

# Vorlesung Algorithmische Geometrie

## Einführung & Konvexe Hülle

INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK · FAKULTÄT FÜR INFORMATIK

Martin Nöllenburg  
14.04.2014



## Dozent



- Martin Nöllenburg
- `noellenburg@kit.edu`
- Raum 319
- Sprechzeiten: nach Vereinbarung

## Übungsleiter



- Benjamin Niedermann
- `benjamin.niedermann@kit.edu`
- Raum 322
- Sprechzeiten: nach Vereinbarung

## Termine

- Vorlesung: Di 9:45 – 11:15 Uhr, Raum 301
- Übung: Mi 15:45 – 17:15 Uhr, Raum 301 (ab 16.04.)

## Webseite

`http://www.itl.kit.edu/teaching/sommer2014/compgeom`

- aktuelle Informationen
- Vorlesungsfolien
- Übungsblätter
- Zusatzmaterial

## Algorithmische Geometrie im Master-Studium Informatik

Bachelor

Master

Algorithmen 1+2  
Theoretische Grundlagen  
Algorithmen für Planare Graphen

Algorithmische  
Geometrie

⋮

VF Algorithmentechnik,  
Theoretische Grundlagen,  
Computergrafik

**Lernziele:** Am Ende der Vorlesung können Sie

- Begriffe, Strukturen und Problemdefinitionen erklären
- behandelte Algorithmen ausführen, erklären und analysieren
- geeignete Algorithmen und Datenstrukturen auswählen und anpassen
- neue geometrische Probleme analysieren und eigene effiziente Lösungen entwerfen

**Vorkenntnisse:** Algorithmik und elementare Geometrie

**Anforderungen/Prüfung:**

5LP = 150h

- aktive Teilnahme an Vorlesung und Übung ca. 35h
- Vor- und Nachbereitung ca. 25h
- Bearbeiten der Übungsblätter ca. 20h
- Projektarbeit ca. 40h
- Prüfungsvorbereitung ca. 30h

## Master Informatik

- Algorithmische Geometrie (IN4INAG) [5 LP]
- Algorithm Engineering & Anwendungen (IN4INAEA) [5 LP]
- Design und Analyse von Algorithmen (IN4INDAA) [5 LP]
- Algorithmen der Computergrafik (IN4INACG) [3 LP]

## Prüfungsmodalitäten

mehr dazu in 1–2 Wochen

- semesterbegleitende Projektarbeit in kleinen Teams  
(Visualisierung von geometrischen Algorithmen)  
→ 20% der Note
- mündliche Einzelprüfung (ca. 20 Minuten)  
→ 80% der Note

Ausgabe Blatt 1 morgen

**for** Woche  $i = 2 \dots 14$  **do**

**if** Tag = Dienstag **then**

        Ausgabe Blatt  $i$

        Abgabe Blatt  $i - 1$

**if** Tag = Mittwoch **then**

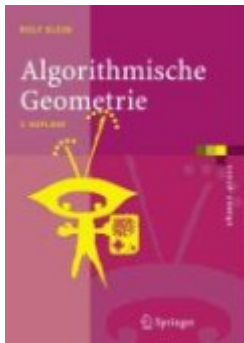
        Besprechung Blatt  $i - 1$

- Bearbeitung der Aufgaben und Abgabe der Lösungen in Zweiergruppen erwünscht
- aktive Übungsteilnahme wird erwartet
- Übung wöchentlich ca. 45–60 Minuten
- Abweichungen werden rechtzeitig bekannt gegeben

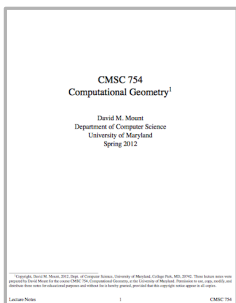
nächste Woche (23.04.) keine Übung!



M. de Berg, O. Cheong, M. van Kreveld, M. Overmars:  
Computational Geometry: Algorithms and Applications  
Springer, 3. Auflage, 2008



Rolf Klein:  
Algorithmische Geometrie  
Springer, 2. Auflage, 2005



David Mount:  
Computational Geometry  
Lecture Notes CMSC 754, U. Maryland, 2012

<http://www.cs.umd.edu/class/spring2012/cmsc754/Lects/cmsc754-lects.pdf>

Beide Bücher in der Bibliothek erhältlich!

# Was ist algorithmische Geometrie?



## Algorithmische Geometrie

Als **Algorithmische Geometrie** (*engl. Computational Geometry*) bezeichnet man ein Teilgebiet der **Informatik**, das sich mit der **algorithmischen** Lösung **geometrisch** formulierter Probleme beschäftigt. Ein zentrales Problem ist dabei die Speicherung und Verarbeitung geometrischer Daten. Im Gegensatz zur **Bildbearbeitung**, deren Grundelemente Bildpunkte (**Pixel**) sind, arbeitet die algorithmische Geometrie mit geometrischen Strukturelementen wie **Punkten**, **Linien**, **Kreisen**, **Polygonen** und **Körpern**.

## Wo treten Probleme der algorithmischen Geometrie auf?

- Computergrafik und Bildverarbeitung
- Visualisierung
- Geoinformationssysteme (GIS)
- Robotik
- ...

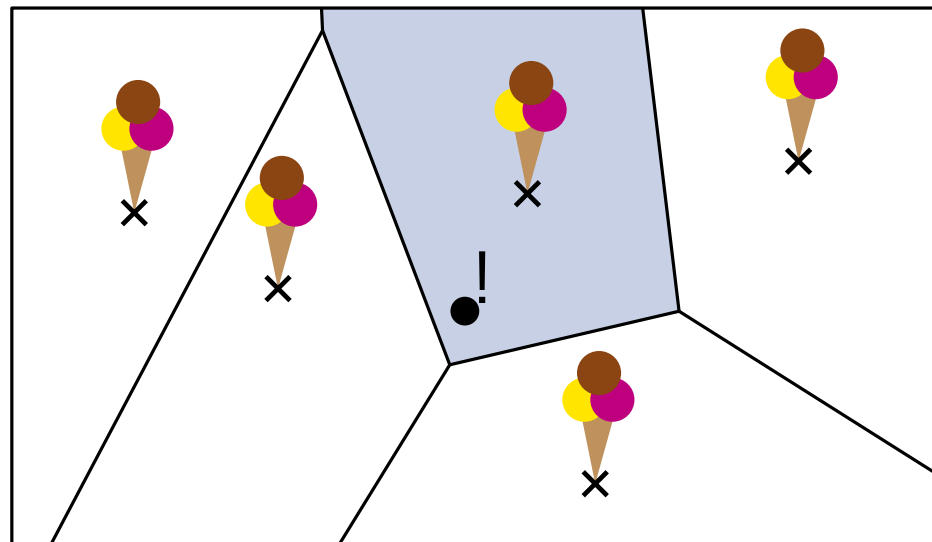
## Zentrale Themen

- geometrische Algorithmen und Datenstrukturen



# Beispiel 1

Ein sonniger Frühlingstag in Karlsruhe. Man kennt die Eisdielen in der Stadt und sucht die nächstgelegene. Wie kann man die nächste Eisdielen für jeden beliebigen Standort in einer Landkarte bestimmen?

