




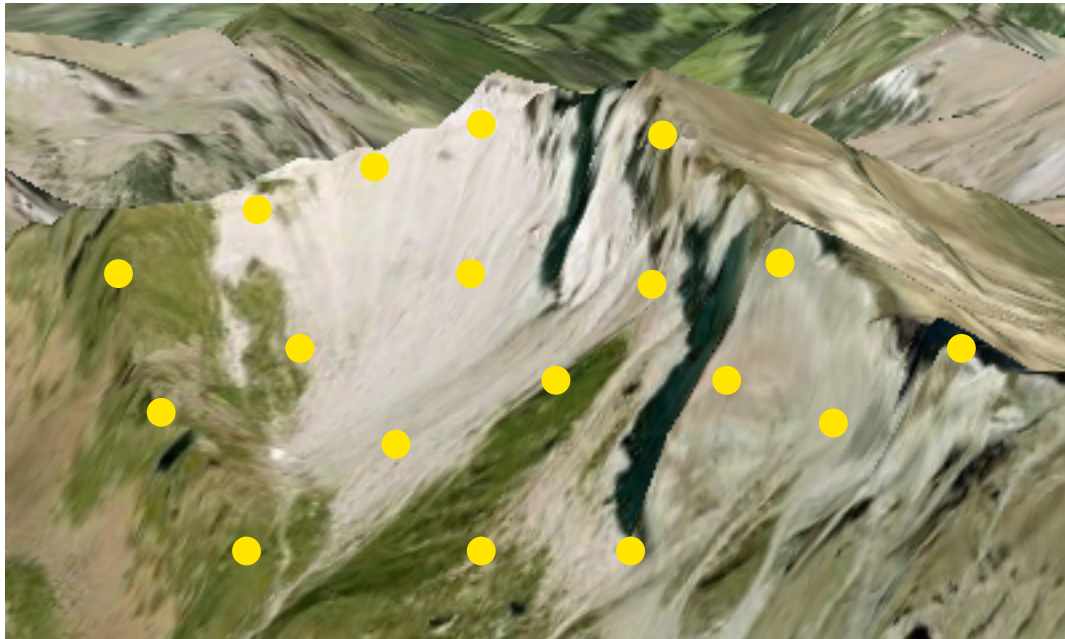
Vorlesung Algorithmische Geometrie
Delaunay-Triangulierungen

INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK · FAKULTÄT FÜR INFORMATIK



