $u(e) = \infty$ und $cost(e) = 0$
6. Kante e zwischen s und Knoten der unteren Reihe Rechtecke.
 $l(e) = 0$, $u(e) = \infty$, $cost(e) = 0$



Lösung

Idee: Flussnetzwerk N_H für horz. Kanten.

1. Für jedes R_i zwei Knoten u_i, v_i
2. Knoten s und t
3. Kante $e_i = (u_i, v_i)$
mit $l(e_i) = w_i, u(e_i) = \infty, cost(e_i) = 1$
4. Kante e zwischen je zwei Knoten v_i und u_j
getrennt durch horz. Kante (aufwärts).
 $l(e) = 0, u(e) = \infty$ und $cost(e) = 0$
5. Kante e zwischen Knoten der oberen Reihe
Rechtecke und t .
 $l(e) = 0, u(e) = \infty$ und $cost(e) = 0$
6. Kante e zwischen s und Knoten der unteren Reihe Rechtecke.
 $l(e) = 0, u(e) = \infty, cost(e) = 0$

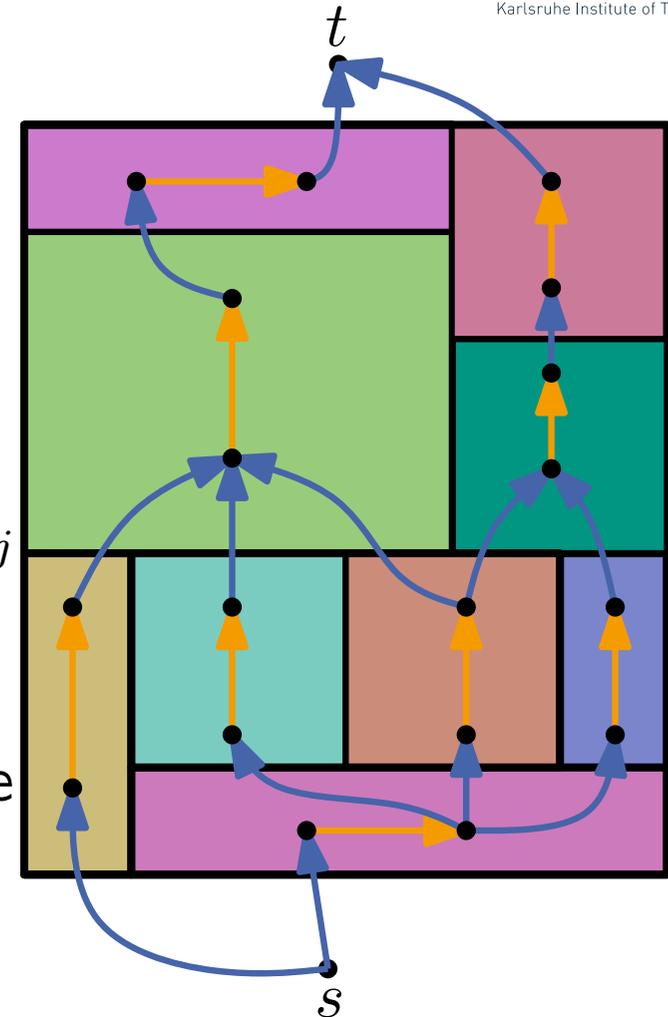


Wie Knotenbewertung $b: V \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ festlegen?

Lösung

Idee: Flussnetzwerk N_H für horz. Kanten.