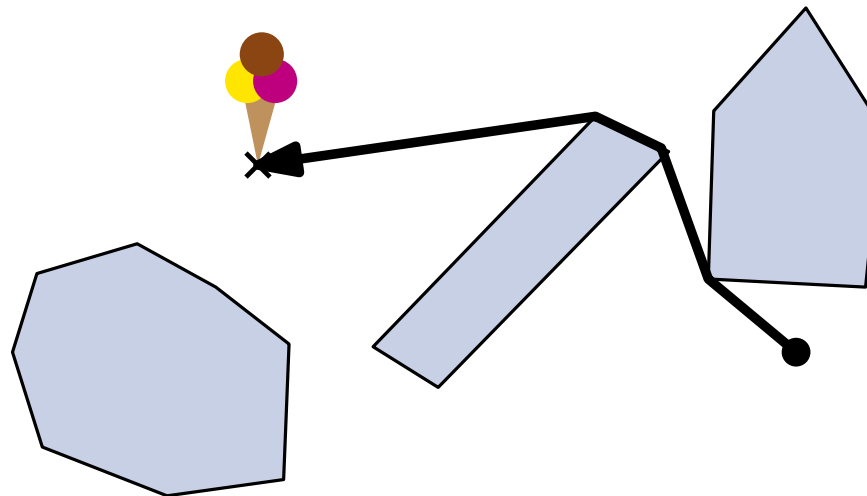


Die Lösung ist eine *Unterteilung* der Ebene, die sich **Voronoi-Diagramm** nennt.

Anwendungen z.B. in der Standortplanung, Berechnung von Einzugsgebieten etc.

# Beispiel 2

Wir wollen unseren Roboter losschicken um ein Eis zu kaufen.  
Wie kommt der Roboter zum Ziel ohne gegen Häuser,  
Parkbänke und Bäume zu laufen?

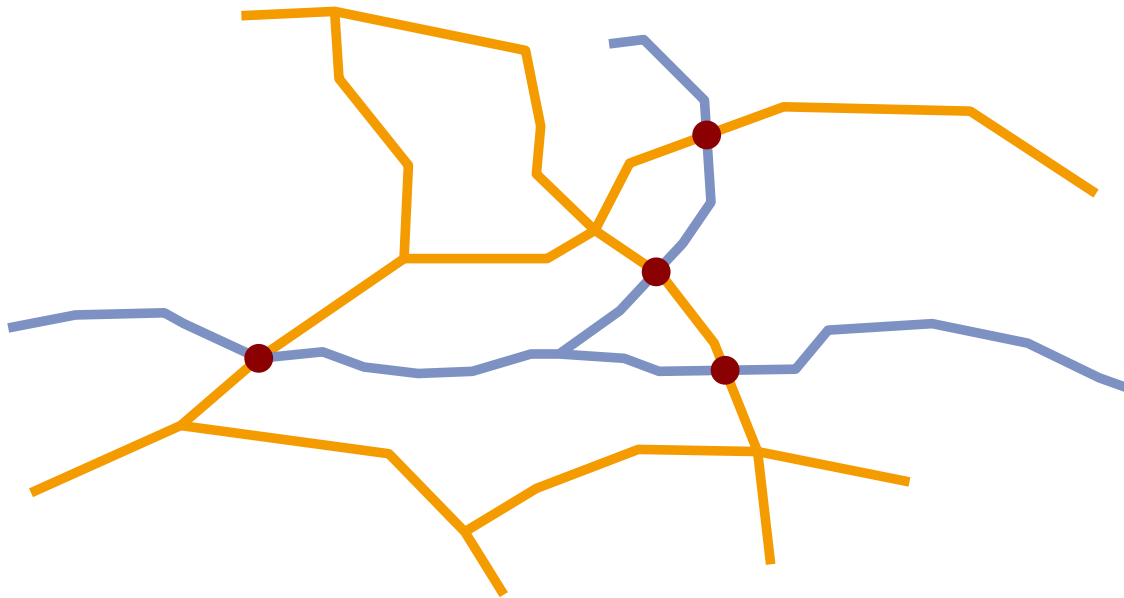


Bewegungsplanungsproblem in der Robotik:  
Gegeben eine Menge von Hindernissen, einen Start- und einen  
Zielpunkt, finde einen kollisionsfreien kürzesten Weg zum Ziel.

# Beispiel 3

Karten in Geoinformationssystemen bestehen aus mehreren Ebenen, z.B. Straßen, Gewässer, Grenzen usw. Überlagert man mehrere Ebenen, stellt sich die Frage nach den Schnittpunkten.

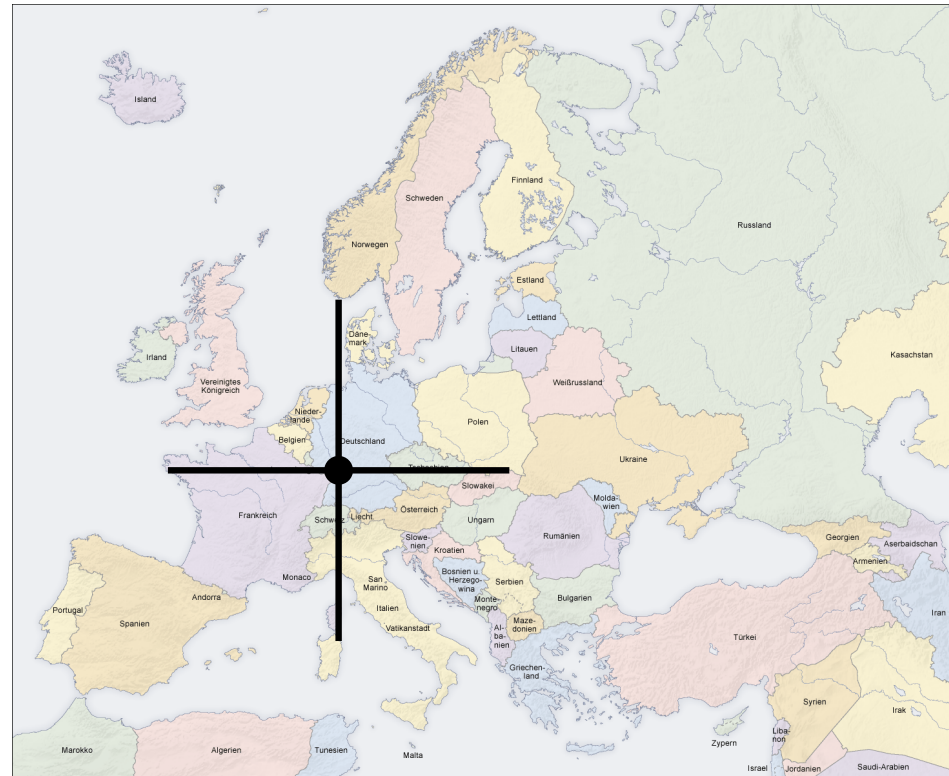
Modelliert man z.B. Straßen und Flüsse als Menge von Strecken und fragt nach den Brücken, muss man alle Schnittpunkte der beiden Streckenmengen finden.



Alle Kantenpaare testen ist zu langsam.  
Wie findet man schnell alle Schnittpunkte?

# Beispiel 4

Gegeben eine Landkarte und einen Anfragepunkt  $q$  (z.B. Mausklick). Bestimme das Land, in dem  $q$  liegt.

