

Algorithmen für Routenplanung

1. Sitzung, Sommersemester 2014

Andreas Gemsa | 14. April 2014

INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK · ALGORITHMIK · PROF. DR. DOROTHEA WAGNER





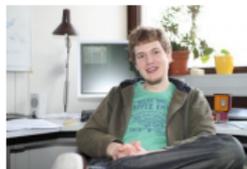
Prof. Spyros
Kontogiannis



Prof. Dorothea
Wagner



Prof. Christos
Zaroliagis



Moritz Baum



Julian Dibbelt



Andreas Gerns



Ben Strasser

Vorlesungswebseite: <http://i11www.itl.kit.edu/teaching/sommer2014/routenplanung/index>

Vorlesung

- Montags 14:00–15:30 Uhr, SR 301 (hier)
- Mittwochs 11:30–13:00 Uhr, SR 301 (hier)

Prüfung

- Prüfbar im Hauptstudium (Diplom) und *Master*
- Im Master: 5 ECTS Kredite
- VF: 1 (Theoretische Grundlagen), 2 (Algorithmentechnik)

Vorlesungswebseite:

`http://illwww.iti.kit.edu/teaching/sommer2014/
routenplanung/index`

Vorläufige Termine

#	Tag	Datum	Dozent	#	Tag	Datum	Dozent
1	Montag	14. April	Andreas	11	Mittwoch	21. Mai	Julian
2	Mittwoch	16. April	Andreas	12	Montag	26. Mai	Christos
3	Mittwoch	23. April	Ben	13	Mittwoch	28. Mai	Christos
4	Montag	28. April	Julian	14	Mittwoch	04. Juni	Spyros
5	Mittwoch	30. April	Andreas	15	Mittwoch	11. Juni	Spyros
6	Montag	05. Mai	Christos	16	Montag	16. Juni	Moritz
7	Mittwoch	07. Mai	Christos	17	Montag	23. Juni	Moritz
8	Montag	12. Mai	Ben	18	Montag	30. Juni	Moritz
9	Mittwoch	14. Mai	Julian	19	Montag	07. Juli	?
10	Montag	19. Mai	Ben				

Siehe auch Vorlesungswebseite!

Algorithmische Geometrie

- Dozenten: Dr. Martin Nöllenburg und Benjamin Niedermann
- Vorlesung: dienstags 9:45–11:15 Uhr (SR 301)
- Übung: mittwochs 15:45–16:30/17:15 (SR 301)

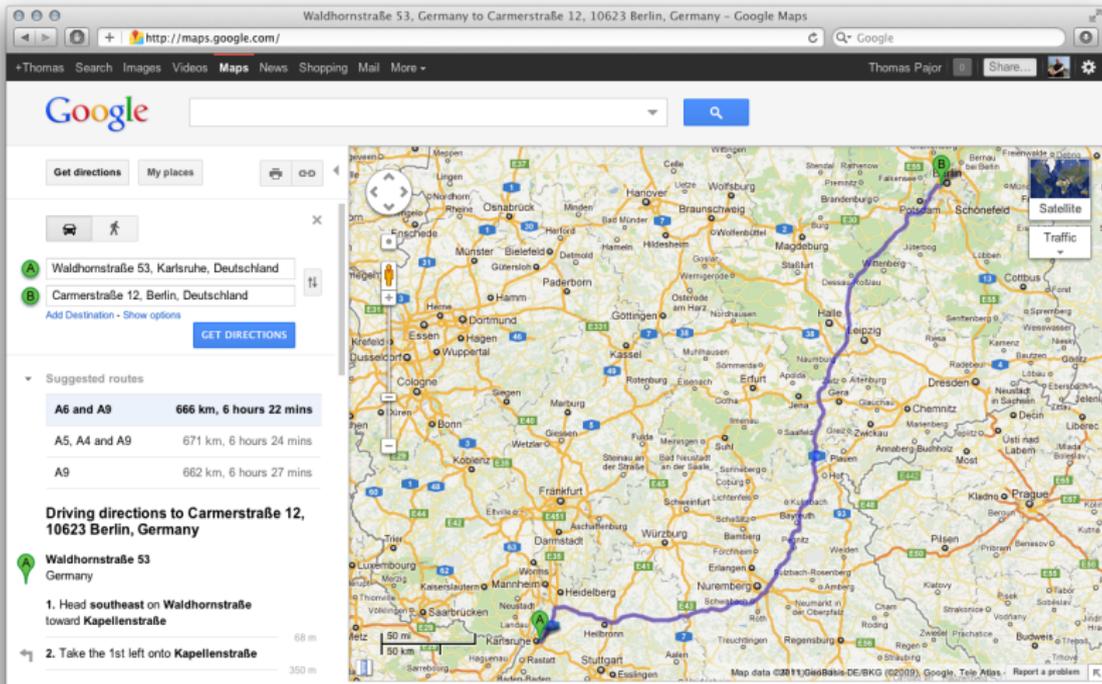
Algorithmen für planare Graphen

- Dozenten: Prof. Dorothea Wagner und Dr. Tamara Mchedlidze
- Vorlesung: dienstags 14:00–15:30 Uhr (SR 301)
- Vorlesung: mittwochs 14:00–15:30 Uhr (SR 301)
- Übungs: zusätzlich an einigen Vorlesungsterminen

Routenplanung in der Anwendung



Routenplanung in der Anwendung



Waldhornstraße 53, Germany to Carmerstraße 12, 10623 Berlin, Germany - Google Maps

http://maps.google.com/

Thomas Pajor

Google

Get directions My places

Waldhornstraße 53, Karlsruhe, Deutschland

Carmerstraße 12, Berlin, Deutschland

GET DIRECTIONS

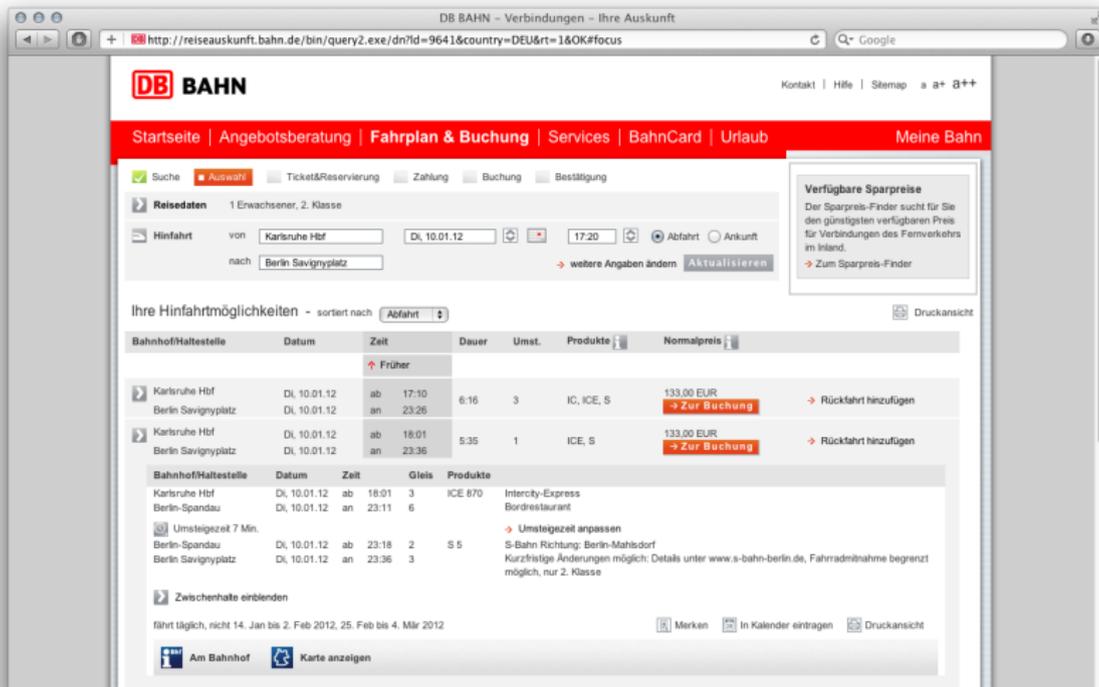
Suggested routes

Route	Distance	Time
A6 and A9	666 km	6 hours 22 mins
A5, A4 and A9	671 km	6 hours 24 mins
A9	662 km	6 hours 27 mins

Driving directions to Carmerstraße 12, 10623 Berlin, Germany

- Head southeast on Waldhornstraße toward Kapellenstraße 68 m
- Take the 1st left onto Kapellenstraße 350 m

Routenplanung in der Anwendung



DB BAHN

Kontakt | Hilfe |itemap | a+ | b++

Startseite | Angebotsberatung | **Fahrplan & Buchung** | Services | BahnCard | Urlaub | Meine Bahn

Suche **Auswahl** | Ticket&Reservierung | Zahlung | Buchung | Bestätigung

Reisedaten 1 Erwachsener, 2. Klasse

Hinfahrt von Abfahrt Ankunft
nach [-> weitere Angaben ändern](#) [Aktualisieren](#)

Verfügbare Sparpreise
Der Sparpreis-Finder sucht für Sie den günstigsten verfügbaren Preis für Verbindungen des Fernverkehrs im Inland.
[-> Zum Sparpreis-Finder](#)

Ihre Hinfahrtmöglichkeiten - sortiert nach

Bahnhof/Haltestelle	Datum	Zeit	Dauer	Umst.	Produkte	Normalpreis
		<input type="button" value="↑ Früher"/>				
<input type="button" value="↔"/> Karlsruhe Hbf	Di, 10.01.12	ab 17:10	6:16	3	IC, ICE, S	133,00 EUR -> Zur Buchung
Berlin Savignyplatz	Di, 10.01.12	an 23:26				
<input type="button" value="↔"/> Karlsruhe Hbf	Di, 10.01.12	ab 18:01	5:35	1	ICE, S	133,00 EUR -> Zur Buchung
Berlin Savignyplatz	Di, 10.01.12	an 23:36				

Bahnhof/Haltestelle **Datum** **Zeit** **Gleis** **Produkte**

Karlsruhe Hbf	Di, 10.01.12	ab 18:01	3	ICE 670	Intercity-Express
Berlin-Spandau	Di, 10.01.12	an 23:11	6		Bordrestaurant

Umsteigezeit 7 Min.

Berlin-Spandau	Di, 10.01.12	ab 23:18	2	S 5	-> Umsteigezeit anpassen
Berlin Savignyplatz	Di, 10.01.12	an 23:36	3		S-Bahn Richtung: Berlin-Mahlsdorf Kurzfristige Änderungen möglich: Details unter www.s-bahn-berlin.de , Fahrradmitnahme begrenzt möglich, nur 2. Klasse

Zwischenhalte einblenden

fährt täglich, nicht 14. Jan bis 2. Feb 2012, 25. Feb bis 4. Mär 2012 Merken In Kalender eintragen Druckansicht

Am Bahnhof Karte anzeigen

Routenplanung in der Anwendung



Wichtiger Anwendungsbereich

- Navigationssysteme
- Kartendienste: Google Maps, Bing Maps, ...
- Fahrplanauskunftssysteme



Viele kommerzielle Systeme

- Nutzen **heuristische** Methoden
- Betrachten nur Teile des Transportnetzwerkes
- Geben keine **Qualitätsgarantien**

Wir untersuchen Methoden zur **Routenplanung** in Transportnetzwerken mit **beweisbar optimalen** Lösungen

Anfrage:

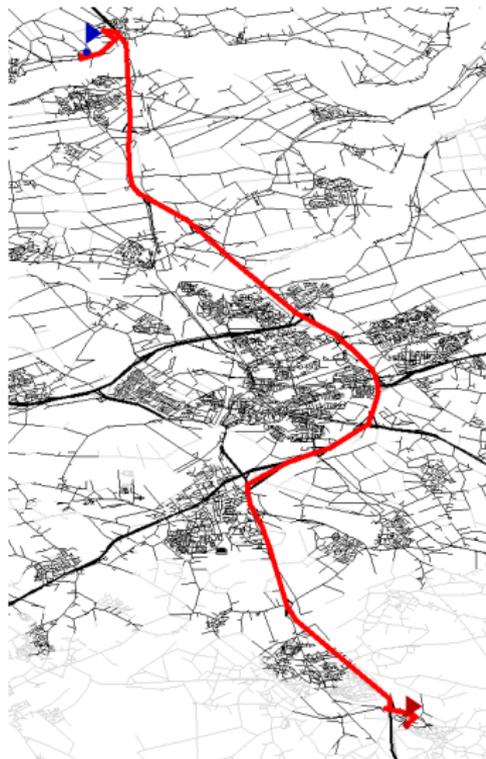
- Finde **beste** Verbindung in Transportnetz

Modellierung:

- Netzwerk als Graph $G = (V, E)$
- Kantengewichte sind **Reisezeit**
- **Kürzeste** Wege in G entsprechen **schnellsten** Verbindungen
- Klassisches Problem (Dijkstra [Dij59])

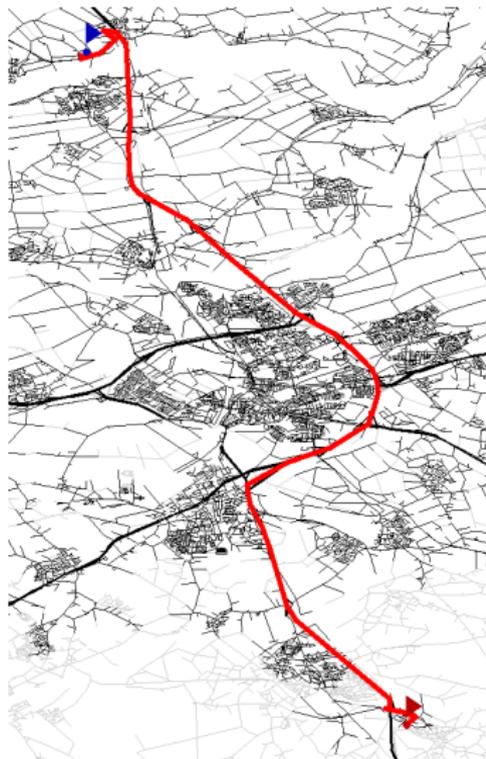
Probleme:

- Transportnetzwerke sind **riesig**
- Dijkstras Algorithmus zu **langsam**
(> 1 Sekunde)



Beobachtung:

- Viele Anfragen in (statischem) Netzwerk
- „Unnötige“ Berechnungen

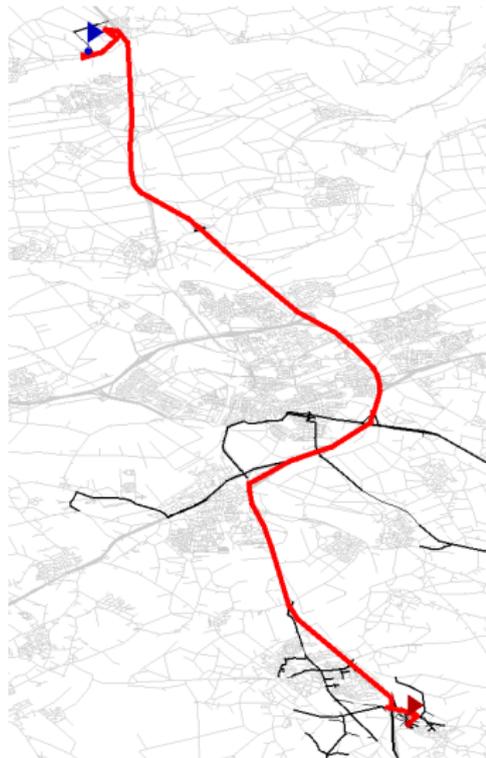


Beobachtung:

- Viele Anfragen in (statischem) Netzwerk
- „Unnötige“ Berechnungen

Idee:

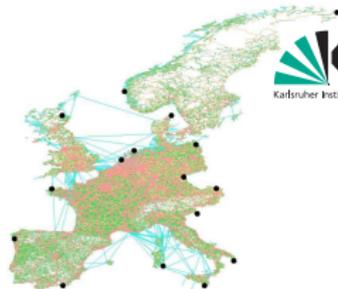
- Zwei Phasen
 - Offline: Generiere Zusatzinformation in **Vorbereitung**
 - Online: **Beschleunige** Anfrage mit dieser Information
- Drei Kriterien: Vorberechnungsplatz, Vorberechnungszeit, Beschleunigung



Experimentelle Evaluation

Eingabe: Straßennetzwerk von Europa

- ca. 18 Mio. Knoten
- ca. 42 Mio. Kanten

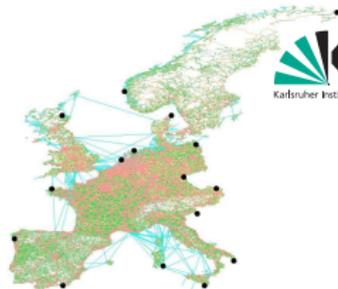


Algorithmus	VORBERECHNUNG		ANFRAGEN	
	Zeit [h:m]	Platz [GiB]	Zeit [μ s]	Beschleun.
Dijkstra <small>[Dij59]</small>	—	—	2 550 000	—
ALT <small>[GH05, GW05]</small>	0:42	2.2	24 521	104
CRP <small>[DGPW11]</small>	≪ 0:01	< 0.1	1 650	1 545
Arc-Flags <small>[Lau04]</small>	0:20	0.3	408	6 250
CH <small>[GSSD08]</small>	0:05	0.2	110	23 181
TNR <small>[ALS13]</small>	0:20	2.1	1.25	2 040 000
HL <small>[ADGW12]</small>	0:37	18.4	0.56	4 553 571

Experimentelle Evaluation

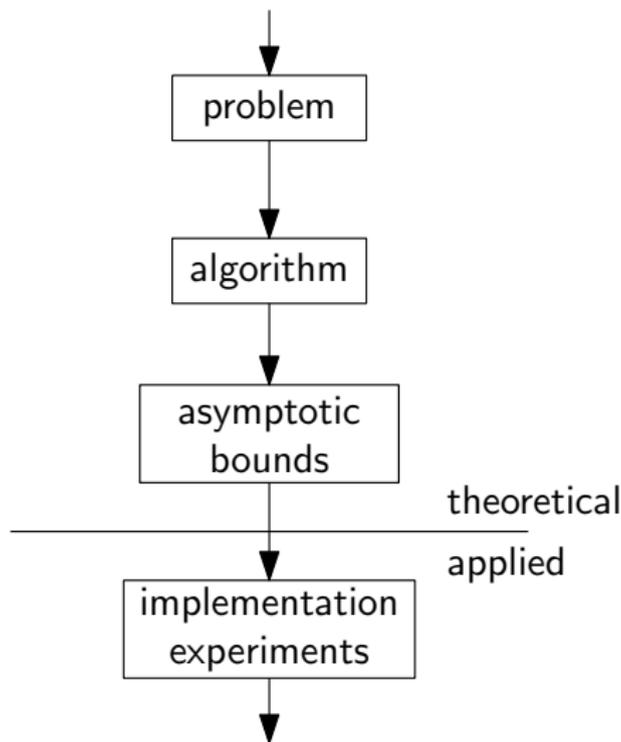
Eingabe: Straßennetzwerk von Europa

- ca. 18 Mio. Knoten
- ca. 42 Mio. Kanten



Algorithmus	VORBERECHNUNG		ANFRAGEN	
	Zeit [h:m]	Platz [GiB]	Zeit [μ s]	Beschleun.
Dijkstra <small>[Dij59]</small>	—	—	2 550 000	—
ALT <small>[GH05, GW05]</small>	0:42	2.2	24 521	104
CRP <small>[DGPW11]</small>	\ll 0:01	$<$ 0.1	1 650	1 545
Arc-Flags <small>[Lau04]</small>	0:20	0.3	408	6 250
CH <small>[GSSD08]</small>	0:05	0.2	110	23 181
TNR <small>[ALS13]</small>	0:20	2.1	1.25	2 040 000
HL <small>[ADGW12]</small>	0:37	18.4	0.56	4 553 571

Mittlerweile im Einsatz bei Bing, Google, Tomtom, ...



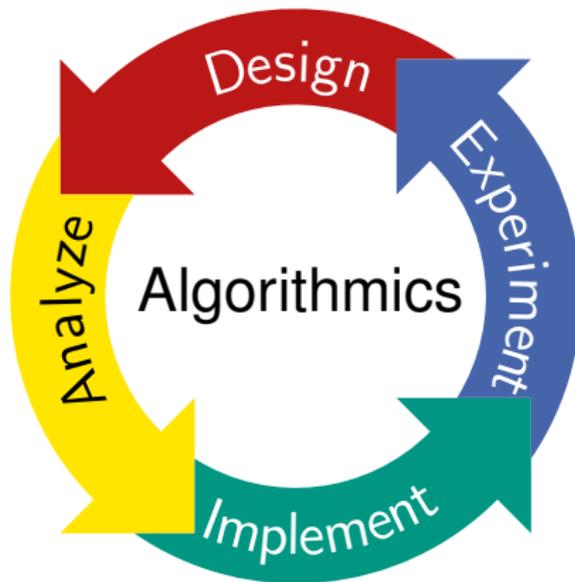
Lücke Theorie vs. Praxis

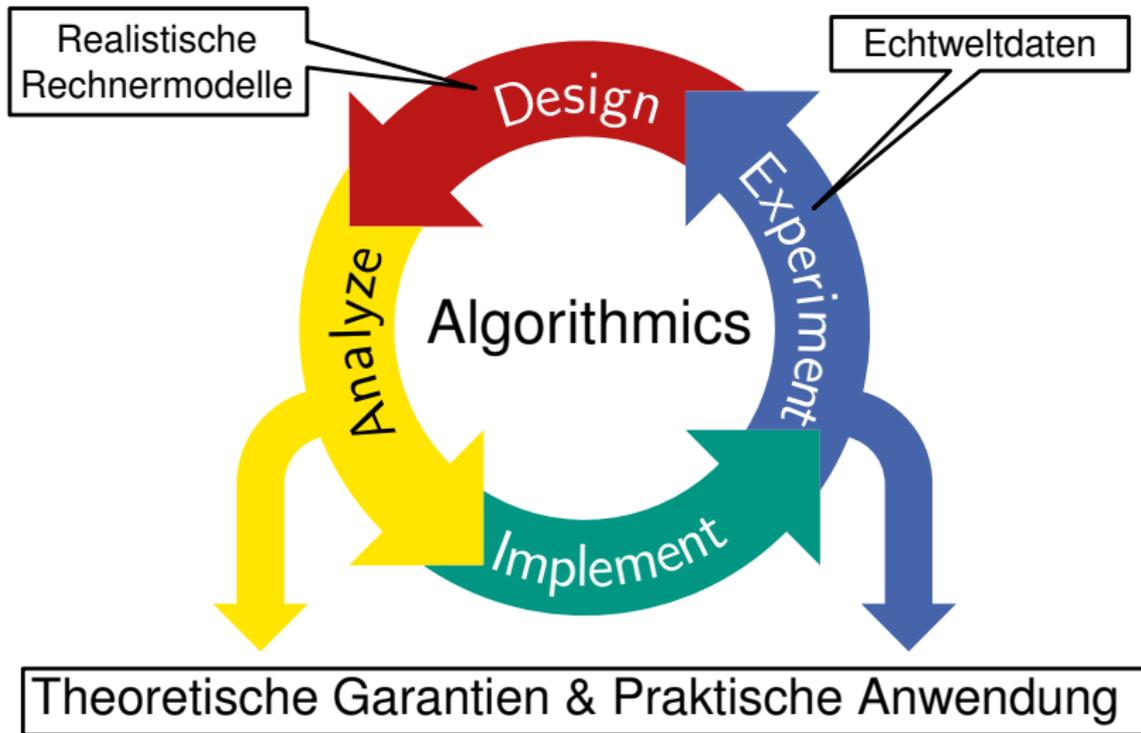
Theorie	vs.	Praxis
einfach einfach	Problem-Modell Maschinenmodell	komplex komplex
komplex fortgeschritten	Algorithmen Datenstrukturen	einfach einfach
worst-case asymptotisch	Komplexitäts-Messung Effizienz	typische Eingaben konstante Faktoren

Theorie	vs.	Praxis
einfach einfach	Problem-Modell Maschinenmodell	komplex komplex
komplex fortgeschritten	Algorithmen Datenstrukturen	einfach einfach
worst-case asymptotisch	Komplexitäts-Messung Effizienz	typische Eingaben konstante Faktoren

Routenplanung:

- sehr anwendungsnahes Gebiet
- Eingaben sind **echte** Daten
 - Straßengraphen
 - Eisenbahn (Fahrpläne)
 - Flugpläne





- Algorithm Engineering + ein bisschen Theorie
- Beschleunigungstechniken
- Implementierungsdetails
- Ergebnisse auf Real-Welt Daten
- aktuellster Stand der Forschung (Veröffentlichungen bis 2014)
- ideale Grundlage für Bachelor, Master und Diplomarbeiten

keine Algorithmen III

- Vertiefung von kürzesten Wegen (Dijkstra)
 - Grundlagen sind Stoff von Algo I/II;
heute nochmal Crashkurs
- Grundvorlesung “vereinfachen” Wahrheit oft
- Implementierung
- Betonung auf Messergebnisse

keine reine Theorievorlesung

- relativ wenig Beweise (wenn doch, eher kurz)
- reale Leistung vor Asymptotik
- Vielen vorkommende Optimierungsproblemen sind \mathcal{NP} -schwer

1. Grundlagen

- Algorithm Engineering
- Graphen, Modelle, usw.
- Kürzeste Wege
- Dijkstra's Algorithmus

2. Beschleunigung von (statischen) Punkt-zu-Punkt Anfragen

- zielgerichtete Verfahren
- hierarchische Techniken
- many-to-many-Anfragen und Distanztabelle
- Kombinationen

3. Theorie

- Theoretische Charakterisierung von Straßennetzwerken
- Highway-Dimension
- Komplexität von Beschleunigungstechniken

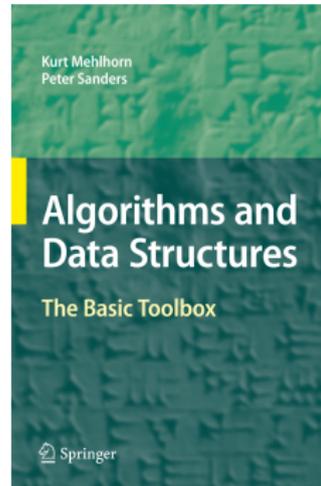
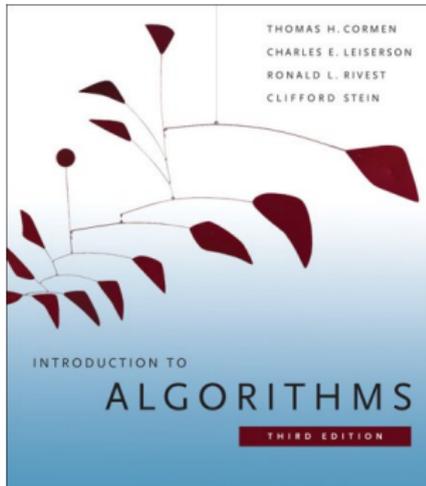
4. Fortgeschrittene Szenarien

- schnelle many-to-many und all-pairs shortest-paths
- Alternativrouten
- zeitabhängige Routenplanung
- Fahrplanauskunft
- multi-modale Routenplanung

- Informatik I/II oder Algorithmen I
- Algorithmentechnik oder Algorithmen II (muss aber nicht sein)
- ein bisschen Rechnerarchitektur
- passive Kenntnisse von C++/Java

Vertiefungsgebiet: Algorithmentechnik, (Theoretische Grundlagen)

- Folien
- wissenschaftliche Aufsätze (siehe Vorlesunghomepage)
- Basiskenntnisse:

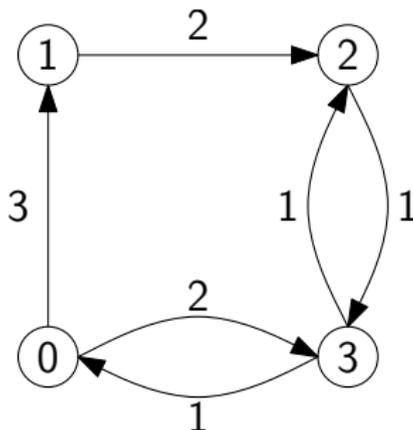


1. Grundlagen



Drei klassische Ansätze:

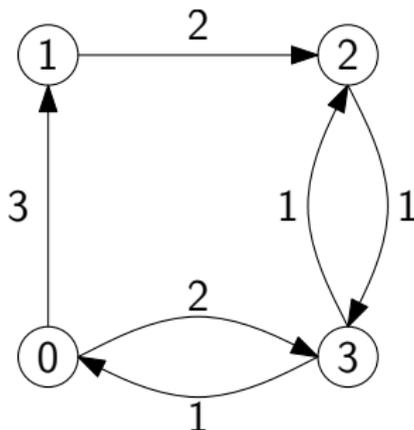
- Adjazenzmatrix
- Adjazenzlisten
- Adjazenzarray



Drei klassische Ansätze:

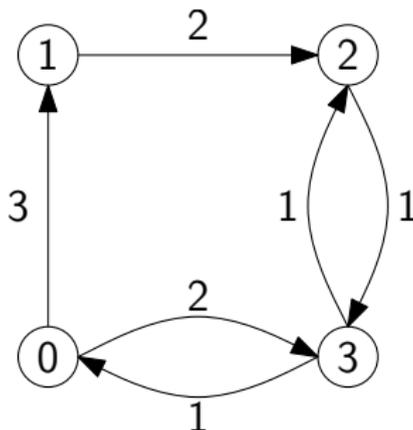
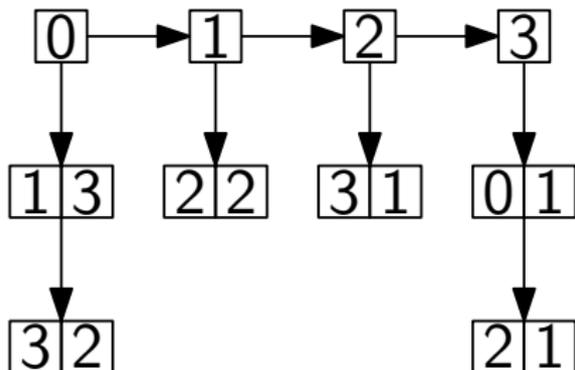
- Adjazenzmatrix
- Adjazenzlisten
- Adjazenzarray

	0	1	2	3
0	—	3	—	2
1	—	—	2	—
2	—	—	—	1
3	1	—	1	—



Drei klassische Ansätze:

- Adjazenzmatrix
- Adjazenzlisten
- Adjazenzarray



Drei klassische Ansätze:

- Adjazenzmatrix
- Adjazenzlisten
- Adjazenzarray

firstEdge

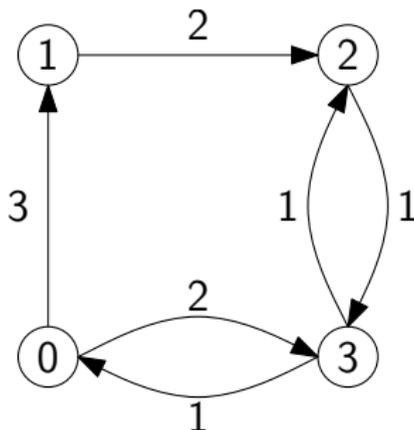
0	2	3	4	6
---	---	---	---	---

targetNode

1	3	2	3	2	0
---	---	---	---	---	---

weight

3	2	2	1	1	1
---	---	---	---	---	---



Was brauchen wir?