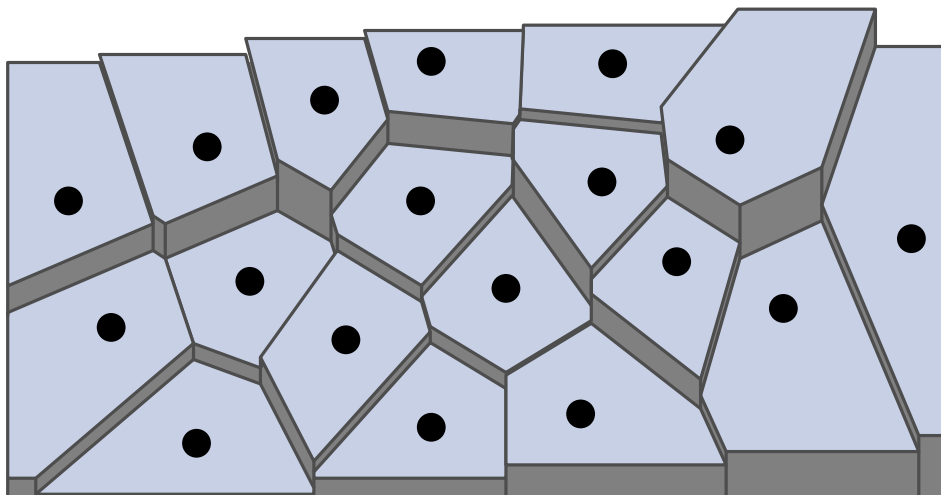
Martin Nöllenburg
10.06.2014





Höhenmesspunkte

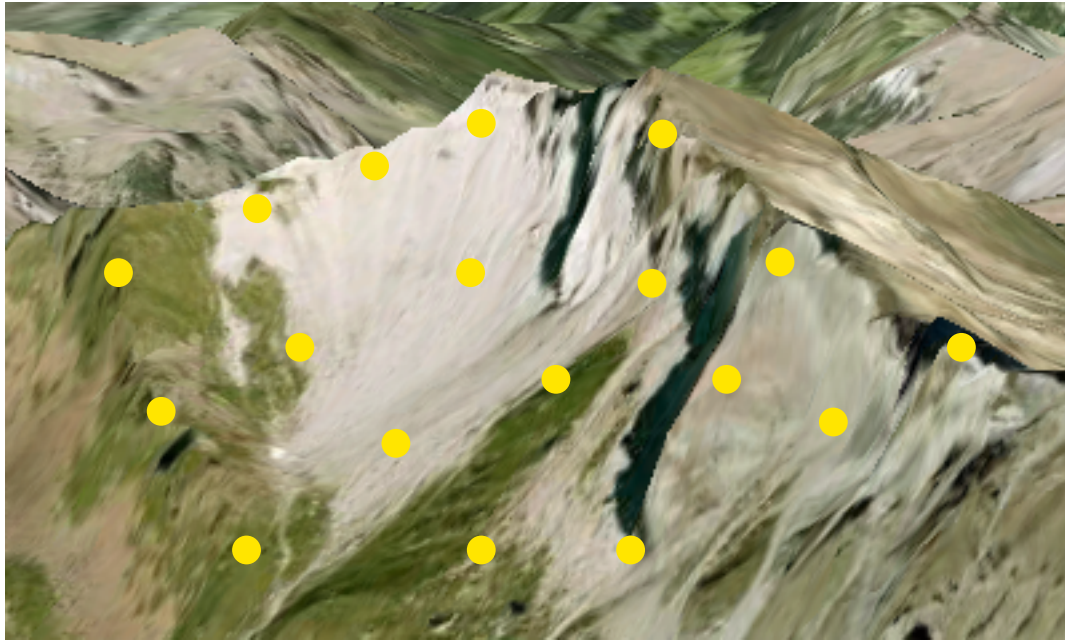
$$p = (x_p, y_p, z_p)$$



Projektion

$$\pi(p) = (p_x, p_y, 0)$$

Interpolation 1: jeder Punkt bekommt Höhe des nächsten Messpunktes



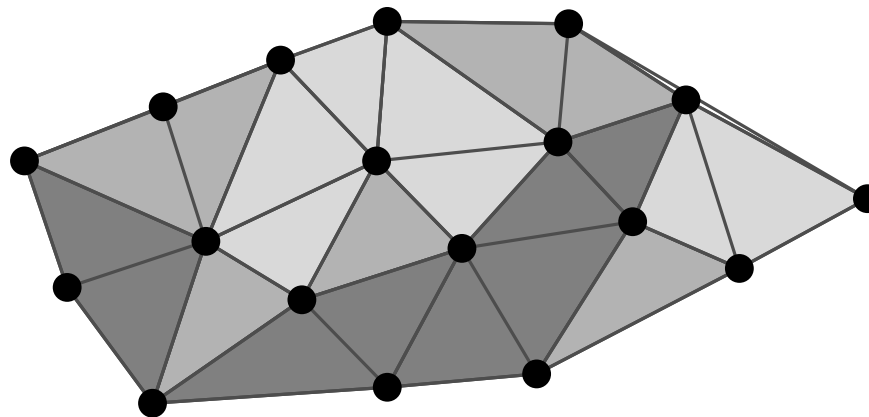
Höhenmesspunkte

$$p = (x_p, y_p, z_p)$$



Projektion

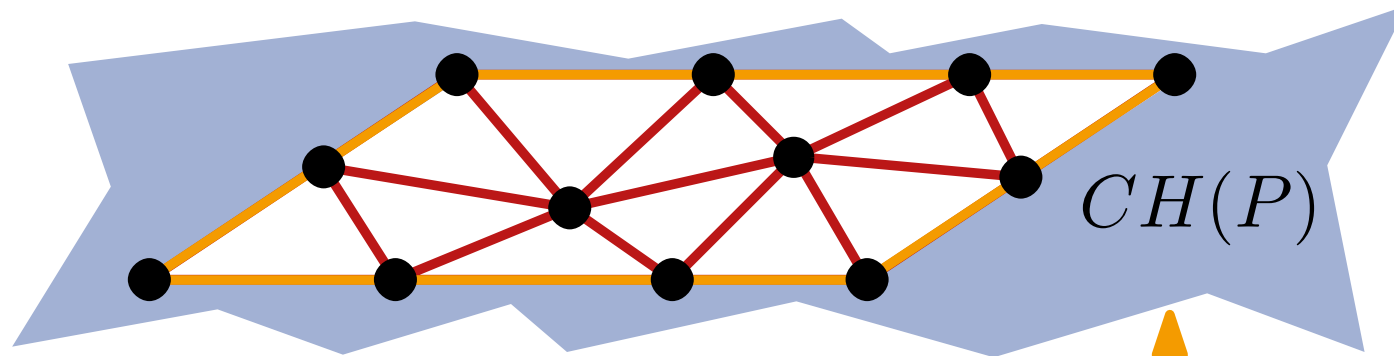
$$\pi(p) = (p_x, p_y, 0)$$



Interpolation 2: trianguliere Messpunkte und interpoliere auf Dreiecken

Triangulierung von Punkten

Def.: Eine **Triangulierung** einer Punktmenge $P \subset \mathbb{R}^2$ ist eine maximale planare Unterteilung mit Knotenmenge P .