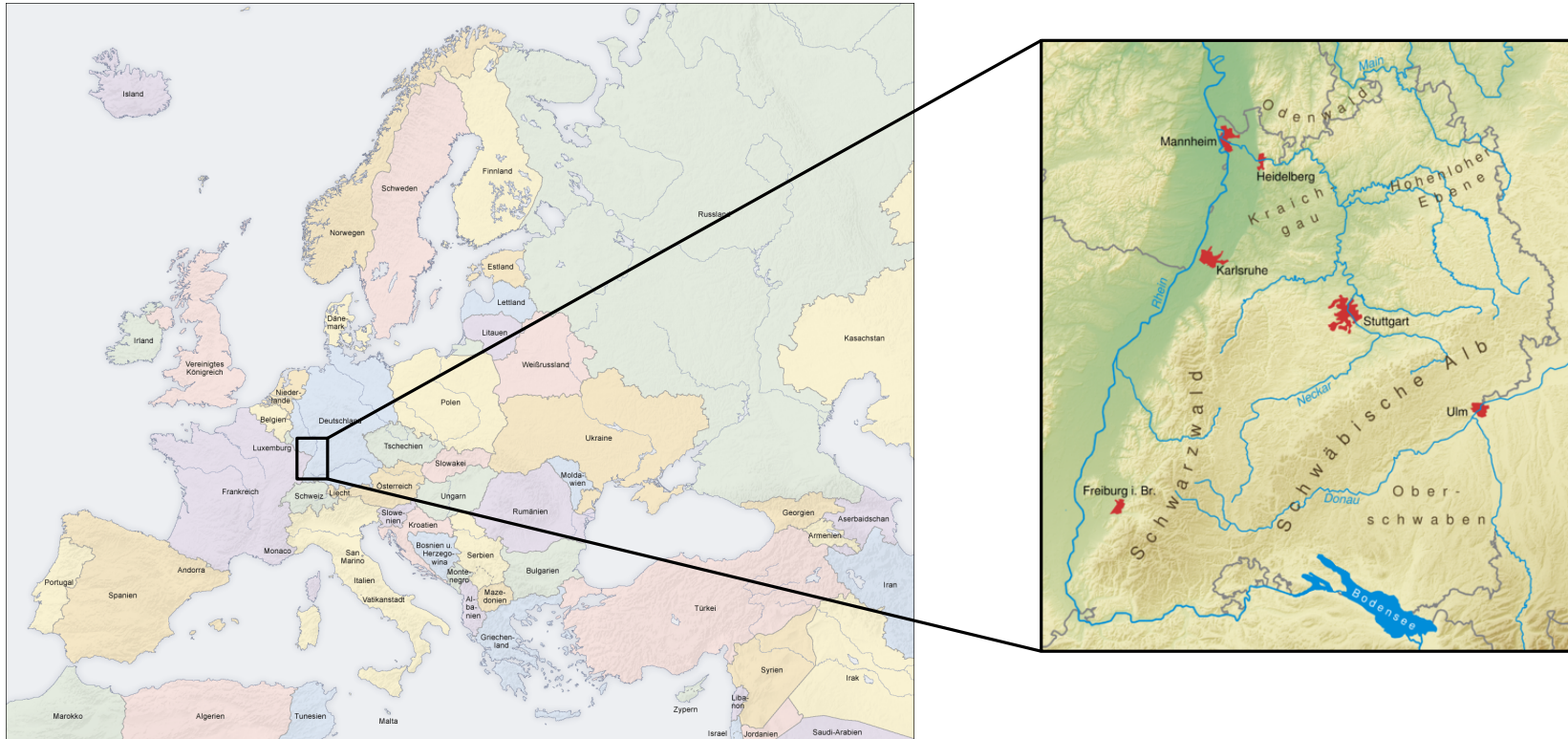


**Ziel:**

Datenstruktur zur schnellen Beantwortung von Punktanfragen

# Beispiel 5

Ein Navigationssystem soll einen aktuellen Kartenausschnitt anzeigen. Wie wählt man effizient die benötigten Daten aus?

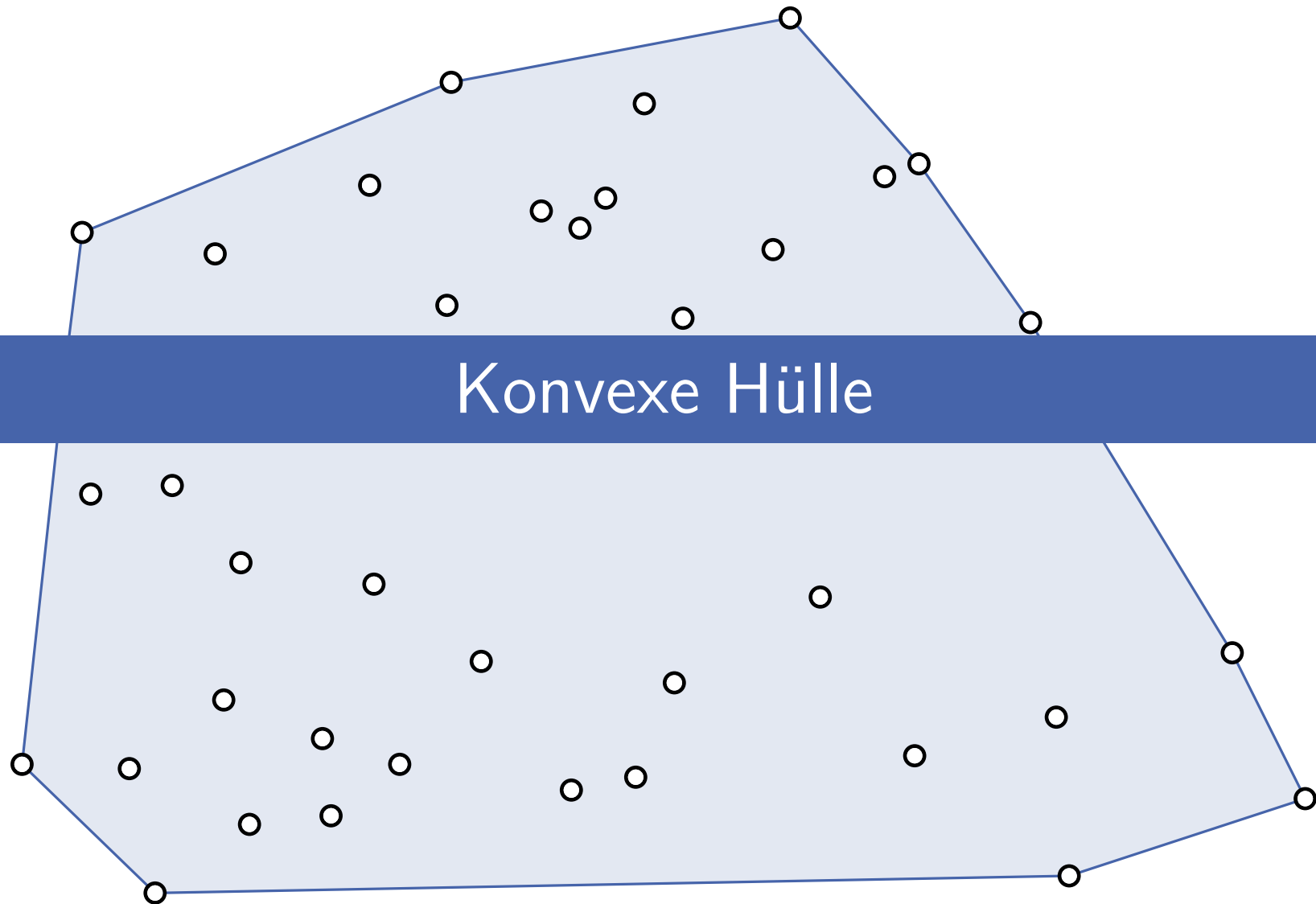


Prüfung für jedes einzelne Kartenobjekt ist unrealistisch.