Eigenschaften:	Matrix	Liste	Array
Speicher	$\mathcal{O}(n^2)$	$\mathcal{O}(n + m)$	$\mathcal{O}(n + m)$
Ausgehende Kanten iterieren	$\mathcal{O}(n)$	$\mathcal{O}(\deg u)$	$\mathcal{O}(\deg u)$
Kantenzugriff (u, v)	$\mathcal{O}(1)$	$\mathcal{O}(\deg u)$	$\mathcal{O}(\deg u)$
Effizienz (Speicherlayout)	+	-	+
Updates (topologisch)	+	+	-
Updates (Gewicht)	+	+	+

Eigenschaften:	Matrix	Liste	Array
Speicher	$\mathcal{O}(n^2)$	$\mathcal{O}(n + m)$	$\mathcal{O}(n + m)$
Ausgehende Kanten iterieren	$\mathcal{O}(n)$	$\mathcal{O}(\deg u)$	$\mathcal{O}(\deg u)$
Kantenzugriff (u, v)	$\mathcal{O}(1)$	$\mathcal{O}(\deg u)$	$\mathcal{O}(\deg u)$
Effizienz (Speicherlayout)	+	-	+
Updates (topologisch)	+	+	-
Updates (Gewicht)	+	+	+

Fragen:

- Was brauchen wir?
- Was muss nicht super effizient sein?
- erstmal Modelle anschauen!

Modellierung (Straßengraphen)

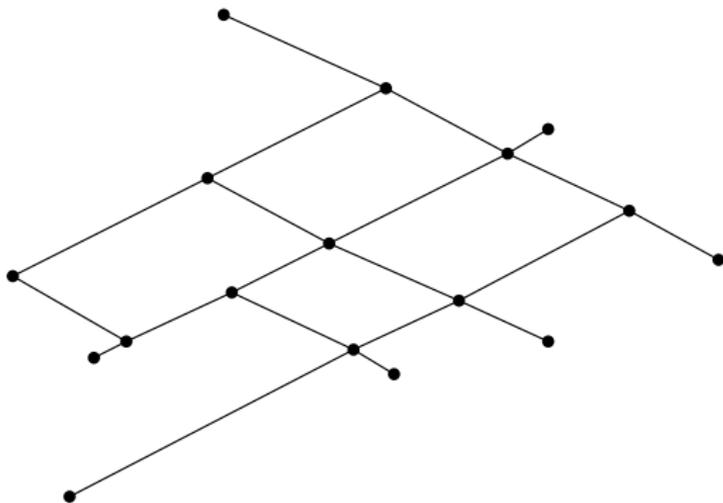


Modellierung (Straßengraphen)



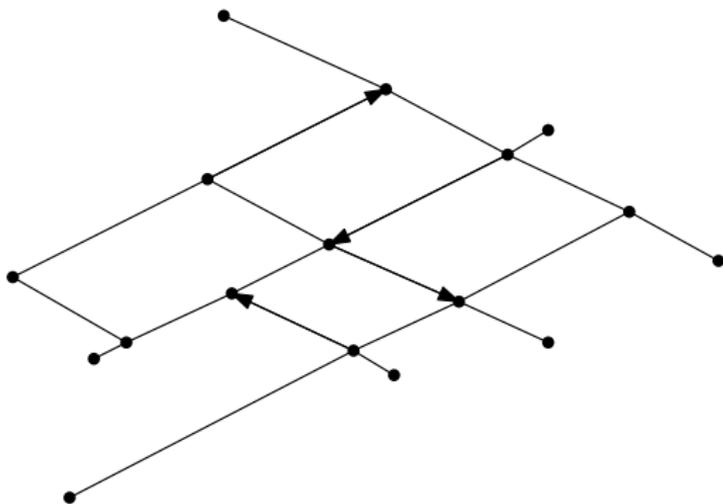
Modellierung (Straßengraphen)

- Knoten sind Kreuzungen
- Kanten sind Straßen



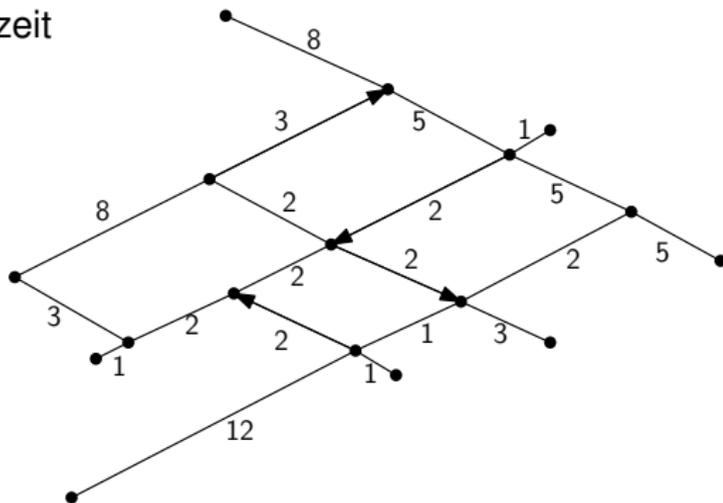
Modellierung (Straßengraphen)

- Knoten sind Kreuzungen
- Kanten sind Straßen
- Einbahnstraßen

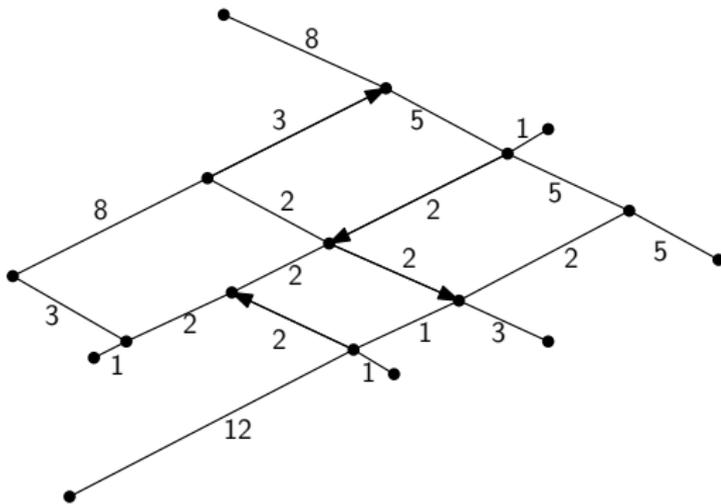


Modellierung (Straßengraphen)

- Knoten sind Kreuzungen
- Kanten sind Straßen
- Einbahnstraßen
- Metrik ist Reisezeit

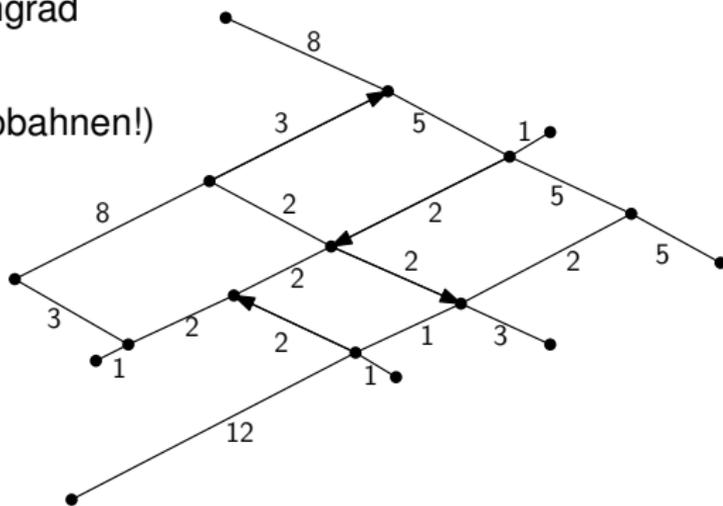


Eigenschaften (sammeln):



Eigenschaften:

- dünn
- (fast) ungerichtet
- geringer Knotengrad
- Kantenzüge
- Hierarchie (Autobahnen!)

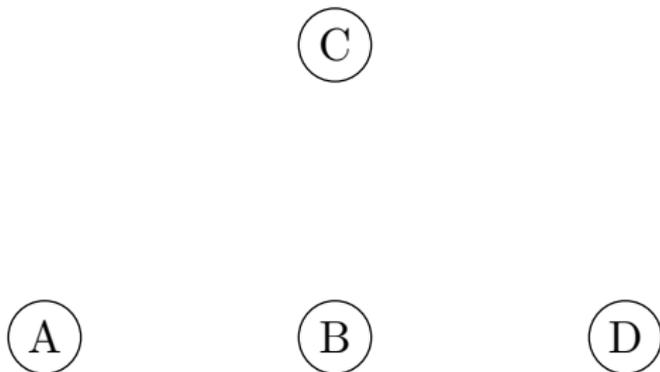


Beispiel:

- 4 Stationen (A,B,C,D)
- **Zug 1:** Station A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A
- **Zug 2:** Station A \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow A
- Züge operieren alle 10 Minuten

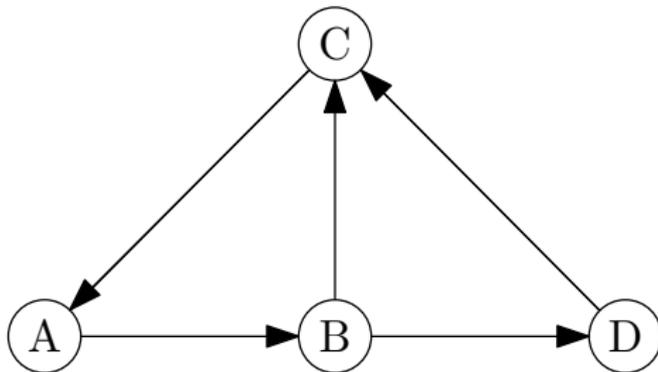
Beispiel:

- 4 Stationen (A,B,C,D)
- Zug 1: Station A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A
- Zug 2: Station A \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow A
- Züge operieren alle 10 Minuten



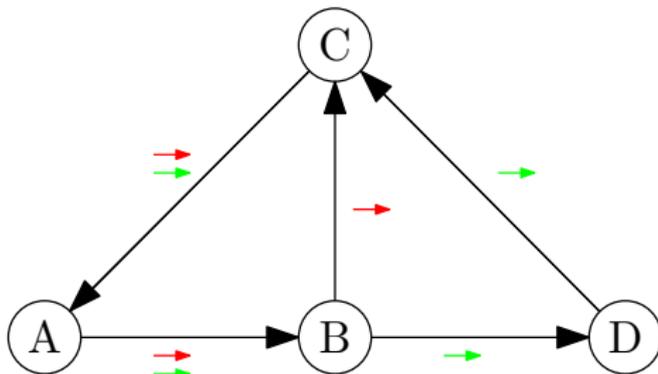
Beispiel:

- 4 Stationen (A,B,C,D)
- **Zug 1:** Station A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A
- **Zug 2:** Station A \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow A
- Züge operieren alle 10 Minuten



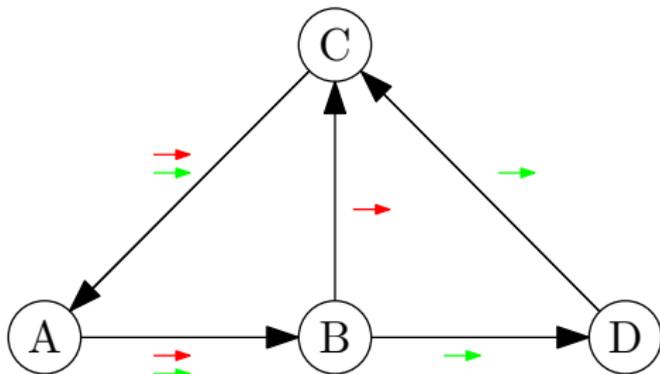
Beispiel:

- 4 Stationen (A,B,C,D)
- Zug 1: Station A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A
- Zug 2: Station A \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow A
- Züge operieren alle 10 Minuten



Beispiel:

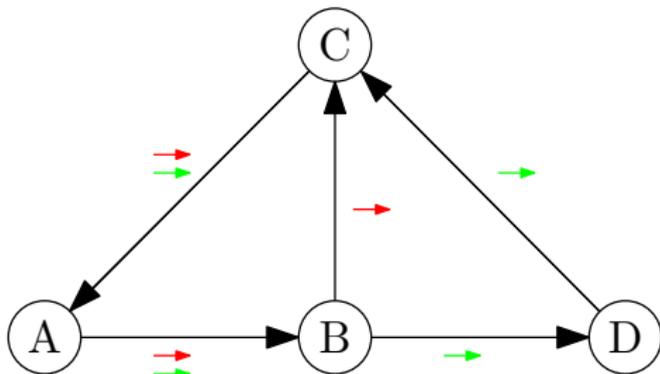
- 4 Stationen (A,B,C,D)
- Zug 1: Station A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A
- Zug 2: Station A \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow A
- Züge operieren alle 10 Minuten



Kanten sind zeitabhängig!
(wann fährt ein Zug wie lange?)

Beispiel:

- 4 Stationen (A,B,C,D)
- Zug 1: Station A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A
- Zug 2: Station A \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow A
- Züge operieren alle 10 Minuten



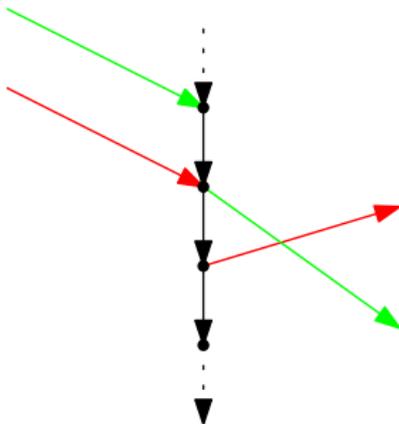
Kanten sind zeitabhängig!
(wann fährt ein Zug wie lange?)

oder roll die Zeit aus

Vorgehen:

- Knoten sind Abfahrts-/Ankunftsereignisse
- Kanten für die Fahrt von Station zu Station
- Wartekanten an den Stationen für Umstiege

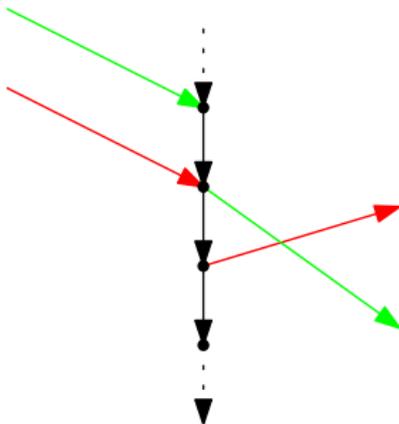
Station B:



Vorgehen:

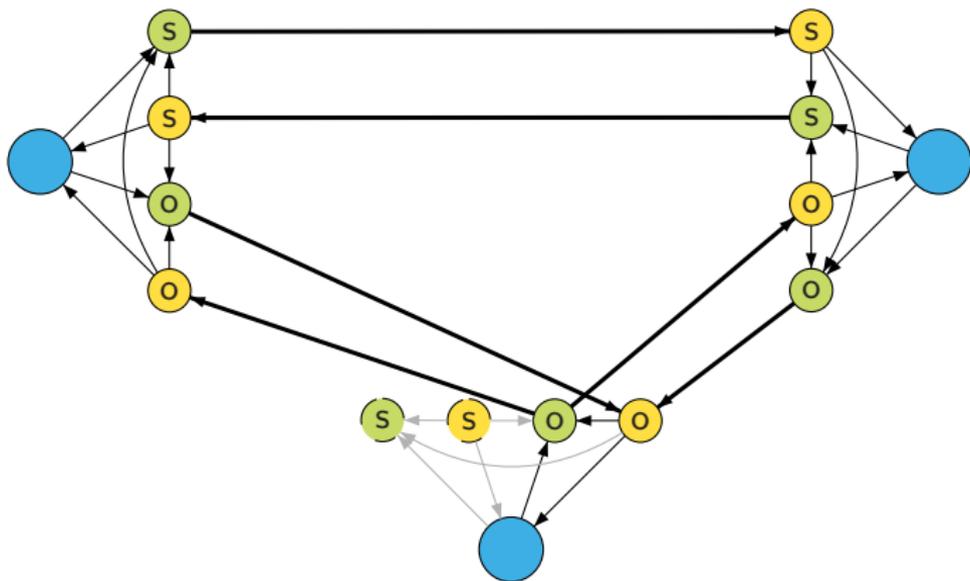
- Knoten sind Abfahrts-/Ankunftsereignisse
- Kanten für die Fahrt von Station zu Station
- Wartekanten an den Stationen für Umstiege

Station B:



Diskussion:

- + keine zeitabhängigen Kanten
- Graph größer



- zusammenhängend
- dünn
- gerichtet
- geringer Knotengrad
- meist verborgene Hierarchie (Autobahnen, ICE)
- Einbettung vorhanden (fast planar?)
- Kantengewichte nicht-negativ
- teilweise zeitabhängig
- dünne Separatoren?