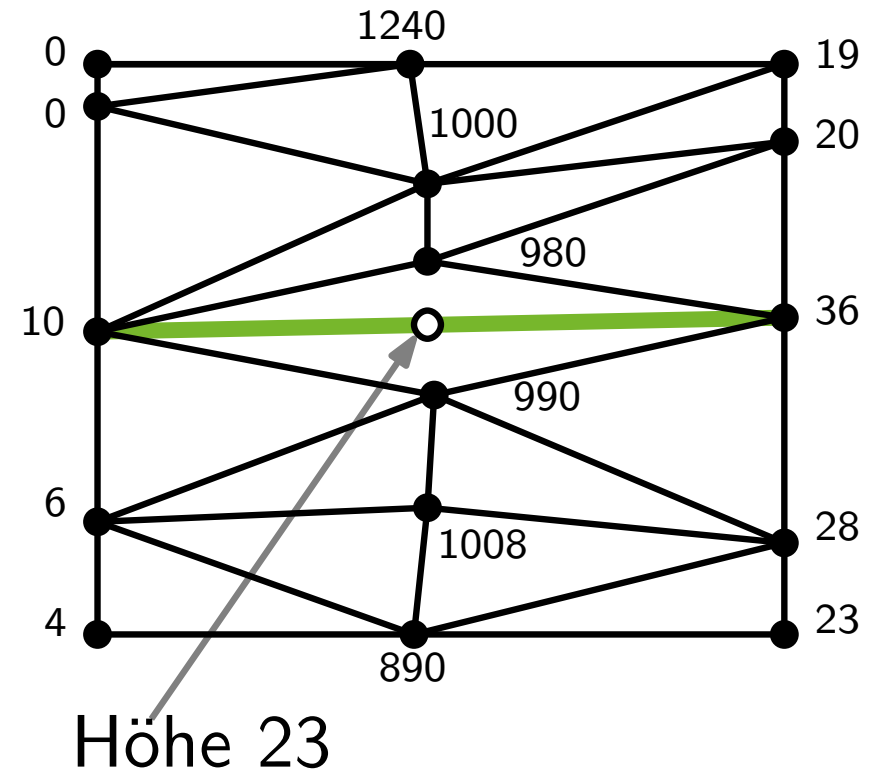
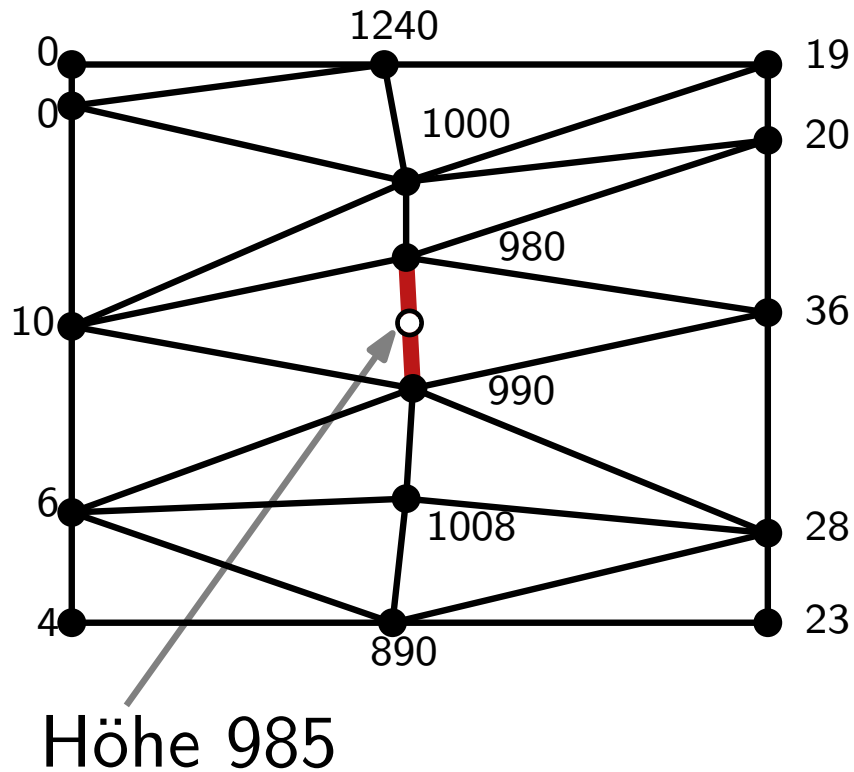
Beob.:

- alle inneren Facetten sind Dreiecke
- äußere Facette ist Komplement der konvexen Hülle

Satz 1: Sei P eine Menge von n nicht kollinearen Punkten und h die Anzahl Punkte auf $CH(P)$.