1. Für jedes R_i zwei Knoten u_i, v_i
2. Knoten s und t
3. Kante $e_i = (u_i, v_i)$
mit $l(e_i) = w_i, u(e_i) = \infty, cost(e_i) = 1$
4. Kante e zwischen je zwei Knoten v_i und u_j
getrennt durch horz. Kante (aufwärts).
 $l(e) = 0, u(e) = \infty$ und $cost(e) = 0$
5. Kante e zwischen Knoten der oberen Reihe
Rechtecke und t .
 $l(e) = 0, u(e) = \infty$ und $cost(e) = 0$
6. Kante e zwischen s und Knoten der unteren Reihe Rechtecke.
 $l(e) = 0, u(e) = \infty, cost(e) = 0$

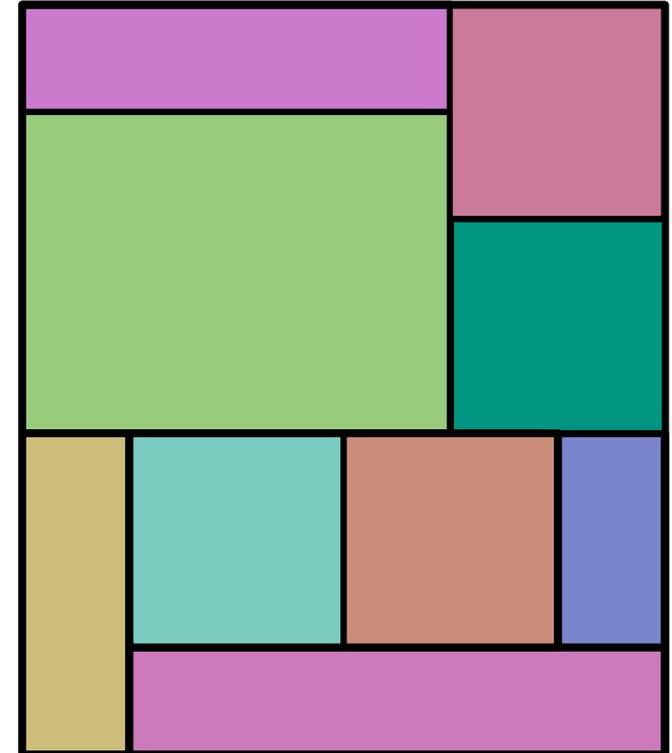


$$b(s) = \text{gewünschte Breite} \quad b(t) = -b(s) \quad b(v) = 0 \text{ für restl. Knoten } v$$

Lösung

Idee: Flussnetzwerk N_H für horz. Kanten.

Analog: Flussnetzwerk N_V für vert. Kanten.

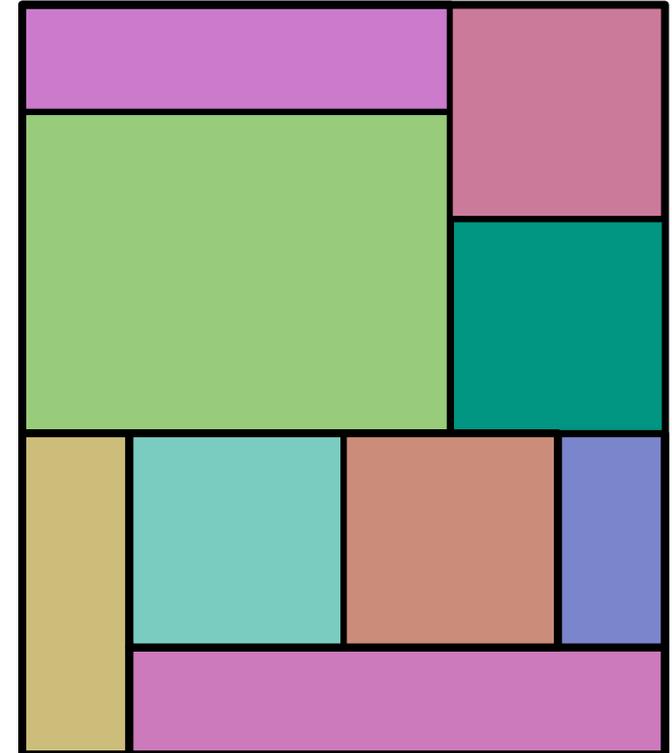


Lösung

Idee: Flussnetzwerk N_H für horz. Kanten.