- zusammenhängend
- dünn
- gerichtet
- geringer Knotengrad
- meist verborgene Hierarchie (Autobahnen, ICE)
- Einbettung vorhanden (fast planar?)
- Kantengewichte nicht-negativ
- teilweise zeitabhängig
- dünne Separatoren?

Diskussion:

- berechne beste Verbindungen in solchen Netzwerken
- Adjazenzarray als Graphdatenstruktur

2. Kürzeste Wege

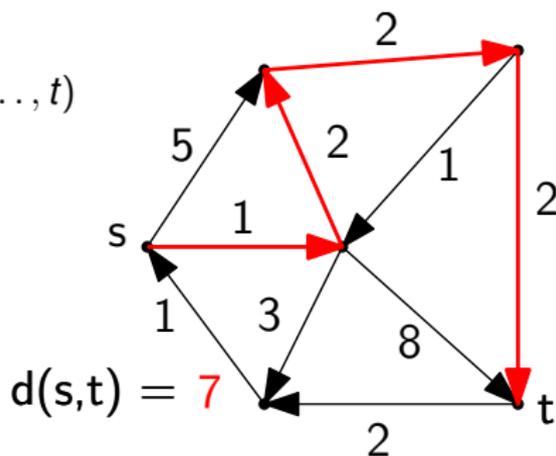


Gegeben:

Graph $G = (V, E, \text{len})$ mit positiver Kantenfunktion $\text{len}: E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$,
Knoten $s, t \in V$

Mögliche Aufgaben

- Berechne Distanz $d(s, t)$
- Finde kürzesten s - t -Pfad $P := (s, \dots, t)$



Azyklichkeit:

- Kürzeste Wege sind zyklenfrei

Aufspannungseigenschaft:

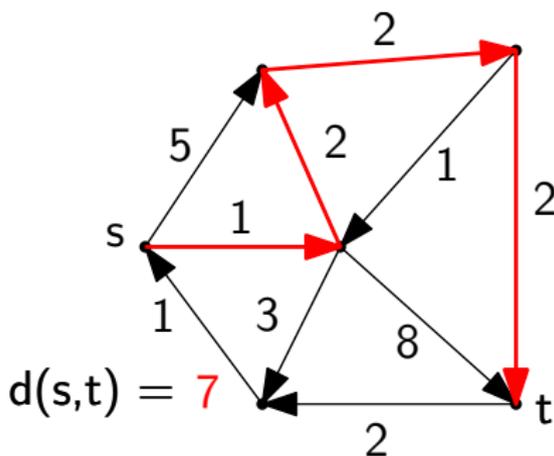
- Alle kürzesten Wege von s aus bilden DAG bzw. Baum

Vererbungseigenschaft:

- Teilwege von kürzesten Wegen sind kürzeste Wege

Abstand:

- Steigender Abstand von Wurzel zu Blättern



Komplexität von **Single-Source Shortest Paths** abhängig vom Eingabegraphen.

- In dieser Vorlesung: Kantengewichte (*fast*) immer nicht-negativ.
- Ein *negativer Zyklus* ist ein Kreis mit negativem Gesamtgewicht.
- Ein *einfacher Pfad* ist ein Pfad bei dem sich kein Knoten wiederholt.

Problemvarianten

- Kantengewichte alle positiv:
Dijkstra's Algorithmus anwendbar (Laufzeit $|V| \log |V| + |E|$)
- Kantengewichte auch negativ, aber kein negativer Zyklus:
Algorithmus von Bellmann-Ford anwendbar (Laufzeit $|V| \cdot |E|$)
- Kantengewichte auch negativ, suche kürzesten einfachen Pfad:
 \mathcal{NP} -schwer, Reduktion von „Problem Longest Path“

Bellman-Ford(G, s)

```
1 for  $v \in V$  do  $d[v] \leftarrow \infty$ 
2  $d[s] \leftarrow 0$ 
3 for  $i = 1$  to  $|V| - 1$  do
4   forall edges  $(u, v) \in E$  do
5     if  $d[u] + \text{len}(u, v) < d[v]$  then
6        $d[v] \leftarrow d[u] + \text{len}(u, v)$ 
```

Bellman-Ford(G, s)

```
1 for  $v \in V$  do  $d[v] \leftarrow \infty$ 
2  $d[s] \leftarrow 0$ 
3 for  $i = 1$  to  $|V| - 1$  do
4   forall edges  $(u, v) \in E$  do
5     if  $d[u] + \text{len}(u, v) < d[v]$  then
6        $d[v] \leftarrow d[u] + \text{len}(u, v)$ 
7 forall edges  $(u, v) \in E$  do
8   if  $d[v] > d[u] + \text{len}(u, v)$  then
9     negative cycle found
```

Problem Longest Path

Gegeben:

- Gerichteter, gewichteter Graph $G = (V, E)$ mit Längenfunktion $len: E \rightarrow \mathbb{N}$
- Zahl $K \in \mathbb{N}$
- Knoten $s, t \in V$

Frage:

- Gibt es einen einfachen s - t -Pfad der Länge mindestens K ?

Problem Longest Path ist \mathcal{NP} -schwer (siehe [Garey & Johnson 79])

DIJKSTRA($G = (V, E), s$)

```
1 forall nodes  $v \in V$  do
2    $d[v] = \infty, p[v] = \mathbf{NULL}$ ;           // distances, parents
3  $d[s] = 0$ 
4  $Q.clear(), Q.insert(s, 0);$                 // container
5 while  $!Q.empty()$  do
6    $u \leftarrow Q.deleteMin();$              // settling node u
7   forall edges  $e = (u, v) \in E$  do
8     // relaxing edges
9     if  $d[u] + len(e) < d[v]$  then
10       $d[v] \leftarrow d[u] + len(e)$ 
11       $p[v] \leftarrow u$ 
12      if  $v \in Q$  then  $Q.decreaseKey(v, d[v])$  else  $Q.insert(v, d[v])$ 
```

Dijkstras Algorithmus

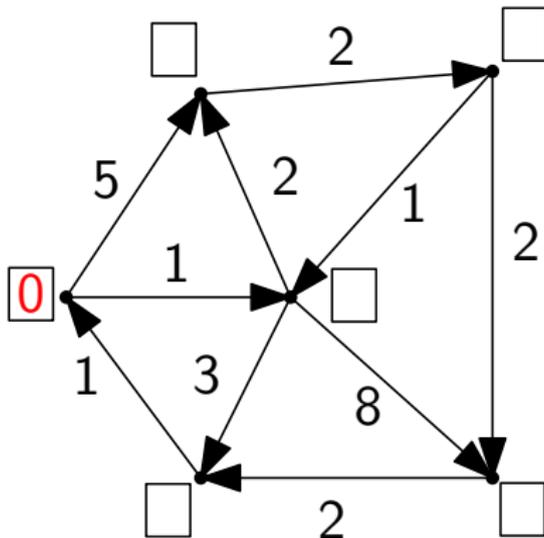
Gegeben: Graph G , Startknoten.

Idee: Suche in G mit zunehmender *Distanz* von s .

Dijkstras Algorithmus

Gegeben: Graph G , Startknoten.

Idee: Suche in G mit zunehmender *Distanz* von s .

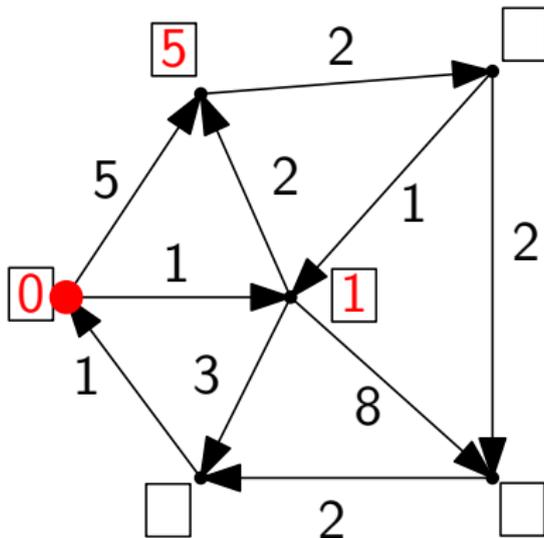


Invariante: Pfade zu *roten* Knoten sind **optimal**.

Dijkstras Algorithmus

Gegeben: Graph G , Startknoten.

Idee: Suche in G mit zunehmender *Distanz* von s .

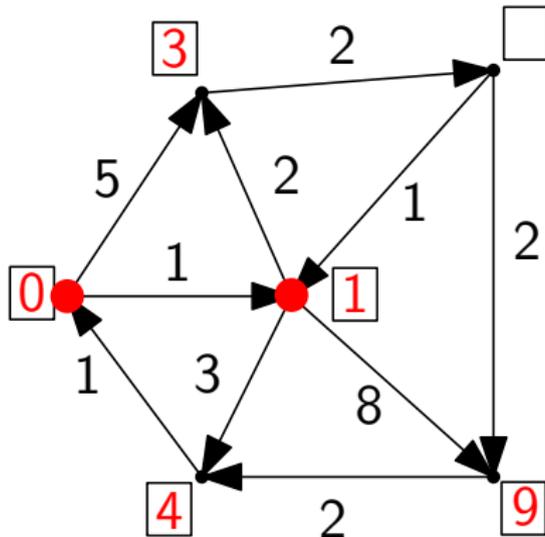


Invariante: Pfade zu *roten* Knoten sind **optimal**.

Dijkstras Algorithmus

Gegeben: Graph G , Startknoten.

Idee: Suche in G mit zunehmender *Distanz* von s .

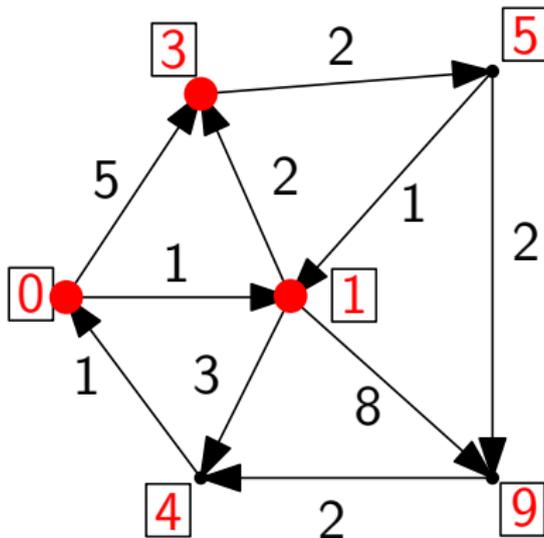


Invariante: Pfade zu *roten* Knoten sind **optimal**.

Dijkstras Algorithmus

Gegeben: Graph G , Startknoten.

Idee: Suche in G mit zunehmender *Distanz* von s .

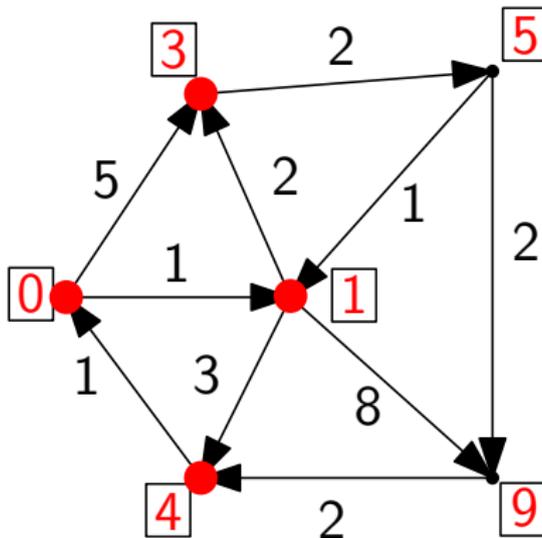


Invariante: Pfade zu *roten* Knoten sind **optimal**.

Dijkstras Algorithmus

Gegeben: Graph G , Startknoten.

Idee: Suche in G mit zunehmender *Distanz* von s .

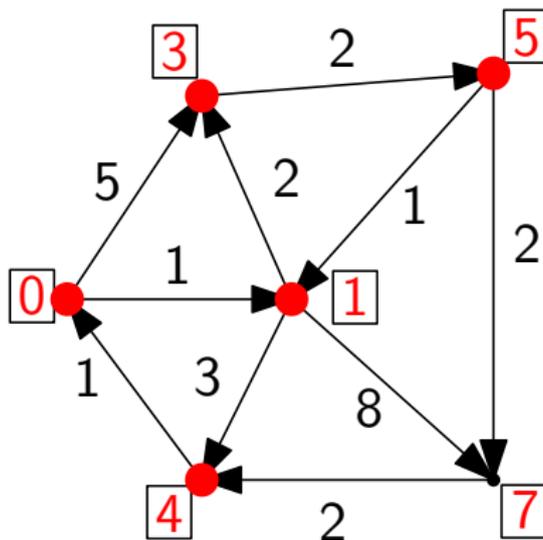


Invariante: Pfade zu *roten* Knoten sind **optimal**.

Dijkstras Algorithmus

Gegeben: Graph G , Startknoten.

Idee: Suche in G mit zunehmender *Distanz* von s .

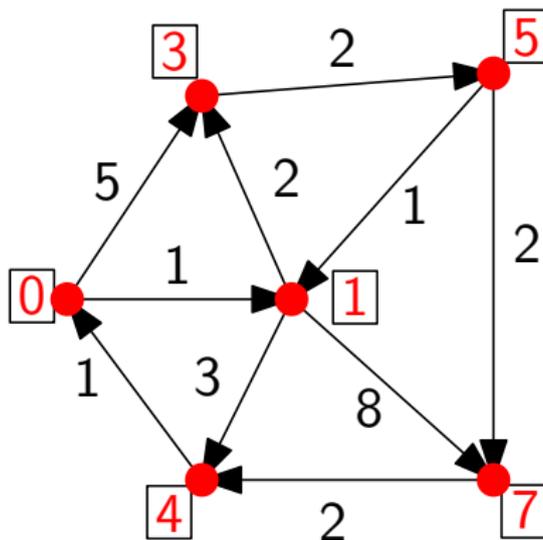


Invariante: Pfade zu *roten* Knoten sind **optimal**.

Dijkstras Algorithmus

Gegeben: Graph G , Startknoten.

Idee: Suche in G mit zunehmender *Distanz* von s .

