Vorlesung Algorithmische Geometrie

Geradenarrangements und Dualität von Punkten und Geraden

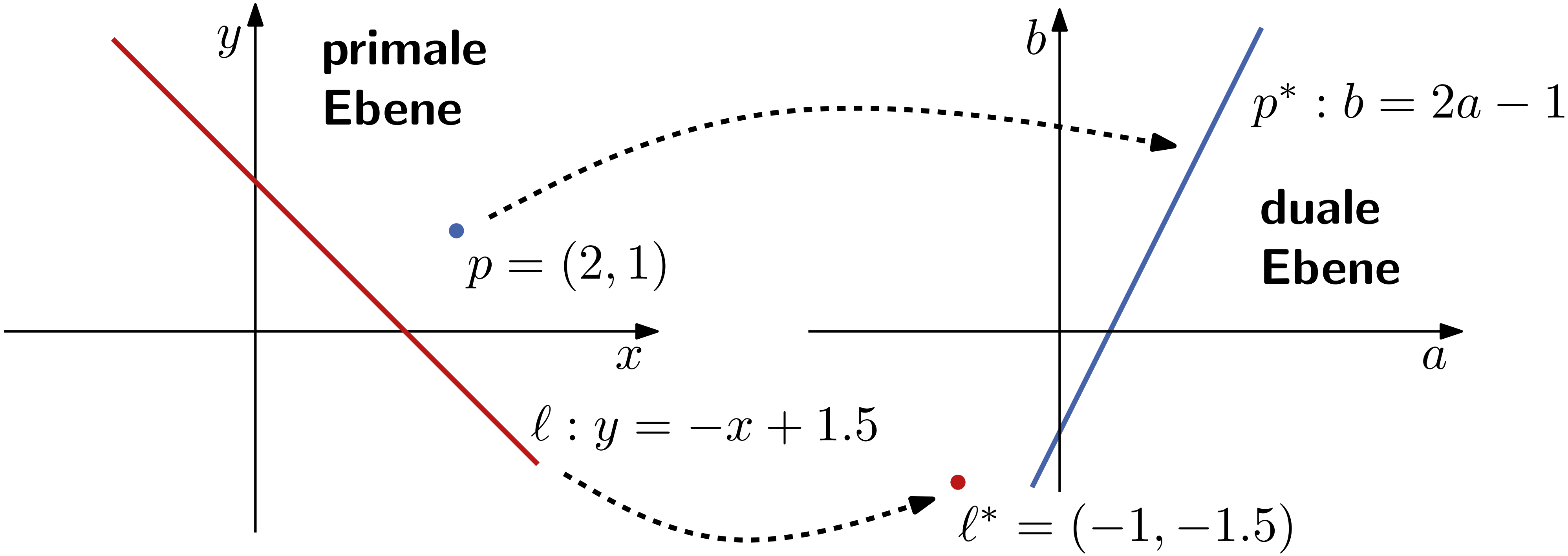
INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK · FAKULTÄT FÜR INFORMATIK

Martin Nöllenburg

17.06.2014

Dualitätsabbildung

Bisher haben wir Dualität für planare Graphen bzw. Voronoi-Diagramme und Delaunay-Triangulierungen gesehen. Auch Punkte und Geraden können **dual** zueinander sein.



Def.: Die Dualitätsabbildung $(\cdot)^*$ ist definiert durch

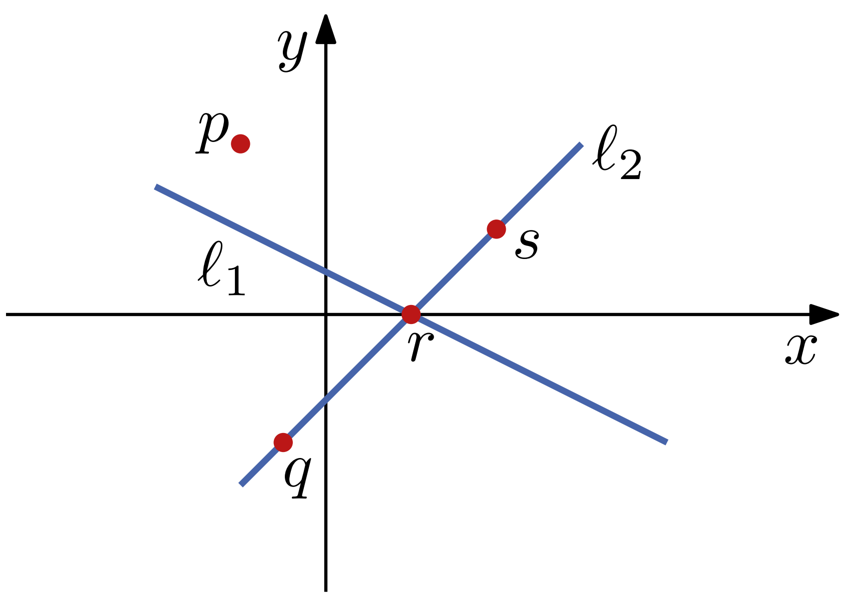
$$p = (p_x, p_y) \quad \mapsto \quad p^* : b = p_x a - p_y$$

