Karlsruher Institut für Technologie

Algorithmen für Routenplanung

2. Sitzung, Sommersemester 2013

Thomas Pajor | 22. April 2013

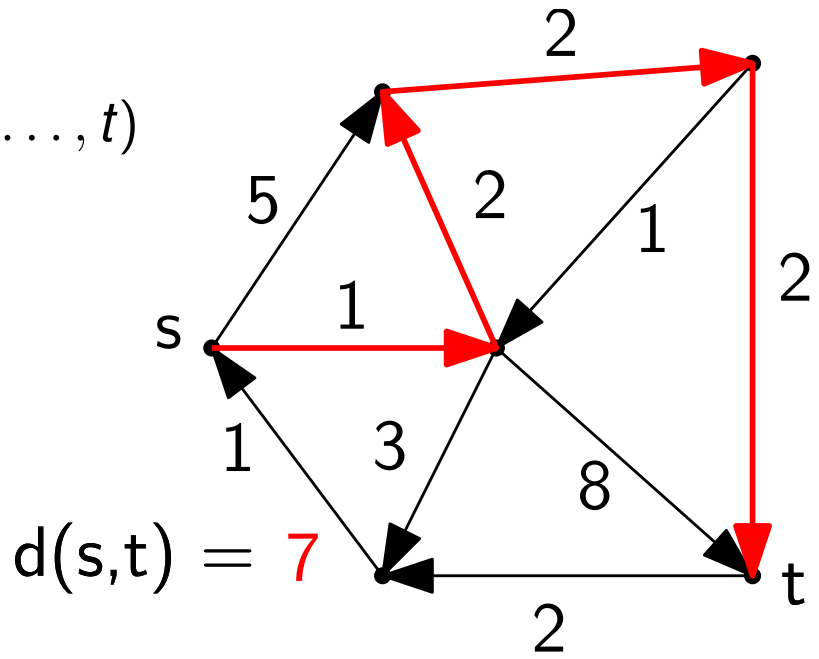
Institut für Theoretische Informatik · Algorithmik · Prof. Dr. Dorothea Wagner

Problemstellung

Gegeben:
Graph $G = (V, E, \text{len})$ mit positiver Kantenfunktion $\text{len} : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$,
Knoten $s, t \in V$

Mögliche Aufgaben

- Berechne Distanz $d(s, t)$
- Finde kürzesten s-t-Pfad $P := (s, \ldots, t)$



Eigenschaften von kürzesten Wegen

Azyklität:

- Kürzeste Wege sind zyklenfrei

Aufspannungseigenschaft:

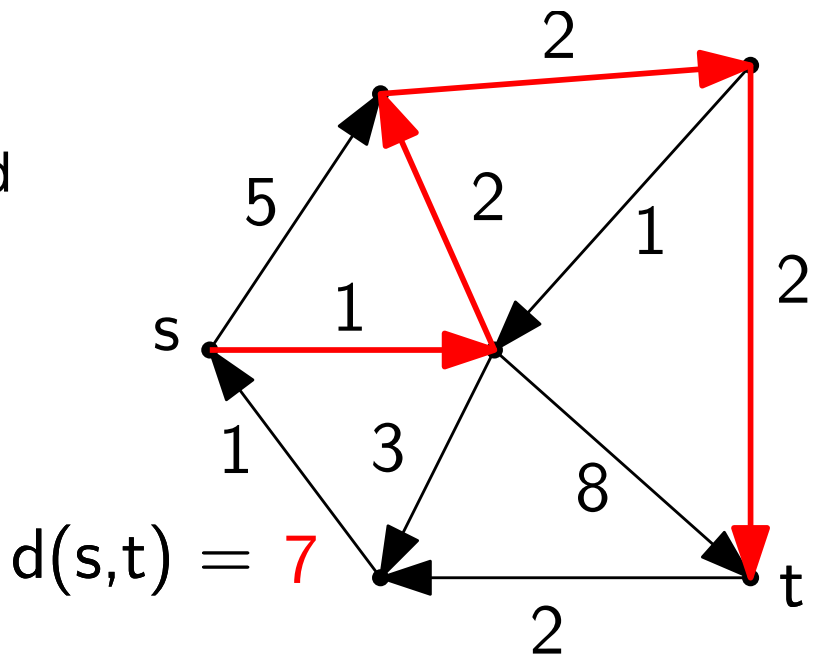
- Alle kürzesten Wege von *s* aus bilden DAG bzw. Baum

Vererbungseigenschaft:

- Subwege von kürzesten Wegen sind kürzeste Wege

Abstand:

- Steigender Abstand von Wurzel zu Blättern



Wiederholung: Priority Queues

Priority Queue: Datenstruktur die folgende Operationen erfüllt.

Operation	Beschreibung
Empty()	Prüft ob die Queue leer ist
Clear()	Löscht alle Elemente aus der Queue
Insert(e, k)	Fügt Element e mit Key k ein
DecreaseKey(e, k)	Senkt den Key von Element e auf den Wert k
DeleteMin()	Löscht das Element mit kleinstem Key und gibt es zurück
MinKey()	Gibt den Key des kleinsten Elements zurück

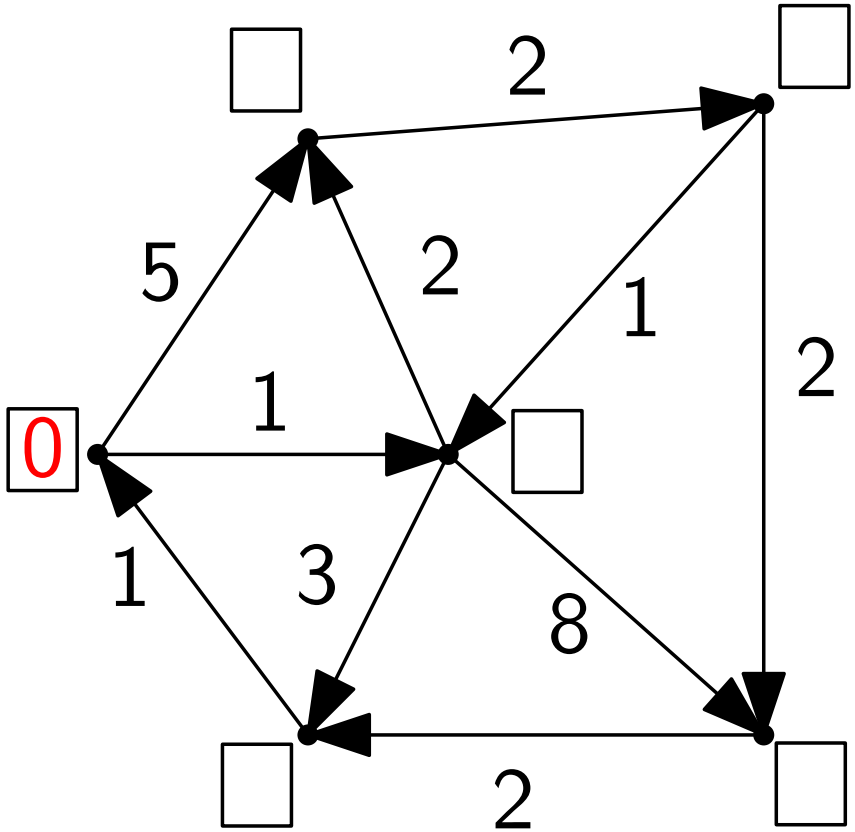
Näheres in jedem Algorithmik-Standardlehrbuch.

Dijkstra

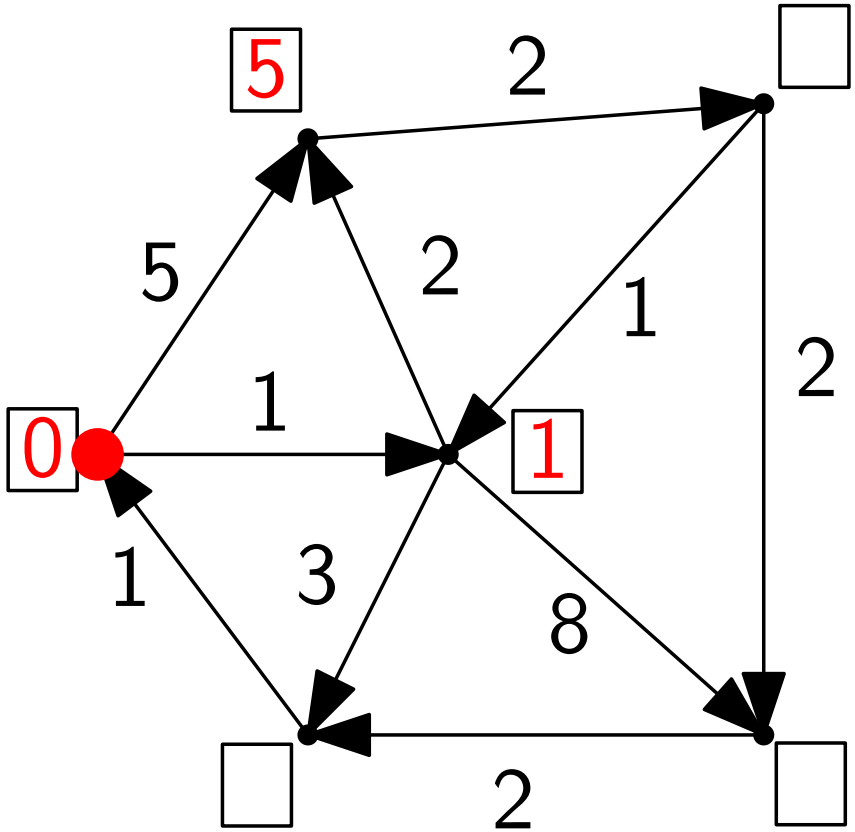
DIJKSTRA($G = (V, E)$, s)

```
1  forall the nodes v ∈ V do
2      d[v] = ∞, p[v] = NULL                    // distances, parents
3  d[s] = 0
4  Q.clear(), Q.insert(s, 0)                    // container
5  while !Q.empty() do
6      u ← Q.deleteMin()                        // settling node u
7      forall the edges e = (u, v) ∈ E do
           // relaxing edges
8          if d[u] + len(e) < d[v] then
9              d[v] ← d[u] + len(e)
10             p[v] ← u
11             if v ∈ Q then Q.decreaseKey(v, d[v])
12
13             else Q.insert(v, d[v])
```