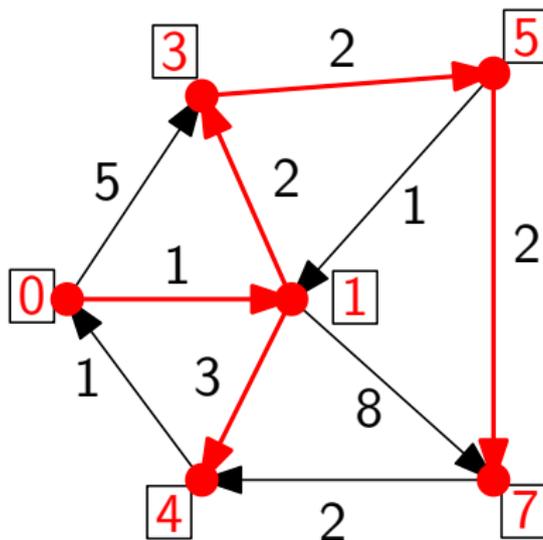


Invariante: Pfade zu *roten* Knoten sind **optimal**.

Dijkstras Algorithmus

Gegeben: Graph G , Startknoten.

Idee: Suche in G mit zunehmender *Distanz* von s .



Invariante: Pfade zu *roten* Knoten sind **optimal**.

DIJKSTRA($G = (V, E), s$)

```
1 forall nodes  $v \in V$  do
2    $d[v] = \infty, p[v] = \text{NULL};$            // distances, parents
3  $d[s] = 0$ 
4  $Q.\text{clear}(), Q.\text{insert}(s, 0);$            // container
5 while  $!Q.\text{empty}()$  do
6    $u \leftarrow Q.\text{deleteMin}();$            // settling node u
7   forall edges  $e = (u, v) \in E$  do
8     // relaxing edges
9     if  $d[u] + \text{len}(e) < d[v]$  then
10       $d[v] \leftarrow d[u] + \text{len}(e)$ 
11       $p[v] \leftarrow u$ 
12      if  $v \in Q$  then  $Q.\text{decreaseKey}(v, d[v])$ 
13      else  $Q.\text{insert}(v, d[v])$ 
```

Kantenrelaxierung: Der Vorgang

1 **if** $d[u] + \text{len}(u, v) < d[v]$ **then** $d[v] \leftarrow d[u] + \text{len}(u, v)$

heißt *Kantenrelaxierung*.

Kantenrelaxierung: Der Vorgang

1 **if** $d[u] + \text{len}(u, v) < d[v]$ **then** $d[v] \leftarrow d[u] + \text{len}(u, v)$

heißt *Kantenrelaxierung*.

Besuchte Knoten: Ein Knoten heißt (zu einem Zeitpunkt) *besucht* (*visited*) wenn er (zu diesem Zeitpunkt) schon in die Queue eingefügt wurde (unabhängig davon, ob er noch in der Queue ist).

Kantenrelaxierung: Der Vorgang

1 **if** $d[u] + \text{len}(u, v) < d[v]$ **then** $d[v] \leftarrow d[u] + \text{len}(u, v)$

heißt *Kantenrelaxierung*.

Besuchte Knoten: Ein Knoten heißt (zu einem Zeitpunkt) *besucht* (*visited*) wenn er (zu diesem Zeitpunkt) schon in die Queue eingefügt wurde (unabhängig davon, ob er noch in der Queue ist).

Abgearbeitete Knoten: Ein Knoten heißt (zu einem Zeitpunkt) *abgearbeitet* (*settled/scanned*) wenn er (zu diesem Zeitpunkt) schon in die Queue eingefügt und wieder extrahiert wurde.

DIJKSTRA($G = (V, E), s$)

```
1 forall nodes  $v \in V$  do  
  |  $d[v] = \infty, p[v] = \text{NULL}$   
 $d[s] = 0, Q.\text{clear}(), Q.\text{insert}(s, 0)$   
4 while ! $Q.\text{empty}()$  do  
  |  $u \leftarrow Q.\text{deleteMin}()$   
  | forall edges  $e = (u, v) \in E$  do  
  |   | if  $d[u] + \text{len}(e) < d[v]$  then  
  |   |   |  $d[v] \leftarrow d[u] + \text{len}(e)$   
  |   |   |  $p[v] \leftarrow u$   
  |   |   | if  $v \in Q$  then  $Q.\text{decreaseKey}(v, d[v])$   
  |   |   | else  $Q.\text{insert}(v, d[v])$ 
```

DIJKSTRA($G = (V, E), s$)

```
1 forall nodes  $v \in V$  do
2    $d[v] = \infty, p[v] = \text{NULL};$  // n Mal
    $d[s] = 0, Q.\text{clear}(), Q.\text{insert}(s, 0)$ 
4 while ! $Q.\text{empty}()$  do
    $u \leftarrow Q.\text{deleteMin}()$ 
6   forall edges  $e = (u, v) \in E$  do
7     if  $d[u] + \text{len}(e) < d[v]$  then
8        $d[v] \leftarrow d[u] + \text{len}(e)$ 
9        $p[v] \leftarrow u$ 
       if  $v \in Q$  then  $Q.\text{decreaseKey}(v, d[v])$ 
       else  $Q.\text{insert}(v, d[v])$ 
```

DIJKSTRA($G = (V, E), s$)

```
1 forall nodes  $v \in V$  do
2    $d[v] = \infty, p[v] = \text{NULL};$  // n Mal
3  $d[s] = 0, Q.\text{clear}(), Q.\text{insert}(s, 0);$  // 1 Mal
4 while  $!Q.\text{empty}()$  do
5    $u \leftarrow Q.\text{deleteMin}()$ 
6   forall edges  $e = (u, v) \in E$  do
7     if  $d[u] + \text{len}(e) < d[v]$  then
8        $d[v] \leftarrow d[u] + \text{len}(e)$ 
9        $p[v] \leftarrow u$ 
       if  $v \in Q$  then  $Q.\text{decreaseKey}(v, d[v])$ 
       else  $Q.\text{insert}(v, d[v])$ 
```

DIJKSTRA($G = (V, E), s$)

```
1 forall nodes  $v \in V$  do
2    $d[v] = \infty, p[v] = \text{NULL};$  // n Mal
3  $d[s] = 0, Q.\text{clear}(), Q.\text{insert}(s, 0);$  // 1 Mal
4 while  $!Q.\text{empty}()$  do
5    $u \leftarrow Q.\text{deleteMin}();$  // n Mal
6   forall edges  $e = (u, v) \in E$  do
7     if  $d[u] + \text{len}(e) < d[v]$  then
8        $d[v] \leftarrow d[u] + \text{len}(e)$ 
9        $p[v] \leftarrow u$ 
       if  $v \in Q$  then  $Q.\text{decreaseKey}(v, d[v])$ 
       else  $Q.\text{insert}(v, d[v])$ 
```

DIJKSTRA($G = (V, E), s$)

```
1 forall nodes  $v \in V$  do
2    $d[v] = \infty, p[v] = \text{NULL};$  // n Mal
3  $d[s] = 0, Q.\text{clear}(), Q.\text{insert}(s, 0);$  // 1 Mal
4 while ! $Q.\text{empty}()$  do
5    $u \leftarrow Q.\text{deleteMin}();$  // n Mal
6   forall edges  $e = (u, v) \in E$  do
7     if  $d[u] + \text{len}(e) < d[v]$  then
8        $d[v] \leftarrow d[u] + \text{len}(e)$ 
9        $p[v] \leftarrow u$ 
10      if  $v \in Q$  then  $Q.\text{decreaseKey}(v, d[v]);$  // m Mal
        else  $Q.\text{insert}(v, d[v])$ 
```

DIJKSTRA($G = (V, E), s$)

```
1 forall nodes  $v \in V$  do
2    $d[v] = \infty, p[v] = \text{NULL};$  // n Mal
3  $d[s] = 0, Q.\text{clear}(), Q.\text{insert}(s, 0);$  // 1 Mal
4 while  $!Q.\text{empty}()$  do
5    $u \leftarrow Q.\text{deleteMin}();$  // n Mal
6   forall edges  $e = (u, v) \in E$  do
7     if  $d[u] + \text{len}(e) < d[v]$  then
8        $d[v] \leftarrow d[u] + \text{len}(e)$ 
9        $p[v] \leftarrow u$ 
10      if  $v \in Q$  then  $Q.\text{decreaseKey}(v, d[v]);$  // m Mal
11      else  $Q.\text{insert}(v, d[v]);$  // n Mal
```

DIJKSTRA($G = (V, E), s$)

```
1 forall nodes  $v \in V$  do
2    $d[v] = \infty, p[v] = \text{NULL};$  // n Mal
3  $d[s] = 0, Q.\text{clear}(), Q.\text{insert}(s, 0);$  // 1 Mal
4 while  $!Q.\text{empty}()$  do
5    $u \leftarrow Q.\text{deleteMin}();$  // n Mal
6   forall edges  $e = (u, v) \in E$  do
7     if  $d[u] + \text{len}(e) < d[v]$  then
8        $d[v] \leftarrow d[u] + \text{len}(e)$ 
9        $p[v] \leftarrow u$ 
10      if  $v \in Q$  then  $Q.\text{decreaseKey}(v, d[v]);$  // m Mal
11      else  $Q.\text{insert}(v, d[v]);$  // n Mal
```

$$T_{\text{DIJKSTRA}} = T_{\text{init}} + n \cdot T_{\text{deleteMin}} + m \cdot T_{\text{decreaseKey}} + n \cdot T_{\text{insert}}$$

$$T_{\text{DIJKSTRA}} = T_{\text{init}} + n \cdot T_{\text{deleteMin}} + m \cdot T_{\text{decreaseKey}} + n \cdot T_{\text{insert}}$$

Operation	Liste (worst-case)	Binary Heap (worst-case)	Binomial heap (worst-case)	Fibonacci heap (amortized)
Init	$\Theta(1)$	$\Theta(1)$	$\Theta(1)$	$\Theta(1)$
Insert	$\Theta(1)$	$\Theta(\log k)$	$\mathcal{O}(\log k)$	$\Theta(1)$
Minimum	$\Theta(n)$	$\Theta(1)$	$\mathcal{O}(\log k)$	$\Theta(1)$
DeleteMin	$\Theta(n)$	$\Theta(\log k)$	$\Theta(\log k)$	$\mathcal{O}(\log k)$
Union	$\Theta(1)$	$\Theta(k)$	$\mathcal{O}(\log k)$	$\Theta(1)$
DecreaseKey	$\Theta(1)$	$\Theta(\log k)$	$\Theta(\log k)$	$\Theta(1)$
Delete	$\Theta(1)$	$\Theta(\log k)$	$\Theta(\log k)$	$\mathcal{O}(\log k)$
Dijkstra	$\mathcal{O}(n^2 + m)$	$\mathcal{O}((n + m) \log n)$	$\mathcal{O}((n + m) \log n)$	$\mathcal{O}(m + n \log n)$

Laufzeit Dijkstra

$$T_{\text{DIJKSTRA}} = T_{\text{init}} + n \cdot T_{\text{deleteMin}} + m \cdot T_{\text{decreaseKey}} + n \cdot T_{\text{insert}}$$

Operation	Liste (worst-case)	Binary Heap (worst-case)	Binomial heap (worst-case)	Fibonacci heap (amortized)
Init	$\Theta(1)$	$\Theta(1)$	$\Theta(1)$	$\Theta(1)$
Insert	$\Theta(1)$	$\Theta(\log k)$	$\mathcal{O}(\log k)$	$\Theta(1)$
Minimum	$\Theta(n)$	$\Theta(1)$	$\mathcal{O}(\log k)$	$\Theta(1)$
DeleteMin	$\Theta(n)$	$\Theta(\log k)$	$\Theta(\log k)$	$\mathcal{O}(\log k)$
Union	$\Theta(1)$	$\Theta(k)$	$\mathcal{O}(\log k)$	$\Theta(1)$
DecreaseKey	$\Theta(1)$	$\Theta(\log k)$	$\Theta(\log k)$	$\Theta(1)$
Delete	$\Theta(1)$	$\Theta(\log k)$	$\Theta(\log k)$	$\mathcal{O}(\log k)$
Dijkstra	$\mathcal{O}(n^2 + m)$	$\mathcal{O}((n + m) \log n)$	$\mathcal{O}((n + m) \log n)$	$\mathcal{O}(m + n \log n)$
Dij ($m \in \mathcal{O}(n)$)	$\mathcal{O}(n^2)$	$\mathcal{O}(n \log n)$	$\mathcal{O}(n \log n)$	$\mathcal{O}(n \log n)$

Transportnetzwerke sind dünn \Rightarrow Binary Heaps

k-ary Heap: Baum mit (max.) k Kindern je Vorgängerknoten

k	Query [sec]
2	1.834
3	1.595
4	1.507
5	1.525
8	1.561

Graph: 18M Knoten, 42M Kanten

k-ary Heap: Baum mit (max.) k Kindern je Vorgängerknoten

k	Query [sec]
2	1.834
3	1.595
4	1.507
5	1.525
8	1.561

Graph: 18M Knoten, 42M Kanten

Dijkstra: ≈ 1.5 s \Rightarrow nicht interaktiv

k-ary Heap: Baum mit (max.) k Kindern je Vorgängerknoten

k	Query [sec]
2	1.834
3	1.595
4	1.507
5	1.525
8	1.561

Graph: 18M Knoten, 42M Kanten

Dijkstra: ≈ 1.5 s \Rightarrow nicht interaktiv
 $n + m$ CPU clock cycles: ≈ 30 ms \Rightarrow viel schneller

k-ary Heap: Baum mit (max.) k Kindern je Vorgängerknoten

k	Query [sec]
2	1.834
3	1.595
4	1.507
5	1.525
8	1.561

Graph: 18M Knoten, 42M Kanten

Dijkstra:	≈ 1.5 s	\Rightarrow nicht interaktiv
$n + m$ CPU clock cycles:	≈ 30 ms	\Rightarrow viel schneller
BFS:	≈ 1.2 s	\Rightarrow an der Queue liegt's nicht

k-ary Heap: Baum mit (max.) k Kindern je Vorgängerknoten

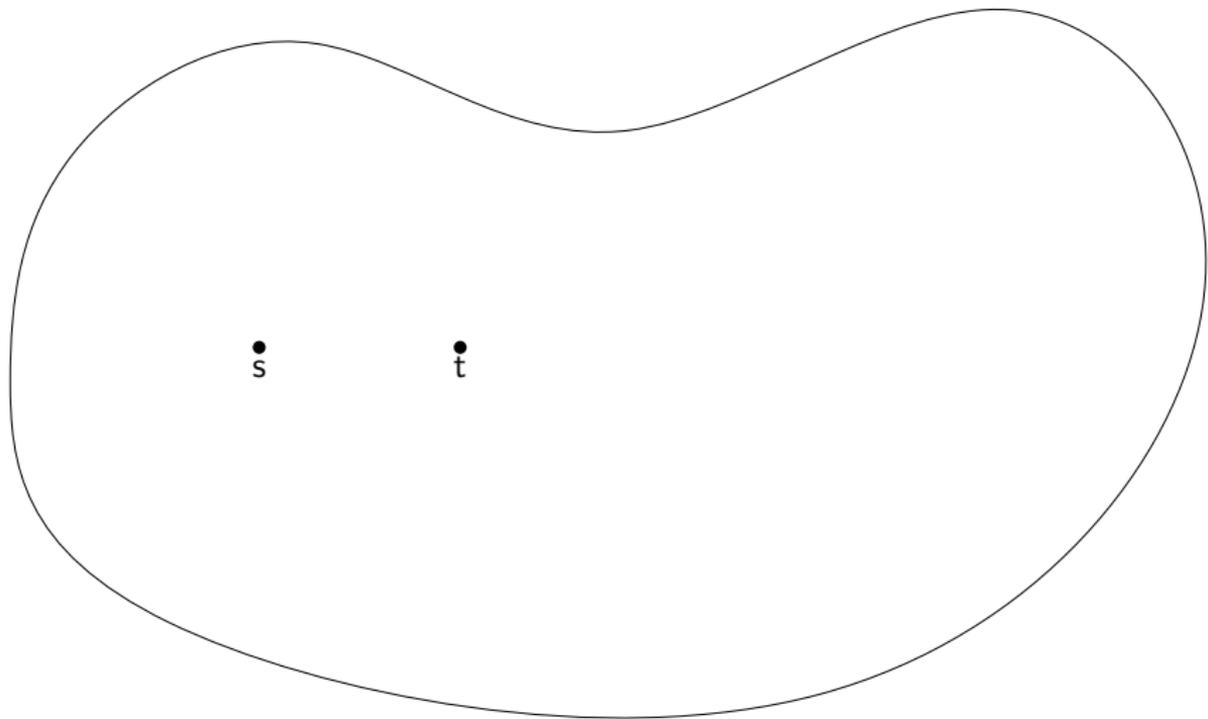
k	Query [sec]
2	1.834
3	1.595
4	1.507
5	1.525
8	1.561