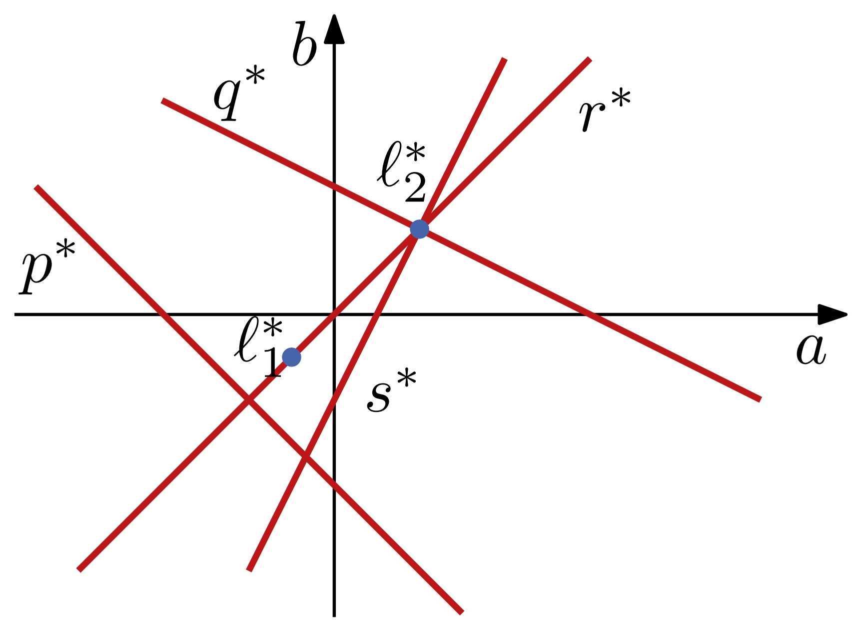
$$\ell : y = mx + c \quad \mapsto \quad \ell^* = (m, -c)$$

Eigenschaften

Lemma 1: Es gelten die folgenden Eigenschaften

- $(p^*)^* = p$ und $(\ell^*)^* = \ell$
- p liegt unter/auf/über $\ell \Leftrightarrow p^*$ läuft über/auf/unter ℓ^*
- ℓ_1 und ℓ_2 schneiden sich in r
  $\Leftrightarrow r^*$ geht durch ℓ_1^* und ℓ_2^*
- q, r, s kollinear
  $\Leftrightarrow q^*, r^*, s^*$ schneiden sich in gemeinsamem Punkt





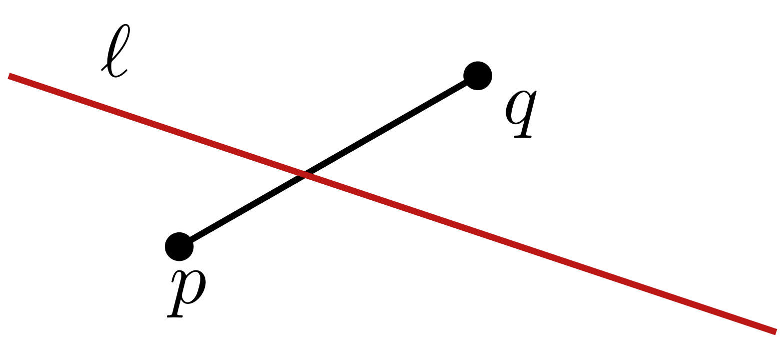
Eigenschaften

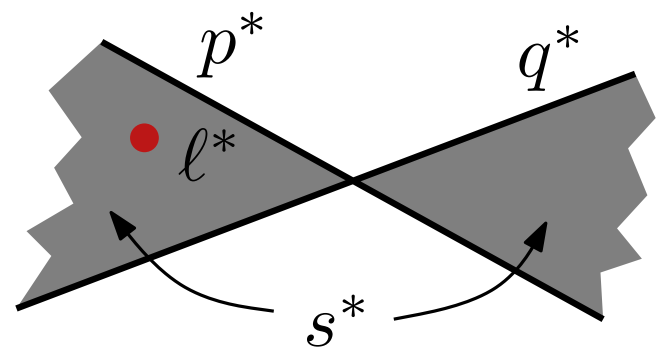
Lemma 1: Es gelten die folgenden Eigenschaften