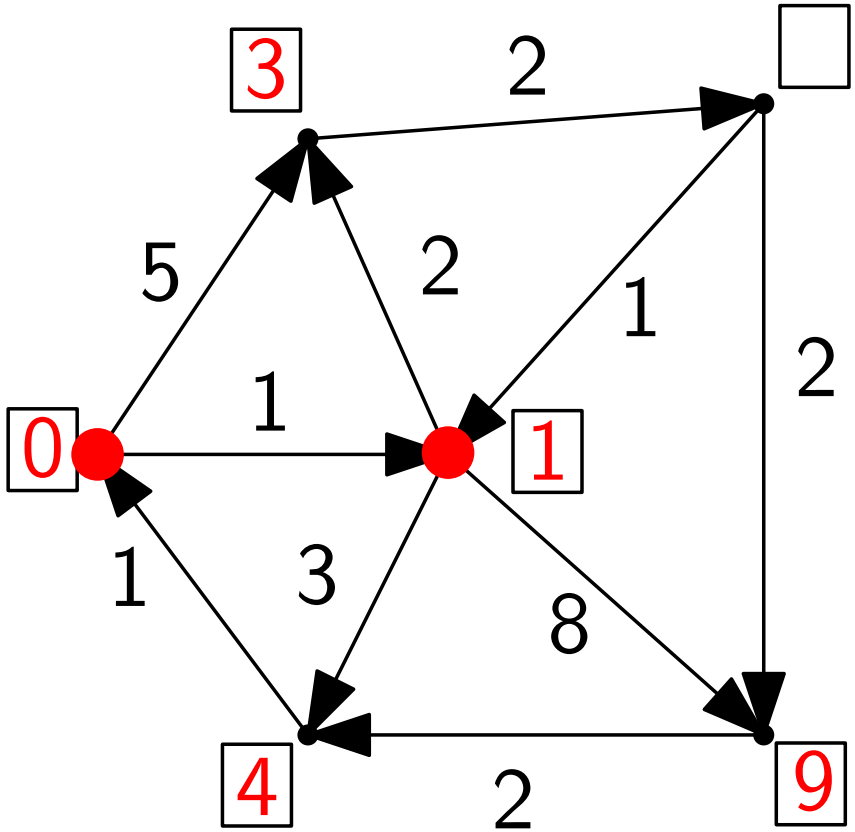
Beispiel



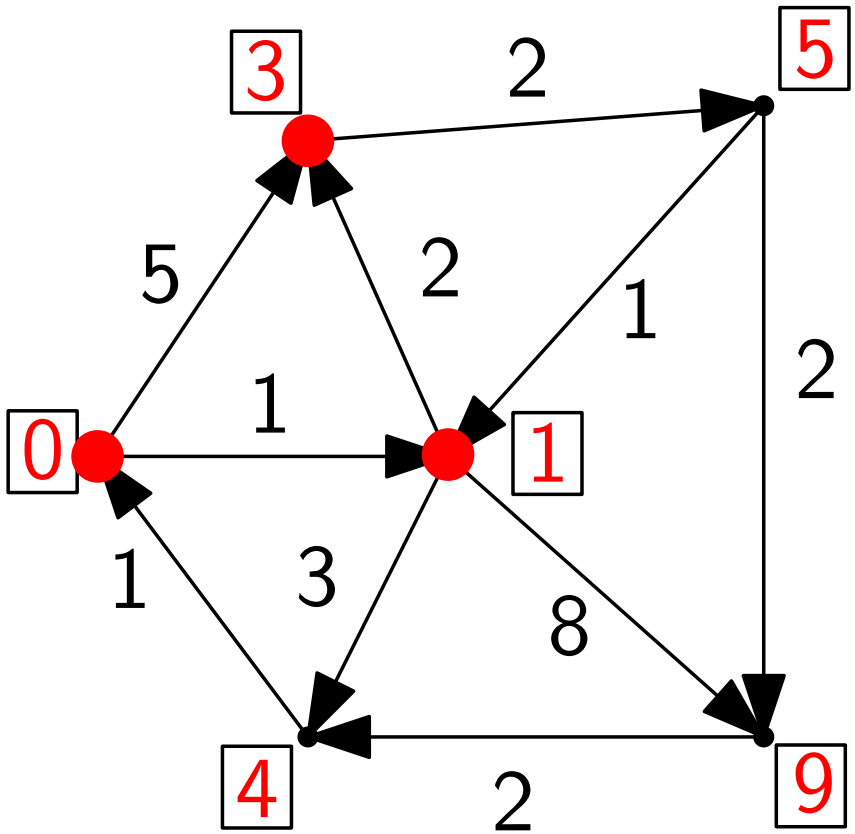
Beispiel



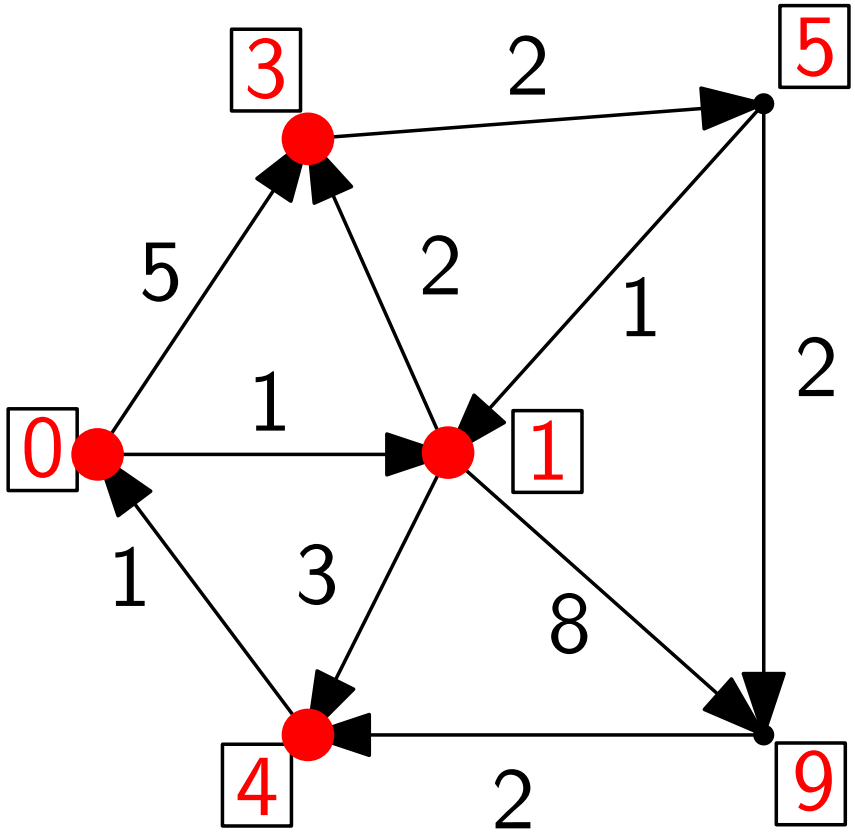
Beispiel



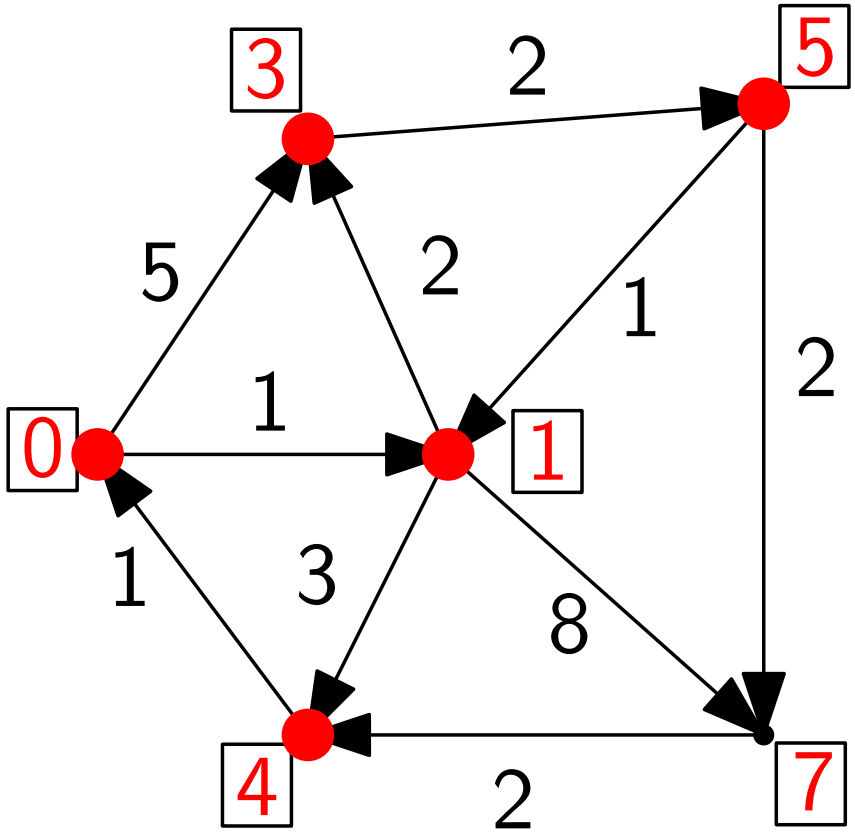
Beispiel



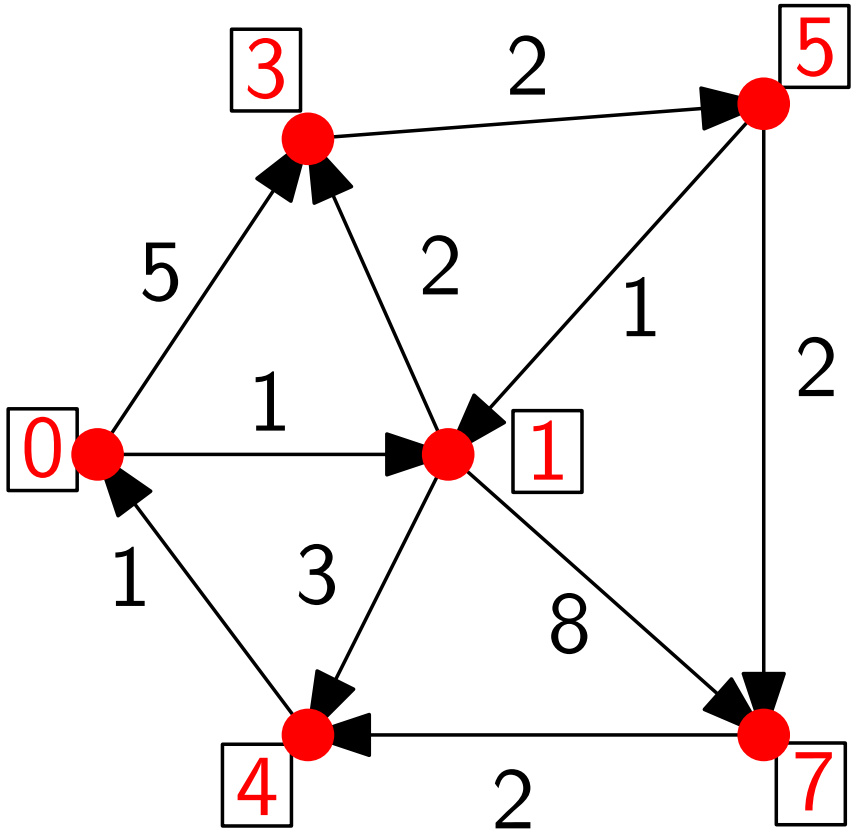
Beispiel



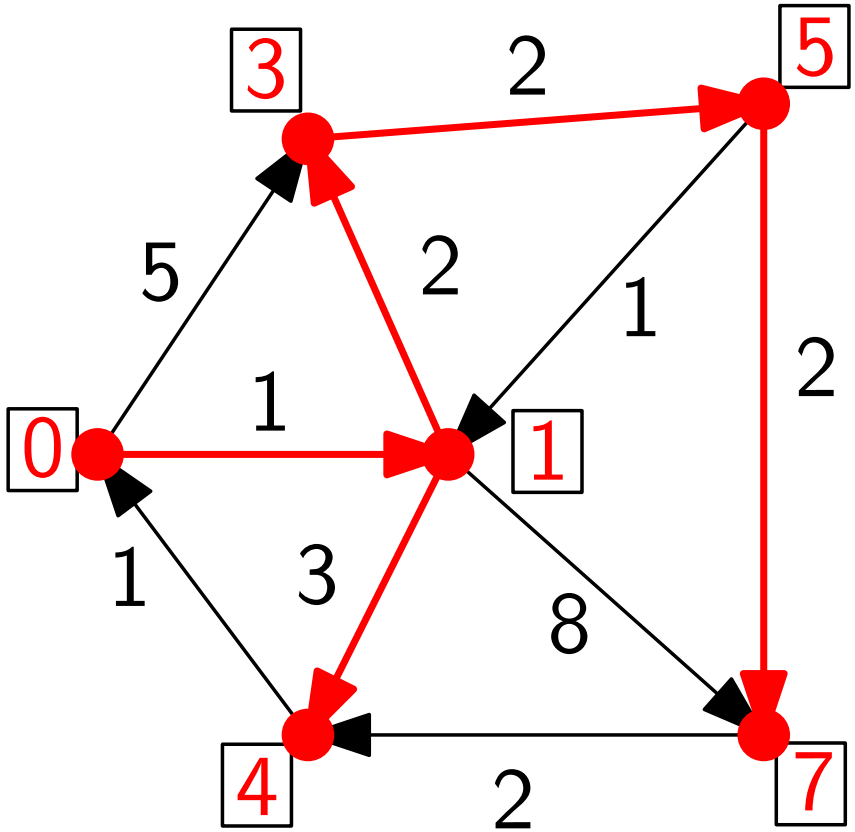
Beispiel



Beispiel



Beispiel



Kantenrelaxierung

DIJKSTRA($G = (V, E)$, s)

```
1  forall the nodes v ∈ V do
2      d[v] = ∞, p[v] = NULL                    // distances, parents
3  d[s] = 0
4  Q.clear(), Q.insert(s, 0)                    // container
5  while !Q.empty() do
6      u ← Q.deleteMin()                        // settling node u
7      forall the edges e = (u, v) ∈ E do
           // relaxing edges
8          if d[u] + len(e) < d[v] then
9              d[v] ← d[u] + len(e)
10             p[v] ← u
11             if v ∈ Q then Q.decreaseKey(v, d[v])
12
13             else Q.insert(v, d[v])
```

Definitionen

Kantenrelaxierung: Der Vorgang

1 **if** $d[u] + \text{len}(u, v) < d[v]$ **then** $d[v] \leftarrow d[u] + \text{len}(u, v)$

heißt *Kantenrelaxierung*.

Definitionen

Kantenrelaxierung: Der Vorgang

1 **if** $d[u] + \text{len}(u, v) < d[v]$ **then** $d[v] \leftarrow d[u] + \text{len}(u, v)$

heißt *Kantenrelaxierung*.

Besuchte Knoten: Ein Knoten heißt (zu einem Zeitpunkt) *besucht (visited)* wenn er (zu diesem Zeitpunkt) schon in die Queue eingefügt wurde (unabhängig davon, ob er noch in der Queue ist).

Definitionen

Kantenrelaxierung: Der Vorgang

1 **if** $d[u] + \text{len}(u, v) < d[v]$ **then** $d[v] \leftarrow d[u] + \text{len}(u, v)$

heißt *Kantenrelaxierung*.

Besuchte Knoten: Ein Knoten heißt (zu einem Zeitpunkt) *besucht (visited)* wenn er (zu diesem Zeitpunkt) schon in die Queue eingefügt wurde (unabhängig davon, ob er noch in der Queue ist).

Abgearbeitete Knoten: Ein Knoten heißt (zu einem Zeitpunkt) *abgearbeitet (settled)* wenn er (zu diesem Zeitpunkt) schon in die Queue eingefügt und wieder extrahiert wurde.

Korrektheit

Beh: Dijkstra terminiert mit $d[v] = d(s, v)$ für alle $v \in V$

drei Schritte:

(i) alle erreichbaren Knoten werden abgearbeitet

(ii) es ist immer $d[v] \geq d(s, v)$

(iii) wenn v abgearbeitet wird, ist $d[v] = d(s, v)$

Korrektheit

Beh: Dijkstra terminiert mit $d[v] = d(s, v)$ für alle $v \in V$

drei Schritte:

(i) alle erreichbaren Knoten werden abgearbeitet

(ii) es ist immer $d[v] \geq d(s, v)$

(iii) wenn v abgearbeitet wird, ist $d[v] = d(s, v)$

Beweis (i):

- Beh: v wird nicht abgearbeitet, ist aber erreichbar
- es gibt kürzesten s-t-Weg $(s = v_1, \ldots, v_k = v)$
- s wird abgearbeitet
- also gibt es v_i mit v_{i-1} abgearbeitet und v_i nicht
- also wird v_i in die Queue eingefügt
- Widerspruch zu v_i wird nicht abgearbeitet

Korrektheit

Beh: Dijkstra terminiert mit $d[v] = d(s, v)$ für alle $v \in V$

drei Schritte:

(i) alle erreichbaren Knoten werden abgearbeitet

(ii) es ist immer $d[v] \geq d(s, v)$

(iii) wenn v abgearbeitet wird, ist $d[v] = d(s, v)$

Beweis (ii):

- Für jeden Knoten $v \neq s$ gilt:
- Initial ist $d[v] = \infty$
- Alle folgenden Änderungen korrespondieren zu Längen von s-v-Wegen im Graphen
- Die Länge eines s-v-Weges ist immer mindestens so lang, wie die länge eines kürzesten s-v-Weges

Korrektheit

Beweis (iii): wenn v abgearbeitet wird, ist $d[v] = d(s, v)$.

- Beh: Es gibt v, so dass v wird abgearbeitet mit $d[v] > d(s, v)$
- Sei v der erste solche Knoten (in Abarbeitungsreihenfolge)
- Sei S die Menge aller Knoten, die vor v abgearbeitet werden.
- Sei $s = v_1, \ldots, v_k = v$ ein kürzester s-v-Weg
- Falls alle $v_i \in S$, so ist $d[v] = d(s, v)$ wenn v besucht wird. Widerspruch.