Dann hat *jede* Triangulierung von P $(2n - 2 - h)$ Dreiecke und $(3n - 3 - h)$ Kanten.

Zurück zur Höheninterpolation



Intuitiv: Vermeide zu schmale Dreiecke!

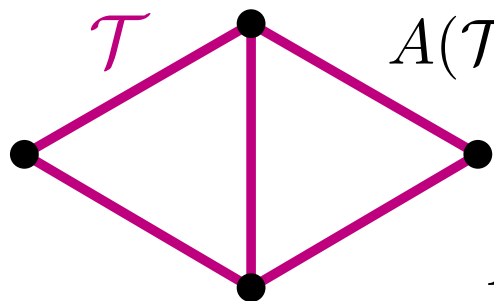
Oder: maximiere die kleinsten Dreieckswinkel!

Winkeloptimale Triangulierungen

Def.: Sei $P \subset \mathbb{R}^2$ eine Punktmenge, \mathcal{T} eine Triangulierung von P und m die Anzahl der Dreiecke. Dann ist $A(\mathcal{T}) = (\alpha_1, \dots, \alpha_{3m})$ der **Winkelvektor** von \mathcal{T} mit den sortierten Dreieckswinkeln $\alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_{3m}$.

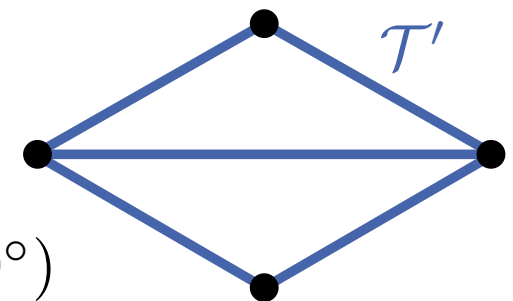
Für zwei Triangulierungen \mathcal{T} und \mathcal{T}' von P definiere die Ordnung $A(\mathcal{T}) > A(\mathcal{T}')$ als lexikographische Ordnung.

\mathcal{T} heißt **winkeloptimal**, falls $A(\mathcal{T}) \geq A(\mathcal{T}')$ für alle Triangulierungen \mathcal{T}' von P .



$$A(\mathcal{T}) = (60^\circ, 60^\circ, 60^\circ, 60^\circ, 60^\circ, 60^\circ)$$

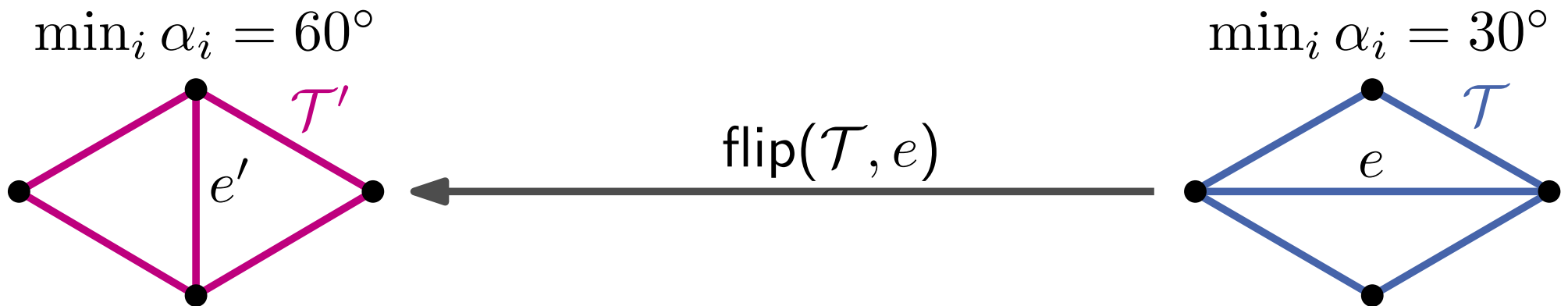
$$A(\mathcal{T}') = (30^\circ, 30^\circ, 30^\circ, 30^\circ, 120^\circ, 120^\circ)$$



Kantenflips

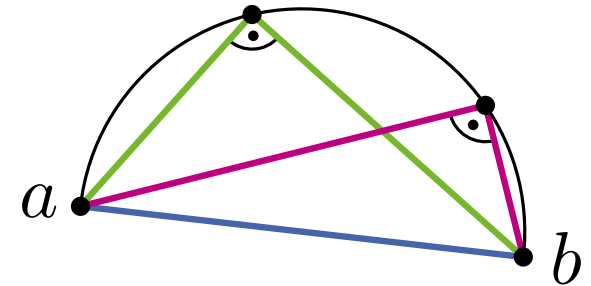
Def.: Sei \mathcal{T} eine Triangulierung. Eine Kante e von \mathcal{T} heißt **unzulässig**, wenn der kleinste Winkel der zu e inzidenten Dreiecke durch einen Kantenflip größer wird.