- $(p^*)^* = p$ und $(\ell^*)^* = \ell$
- p liegt unter/auf/über $\ell \Leftrightarrow p^*$ läuft über/auf/unter ℓ^*
- ℓ_1 und ℓ_2 schneiden sich in r
  $\Leftrightarrow r^*$ geht durch ℓ_1^* und ℓ_2^*
- q, r, s kollinear
  $\Leftrightarrow q^*, r^*, s^*$ schneiden sich in gemeinsamem Punkt

Wie sieht das duale Objekt zu einer Strecke $s = \overline{pq}$ aus?

Welche duale Beziehung gilt für eine Gerade ℓ, die s schneidet?





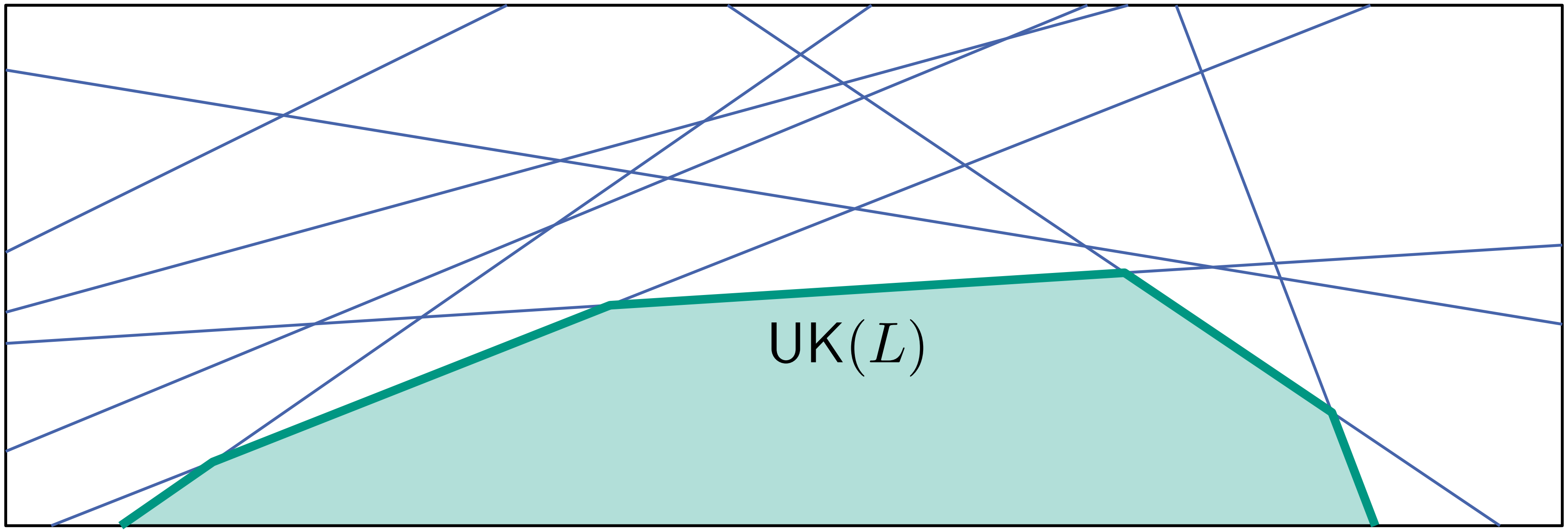
Anwendungen der Dualität

Dualität macht geometrische Probleme weder leichter noch schwerer; sie bietet einen anderen (oft hilfreichen) Blickwinkel!