- Sei also v_i der Knoten mit dem kleinsten i, so dass $v_i \notin S$.
- Wegen $v_{i-1} \in S$ ist $d[v_i] = d(s, v_i) < d[v]$ zu dem Zeitpunkt an dem v bearbeitet wird.
- Also hätte v_i vor v abgearbeitet werden müssen.
- Widerspruch zu $v_i \notin S$

Komplexität von Dijkstra

DIJKSTRA($G = (V, E)$, s)

```
1  forall the nodes v ∈ V do
2      d[v] = ∞, p[v] = NULL
3  d[s] = 0, Q.clear(), Q.insert(s, 0)
4  while !Q.empty() do
5      u ← Q.deleteMin()
6      forall the edges e = (u, v) ∈ E do
7          if d[u] + len(e) < d[v] then
8              d[v] ← d[u] + len(e)
9              p[v] ← u
10             if v ∈ Q then Q.decreaseKey(v, d[v])
11             else Q.insert(v, d[v])
```

Komplexität von Dijkstra

Karlsruher Institut für Technologie

DIJKSTRA($G = (V, E)$, s)

```
1  forall the nodes v ∈ V do
2      d[v] = ∞, p[v] = NULL                          // n Mal
3  d[s] = 0, Q.clear(), Q.insert(s, 0)
4  while !Q.empty() do
5      u ← Q.deleteMin()
6      forall the edges e = (u, v) ∈ E do
7          if d[u] + len(e) < d[v] then
8              d[v] ← d[u] + len(e)
9              p[v] ← u
10             if v ∈ Q then Q.decreaseKey(v, d[v])
11             else Q.insert(v, d[v])
```

Komplexität von Dijkstra

DIJKSTRA($G = (V, E)$, s)

```
1  forall the nodes v ∈ V do
2      d[v] = ∞, p[v] = NULL                          // n Mal
3  d[s] = 0, Q.clear(), Q.insert(s, 0)                // 1 Mal
4  while !Q.empty() do
5      u ← Q.deleteMin()
6      forall the edges e = (u, v) ∈ E do
7          if d[u] + len(e) < d[v] then
8              d[v] ← d[u] + len(e)
9              p[v] ← u
10             if v ∈ Q then Q.decreaseKey(v, d[v])
11             else Q.insert(v, d[v])
```

Komplexität von Dijkstra

Karlsruher Institut für Technologie

DIJKSTRA($G = (V, E)$, s)

```
1  forall the nodes v ∈ V do
2      d[v] = ∞, p[v] = NULL                          // n Mal
3  d[s] = 0, Q.clear(), Q.insert(s, 0)                // 1 Mal
4  while !Q.empty() do
5      u ← Q.deleteMin()                              // n Mal
6      forall the edges e = (u, v) ∈ E do
7          if d[u] + len(e) < d[v] then
8              d[v] ← d[u] + len(e)
9              p[v] ← u
10             if v ∈ Q then Q.decreaseKey(v, d[v])
11             else Q.insert(v, d[v])
```

Komplexität von Dijkstra

Karlsruher Institut für Technologie

DIJKSTRA($G = (V, E)$, s)

```
1  forall the nodes v ∈ V do
2      d[v] = ∞, p[v] = NULL                          // n Mal
3  d[s] = 0, Q.clear(), Q.insert(s, 0)                // 1 Mal
4  while !Q.empty() do
5      u ← Q.deleteMin()                              // n Mal
6      forall the edges e = (u, v) ∈ E do
7          if d[u] + len(e) < d[v] then
8              d[v] ← d[u] + len(e)
9              p[v] ← u
10             if v ∈ Q then Q.decreaseKey(v, d[v])
                                                      // m Mal
11             else Q.insert(v, d[v])
```

Komplexität von Dijkstra

Karlsruher Institut für Technologie

DIJKSTRA($G = (V, E)$, s)

```
1  forall the nodes v ∈ V do
2      d[v] = ∞, p[v] = NULL                          // n Mal
3  d[s] = 0, Q.clear(), Q.insert(s, 0)                // 1 Mal
4  while !Q.empty() do
5      u ← Q.deleteMin()                              // n Mal
6      forall the edges e = (u, v) ∈ E do
7          if d[u] + len(e) < d[v] then
8              d[v] ← d[u] + len(e)
9              p[v] ← u
10             if v ∈ Q then Q.decreaseKey(v, d[v])
                                                      // m Mal
11             else Q.insert(v, d[v])
                                                      // n Mal
```