Beob.: Sei e eine unzulässige Kante von \mathcal{T} und $\mathcal{T}' = \text{flip}(\mathcal{T}, e)$. Dann gilt $A(\mathcal{T}') > A(\mathcal{T})$.

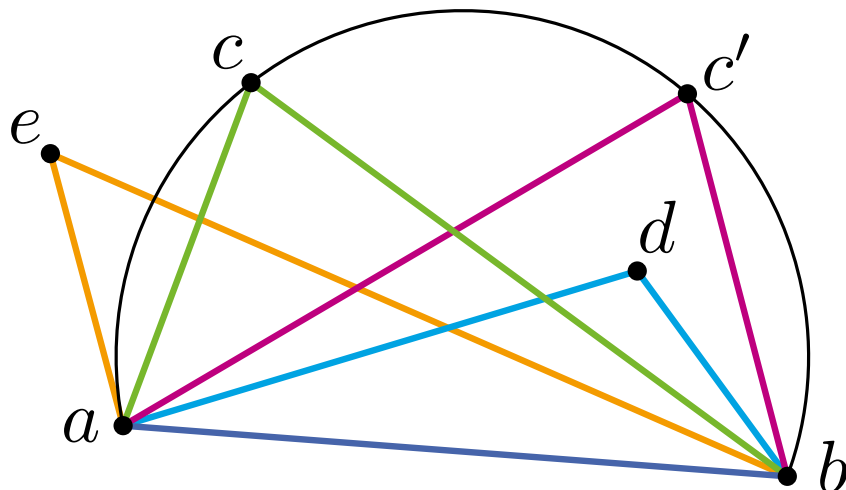


Der Satz von Thales

Satz 2: Alle Dreiecke aus den Endpunkten des Kreisdurchmessers und eines Halbkreispunktes sind rechtwinklig.



Satz 2': Alle Dreiecke aus den Endpunkten einer Sekante $\ell = \overline{ab}$ und eines Kreispunktes c auf der gleichen Seite von ℓ haben den gleichen Winkel an c . Für Dreiecke $\triangle abd$ mit d innerhalb des Kreises gilt $\angle adb > \angle acd$, für e außerhalb des Kreises gilt $\angle aeb < \angle acd$.



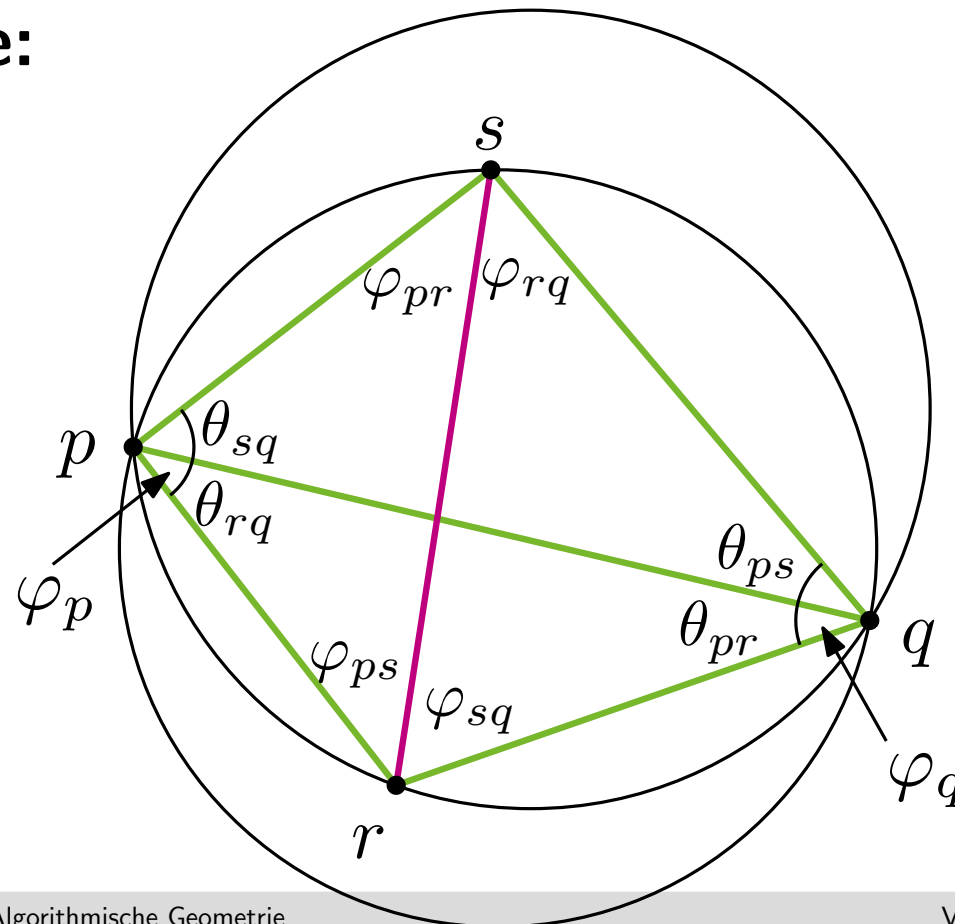
$$\angle aeb < \angle acb = \angle ac'b < \angle adb$$

