Karlsruher Institut für Technologie
Fakultät für Informatik
ITI Wagner

Algorithmen für Planare Graphen
SS 14
Dorothea Wagner, Tamara Mchedlidze und Andreas Gemsa

Drittes Übungsblatt

Ausgabe: 14. Mai 2014
Abgabe: Keine, Besprechung in einer der Übungen

1 Folgerung aus dem Planar Separator Theorem:

Zeigen Sie:

Zu einem zusammenhängenden, planaren Graphen $G = (V, E)$ mit $n \geq 5$ Knoten und maximalem Knotengrad Δ gibt es einen *Schnitt* $S \subseteq E$ von G mit $|S| \leq 4\Delta\sqrt{n}$, so dass $G - S = (V, E \setminus S)$ aus zwei disjunkten Graphen $G_1 = (V_1, E_1)$ und $G_2 = (V_2, E_2)$ mit $|V_1| \leq \frac{2}{3}n$, $|V_2| \leq \frac{2}{3}n$, $V_1 \cup V_2 = V$ und $E_1 \cup E_2 = E \setminus S$ besteht.

2 Separatoren

Wir sagen eine Klasse $\mathcal{K}$ von Graphen hat einen $f(n)$-Separator, wenn folgende Aussagen für diese Graphklasse stimmt:

Für jeden Graph $G = (V, E)$ in $\mathcal{K}$ mit n Knoten gibt es Konstanten $\alpha < 1$, $c > 0$, so dass eine Partition der Knotenmenge in Mengen V_1, V_2 und S mit folgenden Eigenschaften existiert: Es gibt kein Knotenpaar u, v mit $u \in V_1$ und $v \in V_2$ für die gilt $\{u, v\} \in E$, und es gelte außerdem $|V_1|, |V_2| \leq \alpha \cdot n$, und $|S| \leq c \cdot f(n)$.

a) Zeigen Sie, dass die Graphklasse der Bäume einen 1-Separator hat.

Hinweis: Probieren Sie die Aussage für $\alpha = 2/3$ zu zeigen.

b) Zeigen Sie, dass die Klasse der 2-fach zusammenhängenden Graphen einen 1-Separator hat.

Hinweis: Ein außenplanarer Graph ist ein planarer Graph für den eine planare Einbettung existiert bei der alle Knoten auf der äußeren Facette liegen. Ein 2-fach zusammenhängender außenplanarer Graph G ist eine Triangulation eines n-gons (wobei evtl. Kanten fehlen können). Löscht man vom dualen Graph G^* (dual zu G) den Knoten welcher der äußeren Facetten in G entspricht, dann ist der resultierende Graph ein Baum. Nutzen Sie diese Eigenschaft in Kombination mit der Erkenntnis aus a) um b) zu zeigen.

Bitte wenden.

3 Schnitte, Kreise und Bäume im Dualgraph

Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

1. Sei $G = (V, E)$ ein planarer, zusammenhängender Graph mit Dualgraph G^*. Für eine Teilmenge $E' \subseteq E$ gilt, dass der Teilgraph (V, E') von G genau dann einen Kreis enthält, wenn der Teilgraph $(V^*, (E \setminus E')^*)$ von G^* unzusammenhängend ist.
2. Sei $G = (V, E)$ ein planarer, zusammenhängender Graph mit Dualgraph G^* und $E' \subseteq E$. Dann ist (V, E') ein aufspannender Baum von G genau dann, wenn $(V^*, (E \setminus E')^*)$ ein aufspannender Baum von G^* ist.

4 Adjazenztest in planaren Graphen

Sei G ein planarer Graph mit n Knoten. Geben Sie eine Datenstruktur mit linearer Größe an, mit deren Hilfe nach linearer Vorberechnung Adjazenzen von Knoten in konstanter Zeit abgefragt werden können. Das heißt, gegeben zwei Knoten u und v von G, kann die Frage ob die Kante $\{u, v\}$ in G ist, in konstanter Zeit beantwortet werden.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass sich jeder planare Graph in einen gerichteten Graph umwandeln lässt bei dem jeder Knoten höchstens fünf ausgehende Kanten hat. Geben Sie dann einen Algorithmus mit linearer Laufzeit an der dieses leistet.

Bonusfrage: Lässt sich die Datenstruktur so erweitern, dass auch abgefragt werden kann ob u und v durch einen Weg aus höchstens zwei Kanten verbunden sind?

5 Bonus: Vorfreude auf die Fußball WM

Ein Fußball[1] mit Wabenstruktur hat eine Oberfläche die ausschließlich aus Fünf- und Sechsecken besteht. Zeigen Sie, dass die Anzahl der Fünfecke auf jedem Fußball mit Wabenstruktur 12 ist.

Hinweis: Nehme Sie an, dass ein Fußball eine Kugel ist.

[1] http://de.wikipedia.org/wiki/Fußball_(Sportgerät)