Analog: Flussnetzwerk N_V für vert. Kanten.

Löse Flussproblem mit minimalen Kosten
auf Netzwerk bestehend aus den
Komponenten N_H und N_V .

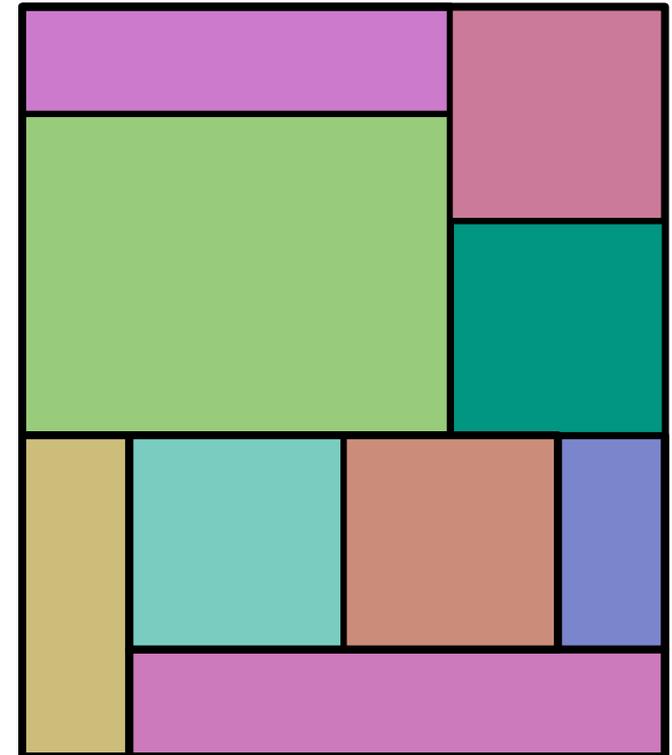


Lösung

Idee: Flussnetzwerk N_H für horz. Kanten.

Analog: Flussnetzwerk N_V für vert. Kanten.

Löse Flussproblem mit minimalen Kosten
auf Netzwerk bestehend aus den
Komponenten N_H und N_V .



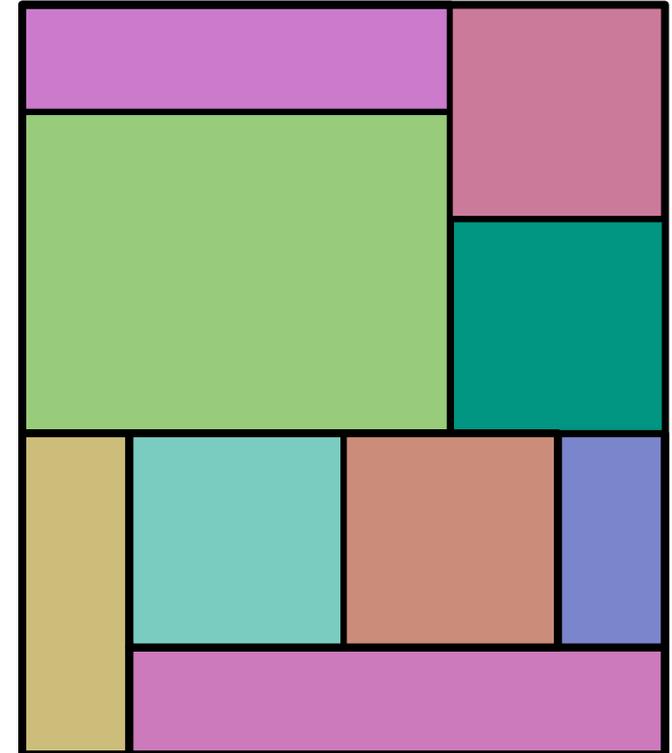
Kann ähnliches Netzwerk auch für Flächen konstruiert werden?