Komplexität von Dijkstra

DIJKSTRA($G = (V, E)$, s)

```
1  forall the nodes v ∈ V do
2      d[v] = ∞, p[v] = NULL                          // n Mal
3  d[s] = 0, Q.clear(), Q.insert(s, 0)                // 1 Mal
4  while !Q.empty() do
5      u ← Q.deleteMin()                              // n Mal
6      forall the edges e = (u, v) ∈ E do
7          if d[u] + len(e) < d[v] then
8              d[v] ← d[u] + len(e)
9              p[v] ← u
10             if v ∈ Q then Q.decreaseKey(v, d[v])
                                                      // m Mal
11             else Q.insert(v, d[v])
                                                      // n Mal
```

$$T_{\text{DIJKSTRA}} = T_{init} + n \cdot T_{deleteMin} + m \cdot T_{decreaseKey} + n \cdot T_{insert}$$

Laufzeit

$$T_{\text{DIJKSTRA}} = T_{init} + n \cdot T_{deleteMin} + m \cdot T_{decreaseKey} + n \cdot T_{insert}$$

Operation	Liste (worst-case)	Binary Heap (worst-case)	Binomial heap (worst-case)	Fibonacci heap (amortized)
Init	$\Theta(1)$	$\Theta(1)$	$\Theta(1)$	$\Theta(1)$
Insert	$\Theta(1)$	$\Theta(\log k)$	$\mathcal{O}(\log k)$	$\Theta(1)$
Minimum	$\Theta(n)$	$\Theta(1)$	$\mathcal{O}(\log k)$	$\Theta(1)$
DeleteMin	$\Theta(n)$	$\Theta(\log k)$	$\Theta(\log k)$	$\mathcal{O}(\log k)$
Union	$\Theta(1)$	$\Theta(k)$	$\mathcal{O}(\log k)$	$\Theta(1)$
DecreaseKey	$\Theta(1)$	$\Theta(\log k)$	$\Theta(\log k)$	$\Theta(1)$
Delete	$\Theta(1)$	$\Theta(\log k)$	$\Theta(\log k)$	$\mathcal{O}(\log k)$
Dijkstra				

Laufzeit

$$T_{\text{DIJKSTRA}} = T_{init} + n \cdot T_{deleteMin} + m \cdot T_{decreaseKey} + n \cdot T_{insert}$$

Operation	Liste (worst-case)	Binary Heap (worst-case)	Binomial heap (worst-case)	Fibonacci heap (amortized)
Init	$\Theta(1)$	$\Theta(1)$	$\Theta(1)$	$\Theta(1)$
Insert	$\Theta(1)$	$\Theta(\log k)$	$\mathcal{O}(\log k)$	$\Theta(1)$
Minimum	$\Theta(n)$	$\Theta(1)$	$\mathcal{O}(\log k)$	$\Theta(1)$
DeleteMin	$\Theta(n)$	$\Theta(\log k)$	$\Theta(\log k)$	$\mathcal{O}(\log k)$
Union	$\Theta(1)$	$\Theta(k)$	$\mathcal{O}(\log k)$	$\Theta(1)$
DecreaseKey	$\Theta(1)$	$\Theta(\log k)$	$\Theta(\log k)$	$\Theta(1)$
Delete	$\Theta(1)$	$\Theta(\log k)$	$\Theta(\log k)$	$\mathcal{O}(\log k)$
Dijkstra	$\mathcal{O}(n^2 + m)$	$\mathcal{O}((n+m)\log n)$	$\mathcal{O}((n+m)\log n)$	$\mathcal{O}(m + n\log n)$

Laufzeit

$$T_{\text{DIJKSTRA}} = T_{init} + n \cdot T_{deleteMin} + m \cdot T_{decreaseKey} + n \cdot T_{insert}$$

Operation	Liste (worst-case)	Binary Heap (worst-case)	Binomial heap (worst-case)	Fibonacci heap (amortized)
Init	$\Theta(1)$	$\Theta(1)$	$\Theta(1)$	$\Theta(1)$
Insert	$\Theta(1)$	$\Theta(\log k)$	$\mathcal{O}(\log k)$	$\Theta(1)$
Minimum	$\Theta(n)$	$\Theta(1)$	$\mathcal{O}(\log k)$	$\Theta(1)$
DeleteMin	$\Theta(n)$	$\Theta(\log k)$	$\Theta(\log k)$	$\mathcal{O}(\log k)$
Union	$\Theta(1)$	$\Theta(k)$	$\mathcal{O}(\log k)$	$\Theta(1)$
DecreaseKey	$\Theta(1)$	$\Theta(\log k)$	$\Theta(\log k)$	$\Theta(1)$
Delete	$\Theta(1)$	$\Theta(\log k)$	$\Theta(\log k)$	$\mathcal{O}(\log k)$
Dijkstra	$\mathcal{O}(n^2 + m)$	$\mathcal{O}((n+m)\log n)$	$\mathcal{O}((n+m)\log n)$	$\mathcal{O}(m + n\log n)$
Dij ($m \in \Theta(n^2)$)	$\mathcal{O}(n^2)$	$\mathcal{O}(n^2 \log n)$	$\mathcal{O}(n^2 \log n)$	$\mathcal{O}(n^2)$

Laufzeit

$$T_{\text{DIJKSTRA}} = T_{init} + n \cdot T_{deleteMin} + m \cdot T_{decreaseKey} + n \cdot T_{insert}$$

Operation	Liste (worst-case)	Binary Heap (worst-case)	Binomial heap (worst-case)	Fibonacci heap (amortized)
Init	$\Theta(1)$	$\Theta(1)$	$\Theta(1)$	$\Theta(1)$
Insert	$\Theta(1)$	$\Theta(\log k)$	$\mathcal{O}(\log k)$	$\Theta(1)$
Minimum	$\Theta(n)$	$\Theta(1)$	$\mathcal{O}(\log k)$	$\Theta(1)$
DeleteMin	$\Theta(n)$	$\Theta(\log k)$	$\Theta(\log k)$	$\mathcal{O}(\log k)$
Union	$\Theta(1)$	$\Theta(k)$	$\mathcal{O}(\log k)$	$\Theta(1)$
DecreaseKey	$\Theta(1)$	$\Theta(\log k)$	$\Theta(\log k)$	$\Theta(1)$
Delete	$\Theta(1)$	$\Theta(\log k)$	$\Theta(\log k)$	$\mathcal{O}(\log k)$
Dijkstra	$\mathcal{O}(n^2 + m)$	$\mathcal{O}((n+m)\log n)$	$\mathcal{O}((n+m)\log n)$	$\mathcal{O}(m + n\log n)$
Dij ($m \in \Theta(n^2)$)	$\mathcal{O}(n^2)$	$\mathcal{O}(n^2 \log n)$	$\mathcal{O}(n^2 \log n)$	$\mathcal{O}(n^2)$
Dij ($m \in \mathcal{O}(n)$)	$\mathcal{O}(n^2)$	$\mathcal{O}(n \log n)$	$\mathcal{O}(n \log n)$	$\mathcal{O}(n \log n)$

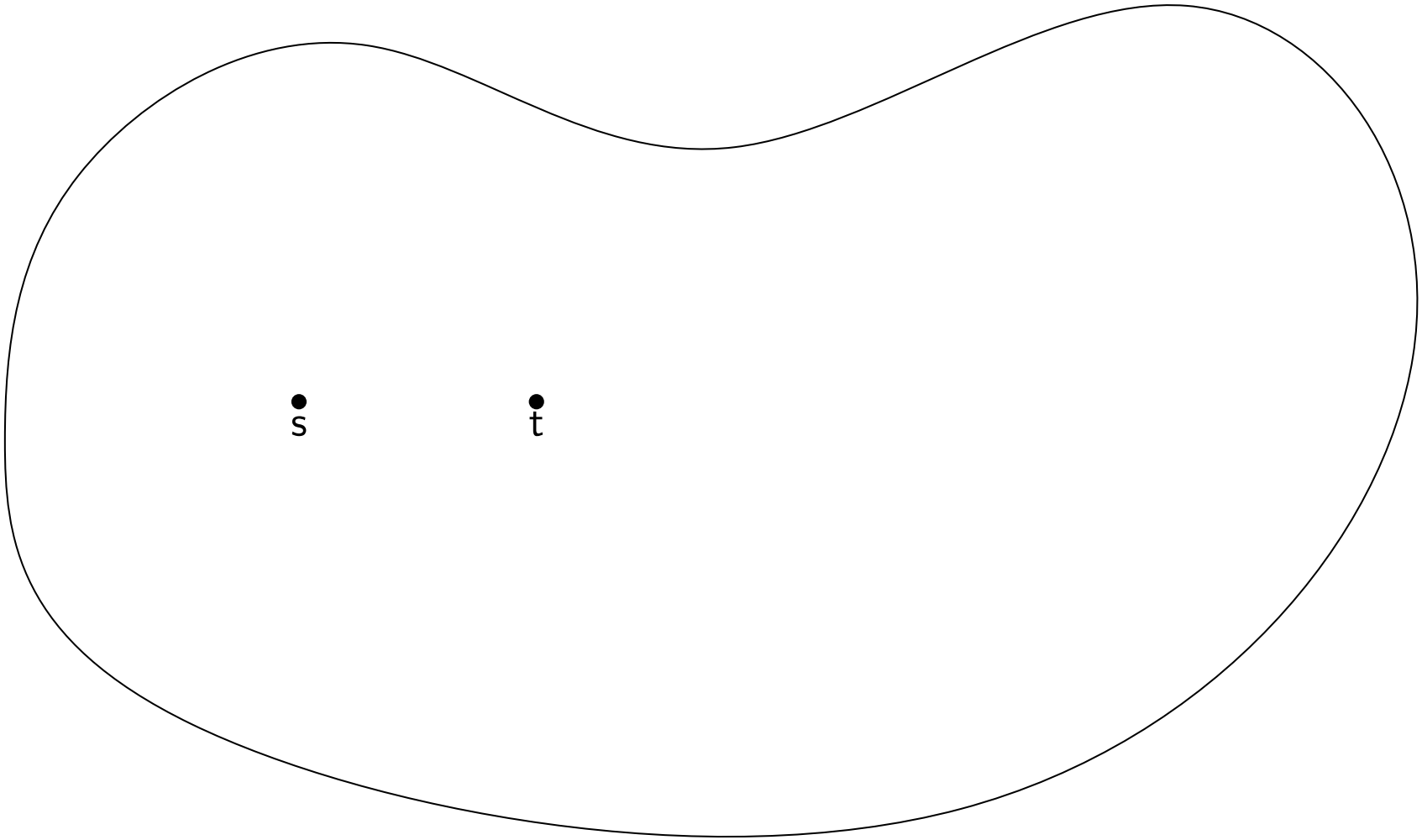
Laufzeit

$$T_{\text{DIJKSTRA}} = T_{init} + n \cdot T_{deleteMin} + m \cdot T_{decreaseKey} + n \cdot T_{insert}$$