**Ziel:** Datenstruktur zur schnellen Beantwortung von Bereichsabfragen

## **Folgende Themen werden wir voraussichtlich behandeln:**

- konvexe Hüllen
- Streckenschnitte
- Polygone triangulieren
- lineare Programmierung geometrisch
- Datenstrukturen für Bereichsanfragen
- Datenstrukturen zur Punktlokalisierung
- Voronoi-Diagramm und Delaunay-Triangulierung
- Dualität von Punkten und Geraden
- Quadrees
- Well-Separated Pair Decompositions
- Sichtbarkeitsgraphen
- ...



# Mischungsverhältnisse

Gegeben...

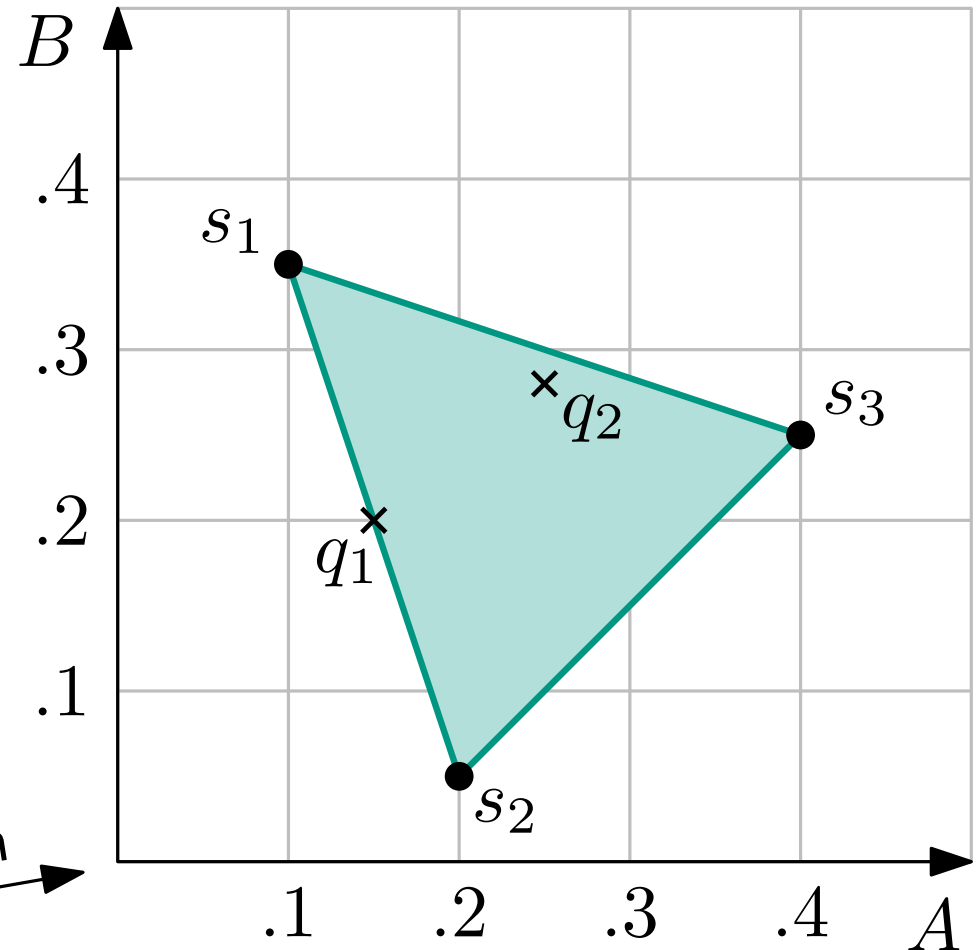
Mixtur	Anteil $A$	Anteil $B$
$s_1$	10 %	35 %
$s_2$	20 %	5 %
$s_3$	40 %	25 %

mische folgende Mixturen

$q_1$	15 %	20 %
$q_2$	25 %	28 %

aus  $s_1, s_2, s_3$ ?

geom. Interpretation



**Beob:** Gegeben eine Menge  $S \subset \mathbb{R}^d$  von Mixturen, kann man eine weitere Mixtur  $q \in \mathbb{R}^d$  aus  $S$  mischen  $\Leftrightarrow q \in$  **konvexer Hülle**  $CH(S)$ .



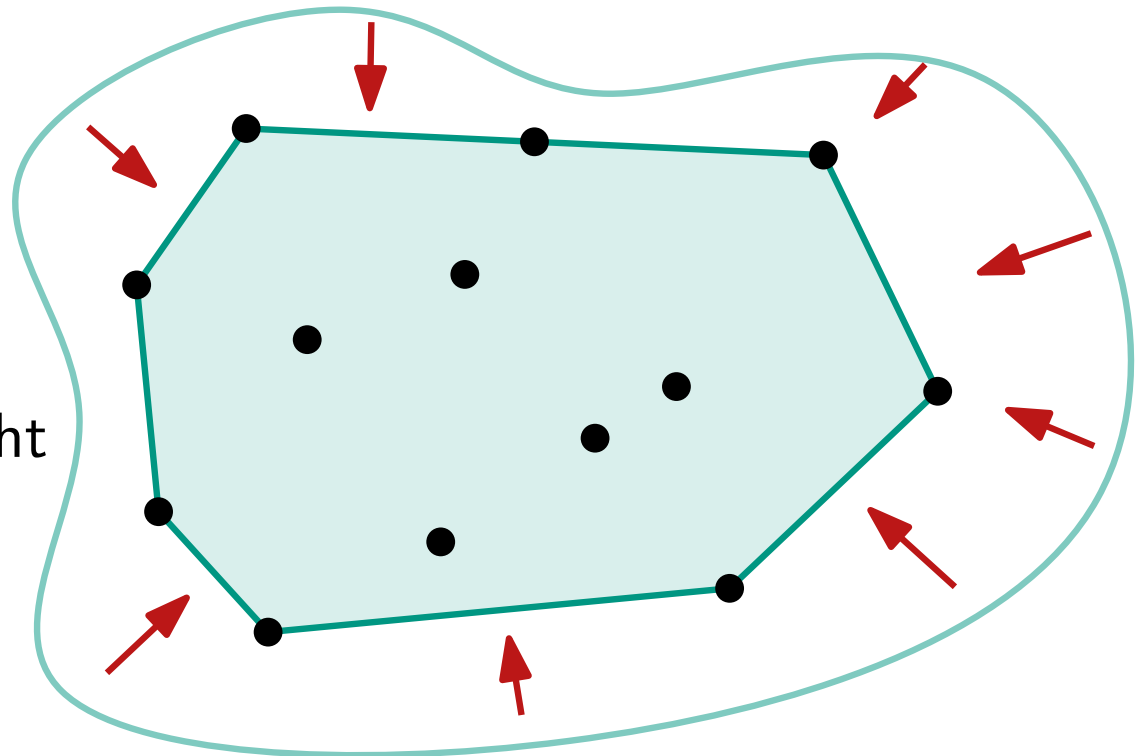
# Definition Konvexe Hülle

**Def:** Eine Menge  $S \subseteq \mathbb{R}^2$  heißt **konvex**, wenn für je zwei Punkte  $p, q \in S$  auch gilt  $\overline{pq} \in S$ .