Wir werden zwei Beispiele genauer betrachten:

- untere/obere Konturen von Geradenarrangements
- kleinstes Dreieck in einer Punktmenge

Untere Kontur

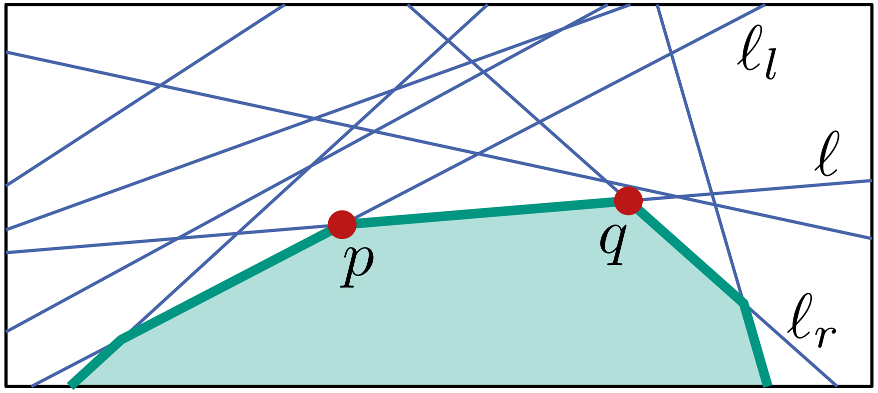


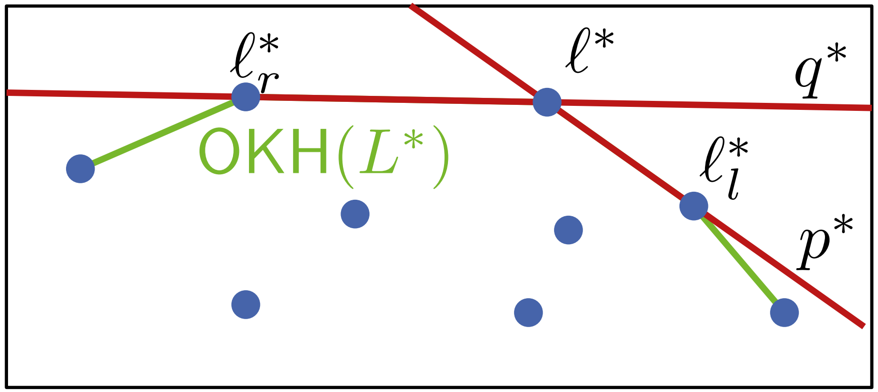
Def.: Für eine Menge L von Geraden ist die untere Kontur UK(L) von L die Menge aller Punkte aus $\cup_{\ell \in L} \ell$, die nicht oberhalb einer Geraden aus L liegen.

Möglichkeiten zur Berechnung der unteren Kontur:

- Algorithmus `IntersectHalfplanes` aus 4. VL
- Betrachte das duale Problem für $L^* = \{\ell^* \mid \ell \in L\}$

Kontur und Dualität





Wann erscheint ℓ als Strecke $\overline{pq}$ auf UK(L)?

- p und q liegen unterhalb aller Geraden in L
- p^* und q^* liegen oberhalb aller Punkte aus L^*
  $\Rightarrow$ liegen benachbart auf oberer konvexer Hülle OKH(L^*)
- Schnittpunkt von p^* und q^* ist ℓ^*, Knoten von OKH(L^*)

Lemma 2: Die Geraden auf UK(L) von rechts nach links entsprechen den Knoten auf OKH(L^*) von links nach rechts.

Berechnung der Kontur

- Algorithmus zur Berechnung der oberen konvexen Hülle mit Laufzeit $O(n \log n)$ (s. erste VL zu konvexer Hülle)
- Primale Geraden zu Punkten auf OKH(L^*) in umgekehrter Reihenfolge bilden UK(L)
- Analog: obere Kontur von $L \mathrel{\hat{=}}$ untere konvexe Hülle von L^*

Wie lässt sich das nutzen um den Schnitt von n Halbebenen zu berechnen?