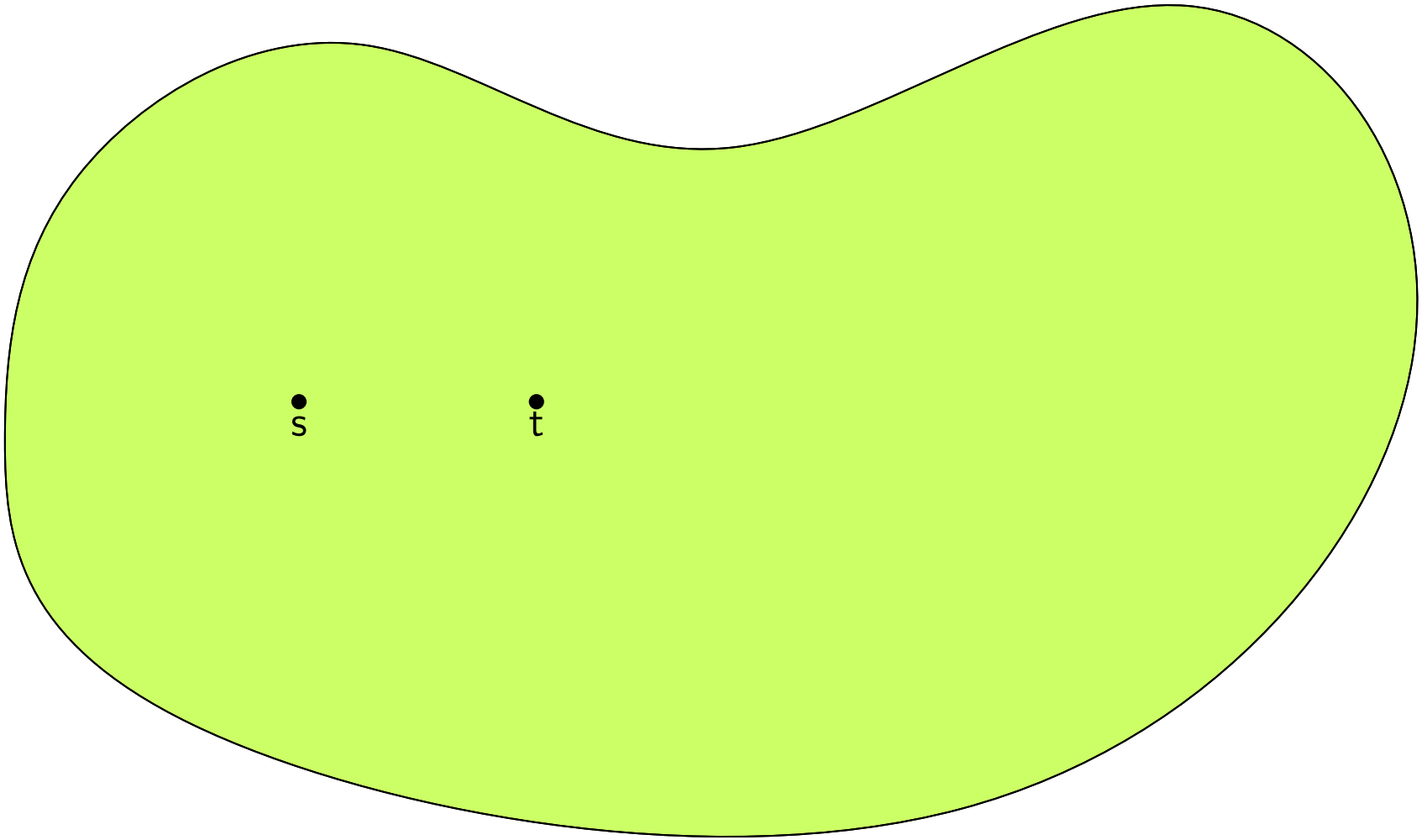
Operation	Liste (worst-case)	Binary Heap (worst-case)	Binomial heap (worst-case)	Fibonacci heap (amortized)
Init	$\Theta(1)$	$\Theta(1)$	$\Theta(1)$	$\Theta(1)$
Insert	$\Theta(1)$	$\Theta(\log k)$	$\mathcal{O}(\log k)$	$\Theta(1)$
Minimum	$\Theta(n)$	$\Theta(1)$	$\mathcal{O}(\log k)$	$\Theta(1)$
DeleteMin	$\Theta(n)$	$\Theta(\log k)$	$\Theta(\log k)$	$\mathcal{O}(\log k)$
Union	$\Theta(1)$	$\Theta(k)$	$\mathcal{O}(\log k)$	$\Theta(1)$
DecreaseKey	$\Theta(1)$	$\Theta(\log k)$	$\Theta(\log k)$	$\Theta(1)$
Delete	$\Theta(1)$	$\Theta(\log k)$	$\Theta(\log k)$	$\mathcal{O}(\log k)$
Dijkstra	$\mathcal{O}(n^2 + m)$	$\mathcal{O}((n+m)\log n)$	$\mathcal{O}((n+m)\log n)$	$\mathcal{O}(m + n\log n)$
Dij ($m \in \Theta(n^2)$)	$\mathcal{O}(n^2)$	$\mathcal{O}(n^2 \log n)$	$\mathcal{O}(n^2 \log n)$	$\mathcal{O}(n^2)$
Dij ($m \in \mathcal{O}(n)$)	$\mathcal{O}(n^2)$	$\mathcal{O}(n \log n)$	$\mathcal{O}(n \log n)$	$\mathcal{O}(n \log n)$

Transportnetzwerke sind dünn $\Rightarrow$ Binary Heaps

Schematischer Suchraum, Dijkstra



Schematischer Suchraum, Dijkstra



Abbruch

Beobachtung

- Dijkstra's Algorithmus durchsucht den ganzen Graphen
- Viel unnütze Information, vor allem wenn s und t nahe beinander

Abbruch

Beobachtung

- Dijkstra's Algorithmus durchsucht den ganzen Graphen
- Viel unnütze Information, vor allem wenn s und t nahe beinander

Idee

- stoppe die Anfrage, sobald t aus der Queue entfernt wurde
- **Suchraum**: Menge der abgearbeiteten Knoten

Abbruch

Beobachtung

- Dijkstra's Algorithmus durchsucht den ganzen Graphen
- Viel unnütze Information, vor allem wenn s und t nahe beinander

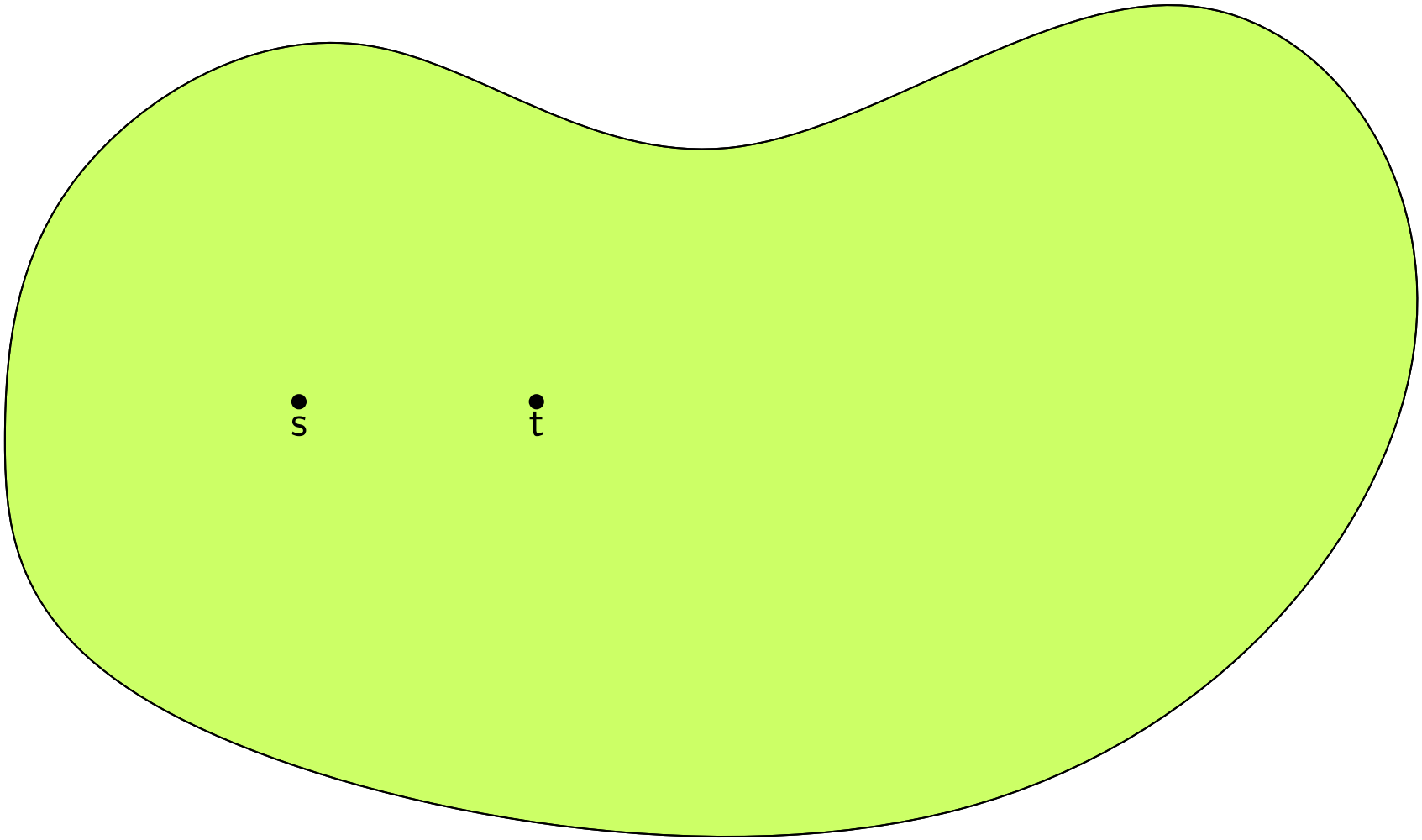
Idee

- stoppe die Anfrage, sobald t aus der Queue entfernt wurde
- **Suchraum**: Menge der abgearbeiteten Knoten