Lösung

Idee: Flussnetzwerk N_H für horz. Kanten.

Analog: Flussnetzwerk N_V für vert. Kanten.

Löse Flussproblem mit minimalen Kosten
auf Netzwerk bestehend aus den
Komponenten N_H und N_V .



Kann ähnliches Netzwerk auch für Flächen konstruiert werden?

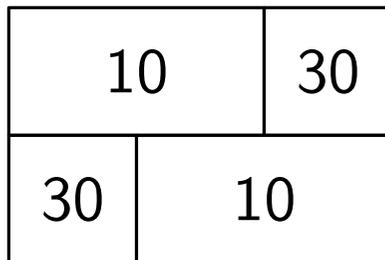
Nein, denn eine reine Flächenzuweisung zu Rechtecken bestimmt die Form der Rechtecke nicht.

Flächenuniverselle Layouts

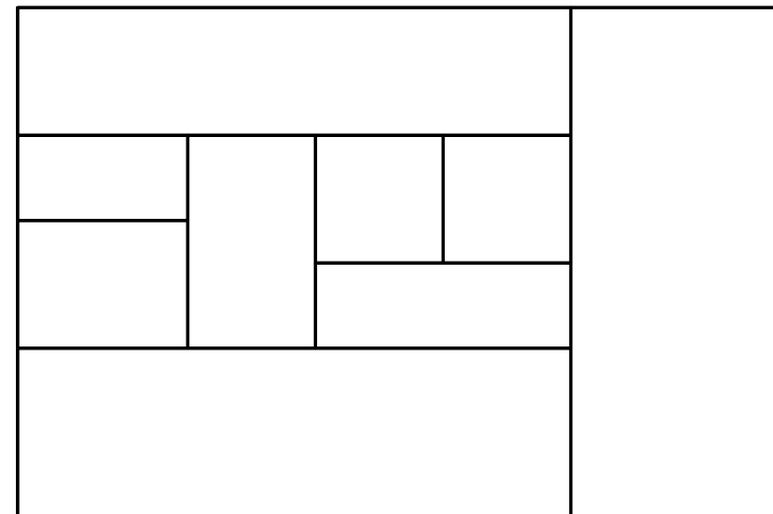
Einseitige Rechtecklayouts sind **flächenuniversell**, d.h. sie lassen sich für jede beliebige Flächenzuweisung realisieren.

[Eppstein et al. '12]

Ein Layout heißt **einseitig**, falls jedes maximale Segment auf einer Seite nur an ein einziges Rechteck angrenzt.