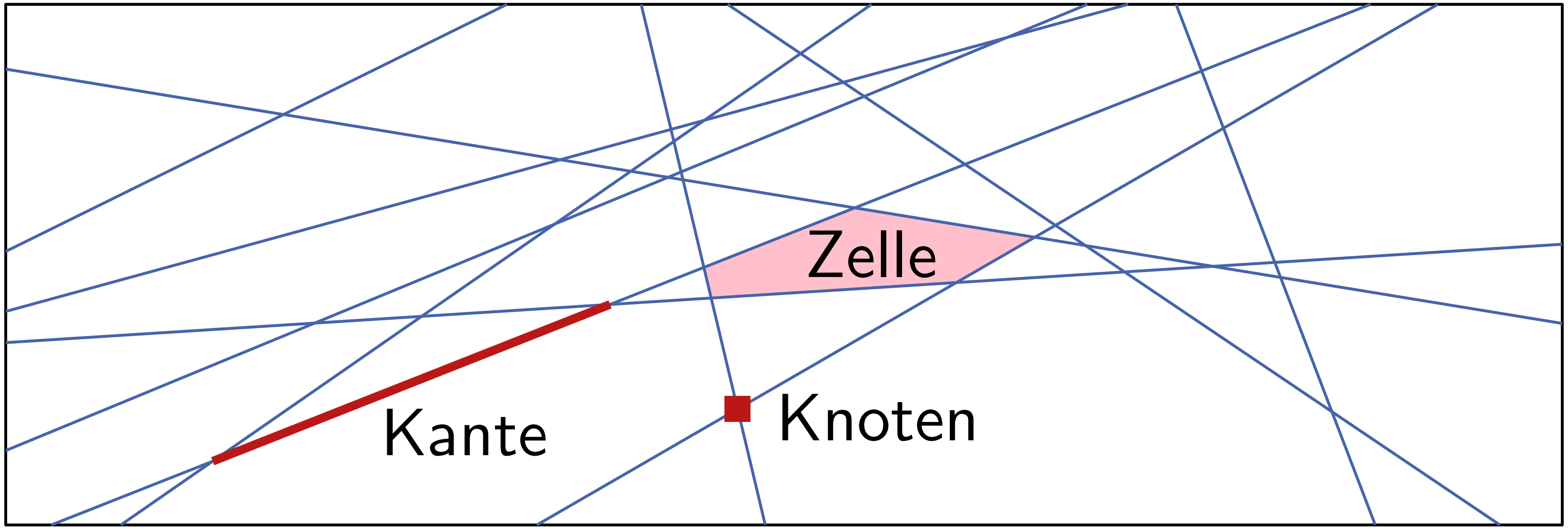
- untere Kontur der von oben begrenzenden Geraden
- obere Kontur der von unten begrenzenden Geraden
- Schnitt der beiden konvexen Regionen (s. 4. VL)
- insgesamt $O(n \log n)$ Laufzeit

Zwischenfrage:

Wie testet man ob n Punkte in allgemeiner Lage sind?

Wie findet man eine maximal große Menge kollinearer Punkte?

Geradenarrangements



Def.: Eine Menge L von Geraden definiert eine Unterteilung $\mathcal{A}(L)$ der Ebene (das **Geradenarrangement**) in Knoten, Kanten und Zellen (tlws. unbeschränkt).
$\mathcal{A}(L)$ heißt **einfach**, wenn keine drei Geraden durch einen Punkt gehen und keine zwei Geraden parallel sind.

Komplexität von $\mathcal{A}(L)$

Die kombinatorische Komplexität von $\mathcal{A}(L)$ ist die Zahl der Knoten, Kanten und Zellen. Es gilt:

Satz 1: Sei $\mathcal{A}(L)$ ein einfaches Arrangement von n Geraden. Dann hat $\mathcal{A}(L)$ $\binom{n}{2}$ Knoten, n^2 Kanten und $\binom{n}{2} + n + 1$ Zellen.

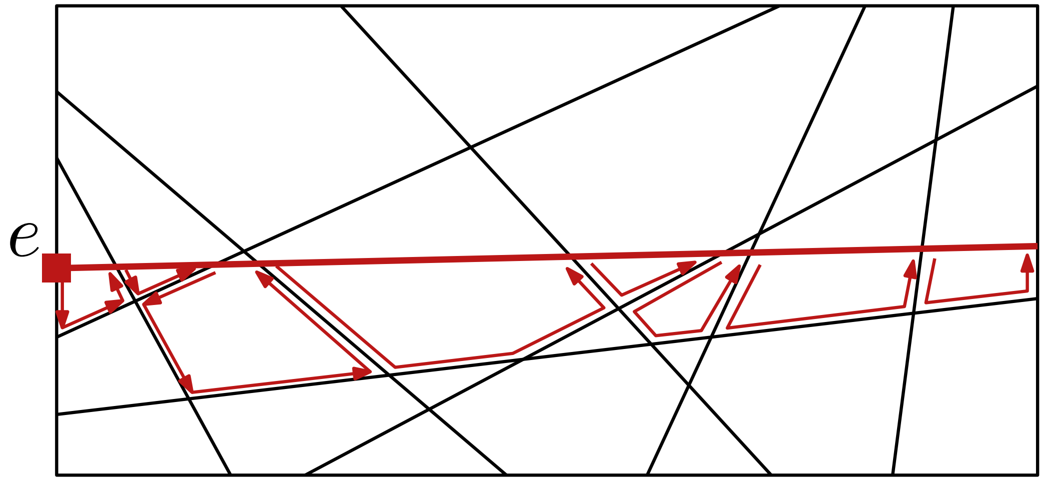
Datenstruktur für $\mathcal{A}(L)$:

- füge bounding box aller Knoten hinzu (s. Übung) $\rightarrow$ planar eingebetteter Graph G
- doppelt-verkettete Kantenliste für G

Kennen wir schon eine Möglichkeit um $\mathcal{A}(L)$ zu berechnen?

Konstruktion von $\mathcal{A}(L)$

Input: Geraden $L = \{\ell_1, \ldots, \ell_n\}$
Output: DCEL $\mathcal{D}$ für $\mathcal{A}(L)$
initialisiere $\mathcal{D}$ für bounding box B der Knoten von $\mathcal{A}(L)$
for $i \leftarrow 1$ **to** n **do**
  finde linkesten Schnittpunkt von ℓ_i mit Kante e von B
  $f \leftarrow$ innere Zelle inzident zu e
  while $f \neq$ äußere Zelle **do**
    zerteile f, update $\mathcal{D}$ und setze f auf nächste Zelle

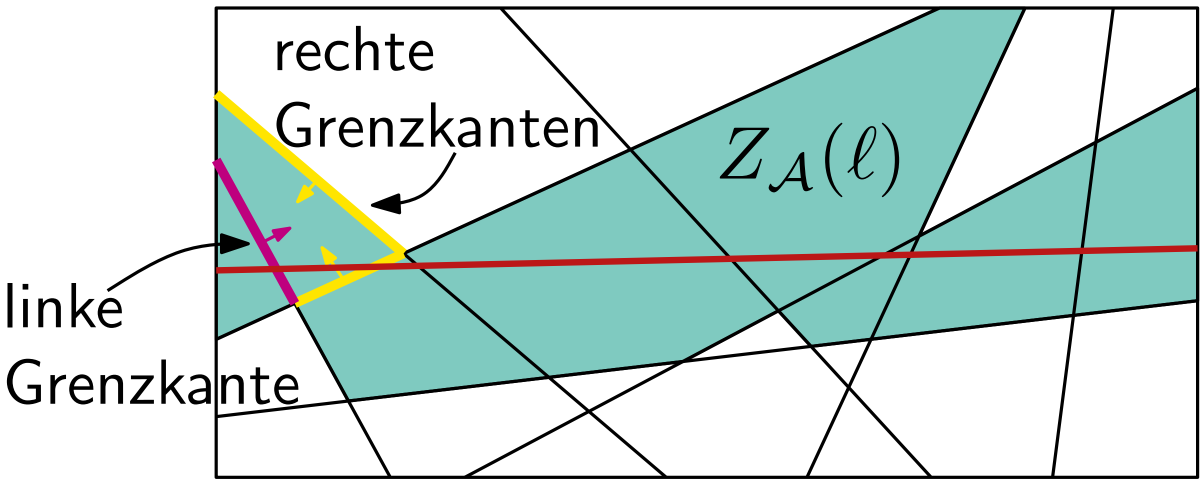


Laufzeit?

- bounding box: $O(n^2)$
- Startpunkt ℓ_i: $O(i)$
- **while**-Schleife: $O(|\text{roter Pfad}|)$

Zonensatz

Def.: Für ein Arrangement $\mathcal{A}(L)$ und eine Gerade $\ell \notin L$ ist die **Zone** $Z_{\mathcal{A}}(\ell)$ die Menge aller Zellen von $\mathcal{A}(L)$, deren Abschluss ℓ schneidet.



Wie viele Zellen enthält $Z_{\mathcal{A}}(\ell)$?

Wie viele Kanten enthält $Z_{\mathcal{A}}(\ell)$?

Satz 2: Für ein Arrangement $\mathcal{A}(L)$ von n Geraden in der Ebene und eine Gerade $\ell \notin L$ besteht $Z_{\mathcal{A}}(\ell)$ aus höchstens $6n$ Kanten.

Satz 3: Das Arrangement $\mathcal{A}(L)$ einer Menge von n Geraden kann in $O(n^2)$ Zeit und Platz konstruiert werden.