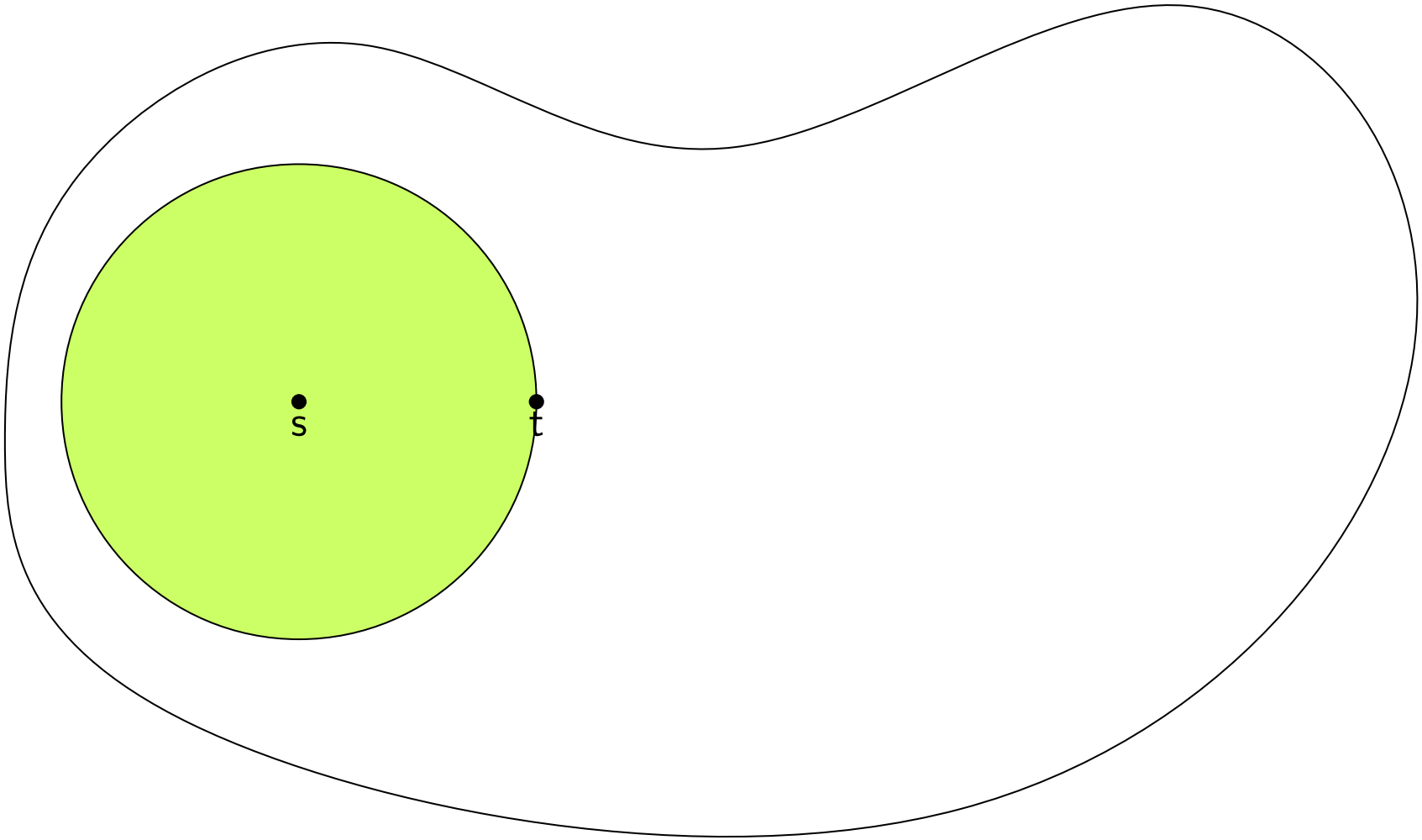
Korrektheit

- Wert $d[v]$ ändert sich nicht mehr, sobald v abgearbeitet wurde
- Korrektheit des Vorgehens bleibt also erhalten
- Reduziert durchschnittlichen Suchraum von n auf $\approx n/2$

Schematischer Suchraum, Dijkstra



Schematischer Suchraum, Dijkstra



Dijkstra mit Abbruchkriterium

DIJKSTRA($G = (V, E)$, s, t)

```
1  forall the nodes v ∈ V do
2      d[v] = ∞, p[v] = NULL                    // distances, parents
3  d[s] = 0
4  Q.clear(), Q.add(s, 0)                       // container
5  while !Q.empty() do
6      u ← Q.deleteMin()                        // settling node u
7      if u = t then return
8      forall the edges e = (u, v) ∈ E do
9          if d[u] + len(e) < d[v] then
10             d[v] ← d[u] + len(e)
11             p[v] ← u
12             if v ∈ Q then Q.decreaseKey(v, d[v])
13
14             else Q.insert(v, d[v])
```

Frage

- Häufig werden viele Anfragen auf gleichem Netzwerk gestellt.
- Wo könnte ein Problem bzgl. der Laufzeit liegen?

Dijkstra mit Abbruchkriterium

DIJKSTRA($G = (V, E)$, s, t)

```
1  forall the nodes v ∈ V do
2      d[v] = ∞, p[v] = NULL                    // distances, parents
3  d[s] = 0
4  Q.clear(), Q.add(s, 0)                       // container
5  while !Q.empty() do
6      u ← Q.deleteMin()                        // settling node u
7      break if u = t
8      forall the edges e = (u, v) ∈ E do
           // relaxing edges
9          if d[u] + len(e) < d[v] then
10             d[v] ← d[u] + len(e)
11             p[v] ← u
12             if v ∈ Q then Q.decreaseKey(v, d[v])
13
14             else Q.insert(v, d[v])
```

Viele Anfragen

Problem

- Häufig viele Anfragen auf gleichem Graphen
- Die Initialisierung muss immer für alle Knoten neu ausgeführt werden

Viele Anfragen

Problem

- Häufig viele Anfragen auf gleichem Graphen
- Die Initialisierung muss immer für alle Knoten neu ausgeführt werden

Idee

- Speiche zusätzlichen „Timestamp“ $run[v]$ für jeden Knoten
- Benutze Zähler *count*
- Damit kann abgefragt werden, ob ein Knoten im aktuellen Lauf schon besucht wurde.

Dijkstra mit Timestamps

```
1  count ← count + 1
2  d[s] = 0
3  Q.clear(), Q.add(s, 0)
4  while !Q.empty() do
5      u ← Q.deleteMin()
6      if u = t then return
7      forall the edges e = (u, v) ∈ E do
8          if run[v] ≠ count then
9              d[v] ← d[u] + len(e)
10             Q.insert(v, d[v])
11             run[v] ← count
12         else if d[u] + len(e) < d[v] then
13             d[v] ← d[u] + len(e)
14             Q.decreaseKey(v, d[v])
```


Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Kleiner Exkurs

Komplexität von **Single-Source All-Targets Shortest Paths** abhängig vom Eingabegraphen.

- In dieser Vorlesung Kantengewichte: immer nicht-negativ.
- Ein *negativer Zyklus* ist ein Kreis mit negativem Gesamtgewicht.
- Ein *einfacher Pfad* ist ein Pfad bei dem sich kein Knoten wiederholt.

Kleiner Exkurs

Komplexität von **Single-Source All-Targets Shortest Paths** abhängig vom Eingabegraphen.

- In dieser Vorlesung Kantengewichte: immer nicht-negativ.
- Ein *negativer Zyklus* ist ein Kreis mit negativem Gesamtgewicht.
- Ein *einfacher Pfad* ist ein Pfad bei dem sich kein Knoten wiederholt.

Problemvarianten

- Kantengewichte alle positiv:
  Dijkstra's Algorithmus anwendbar (Laufzeit $|V| \log |V| + |E|$)
- Kantengewichte auch negativ, aber kein negativer Zyklus:
  Algorithmus von Bellmann-Ford anwendbar (Laufzeit $|V| \cdot |E|$)
- Kantengewichte auch negativ, suche kürzesten einfachen Pfad:
  $\mathcal{NP}$-schwer, Reduktion von „Problem Longest Path“

Der Bellman-Ford Algorithmus

Bellman-Ford(G, s)

```
1  for v ∈ V do d[v] ← ∞
2
3  d[s] ← 0
4  for i = 1 to |V| − 1 do
5      forall the edges (u, v) ∈ E do
6          if d[u] + len(u, v) < d[v] then
7              d[v] ← d[u] + len(u, v)
8  forall the edges (u, v) ∈ E do
9      if d[v] > d[u] + len(u, v) then
10         negative cycle found
```

Der Bellman-Ford Algorithmus

Karlsruher Institut für Technologie

Bemerkungen

- Der BF-Algorithmus erkennt, falls ein Graph einen negativen Zyklus enthält
- Enthält ein Graph keinen negativen Zyklus, so enthält nach Terminierung $d[v]$ die Distanz $d(s, v)$.
- Die Laufzeit des BF-Algorithmus' liegt in $O(|V| \cdot |E|)$.

Beweise siehe Cormen, Leiserson, Rivest, Stein: *Introduction to Algorithms*.

Problem Longest Path

Problem Longest Path

Gegeben:

- Gerichteter, gewichteter Graph $G = (V, E)$ mit Längenfunktion len : $E \to \mathbb{N}$
- Zahl $K \in \mathbb{N}$
- Knoten $s, t \in V$

Frage:

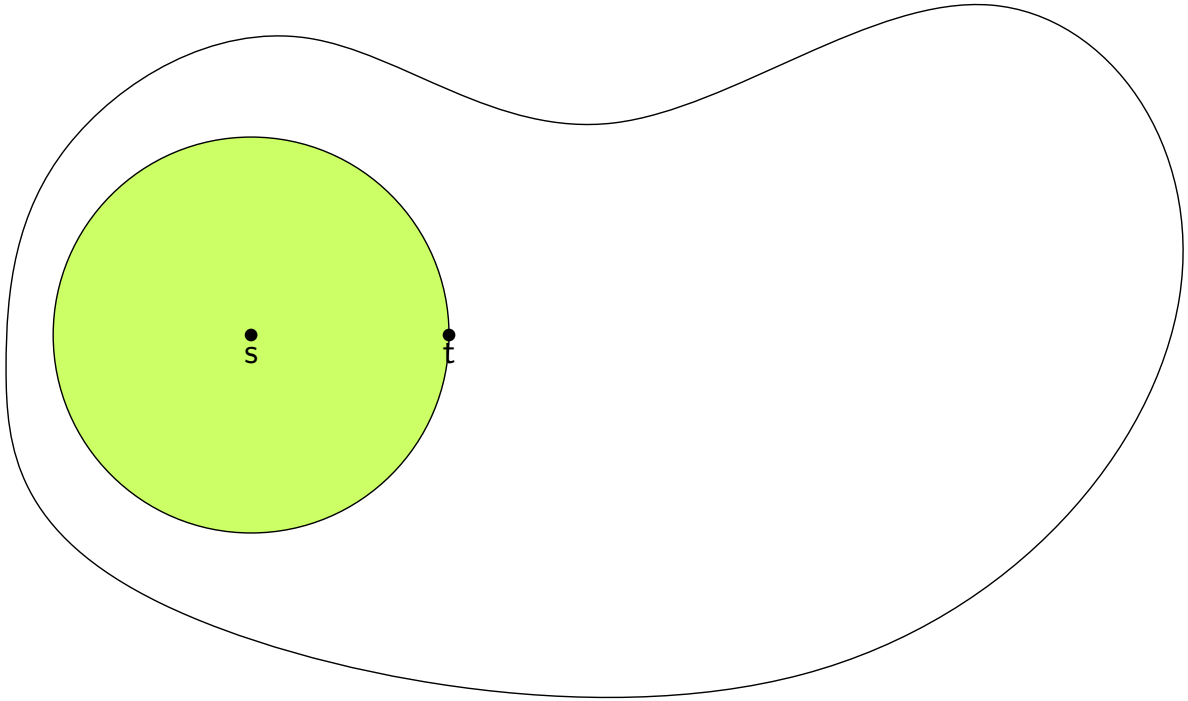
- Gibt es einen einfachen s-t-Pfad der Länge mindestens K?