Graph: 18M Knoten, 42M Kanten

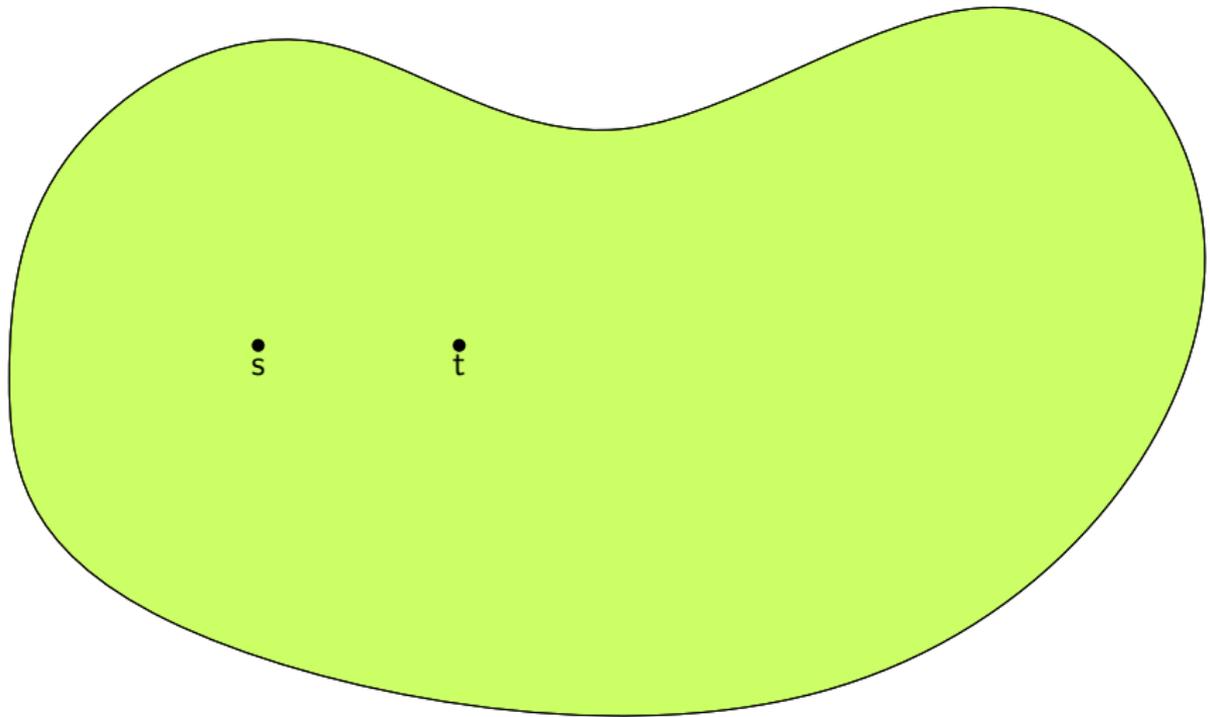
Dijkstra: ≈ 1.5 s \Rightarrow nicht interaktiv
 $n + m$ CPU clock cycles: ≈ 30 ms \Rightarrow viel schneller
BFS: ≈ 1.2 s \Rightarrow an der Queue liegt's nicht

Performanz von Graphsuchen ist speicher-begrenzt

Schematischer Suchraum, Dijkstra



Schematischer Suchraum, Dijkstra



Beobachtung

- Dijkstra's Algorithmus durchsucht den ganzen Graphen
- Viel unnütze Information, vor allem wenn s und t nahe beinander

Beobachtung

- Dijkstra's Algorithmus durchsucht den ganzen Graphen
- Viel unnütze Information, vor allem wenn s und t nahe beinander

Idee

- stoppe die Anfrage, sobald t aus der Queue entfernt wurde
- **Suchraum**: Menge der abgearbeiteten Knoten

Beobachtung

- Dijkstra's Algorithmus durchsucht den ganzen Graphen
- Viel unnütze Information, vor allem wenn s und t nahe beinander

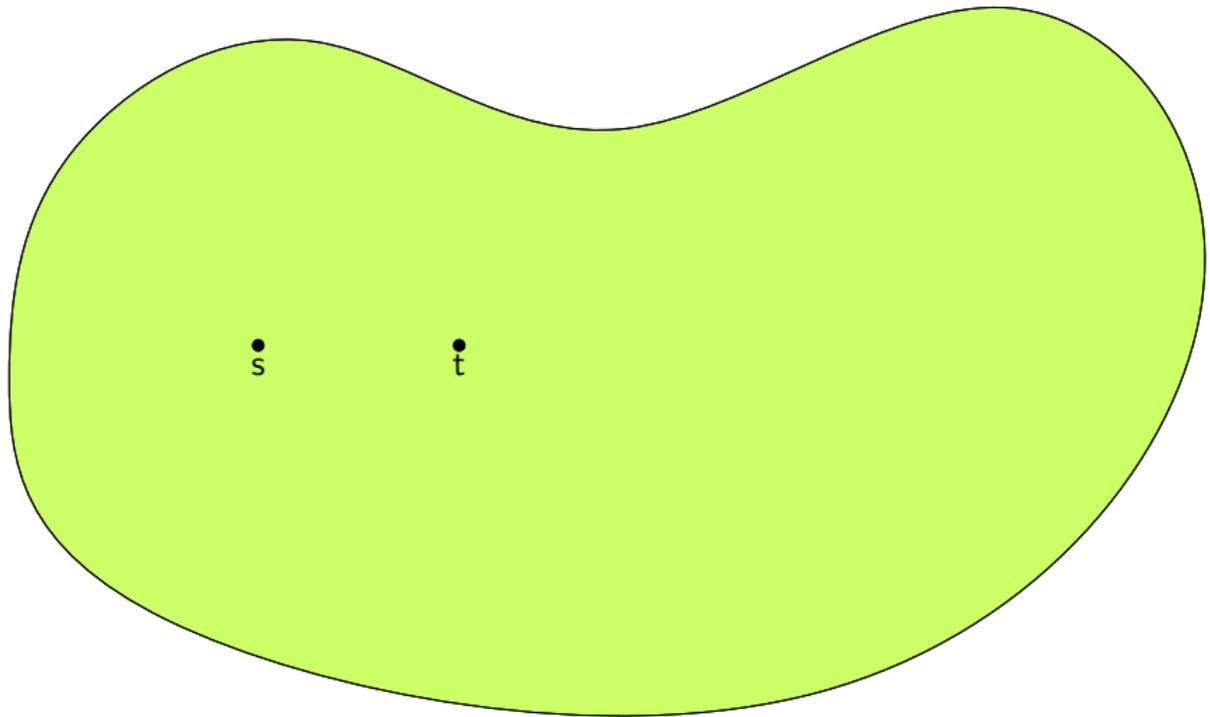
Idee

- stoppe die Anfrage, sobald t aus der Queue entfernt wurde
- **Suchraum**: Menge der abgearbeiteten Knoten

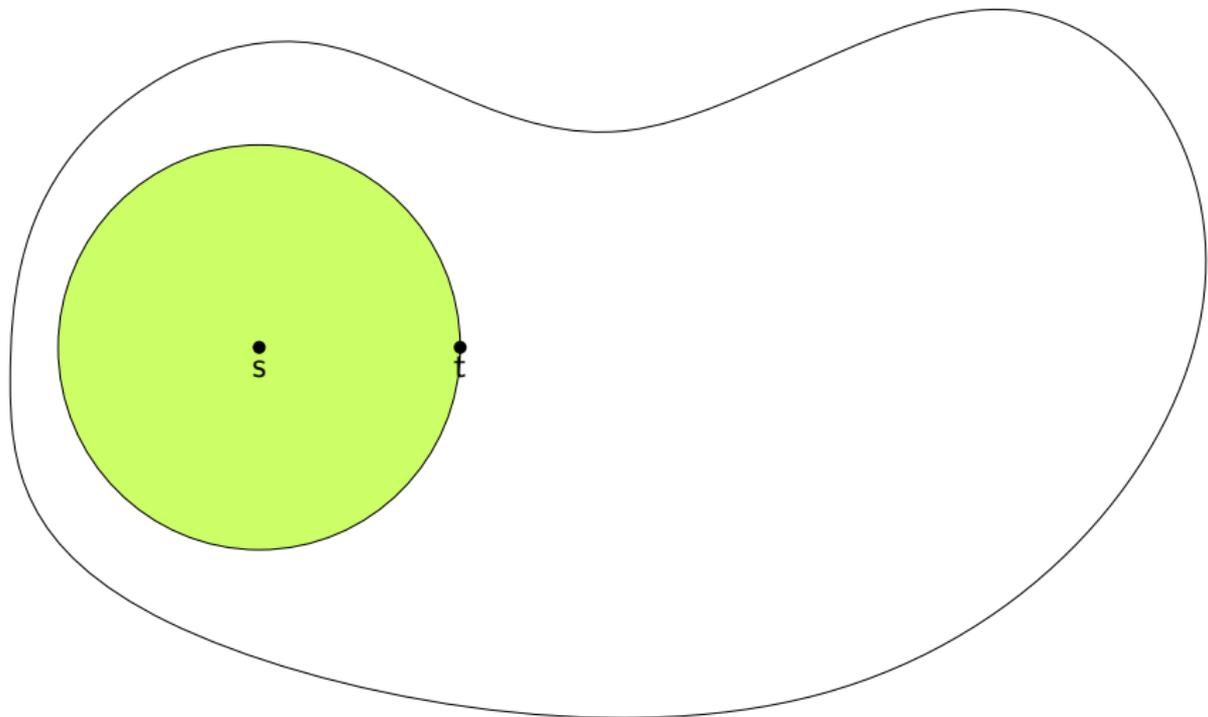
Korrektheit

- Wert $d[v]$ ändert sich nicht mehr, sobald v abgearbeitet wurde
- Korrektheit des Vorgehens bleibt also erhalten
- Reduziert durchschnittlichen Suchraum von n auf $\approx n/2$

Schematischer Suchraum, Dijkstra



Schematischer Suchraum, Dijkstra



DIJKSTRA($G = (V, E)$, s , t)

```
1 forall nodes  $v \in V$  do
2    $d[v] = \infty$ ,  $p[v] = \text{NULL}$ ;           // distances, parents
3  $d[s] = 0$ 
4  $Q.\text{clear}()$ ,  $Q.\text{add}(s, 0)$ ;           // container
5 while ! $Q.\text{empty}()$  do
6    $u \leftarrow Q.\text{deleteMin}()$ ;         // settling node u
7   if  $u = t$  then return
8   forall edges  $e = (u, v) \in E$  do
9     if  $d[u] + \text{len}(e) < d[v]$  then
10       $d[v] \leftarrow d[u] + \text{len}(e)$ 
11       $p[v] \leftarrow u$ 
12      if  $v \in Q$  then  $Q.\text{decreaseKey}(v, d[v])$ 
13      else  $Q.\text{insert}(v, d[v])$ 
```

- Häufig werden viele Anfragen auf gleichem Netzwerk gestellt.
- Wo könnte ein Problem bzgl. der Laufzeit liegen?

Dijkstra mit Abbruchkriterium

DIJKSTRA($G = (V, E)$, s , t)

```
1 forall nodes  $v \in V$  do
2    $d[v] = \infty$ ,  $p[v] = \text{NULL}$ ;           // distances, parents
3  $d[s] = 0$ 
4  $Q.\text{clear}()$ ,  $Q.\text{add}(s, 0)$ ;           // container
5 while  $!Q.\text{empty}()$  do
6    $u \leftarrow Q.\text{deleteMin}()$ ;           // settling node  $u$ 
7   break if  $u = t$ 
8   forall edges  $e = (u, v) \in E$  do
9     // relaxing edges
10    if  $d[u] + \text{len}(e) < d[v]$  then
11       $d[v] \leftarrow d[u] + \text{len}(e)$ 
12       $p[v] \leftarrow u$ 
13      if  $v \in Q$  then  $Q.\text{decreaseKey}(v, d[v])$ 
14      else  $Q.\text{insert}(v, d[v])$ 
```

DIJKSTRA($G = (V, E)$, s , t)

```
1 forall nodes  $v \in V$  do
2   [  $d[v] = \infty$ ,  $p[v] = \text{NULL}$  ; // distances, parents
3    $d[s] = 0$ 
4    $Q.\text{clear}()$ ,  $Q.\text{add}(s, 0)$ ; // container
5   while ! $Q.\text{empty}()$  do
6      $u \leftarrow Q.\text{deleteMin}()$ ; // settling node u
7     break if  $u = t$ 
8     forall edges  $e = (u, v) \in E$  do
9       // relaxing edges
10      if  $d[u] + \text{len}(e) < d[v]$  then
11         $d[v] \leftarrow d[u] + \text{len}(e)$ 
12         $p[v] \leftarrow u$ 
13        if  $v \in Q$  then  $Q.\text{decreaseKey}(v, d[v])$ 
14        else  $Q.\text{insert}(v, d[v])$ 
```

Problem

- Häufig viele Anfragen auf gleichem Graphen
- Die Initialisierung muss immer für alle Knoten neu ausgeführt werden

Problem

- Häufig viele Anfragen auf gleichem Graphen
- Die Initialisierung muss immer für alle Knoten neu ausgeführt werden

Idee

- Speiche zusätzlichen „Timestamp“ $run[v]$ für jeden Knoten
- Benutze Zähler $count$
- Damit kann abgefragt werden, ob ein Knoten im aktuellen Lauf schon besucht wurde.