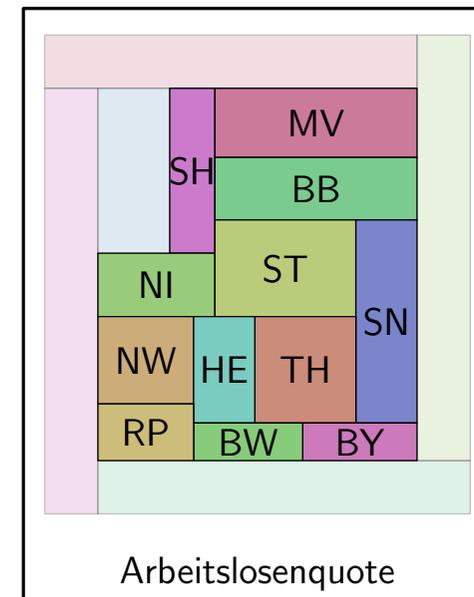
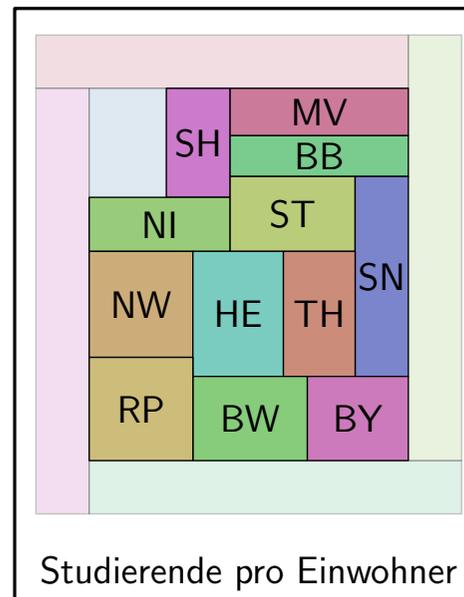
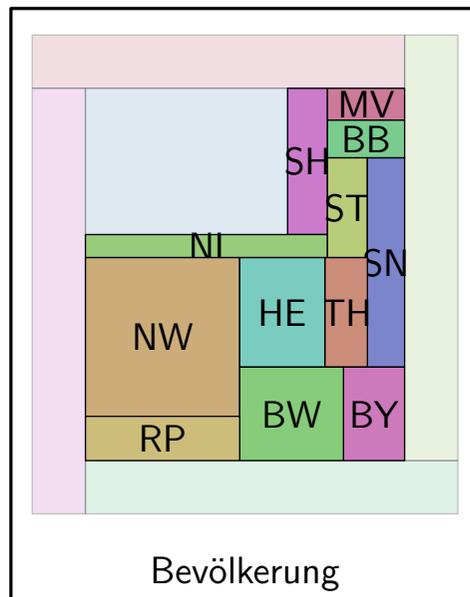
nicht einseitig



einseitig

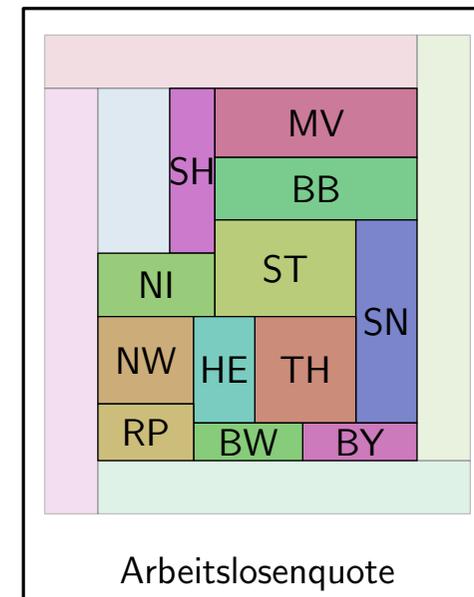
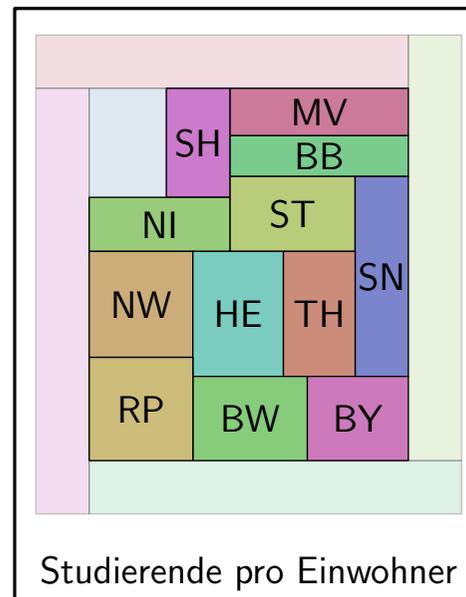
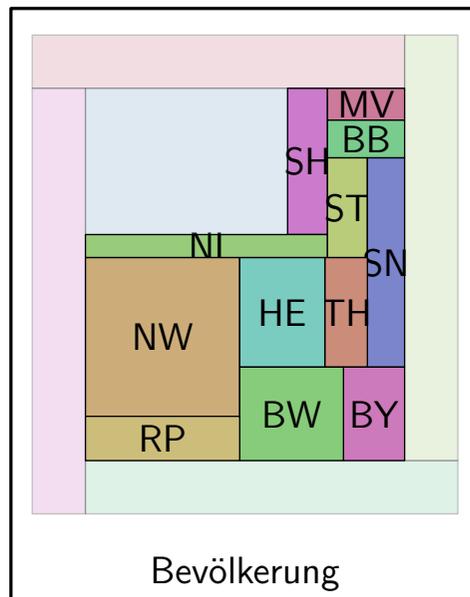
Diskussion:

- Wiedererkennbarkeit der Form
- Vergleichbarkeit
- Lage der Regionen
- korrekte Adjazenzen
- kleiner Flächenfehler
- geringe Komplexität
- Ablesen der Fläche

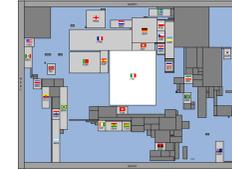
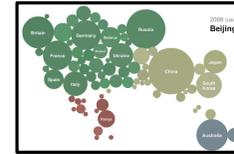
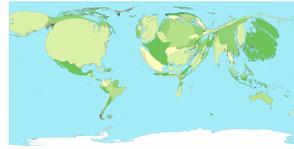


Diskussion:

- Wiedererkennbarkeit der Form 
- Vergleichbarkeit  
- Lage der Regionen 
- korrekte Adjazenzen  / 
- kleiner Flächenfehler  / 
- geringe Komplexität 
- Ablesen der Fläche 

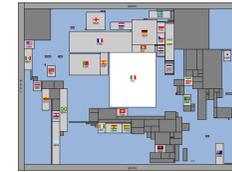
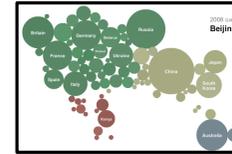
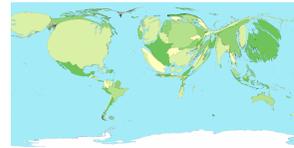


Zusammenfassung Kartogramme



- Wiedererkennbarkeit
- Vergleichbarkeit
- Lage der Regionen
- korrekte Adjazenzen
- kleiner Flächenfehler
- geringe Komplexität
- Ablesen der Fläche

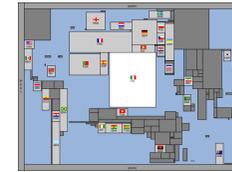
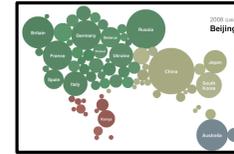
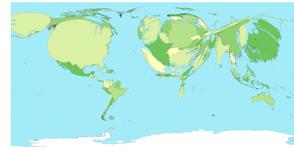
Zusammenfassung Kartogramme



- Wiedererkennbarkeit
- Vergleichbarkeit
- Lage der Regionen
- korrekte Adjazenzen
- kleiner Flächenfehler
- geringe Komplexität
- Ablesen der Fläche



Zusammenfassung Kartogramme



- Wiedererkennbarkeit
- Vergleichbarkeit
- Lage der Regionen
- korrekte Adjazenzen
- kleiner Flächenfehler
- geringe Komplexität
- Ablesen der Fläche



Kein Kartogrammtyp ist perfekt, alle haben ihre Vor- und Nachteile. Auswahl sollte je nach Anwendungszweck erfolgen.

Teilnehmer für **Benutzerstudie** gesucht!

Kontext: Algorithmische Kartografie – Beschriftung



interne Label



externe Label

- Ablauf:**
- Fragebogen am Computer ausfüllen (ca. 20 min).
 - Raum 305, Infobau Geb. 50.34
 - Mögliche Termine:
19.05.: 11:30 Uhr, 13:15 Uhr

Weshalb daran teilnehmen?

- Unterstützung der aktuellen Forschung.
- Unter Teilnehmern werden 3 Amazon-Gutscheine im Wert von je 25 Euro verlost.