Die **konvexe Hülle**  $CH(S)$  von  $S$  ist die kleinste konvexe Menge, die  $S$  enthält.

In der Physik:

- lege großes Gummiband um alle Punkte
- und lass es los!
- hilft algorithmisch leider nicht



In der Mathematik:

- definiere  $CH(S) = \bigcap_{C \supseteq S: C \text{ konvex}} C$
- hilft auch nicht :-)

# Algorithmischer Ansatz

## Lemma:

Für eine Punktmenge  $P \subseteq \mathbb{R}^2$  ist  $CH(P)$  ein konvexes Polygon, das  $P$  enthält und dessen Ecken in  $P$  liegen.

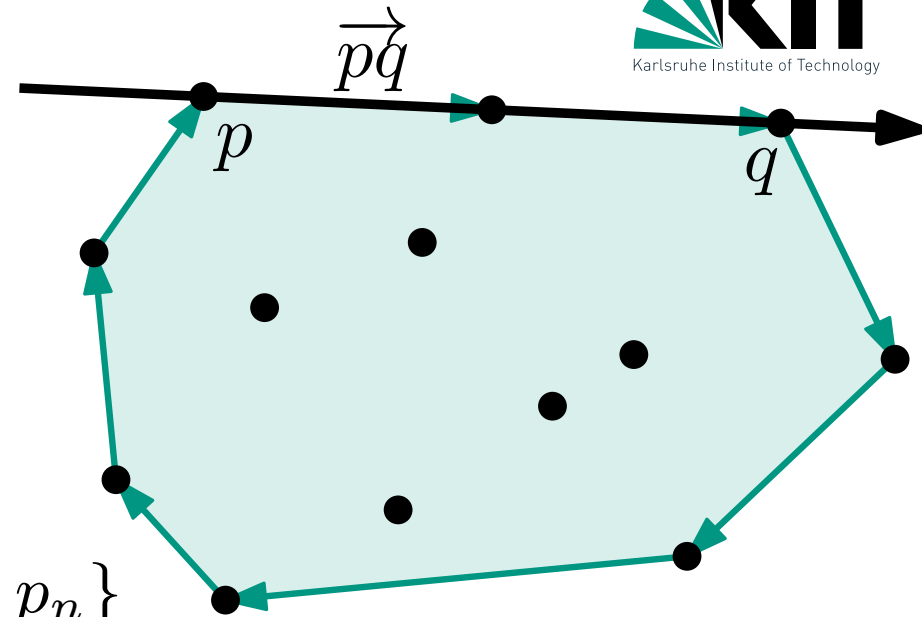
**Eingabe:** Punktmenge  $P = \{p_1, \dots, p_n\}$

**Ausgabe:** Knotenliste von  $CH(P)$  im UZS

## Beobachtung:

$(p, q)$  ist Kante von  $CH(P) \Leftrightarrow$  jeder Punkt  $r \in P \setminus \{p, q\}$  liegt

- strikt rechts der orientierten Geraden  $\vec{pq}$  oder
- auf der Strecke  $\overline{pq}$



# Ein erster Algorithmus

FirstConvexHull( $P$ )

$E \leftarrow \emptyset$

**foreach**  $(p, q) \in P \times P$  with  $p \neq q$  **do**

Prüfe alle möglichen  
Kanten  $(p, q)$

$valid \leftarrow true$

**foreach**  $r \in P$  **do**

**if not** ( $r$  strikt rechts von  $\overrightarrow{pq}$  **or**  $r \in \overline{pq}$ ) **then**

$valid \leftarrow false$

Lässt sich in  $O(1)$  Zeit testen als

$$\begin{vmatrix} x_r & y_r & 1 \\ x_p & y_p & 1 \\ x_q & y_q & 1 \end{vmatrix} < 0$$

→ Übung

**if**  $valid$  **then**

$E \leftarrow E \cup \{(p, q)\}$

konstruiere sortierte Knotenliste  $L$  von  $CH(P)$  aus  $E$

**return**  $L$

FirstConvexHull( $P$ )

$E \leftarrow \emptyset$

**foreach**  $(p, q) \in P \times P$  with  $p \neq q$  **do**  $(n^2 - n) \cdot$

$valid \leftarrow true$

**foreach**  $r \in P$  **do**

**if not** ( $r$  strikt rechts von  $\overrightarrow{pq}$  **or**  $r \in \overline{pq}$ ) **then**

$valid \leftarrow false$

**if**  $valid$  **then**

$E \leftarrow E \cup \{(p, q)\}$

konstruiere sortierte Knotenliste  $L$  von  $CH(P)$  aus  $E$

**return**  $L$

$\Theta(1)$   
 $\Theta(n)$   
 $\Theta(n^3)$   
 $O(n^2)$

**Lemma:** Die konvexe Hülle von  $n$  Punkten in der Ebene lässt sich in  $O(n^3)$  Zeit berechnen.

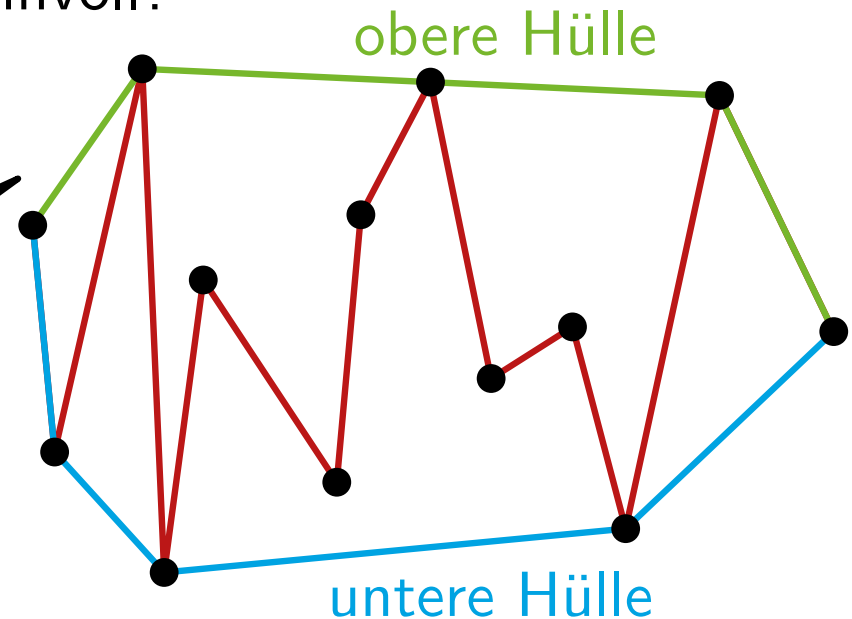
# Inkrementeller Ansatz

**Idee:** Für  $i = 1, \dots, n$  bestimme  $CH(P_i)$  mit  $P_i = \{p_1, \dots, p_i\}$

**Frage:** Welche Ordnung der Punkte ist sinnvoll?

**Antwort:** Von links nach rechts!

Betrachte **obere** und  
**untere** Hülle getrennt



UpperConvexHull( $P$ )

$\langle p_1, p_2, \dots, p_n \rangle \leftarrow$  sortiere  $P$  von links nach rechts

$L \leftarrow \langle p_1, p_2 \rangle$

**for**  $i \leftarrow 3$  **to**  $n$  **do**

$L.append(p_i)$

**while**  $|L| > 2$  **and** letzte 3 Punkte in  $L$  kein Rechtsknick **do**

        entferne vorletzten Punkt aus  $L$

**return**  $L$

untere Hülle analog!