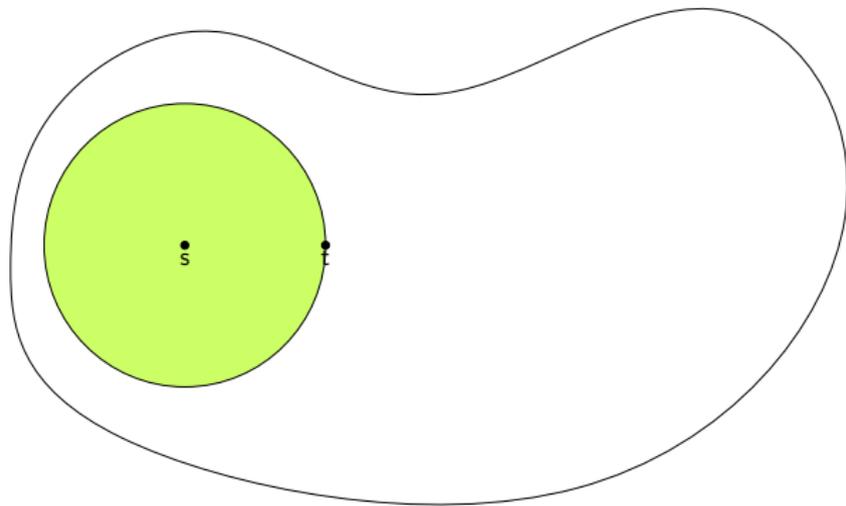
Dijkstra mit Timestamps

```
1 count ← count + 1 ;
2 d[s] = 0
3 Q.clear(), Q.add(s, 0)
4 while !Q.empty() do
5     u ← Q.deleteMin()
6     if u = t then return
7     forall edges e = (u, v) ∈ E do
8         if run[v] ≠ count then
9             d[v] ← d[u] + len(e)
10            Q.insert(v, d[v])
11            run[v] ← count
12        else if d[u] + len(e) < d[v] then
13            d[v] ← d[u] + len(e)
14            Q.decreaseKey(v, d[v])
```

// Überlauf

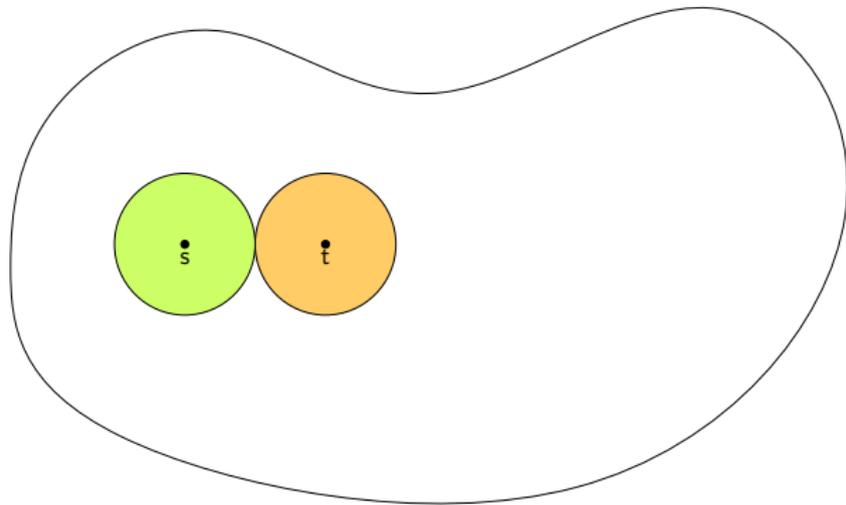
Bidirektionale Suche





Beobachtung: Ein kürzester s - t -Weg lässt sich finden durch

- Normaler Dijkstra (Vorwärtssuche) von s
- Dijkstra auf Graph mit umgedrehten Kantenrichtungen (Rückwärtssuche) von t

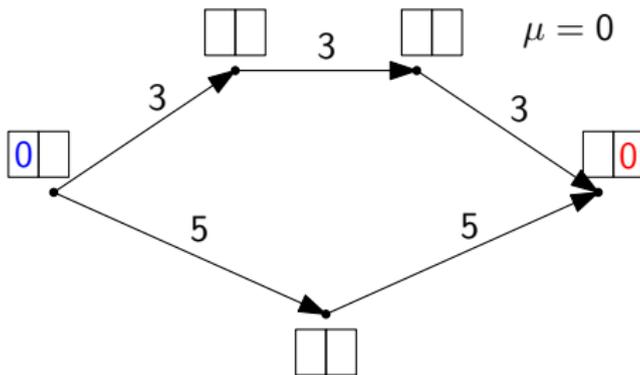


Idee: Kombiniere beide Suchen

- „Gleichzeitig“ Vor- und Rückwärtssuche
- Abbruch wenn beide Suchen „weit genug fortgeschritten“
- Weg dann zusammensetzen

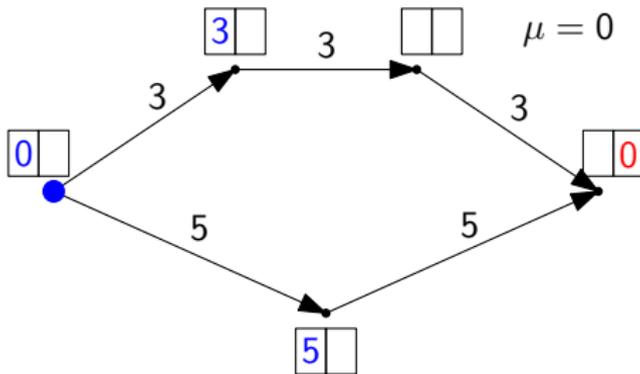
Anfrage:

- alterniere Vorwärts- und Rückwärtsuche
 - vorwärts: relaxiere ausgehende Kanten
 - rückwärts: relaxiere eingehende Kanten



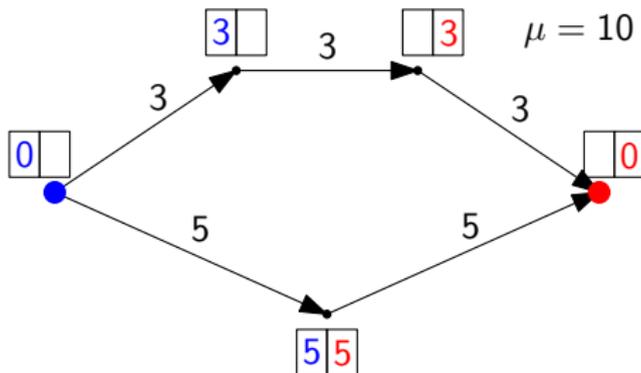
Anfrage:

- alterniere Vorwärts- und Rückwärtsuche
 - vorwärts: relaxiere ausgehende Kanten
 - rückwärts: relaxiere eingehende Kanten



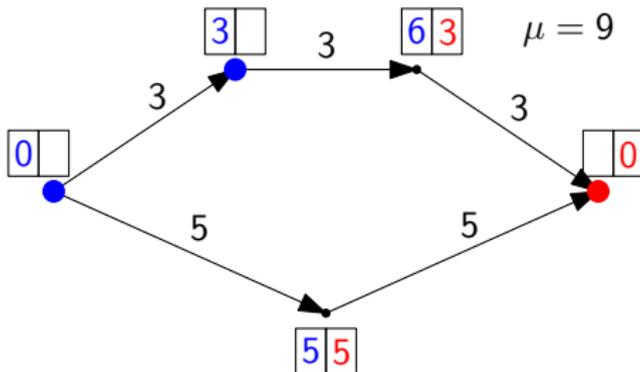
Anfrage:

- alterniere Vorwärts- und Rückwärtsuche
 - vorwärts: relaxiere ausgehende Kanten
 - rückwärts: relaxiere eingehende Kanten



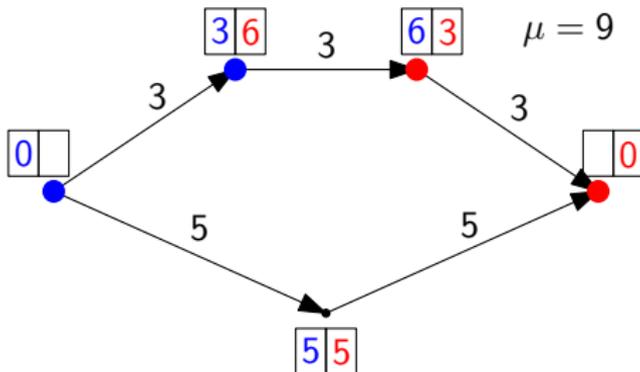
Anfrage:

- alterniere Vorwärts- und Rückwärtsuche
 - vorwärts: relaxiere ausgehende Kanten
 - rückwärts: relaxiere eingehende Kanten



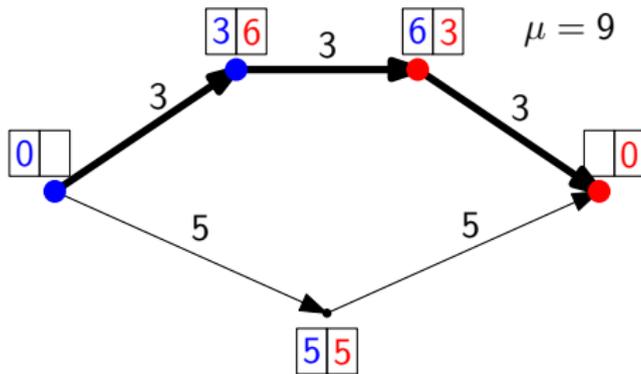
Anfrage:

- alterniere Vorwärts- und Rückwärtsuche
 - vorwärts: relaxiere ausgehende Kanten
 - rückwärts: relaxiere eingehende Kanten



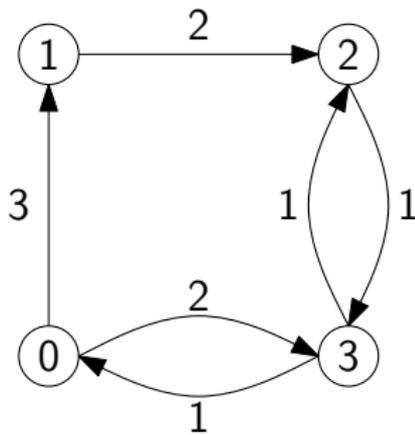
Anfrage:

- alterniere Vorwärts- und Rückwärtsuche
 - vorwärts: relaxiere ausgehende Kanten
 - rückwärts: relaxiere eingehende Kanten



Problem:

- ein- und ausgehende Kanten-Inzidenz benötigt
- Graph (fast) ungerichtet



Problem:

- ein- und ausgehende Kanten-Inzidenz benötigt
- Graph (fast) ungerichtet

firstEdge

0	3	5	7	10
---	---	---	---	----

targetNode

1	3	3	0	2	1	3	0	0	2
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

weight

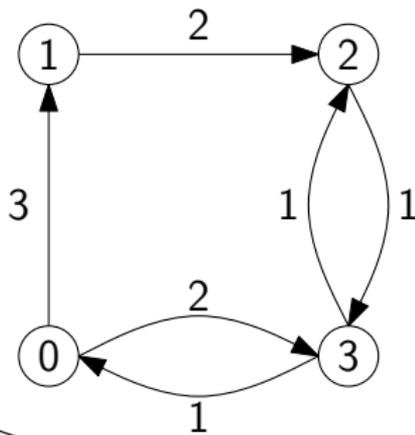
3	2	1	3	2	2	1	1	2	1
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

isIncoming

-	-	✓	✓	-	✓	✓	-	✓	✓
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

isOutgoing

✓	✓	-	-	✓	-	✓	✓	-	✓
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---



- Input ist Graph $G = (V, E, \text{len})$ und Knoten $s, t \in V$.
- Für Inputgraphen G bezeichne $\overleftarrow{G} := (V, \overleftarrow{E}, \overleftarrow{\text{len}})$ den *umgekehrten Graphen*, d.h.

$$\begin{aligned}\overleftarrow{E} &:= \{(v, u) \in V \times V \mid (u, v) \in E\} \\ \overleftarrow{\text{len}}(u, v) &= \text{len}(v, u)\end{aligned}$$

- Die **Vorwärtssuche** ist Dijkstra's Algo mit Start s auf G
- Die **Rückwärtssuche** ist Dijkstra's Algo mit Start t auf \overleftarrow{G}
- Die Queue der Vorwärtssuche ist \overrightarrow{Q}
- Die Queue der Rückwärtssuche ist \overleftarrow{Q}
- Der Distanzvektor der Vorwärtssuche ist $\overrightarrow{d}[]$
- Der Distanzvektor der Rückwärtssuche ist $\overleftarrow{d}[]$

- Vor- und Rückwärtssuche werden abwechselnd ausgeführt
- Es wird zusätzlich die vorläufige Distanz

$$\mu := \min_{v \in V} (\vec{d}[v] + \overleftarrow{d}[v])$$

berechnet, sowie der (vorläufige) Mittelknoten m .

- Dazu wird bei der Relaxierung von Kante (u, v) zusätzlich

$$\mu := \min\{\mu, \vec{d}[v] + \overleftarrow{d}[v]\}$$

ausgeführt und m ggfs. aktualisiert. (Initial ist $\mu = \infty$).

- Nach Terminierung beinhaltet μ die Distanz $d(s, t)$,
 $P = s, \dots, m, \dots, t$ ist kürzester Pfad.

- Vor- und Rückwärtssuche werden abwechselnd ausgeführt
- Es wird zusätzlich die vorläufige Distanz

$$\mu := \min_{v \in V} (\vec{d}[v] + \overleftarrow{d}[v])$$

berechnet, sowie der (vorläufige) Mittelknoten m .

- Dazu wird bei der Relaxierung von Kante (u, v) zusätzlich

$$\mu := \min\{\mu, \vec{d}[v] + \overleftarrow{d}[v]\}$$

ausgeführt und m ggfs. aktualisiert. (Initial ist $\mu = \infty$).

- Nach Terminierung beinhaltet μ die Distanz $d(s, t)$,
 $P = s, \dots, m, \dots, t$ ist kürzester Pfad.

Was sind gute Abbruchstrategien?

Abbruchstrategie (1)

Abbruch, sobald ein Knoten m existiert, der von beiden Suchen abgearbeitet wurde.

Abbruchstrategie (1)

Abbruch, sobald ein Knoten m existiert, der von beiden Suchen abgearbeitet wurde.

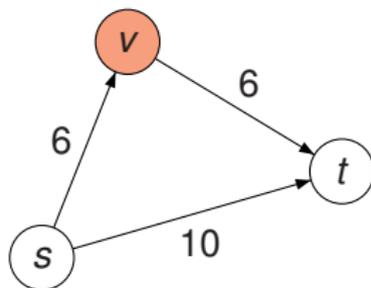
Frage: Ist m dann auf einem kürzesten s - t -Weg enthalten?

Abbruchstrategie (1)

Abbruch, sobald ein Knoten m existiert, der von beiden Suchen abgearbeitet wurde.

Frage: Ist m dann auf einem kürzesten s - t -Weg enthalten?

Nein, Gegenbeispiel:



Abbruchstrategie (1)

Abbruch, sobald ein Knoten m existiert, der von beiden Suchen abgearbeitet wurde.

Abbruchstrategie (1) berechnet $d(s, t)$ korrekt. Beweisskizze:

- O.B.d.A sei $d(s, t) < \infty$ (andernfalls klar).
- Klar: $\vec{d}[v] + \overleftarrow{d}[v] \geq \text{dist}(s, t)$.
- Seien $\vec{S}, \overleftarrow{S}$ die abgearbeiteten Knoten von Vor- und Rückwärtssuche nach Terminierung.
- Sei $P = (v_1, \dots, v_k)$ ein kürzester s - t -Weg. Wir zeigen:
 $\{v_1, \dots, v_k\} \subseteq \vec{S} \cup \overleftarrow{S}$ oder $\text{len}(P) = \text{dist}(s, m) + \text{dist}(m, t)$.

Abbruchstrategie (1)

Abbruch, sobald ein Knoten m existiert, der von beiden Suchen abgearbeitet wurde.

- Sei $P = (v_1, \dots, v_k)$ ein kürzester s - t -Weg. Wir zeigen:
 $\{v_1, \dots, v_k\} \subseteq \vec{S} \cup \overleftarrow{S}$ oder $\text{len}(P) = \text{dist}(s, m) + \text{dist}(m, t)$.
- Angenommen es gibt $v_i \notin \vec{S} \cup \overleftarrow{S}$.
- Dann gilt

$$\begin{aligned}\text{dist}(s, v_i) &\geq \text{dist}(s, m) \\ \text{dist}(v_i, t) &\geq \text{dist}(m, t)\end{aligned}$$

Also

$$\text{len}(P) = \text{dist}(s, v_i) + \text{dist}(v_i, t) \geq \text{dist}(s, m) + \text{dist}(m, t).$$

Abbruchstrategie (2)

Abbruch, sobald $\mu \leq \min\text{Key}(\vec{Q}) + \min\text{Key}(\overleftarrow{Q})$

Abbruchstrategie (2)

Abbruch, sobald $\mu \leq \min\text{Key}(\vec{Q}) + \min\text{Key}(\overleftarrow{Q})$

Abbruchstrategie (2) berechnet $d(s, t)$ korrekt. Beweisskizze:

- O.B.d.A sei $d(s, t) < \infty$ (andernfalls klar).
- Klar: $\vec{d}[v] + \overleftarrow{d}[v] \geq \text{dist}(s, t)$.