Zulässige Triangulierungen

Lemma 1: Seien Δprq und Δpqs zwei Dreiecke in \mathcal{T} und C der Umkreis von Δprq . Dann ist \overline{pq} unzulässig genau dann wenn $s \in \text{int}(C)$.

Bilden p, q, r, s ein konvexes Viereck ($s \notin \partial C$) so ist entweder \overline{pq} oder \overline{rs} unzulässig.

Beweisskizze:



$$\varphi_{pr} > \theta_{pr}$$

$$\varphi_{ps} > \theta_{ps}$$

$$\varphi_{rq} > \theta_{rq}$$

$$\varphi_{sq} > \theta_{sq}$$

$$\varphi_p \geq \theta_{rq} + \theta_{sq}$$

$$\varphi_q \geq \theta_{pr} + \theta_{ps}$$

Zulässige Triangulierungen

Lemma 1: Seien Δprq und Δpqs zwei Dreiecke in \mathcal{T} und C der Umkreis von Δprq . Dann ist \overline{pq} unzulässig genau dann wenn $s \in \text{int}(C)$.

Bilden p, q, r, s ein konvexes Viereck ($s \notin \partial C$) so ist entweder \overline{pq} oder \overline{rs} unzulässig.

Bem.:

- Charakterisierung symmetrisch bzgl. r und s
- $s \in \partial C \Rightarrow \overline{pq}$ und \overline{rs} zulässig
- Kante unzulässig \Rightarrow Viereck konvex

Def.: Triangulierung ohne unzulässige Kanten heißt **zulässig**.

Gibt es immer eine zulässige Triangulierung?

Zulässige Triangulierungen

Lemma 1: Seien Δprq und Δpqs zwei Dreiecke in \mathcal{T} und C der Umkreis von Δprq . Dann ist \overline{pq} unzulässig genau dann wenn $s \in \text{int}(C)$.

Bilden p, q, r, s ein konvexes Viereck ($s \notin \partial C$) so ist entweder \overline{pq} oder \overline{rs} unzulässig.

Bem.:

- Charakterisierung symmetrisch bzgl. r und s
- $s \in \partial C \Rightarrow \overline{pq}$ und \overline{rs} zulässig
- Kante unzulässig \Rightarrow Viereck konvex

Def.: Triangulierung ohne unzulässige Kanten heißt **zulässig**.

while \mathcal{T} hat unzulässige Kante e **do**

└ flip(\mathcal{T}, e)

return \mathcal{T}

terminiert, da $A(\mathcal{T})$ wächst und

#Triangulierungen endlich ($< 30^n$, [Sharir, Sheffer 2011])

Es gilt: Jede winkeloptimale Triangulierung ist zulässig.

Aber ist jede zulässige Triangulierung auch winkeloptimal?

Die Delaunay-Triangulierung

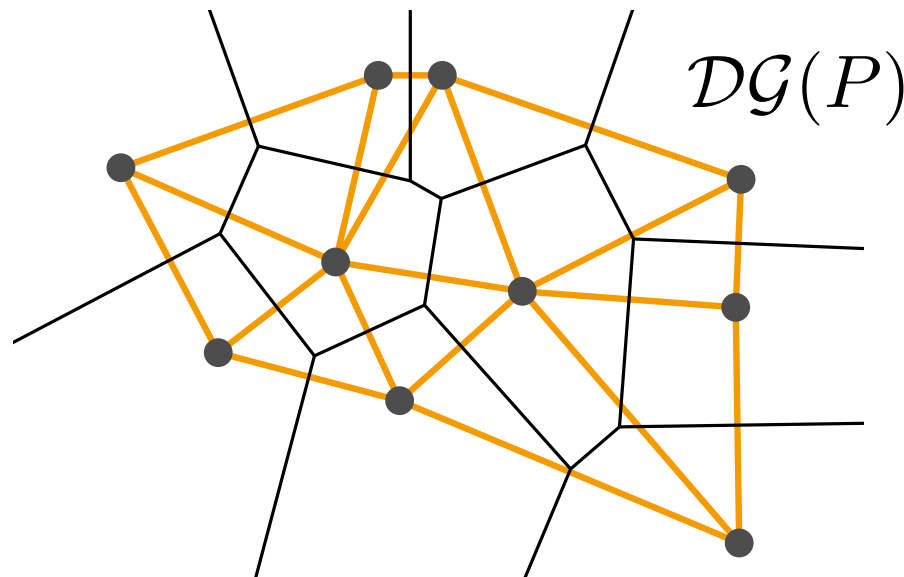
Sei $\text{Vor}(P)$ das Voronoi-Diagramm einer Punktmenge P .