UpperConvexHull( $P$ )

$\langle p_1, p_2, \dots, p_n \rangle \leftarrow$  sortiere  $P$  von links nach rechts  $O(n \log n)$

$L \leftarrow \langle p_1, p_2 \rangle$

**for**  $i \leftarrow 3$  **to**  $n$  **do**

$L.append(p_i)$

**while**  $|L| > 2$  **and** letzte 3 Punkte in  $L$  kein Rechtsknick **do**

        entferne vorletzten Punkt aus  $L$

~~$(n-2)$~~

~~?~~

$O(n)$

**return**  $L$

## Amortisierte Analyse

- jeder Punkt wird genau einmal in  $L$  eingefügt
- ein Punkt in  $L$  wird höchstens einmal aus  $L$  entfernt
- $\Rightarrow$  Laufzeit der **for**-Schleife inkl. **while**-Schleife ist  $O(n)$

**Satz 1:** Die konvexe Hülle von  $n$  Punkten in der Ebene lässt sich mit *Graham's Scan* in  $O(n \log n)$  Zeit berechnen.

# Alternativer Ansatz: Gift Wrapping

**Idee:** beginnend mit einem Punkt  $p_1$  von  $CH(P)$  finde nächste Kante von  $CH(P)$  im UZS

GiftWrapping( $P$ )

```
 $p_1 = (x_1, y_1) \leftarrow$  rechtester Punkt in  $P$ ;  $p_0 \leftarrow (x_1, \infty)$ ;  $j \leftarrow 1$   $O(n)$   
while true do  $O(h)$   
   $p_{j+1} \leftarrow \arg \max \{ \angle p_{j-1}, p_j, q \mid q \in P \setminus \{p_{j-1}, p_j\} \}$   $O(n)$   $O(n \cdot h)$   
  if  $p_{j+1} = p_1$  then break else  $j \leftarrow j + 1$   
return  $(p_1, \dots, p_{j+1})$ 
```

**Satz 2:** Die konvexe Hülle  $CH(P)$  von  $n$  Punkten  $P$  in  $\mathbb{R}^2$  lässt sich mit *Gift Wrapping* (auch *Jarvis' March*) in  $O(n \cdot h)$  Zeit berechnen, wobei  $h = |CH(P)|$ .

→ mehr dazu in der Übung!

## Welcher Algorithmus ist besser?

- Graham's Scan:  $O(n \log n)$  Zeit
- Jarvis' March:  $O(n \cdot h)$  Zeit

Es kommt darauf an wie groß  $CH(P)$  ist!

**Idee:** Kombiniere beide Ansätze für optimalen Algorithmus!



# Chans Algorithmus

Angenommen, wir kennen  $h$ :

$\text{ChanHull}(P, h)$

unterteile  $P$  in Mengen  $P_i$  mit  $|P_i| \leq h$  Knoten

**for**  $i$  von 1 bis  $\lceil n/h \rceil$  **do**

└ Berechne per GrahamScan  $CH(P_i)$

GrahamScan

$p_1 = (x_1, y_1) \leftarrow$  rechtester Punkt in  $P$

$p_0 \leftarrow (x_1, \infty)$

**for**  $j = 1$  **to**  $h$  **do**

Gift Wrapping

└ **for**  $i = 1$  **to**  $\lceil n/h \rceil$  **do**

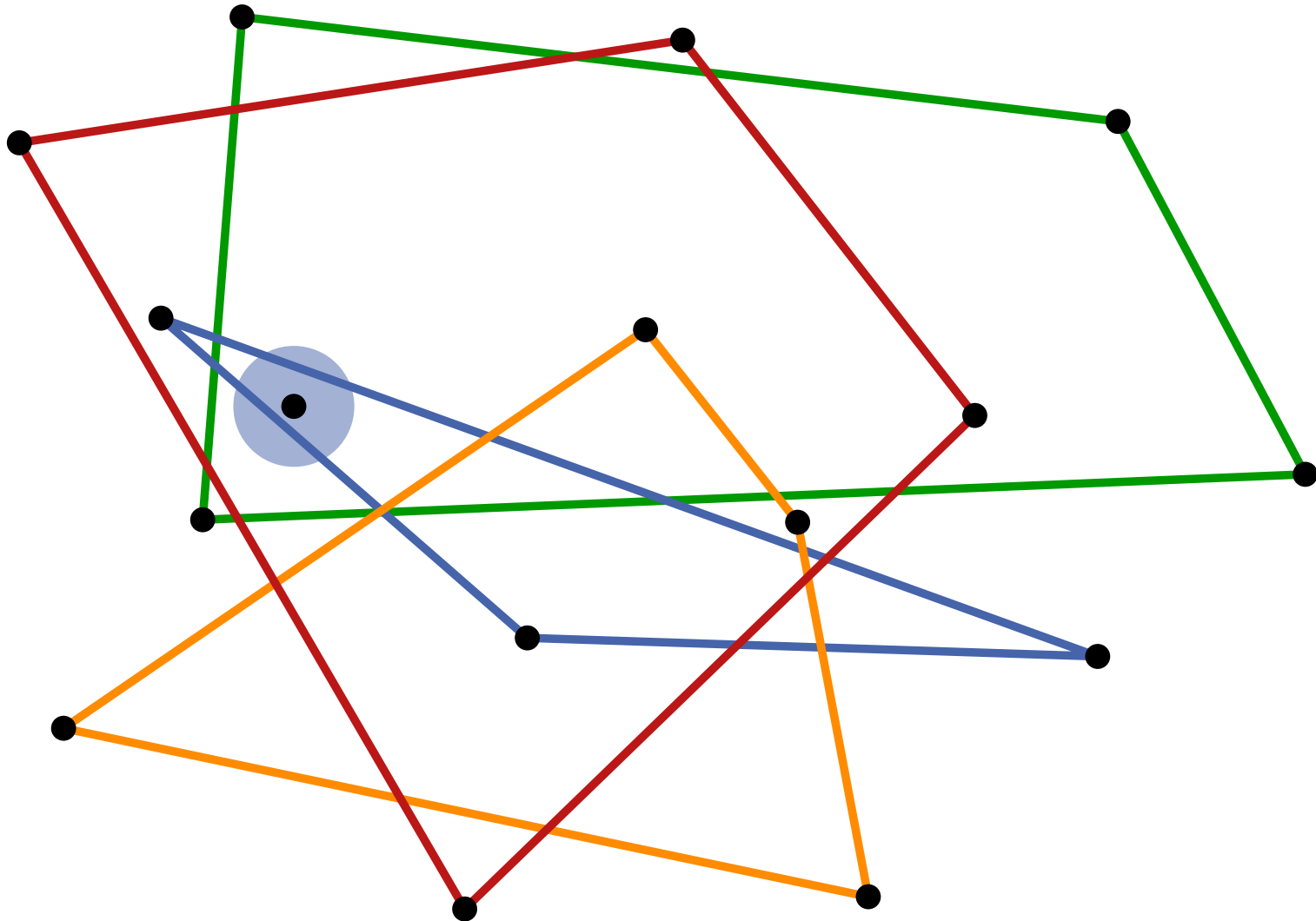
└  $q_i \leftarrow \arg \max \{ \angle p_{j-1} p_j q \mid q \in P_i \setminus \{p_{j-1}, p_j\} \}$