Abbruchstrategie (2)

Abbruch, sobald $\mu \leq \min\text{Key}(\vec{Q}) + \min\text{Key}(\overleftarrow{Q})$

Annahme: $\mu > d(s, t)$ nach Terminierung.

- Dann gibt es einen s - t Pfad P der kürzer als μ ist.
- Auf P gibt es eine Kante (u, v) mit $d(s, u) \leq \min\text{Key}(\vec{Q})$ und $d(v, t) \leq \min\text{Key}(\overleftarrow{Q})$.
- Also müssen u und v schon abgearbeitet worden sein (o.B.d.A. u vor v)
- Beim relaxieren von (u, v) wäre P entdeckt worden und μ aktualisiert

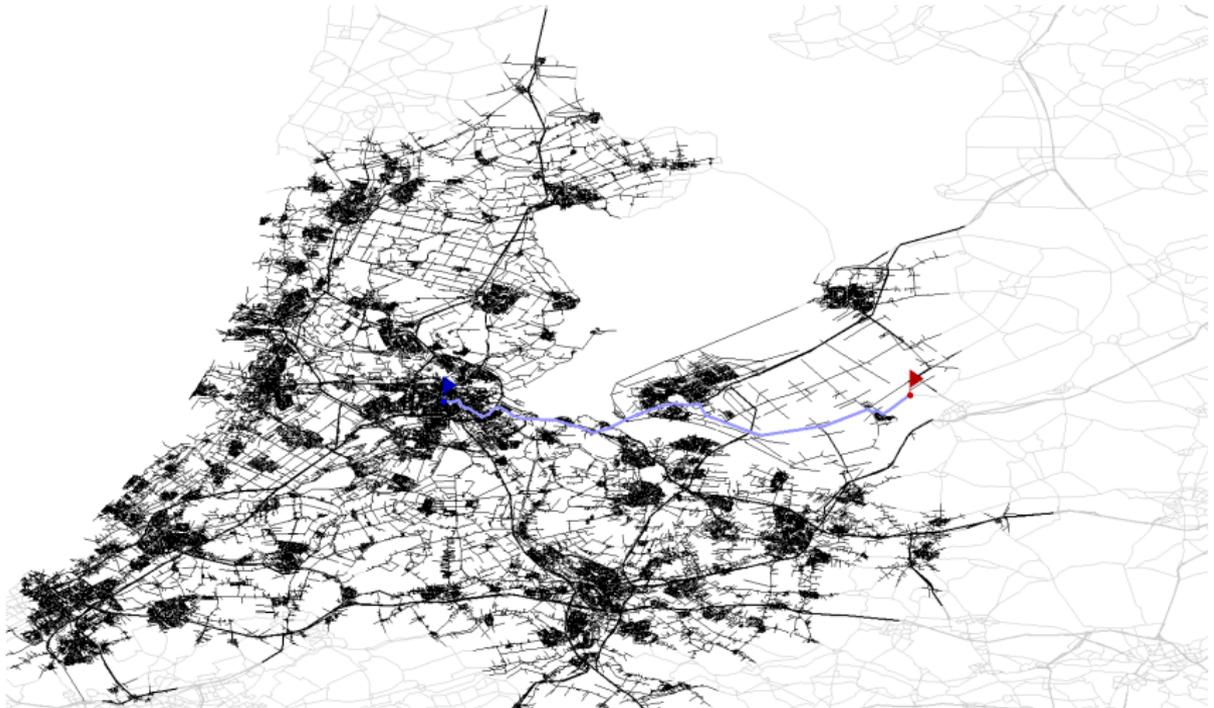
Damit ist $\mu < d(s, t)$. Widerspruch!

Frage: Was sind mögliche Wechselstrategien?

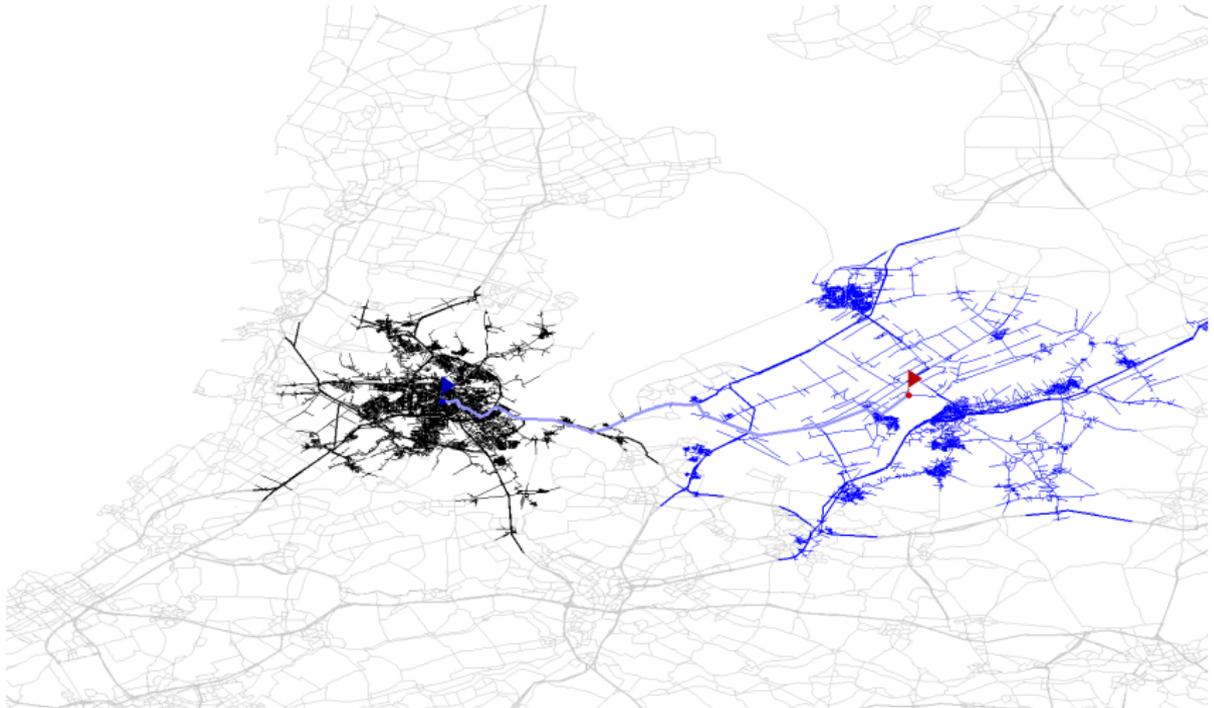
Mögliche Wechselstrategien

- Prinzipiell jede Wechselstrategie möglich
- Wechsle nach jedem Schritt zur entgegengesetzten Suche
- Führe immer die Suche mit der kleineren Anzahl Elemente in Queue aus
- Führe immer die Suche mit dem kleineren minimalen Queueelement aus
- Oder: Parallele Ausführung auf zwei Kernen

Beispiel



Beispiel



Beschleunigung

- Annahme: Suchraum ist Kreisscheibe mit Radius r .

⇒ Speedup bzgl. Suchraum (ca.):

$$\frac{\text{Dijkstra}}{\text{Bidir. Suche}} \approx \frac{\pi r^2}{2 \cdot \pi \left(\frac{r}{2}\right)^2} = 2$$

- Führe Suchen *parallel* aus.

⇒ Gesamtspeedup ca. 4.

Beschleunigung

- Annahme: Suchraum ist Kreisscheibe mit Radius r .

⇒ Speedup bzgl. Suchraum (ca.):

$$\frac{\text{Dijkstra}}{\text{Bidir. Suche}} \approx \frac{\pi r^2}{2 \cdot \pi \left(\frac{r}{2}\right)^2} = 2$$

- Führe Suchen *parallel* aus.

⇒ Gesamtspeedup ca. 4.

Wichtiger Bestandteil vieler effizienter Techniken!

Problem:

- Zufallsanfragen geben wenig Informationen
- Wie ist die Varianz?
- Werden nahe oder ferne Anfragen beschleunigt?

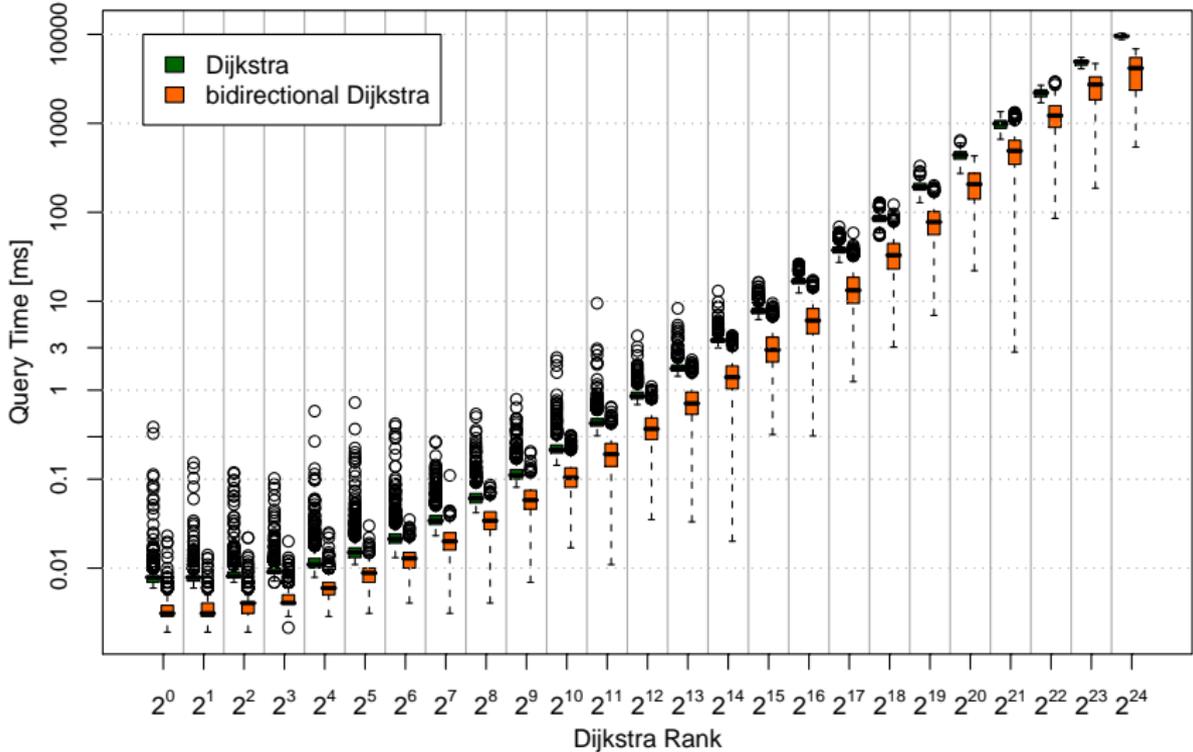
Problem:

- Zufallsanfragen geben wenig Informationen
- Wie ist die Varianz?
- Werden nahe oder ferne Anfragen beschleunigt?

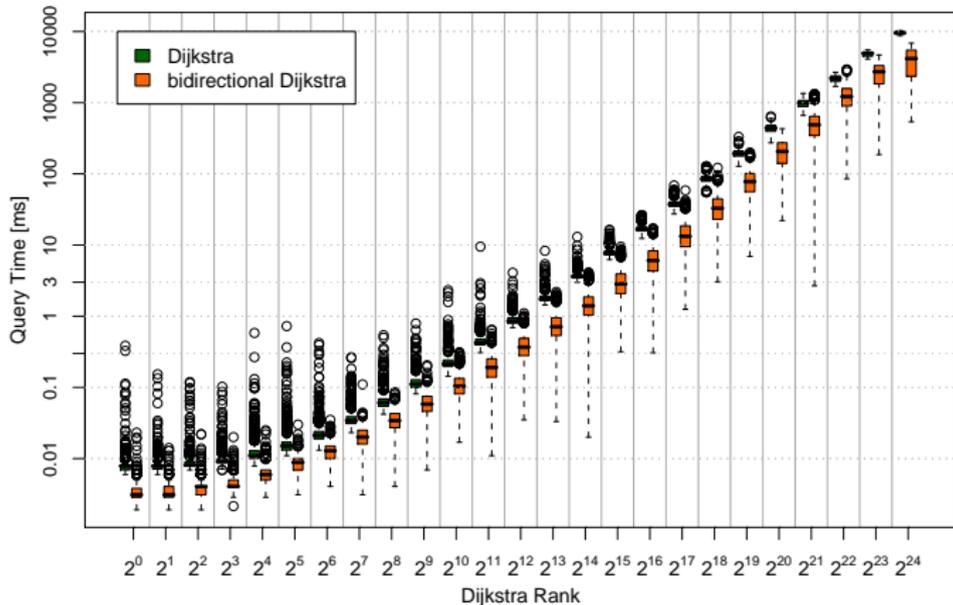
Idee:

- DIJKSTRA definiert für gegebenen Startknoten Ordnung für auf den Knoten
- DIJKSTRA-Rang $r_s(u)$ eines Knoten u für gegebenes s
- wähle 1000 Startknoten und analysiere jeweils die Suchzeiten um die Knoten mit Rang $2^1, \dots, 2^{\log n}$ zu finden
- zeichne Plot

Rank Bidirektionale Suche



Rank Bidirektionale Suche



- Ausreißer bei nahen Anfragen (vor allem unidirektional)
- Beschleunigung unabhängig vom Rang (immer ca. Faktor 2)
- Varianz etwas höher als bei unidirektionaler Suche
- manche Anfragen sehr schnell

Mittwoch, 16. April 2014

-  Ittai Abraham, Daniel Delling, Andrew V. Goldberg, and Renato F. Werneck.
Hierarchical hub labelings for shortest paths.
In *Proceedings of the 20th Annual European Symposium on Algorithms (ESA'12)*, volume 7501 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 24–35. Springer, 2012.
-  Julian Arz, Dennis Luxen, and Peter Sanders.
Transit node routing reconsidered.
In *Proceedings of the 12th International Symposium on Experimental Algorithms (SEA'13)*, volume 7933 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 55–66. Springer, 2013.
-  Daniel Delling, Andrew V. Goldberg, Thomas Pajor, and Renato F. Werneck.
Customizable route planning.
In *Proceedings of the 10th International Symposium on Experimental Algorithms (SEA'11)*, volume 6630 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 376–387. Springer, 2011.
-  Edsger W. Dijkstra.
A note on two problems in connexion with graphs.
Numerische Mathematik, 1:269–271, 1959.
-  Andrew V. Goldberg and Chris Harrelson.
Computing the shortest path: A* search meets graph theory.
In *Proceedings of the 16th Annual ACM–SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA'05)*, pages 156–165. SIAM, 2005.
-  Robert Geisberger, Peter Sanders, Dominik Schultes, and Daniel Delling.
Contraction hierarchies: Faster and simpler hierarchical routing in road networks.
In *Proceedings of the 7th Workshop on Experimental Algorithms (WEA'08)*, volume 5038 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 319–333. Springer, June 2008.



Andrew V. Goldberg and Renato F. Werneck.

Computing point-to-point shortest paths from external memory.

In *Proceedings of the 7th Workshop on Algorithm Engineering and Experiments (ALENEX'05)*, pages 26–40. SIAM, 2005.



Ulrich Lauther.

An extremely fast, exact algorithm for finding shortest paths in static networks with geographical background.

In *Geoinformation und Mobilität - von der Forschung zur praktischen Anwendung*, volume 22, pages 219–230. IfGI prints, 2004.