Def.: Der Graph $\mathcal{G} = (P, E)$ mit
 $E = \{pq \mid \mathcal{V}(p) \text{ und } \mathcal{V}(q) \text{ sind benachbart}\}$
heißt **Dualgraph** von $\text{Vor}(P)$.

Def.: Die geradlinige Zeichnung von \mathcal{G} heißt **Delaunay-Graph** $\mathcal{DG}(P)$.



Georgy Voronoy
(1868–1908)



Boris Delone
(1890–1980)

Satz 3: $\mathcal{DG}(P)$ ist kreuzungsfrei.

Beweisskizze:

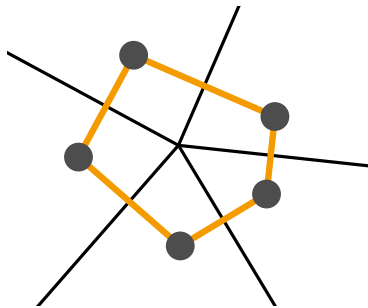
Der Bisektor $b(p, q)$ definiert eine Voronoi-Kante
 $\Leftrightarrow \exists r \in b(p, q)$ mit $C_P(r) \cap P = \{p, q\}$.

bzw.

Die Kante pq ist in $\mathcal{DG}(P)$

\Leftrightarrow es gibt einen leeren Kreis $C_{p,q}$ mit p und q auf dem Rand.

Beob.: Ein Voronoi-Knoten v in $\text{Vor}(P)$ mit Grad k entspricht einem konvexen k -Eck in $\mathcal{DG}(P)$.

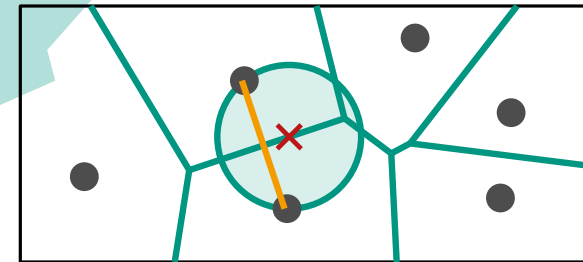
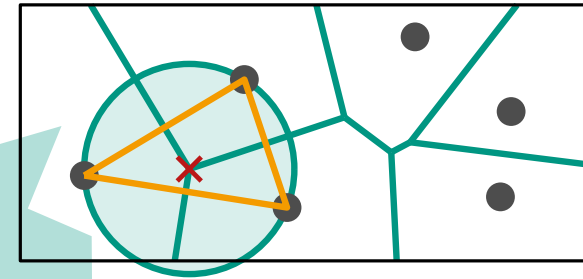


Ist P in allgemeiner Lage (keine 4 Punkte auf eine Kreis), so sind alle Facetten in $\mathcal{DG}(P)$ Dreiecke \rightarrow

Delaunay-Triangulierung

Satz über Voronoi-Diagramme:

- Ein Punkt q ist ein Voronoi-Knoten
 $\Leftrightarrow |C_P(q) \cap P| \geq 3$,
- der Bisektor $b(p_i, p_j)$ definiert eine Voronoi-Kante
 $\Leftrightarrow \exists q \in b(p_i, p_j)$ mit $C_P(q) \cap P = \{p_i, p_j\}$.



Satz 4: Sei P eine Menge von Punkten.

- Punkte p, q, r sind Knoten der gleichen Facette in $\mathcal{DG}(P) \Leftrightarrow$ Kreis durch p, q, r ist leer
- Kante pq ist in $\mathcal{DG}(P)$
 \Leftrightarrow es gibt einen leeren Kreis $C_{p,q}$ durch p und q

Satz 5: Sei P Punktmenge und \mathcal{T} eine Triangulierung von P . \mathcal{T} ist Delaunay-Triangulierung \Leftrightarrow Umkreis jedes Dreiecks ist im Inneren leer.

