Well-Separated Pair Decomposition und t-Spanner

3. Juli 2014

Der induktive Korrektheitsbeweis von Lemma 3 aus VL12 ist im angegebenen Skript nicht ganz richtig, daher hier noch einmal hieb- und stichfest.

Lemma 3. *Ist W eine s-WSPD für ein geeignetes $s = s(t) \geq 4$, so ist G ein t-Spanner für P mit $O(s^d n)$ Kanten.*

Beweis. Zu zeigen ist für jedes Punktepaar $x, y \in P$, dass gilt $||xy|| \leq \delta_G(x, y) \leq t \cdot ||xy||$. Die erste Ungleichung ist aufgrund der Dreiecksungleichung immer erfüllt, kümmern wir uns also um den zweiten Teil.

Hierzu verwenden wir eine Induktion über die $O(n^2)$ Punktepaare, aufsteigend sortiert nach ihrem Abstand. Für das Paar u, v mit kleinstem Abstand in P gilt (s. Übungsblatt), dass es auf jeden Fall durch eine Kante in G verbunden ist und damit auch $\delta_G(u, v) \leq t \cdot ||uv||$ für jedes $t > 1$.

Betrachten wir nun also ein beliebiges Paar von Punkten $x, y \in P$ und nehmen an, dass für alle Paare $p, q \in P$ mit $||pq|| < ||xy||$ die t-Spanner Eigenschaft gilt. Sei nun $\{P_u, P_v\}$ ein ws-Paar in W, das x und y separiert. Nehmen wir an es gilt $x \in P_u$ und $y \in P_v$. Der Radius der zugehörigen Kugeln um P_u und P_v sei r. Die beiden Repräsentanten von P_u und P_v seien p_u und p_v. Damit ist auch die Kante (p_u, p_v) in G enthalten.

Wegen der Dreiecksungleichung gilt nun $\delta_G(x, y) \leq \delta_G(x, p_u) + ||p_u p_v|| + \delta_G(p_v, y)$. Weiterhin ist $||xp_u|| \leq 2r$ und $||p_v y|| \leq 2r$ sowie $||xy|| \geq 4r$, da $s \geq 4$. Deshalb können wir die Induktionsannahme auf die Paare x, p_u und y, p_v anwenden und erhalten

$$\delta_G(x, y) \leq t \cdot (||xp_u|| + ||p_v y||) + ||p_u p_v|| \tag{1}$$

.

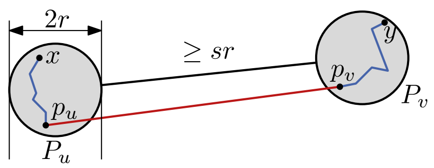

Abbildung 1: Beweisskizze des Induktionsschritts

Nun versuchen wir $||p_u p_v||$ durch die Dreiecksungleichung abzuschätzen. Es gilt $||p_u p_v|| \leq ||p_u x|| + ||xy|| + ||yp_v|| \leq 4r + ||xy||$. Dies setzen wir in Gleichung 1 ein und erhalten mit $r \leq ||xy||/s$

$$\delta_G(x, y) \leq 4tr + 4r + ||xy|| \leq 4r(t + 1) + ||xy|| \leq \left(1 + \frac{4(t + 1)}{s}\right) ||xy||. \tag{2}$$

Es genügt nun $s = s(t) = 4(t + 1)/(t - 1)$ zu setzen um die Behauptung zu zeigen. □