└  $p_{j+1} \leftarrow \arg \max \{ \angle p_{j-1} p_j q \mid q \in \{q_1, \dots, q_{\lceil n/h \rceil}\} \}$

**return**  $(p_1, \dots, p_h)$

# Beispiel

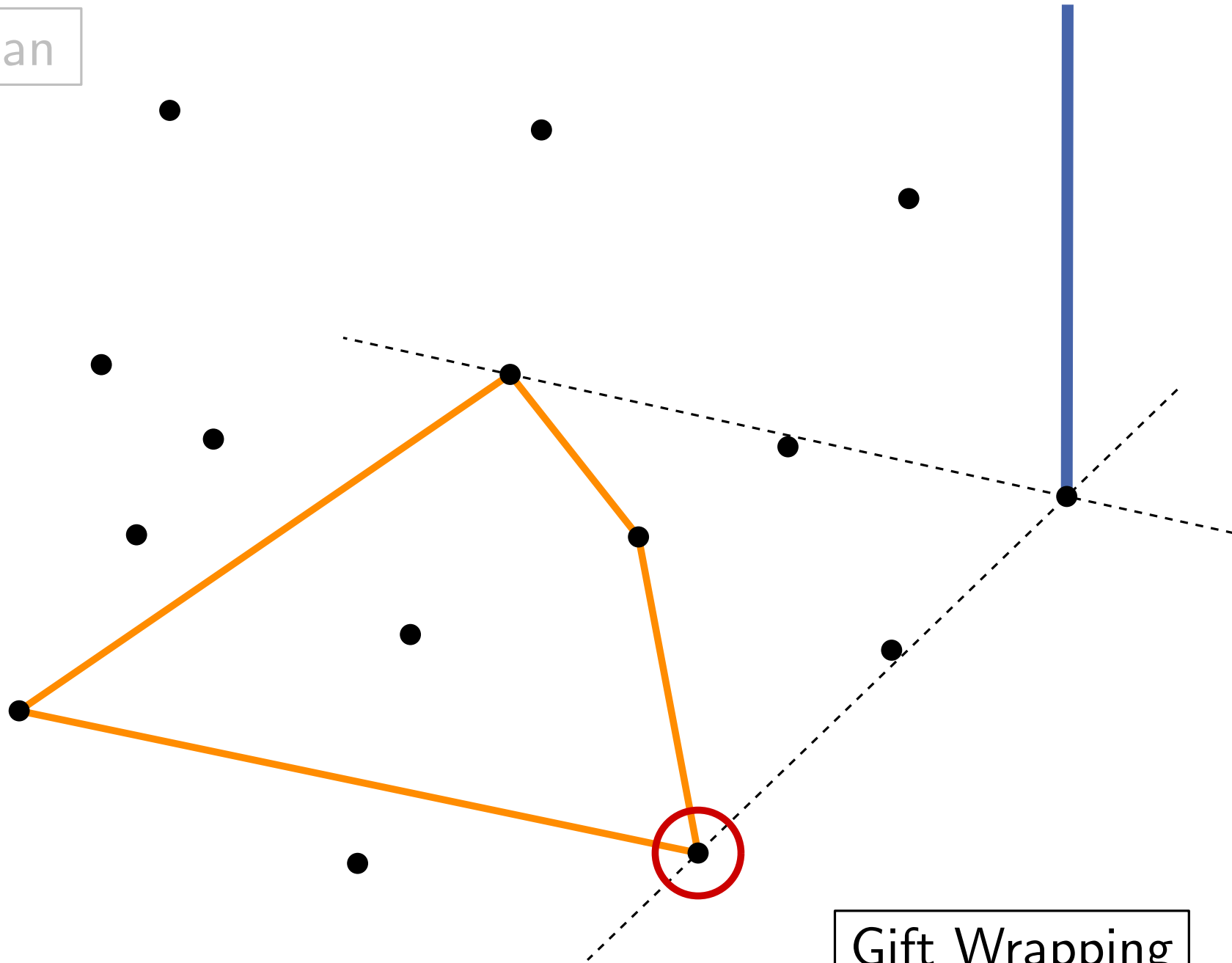
## GrahamScan



$n = 16$

# Beispiel

GrahamScan

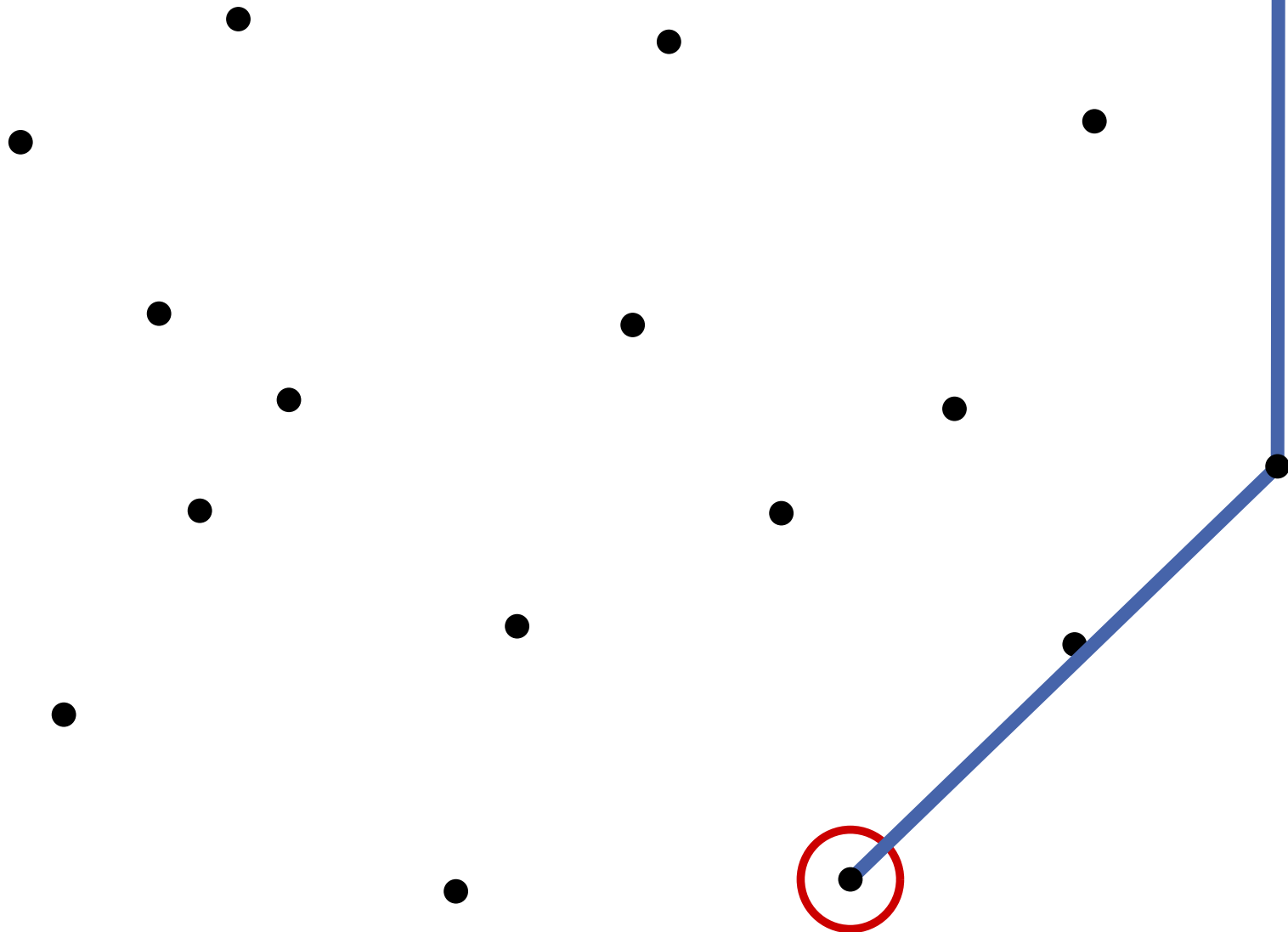


$n = 16$

Gift Wrapping

# Beispiel

GrahamScan



$n = 16$

Gift Wrapping

# Chans Algorithmus

Angenommen, wir kennen  $h$ :

ChanHull( $P, h$ )

unterteile  $P$  in Mengen  $P_i$  mit  $|P_i| \leq h$  Knoten

```
for  $i$  von 1 bis  $\lceil n/h \rceil$  do  $\mathcal{O}(n/h)$   
└ Berechne per GrahamScan  $CH(P_i)$   $\mathcal{O}(h \log h)$ 
```

$p_1 = (x_1, y_1) \leftarrow$  rechtester Punkt in  $P$

$p_0 \leftarrow (x_1, \infty)$

```
for  $j = 1$  to  $h$  do  $\mathcal{O}(h) \cdot \mathcal{O}(n/h) = \mathcal{O}(n)$ 
```

```
└ for  $i = 1$  to  $\lceil n/h \rceil$  do  $\mathcal{O}(\log h) \rightarrow$  s. Übung!
```

```
└└  $q_i \leftarrow \arg \max \{ \angle p_{j-1} p_j q \mid q \in P_i \setminus \{p_{j-1}, p_j\} \}$ 
```

```
└└  $p_{j+1} \leftarrow \arg \max \{ \angle p_{j-1} p_j q \mid q \in \{q_1, \dots, q_{\lceil n/h \rceil}\} \}$ 
```

```
return  $(p_1, \dots, p_h)$ 
```

$\mathcal{O}(n \log h)$   
 $\mathcal{O}(n \log h)$

Insgesamt:  $\mathcal{O}(n \log h)$

**Im Allgemeinen ist  $h$  aber unbekannt!**

ChanHull( $P, m$ )

unterteile  $P$  in Mengen  $P_i$  mit  $|P_i| \leq m$  Knoten

```
for  $i$  von 1 bis  $\lceil n/m \rceil$  do  $\mathcal{O}(n/m)$   
   $\lfloor$  Berechne per GrahamScan  $CH(P_i)$   $\mathcal{O}(m \log m)$ 
```

$p_1 = (x_1, y_1) \leftarrow$  rechtester Punkt in  $P$

$p_0 \leftarrow (x_1, \infty)$

```
for  $j = 1$  to  $m$  do  $\mathcal{O}(m) \cdot \mathcal{O}(n/m) = \mathcal{O}(n)$   
  for  $i = 1$  to  $\lceil n/m \rceil$  do  $\mathcal{O}(\log m)$ 
```

```
     $\lfloor$   $q_i \leftarrow \arg \max \{ \angle p_{j-1} p_j q \mid q \in P_i \setminus \{p_{j-1}, p_j\} \}$ 
```

```
     $p_{j+1} \leftarrow \arg \max \{ \angle p_{j-1} p_j q \mid q \in \{q_1, \dots, q_{\lceil n/m \rceil}\} \}$ 
```

```
    if  $p_{j+1} = p_1$  then return  $(p_1, \dots, p_{j+1})$ 
```

```
return failure
```

Insgesamt:  $\mathcal{O}(n \log m)$

$\mathcal{O}(n \log m)$   
 $\mathcal{O}(n \log m)$