Satz 6: Sei P Punktmenge und \mathcal{T} eine Triangulierung von P .
 \mathcal{T} ist zulässig $\Leftrightarrow \mathcal{T}$ ist Delaunay-Triangulierung.

Beweisskizze:

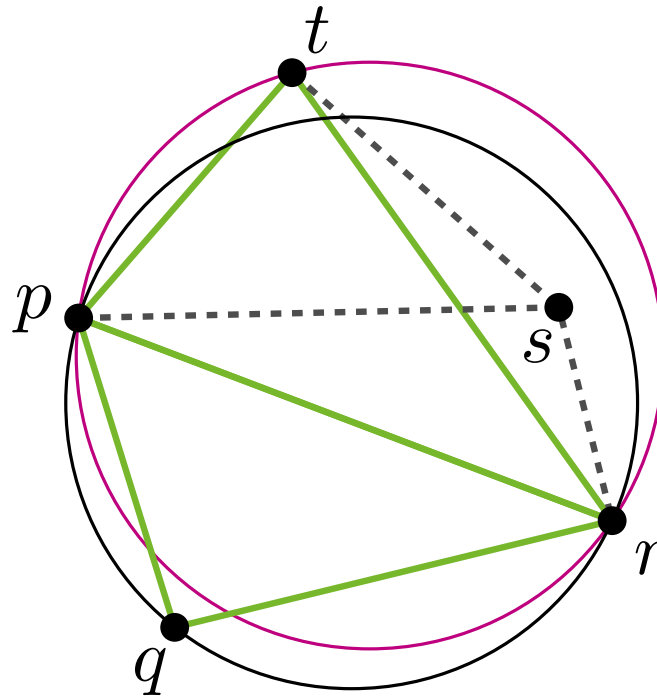
„ \Leftarrow “ klar; nutze

Lemma 1: Seien Δ_{prq} und Δ_{pqs} zwei Dreiecke in \mathcal{T} und C der Umkreis von Δ_{prq} . Dann ist \overline{pq} unzulässig genau dann wenn $s \in \text{int}(C)$.

Satz 6: Sei P Punktmenge und \mathcal{T} eine Triangulierung von P .
 \mathcal{T} ist zulässig $\Leftrightarrow \mathcal{T}$ ist Delaunay-Triangulierung.

Beweisskizze:

„ \Rightarrow “



Satz 6: Sei P Punktmenge und \mathcal{T} eine Triangulierung von P .
 \mathcal{T} ist zulässig $\Leftrightarrow \mathcal{T}$ ist Delaunay-Triangulierung.

Beob.: Ist P in allgemeiner Lage ist $DG(P)$ eindeutig
 \Rightarrow zulässige Triangulierung ist eindeutig
wissen: \mathcal{T} winkeloptymal $\Rightarrow \mathcal{T}$ zulässig
 $\Rightarrow DG(P)$ winkeloptymal!

Ist P *nicht* in allgemeiner Lage, so ist zumindest für *jede* Triangulierung einer „großen“ Facette von $DG(P)$ der *minimale* Winkel gleich (Übung!).

Satz 7: Für n beliebige Punkte kann in $O(n \log n)$ Zeit eine Delaunay-Triangulierung berechnet werden.
(Voronoi-Diag. + Triangulierung „großer“ Facetten)

Korollar: Für n Punkte in allgemeiner Lage kann in $O(n \log n)$ Zeit eine winkeloptimale Triangulierung berechnet werden.

Sind die Punkte nicht in allgemeiner Lage, lässt sich zumindest eine Triangulierung mit maximalem kleinsten Winkel in $O(n \log n)$ Zeit berechnen.

Ausblick: Auch im allgemeinen Fall kann die winkeloptimale Triangulierung in $O(n \log n)$ Zeit berechnet werden.

[Mount, Saalfeld '88]

Gibt es alternative Ansätze für Triangulierungen zur Höheninterpolation?

Statt der *datenunabhängigen* Delaunay-Triangulierung gibt es auch Ansätze für *datenabhängige* Triangulierungen, die jedoch von $\mathcal{DG}(P)$ ausgehen und dann Kantenflips durchführen. Rippa (1990) zeigte dass $\mathcal{DG}(P)$ die *roughness* unabhängig von den Höheninformationen minimiert.

Hat $\mathcal{DG}(P)$ weitere interessante Eigenschaften?

Ja, der Delaunay-Graph enthält die Kanten anderer interessanter Graphen auf P (s. Übungsblatt). Es gilt z.B.

$$\text{EMST}(P) \subseteq \text{Gabriel-Graph}(P) \subseteq \mathcal{DG}(P)$$

Wo findet man weitere Informationen zu Voronoi-Diagrammen und Delaunay-Triangulierungen?

Aktuelles Buch (2013) von Aurenhammer, Klein, Lee!