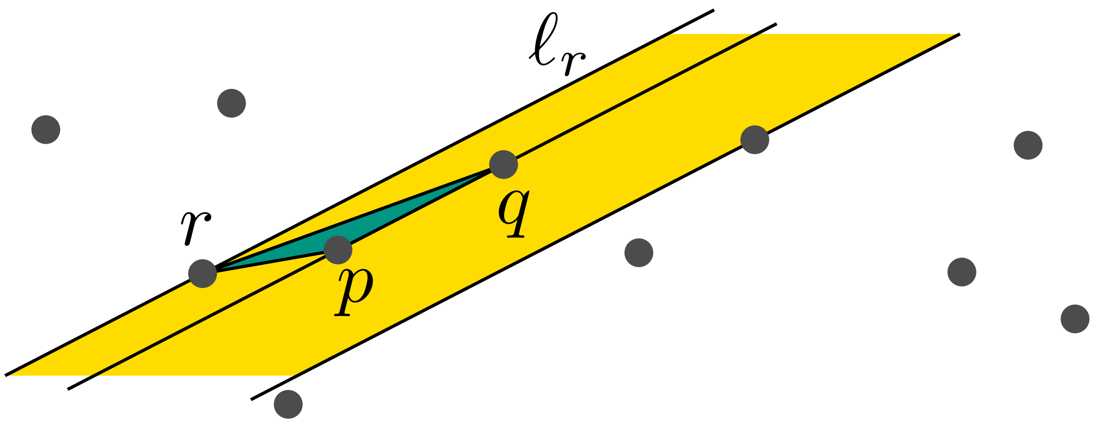
Zwischenfrage:

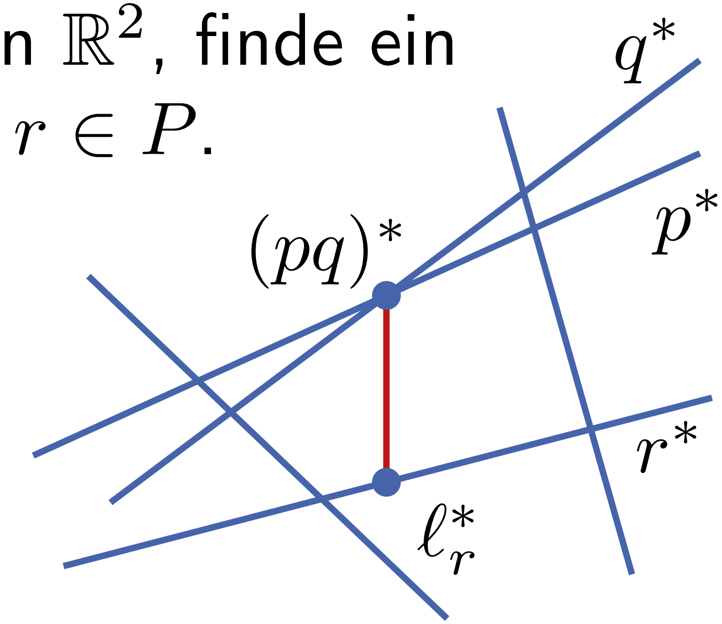
Wie testet man ob n Punkte in allgemeiner Lage sind?

Wie findet man eine maximal große Menge kollinearer Punkte?

Kleinstes Dreieck

Gegeben eine Menge P von n Punkten in $\mathbb{R}^2$, finde ein flächenminimales Dreieck Δpqr mit $p, q, r \in P$.





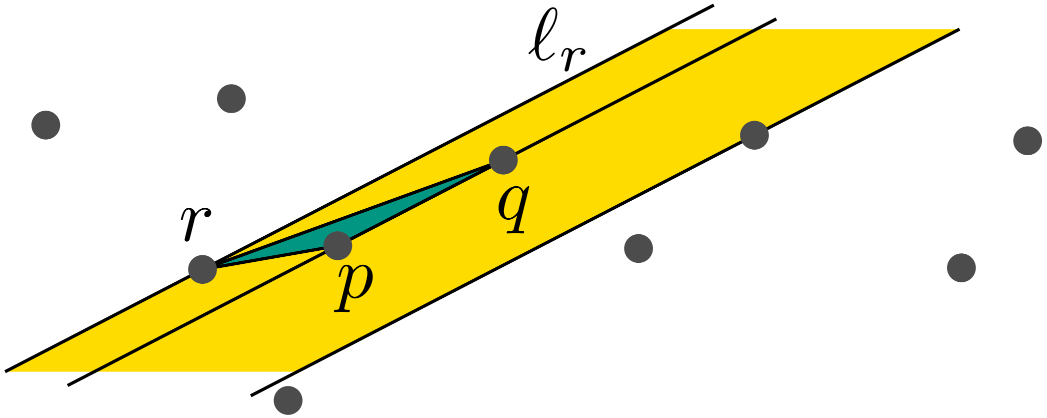
Seien $p, q \in P$. Der Punkt $r \in P \setminus \{p, q\}$, der Δpqr minimiert, liegt auf dem Rand des größten leeren Korridors entlang pq.