# Was ist mit $m$ ?

FullChanHull( $P$ )

**for**  $t = 0, 1, 2, \dots$  **do**

$m \leftarrow \min\{n, 2^{2^t}\}$

**result**  $\leftarrow$  ChanHull( $P, m$ )       $\mathcal{O}(n \log m) =$

**if** **result**  $\neq$  failure **then** break       $\mathcal{O}(n \log 2^{2^t})$

**return** result

Laufzeit:

$$\begin{aligned} \sum_{t=0}^{\lceil \log \log h \rceil} \mathcal{O}(n \log 2^{2^t}) &= \mathcal{O}(n) \sum_{t=0}^{\lceil \log \log h \rceil} \mathcal{O}(2^t) \\ &\leq \mathcal{O}(n) \cdot \mathcal{O}(2^{\log \log h}) &= \mathcal{O}(n) \cdot \mathcal{O}(\log h) \\ & &= \mathcal{O}(n \log h) \end{aligned}$$

# Was ist mit $m$ ?

FullChanHull( $P$ )

```
for  $t = 0, 1, 2, \dots$  do  
   $m \leftarrow \min\{n, 2^{2^t}\}$   
   $\text{result} \leftarrow \text{ChanHull}(P, m)$   
  if  $\text{result} \neq \text{failure}$  then break  
return result
```

**Satz 3:** Die konvexe Hülle  $CH(P)$  von  $n$  Punkten  $P$  in  $\mathbb{R}^2$  lässt sich mit Chans Algorithmus in  $O(n \log h)$  Zeit berechnen, wobei  $h = |CH(P)|$ .



## Geht es schneller als in $O(n \log n)$ bzw. $O(n \log h)$ Zeit?

Im allgemeinen nicht! Denn ein Algorithmus zur Berechnung der konvexen Hülle kann auch Sortieren (s. Übung)  $\Rightarrow$  untere Schranke  $\Omega(n \log n)$ .

## Was passiert in Graham's Scan, wenn die Sortierung von $P$ nicht eindeutig ist?

Nutze lexikographische Ordnung!

## Was passiert mit kollinearen Punkten in $CH(P)$ ?

Graham: Bilden keinen Rechtsknick, also wird innerer Punkt gelöscht.  
Jarvis: wähle entfernteren Punkt

## Wie steht es um die Robustheit der Algorithmen?

- Robustheit bzgl. Ungenauigkeit von Fließkommaarithmetik
- FirstConvexHull liefert evtl. kein gültiges Polygon
- Graham und Jarvis liefern zumindest immer ein gültiges Polygon, evtl. mit kleinen Fehlern

# Phasen der Algorithmenentwicklung

- 1.) Degenerierte Fälle ausblenden ( $\rightarrow$  *allgemeine Lage*)
  - eindeutige  $x$ -Koordinaten
  - keine drei kollinearen Punkte
  - ...
  
- 2.) Anpassung an degenerierte Eingaben
  - in bisherige Behandlung integrieren (z.B. lexikographische Ordnung)
  - notfalls gesonderte Behandlung
  
- 3.) Implementierung
  - primitive Operationen (verfügbar in Bibliotheken?)
  - Robustheit