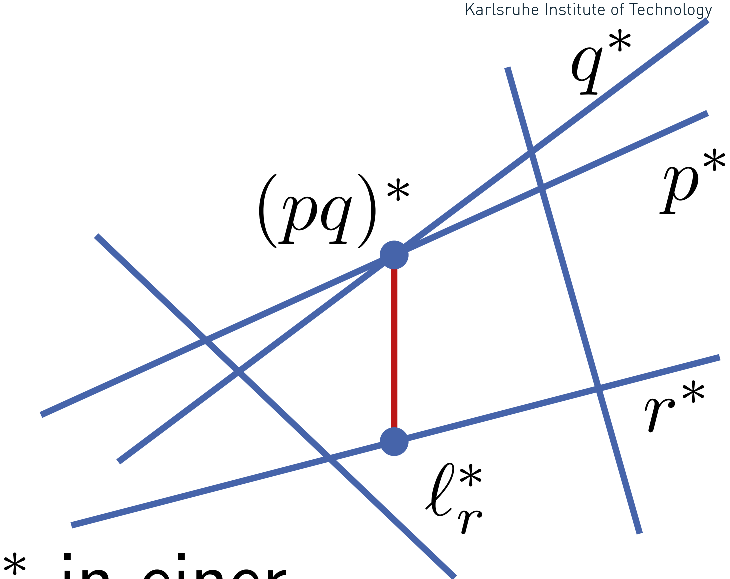
Zwischen pq und der Geraden ℓ_r durch r parallel zu pq liegt kein weiterer Punkt aus P.

Im Dualen:

- ℓ_r^* liegt auf r^*
- ℓ_r^* und $(pq)^*$ haben gleiche x-Koordinate
- keine Gerade $p^* \in P^*$ schneidet $\overline{\ell_r^*(pq)^*}$

Berechnung im Dualen





- ℓ_r^* liegt vertikal über oder unter $(pq)^*$ in einer gemeinsamen Zelle von $\mathcal{A}(P^*) \Rightarrow$ nur zwei Kandidaten
- Berechne in $O(n^2)$ Zeit das Arrangement $\mathcal{A}(P^*)$
- Berechne in jeder Zelle die vertikalen Nachbarn der Knoten $\rightarrow$ Zeit linear in Zellenkomplexität wie?
- für alle $O(n^2)$ Kandidaten-Tripel $(pq)^* r^*$ berechne in $O(1)$ Zeit Fläche Δpqr
- findet Minimum in insgesamt $O(n^2)$ Zeit

Weitere Probleme

- Zwei Diebe haben eine Kette aus Diamanten und Smaragden gestohlen und möchten sie fair teilen, ohne sie zu sehr zu zerstören. Wieviele Schnitte sind nötig?

Satz 4: Seien S, D zwei endliche Punktmengen in der Ebene. Dann gibt es eine Gerade ℓ, die gleichzeitig S und D halbiert.

- Gegeben n Strecken in der Ebene, finde eine maximale stabbing-Gerade, d.h. eine Gerade, die möglichst viele Strecken schneidet.

Diskussion

Dualität ist ein sehr nützliches Werkzeug in der algorithmischen Geometrie!

Kann man die Dualität auch in höheren Dimensionen nutzen?

Ja, auch zwischen d-dimensionalen Punkten und Hyperebenen gibt es eine entsprechende inzidenz- und ordnungserhaltende Dualitätsabbildung.

Wie steht es um höherdimensionale Arrangements?

Das Arrangement von n Hyperebenen im $\mathbb{R}^d$ hat Komplexität $\Theta(n^d)$. Eine Verallgemeinerung des Zonensatzes führt zu einem $O(n^d)$-Zeit Algorithmus.