Problem Longest Path ist $\mathcal{NP}$-schwer (siehe [Garey & Johnson 79])

Bidirektionale Suche

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

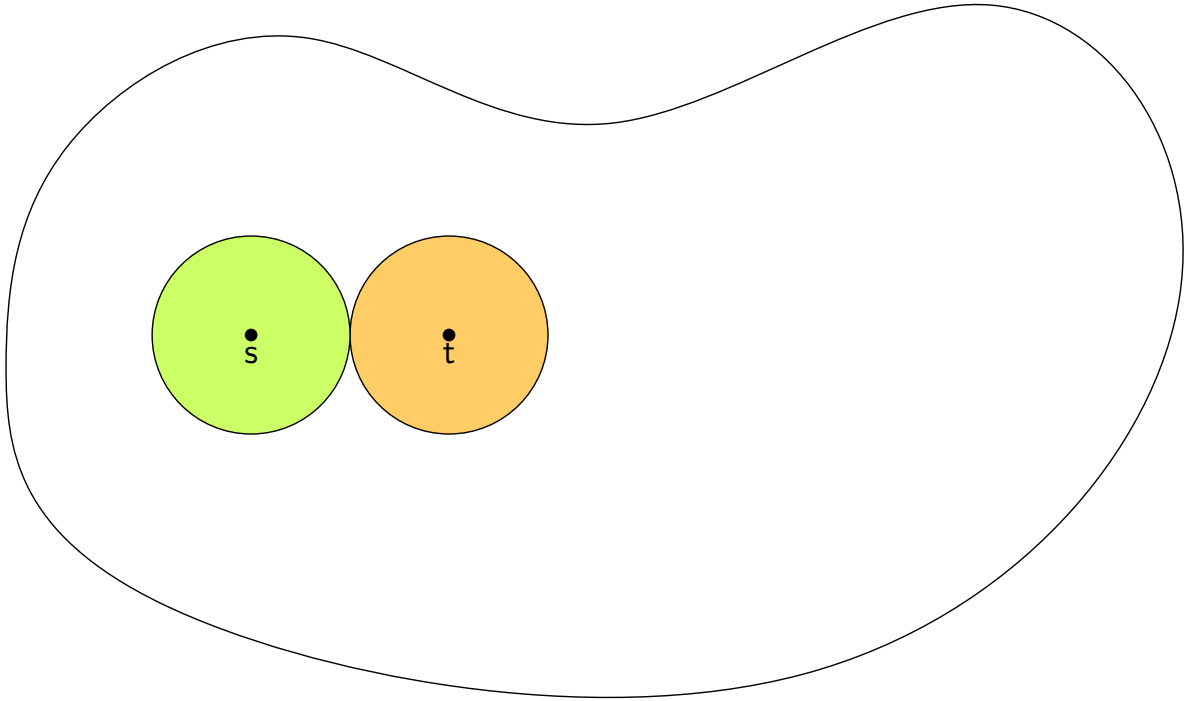
Bidirektionale Suche



Beobachtung: Ein kürzester s-t-Weg lässt sich finden durch

- Normaler Dijkstra (Vorwärtssuche) von s
- Dijkstra auf Graph mit umgedrehten Kantenrichtungen (Rückwärtssuche) von t

Bidirektionale Suche



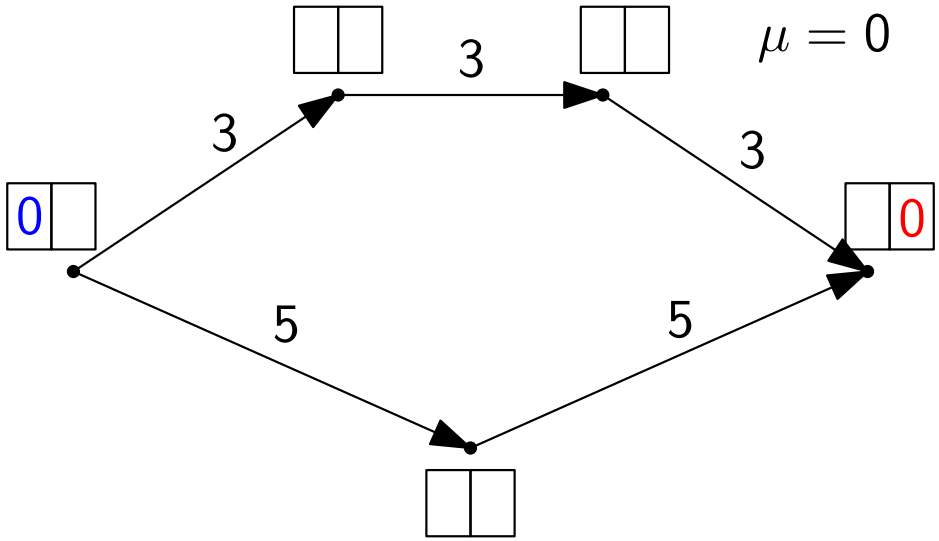
Idee: Kombiniere beide Suchen

- „Gleichzeitig“ Vor- und Rückwärtssuche
- Abbruch wenn beide Suchen „weit genug fortgeschritten“
- Weg dann zusammensetzen

Bidirektionale Suche

Anfrage:

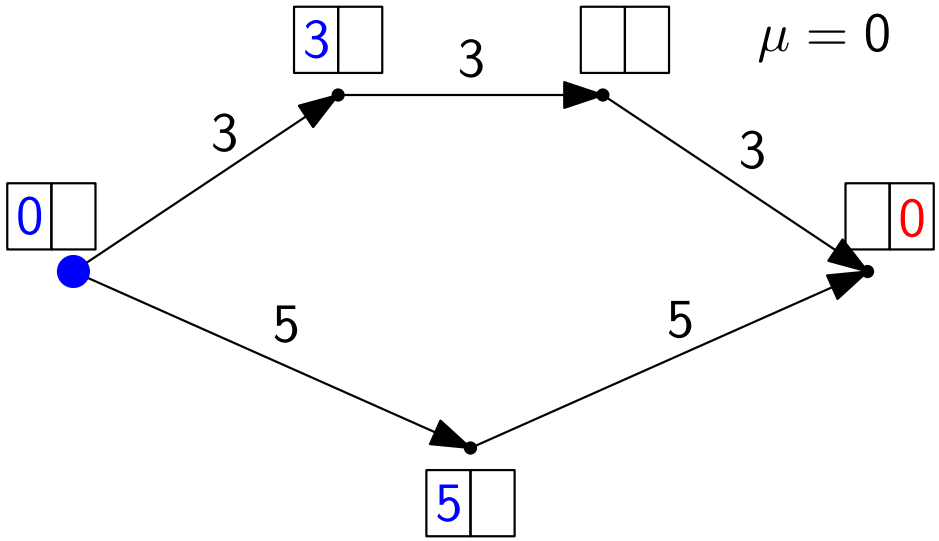
- alterniere Vorwärts- und Rückwärtsuche
  - vorwärts: relaxiere ausgehende Kanten
  - rückwärts: relaxiere eingehende Kanten



Bidirektionale Suche

Anfrage:

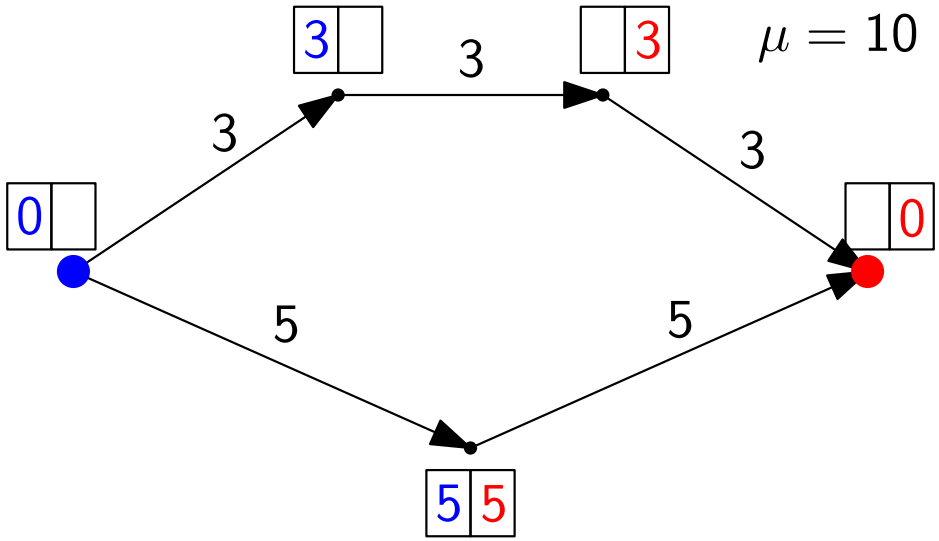
- alterniere Vorwärts- und Rückwärtsuche
  - vorwärts: relaxiere ausgehende Kanten
  - rückwärts: relaxiere eingehende Kanten



Bidirektionale Suche

Anfrage:

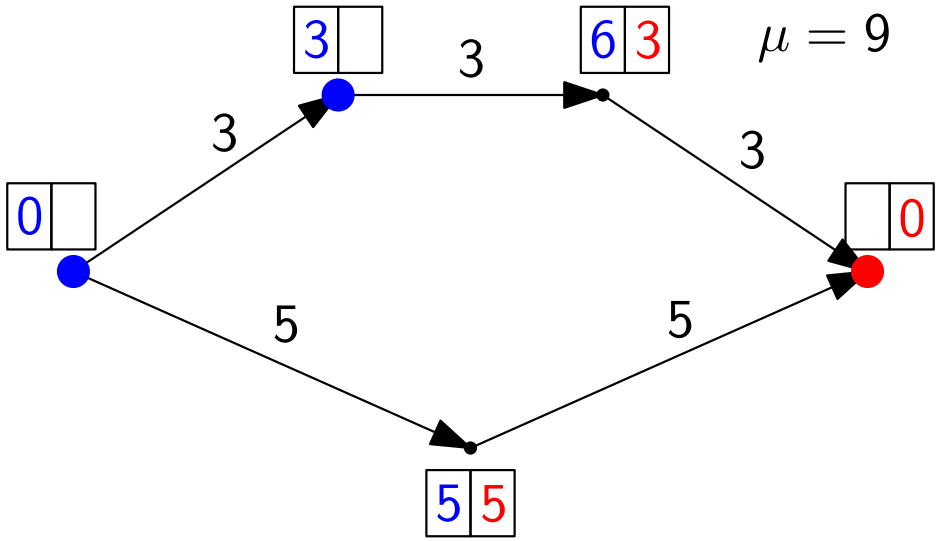
- alterniere Vorwärts- und Rückwärtsuche
  - vorwärts: relaxiere ausgehende Kanten
  - rückwärts: relaxiere eingehende Kanten



Bidirektionale Suche

Anfrage:

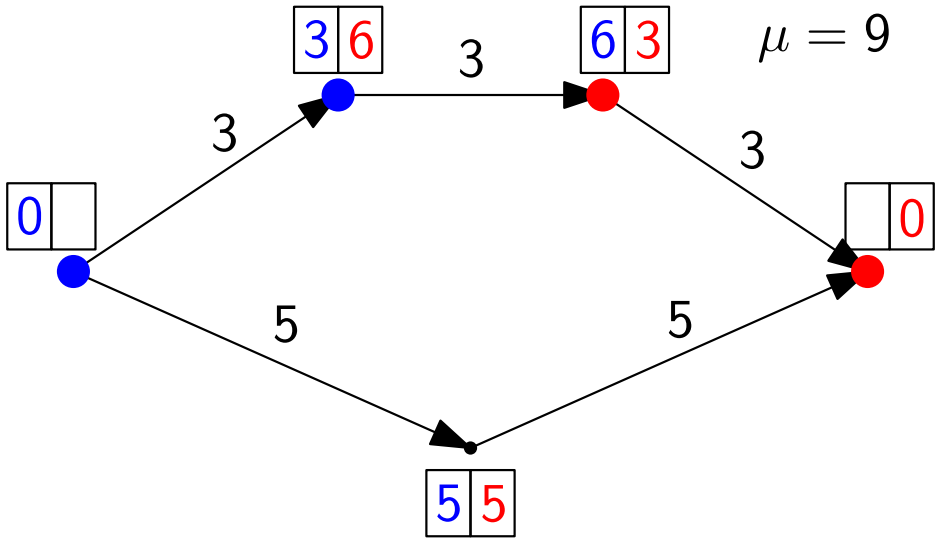
- alterniere Vorwärts- und Rückwärtsuche
  - vorwärts: relaxiere ausgehende Kanten
  - rückwärts: relaxiere eingehende Kanten



Bidirektionale Suche

Anfrage:

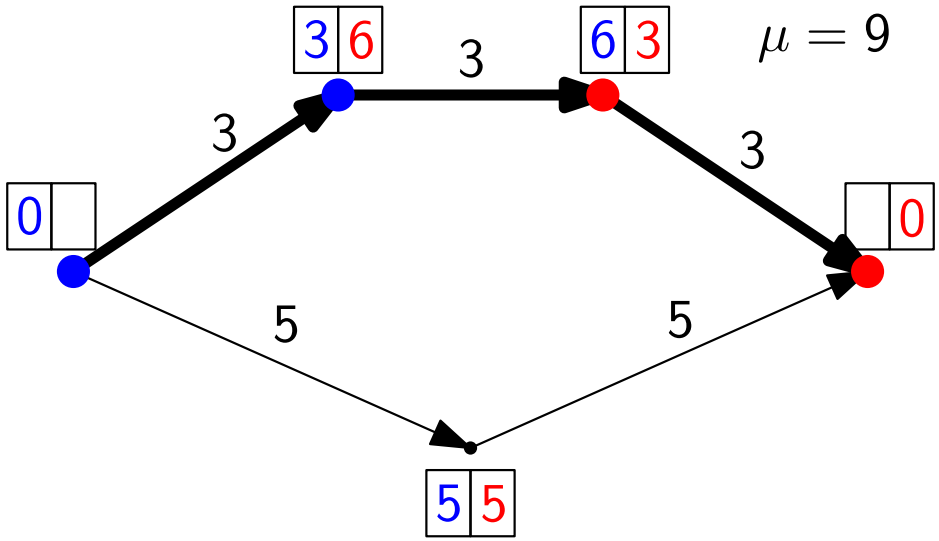
- alterniere Vorwärts- und Rückwärtsuche
  - vorwärts: relaxiere ausgehende Kanten
  - rückwärts: relaxiere eingehende Kanten



Bidirektionale Suche

Anfrage:

- alterniere Vorwärts- und Rückwärtsuche
  - vorwärts: relaxiere ausgehende Kanten
  - rückwärts: relaxiere eingehende Kanten



Bidirektionale Suche - Definitionen

- Input ist Graph $G = (V, E, \text{len})$ und Knoten $s, t \in V$.
- Für Inputgraphen G bezeichne $\overleftarrow{G} := (V, \overleftarrow{E}, \overleftarrow{\text{len}})$ den *umgekehrten Graphen*, d.h.

$$\begin{aligned} \overleftarrow{E} &:= \{(v,u) \in V \times V \mid (u,v) \in E\} \\ \overleftarrow{\text{len}}(u,v) &= \text{len}(v,u) \end{aligned}$$

- Die **Vorwärtssuche** ist Dijkstra's Algo mit Start s auf G
- Die **Rückwärtssuche** ist Dijkstra's Algo mit Start t auf $\overleftarrow{G}$
- Die Queue der Vorwärtssuche ist $\overrightarrow{Q}$
- Die Queue der Rückwärtssuche ist $\overleftarrow{Q}$
- Der Distanzvektor der Vorwärtssuche ist $\overrightarrow{d}[]$
- Der Distanzvektor der Rückwärtssuche ist $\overleftarrow{d}[]$

Bidirektionale Suche - Vorgehen

- Vor- und Rückwärtssuche werden abwechselnd ausgeführt
- Es wird zusätzlich die vorläufige Distanz

$$\mu := \min_{v \in V}(\overrightarrow{d}[v] + \overleftarrow{d}[v])$$

  berechnet.
- Dazu wird bei der Relaxierung von Kante (u, v) zusätzlich

$$\mu := \min\{\mu, \overrightarrow{d}[v] + \overleftarrow{d}[v]\}$$

  ausgeführt. (Initial ist $\mu = \infty$).
- Nach Terminierung beinhaltet μ die Distanz $d(s, t)$.

Bidirektionale Suche - Vorgehen

- Vor- und Rückwärtssuche werden abwechselnd ausgeführt
- Es wird zusätzlich die vorläufige Distanz

$$\mu := \min_{v \in V}(\overrightarrow{d}[v] + \overleftarrow{d}[v])$$

  berechnet.
- Dazu wird bei der Relaxierung von Kante (u, v) zusätzlich

$$\mu := \min\{\mu, \overrightarrow{d}[v] + \overleftarrow{d}[v]\}$$

  ausgeführt. (Initial ist $\mu = \infty$).
- Nach Terminierung beinhaltet μ die Distanz $d(s, t)$.

Was sind gute Abbruchstrategien?

Abbruchstrategie (1)

Abbruchstrategie (1)

Abbruch, sobald ein Knoten m existiert, der von beiden Suchen abgearbeitet wurde.

Abbruchstrategie (1)

Abbruchstrategie (1)

Abbruch, sobald ein Knoten m existiert, der von beiden Suchen abgearbeitet wurde.

Frage: Ist m dann auf einem kürzesten s-t-Weg enthalten?

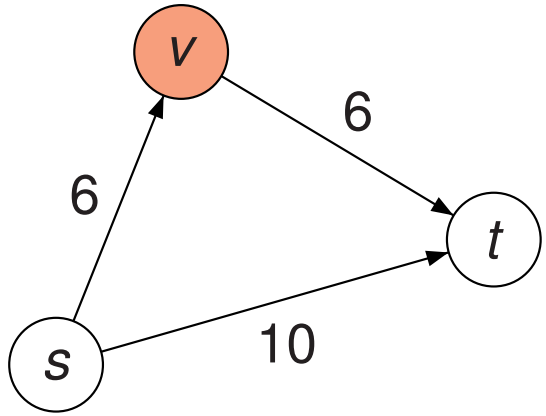
Abbruchstrategie (1)

Abbruchstrategie (1)

Abbruch, sobald ein Knoten *m* existiert, der von beiden Suchen abgearbeitet wurde.

Frage: Ist *m* dann auf einem kürzesten *s*-*t*-Weg enthalten?

Nein, Gegenbeispiel:



Abbruchstrategie (1)

Abbruchstrategie (1)

Abbruch, sobald ein Knoten m existiert, der von beiden Suchen abgearbeitet wurde.

Abbruchstrategie (1) berechnet $d(s,t)$ korrekt. Beweisskizze:

- O.B.d.A sei $d(s,t) < \infty$ (andernfalls klar).
- Klar: $\overrightarrow{d}[v] + \overleftarrow{d}[v] \geq \text{dist}(s,t)$.
- Seien $\overrightarrow{S}$, $\overleftarrow{S}$ die abgearbeiteten Knoten von Vor- und Rückwärtssuche nach Terminierung.
- Sei $P = (v_1, \ldots v_k)$ ein kürzester s-t-Weg. Wir zeigen: $\{v_1, \ldots v_k\} \subseteq \overrightarrow{S} \cup \overleftarrow{S}$ oder $\text{len}(P) = \text{dist}(s,m) + \text{dist}(m,t)$.

Abbruchstrategie (1)

Abbruchstrategie (1)

Abbruch, sobald ein Knoten m existiert, der von beiden Suchen abgearbeitet wurde.

- Sei $P = (v_1, \ldots v_k)$ ein kürzester s-t-Weg. Wir zeigen: $\{v_1, \ldots v_k\} \subseteq \overrightarrow{S} \cup \overleftarrow{S}$ oder $\text{len}(P) = \text{dist}(s, m) + \text{dist}(m, t)$.
- Angenommen es gibt $v_i \notin \overrightarrow{S} \cup \overleftarrow{S}$.
- Dann gilt

$$\begin{aligned} \text{dist}(s, v_i) &\geq \text{dist}(s, m) \\ \text{dist}(v_i, t) &\geq \text{dist}(m, t) \end{aligned}$$

Also

$$\text{len}(P) = \text{dist}(s, v_i) + \text{dist}(v_i, t) \geq \text{dist}(s, m) + \text{dist}(m, t).$$

Abbruchstrategie (2)

Abbruchstrategie (2)

Abbruch, sobald $\mu \leq \text{minKey}(\overrightarrow{Q}) + \text{minKey}(\overleftarrow{Q})$

Abbruchstrategie (2)

Abbruchstrategie (2)

Abbruch, sobald $\mu \leq \text{minKey}(\overrightarrow{Q}) + \text{minKey}(\overleftarrow{Q})$

Abbruchstrategie (2) berechnet $d(s,t)$ korrekt. Beweisskizze:

- O.B.d.A sei $d(s,t) < \infty$ (andernfalls klar).
- Klar: $\overrightarrow{d}[v] + \overleftarrow{d}[v] \geq \text{dist}(s,t)$.

Abbruchstrategie (2)

Abbruchstrategie (2)

Abbruch, sobald $\mu \leq \text{minKey}(\overrightarrow{Q}) + \text{minKey}(\overleftarrow{Q})$

Annahme: $\mu > d(s,t)$ nach Terminierung.

- Dann gibt es einen s-t Pfad P der kürzer als μ ist.
- Auf P gibt es eine Kante (u,v) mit $d(s,u) \leq \mathit{minKey}(\overrightarrow{Q})$ und $d(v,t) \leq \mathit{minKey}(\overleftarrow{Q})$.
- Also müssen u und v schon abgearbeitet worden sein (o.B.d.A. u vor v)
- Beim relaxieren von (u,v) wäre P entdeckt worden und μ aktualisiert

Damit ist $\mu < d(s,t)$. Widerspruch!

Wechselstrategien

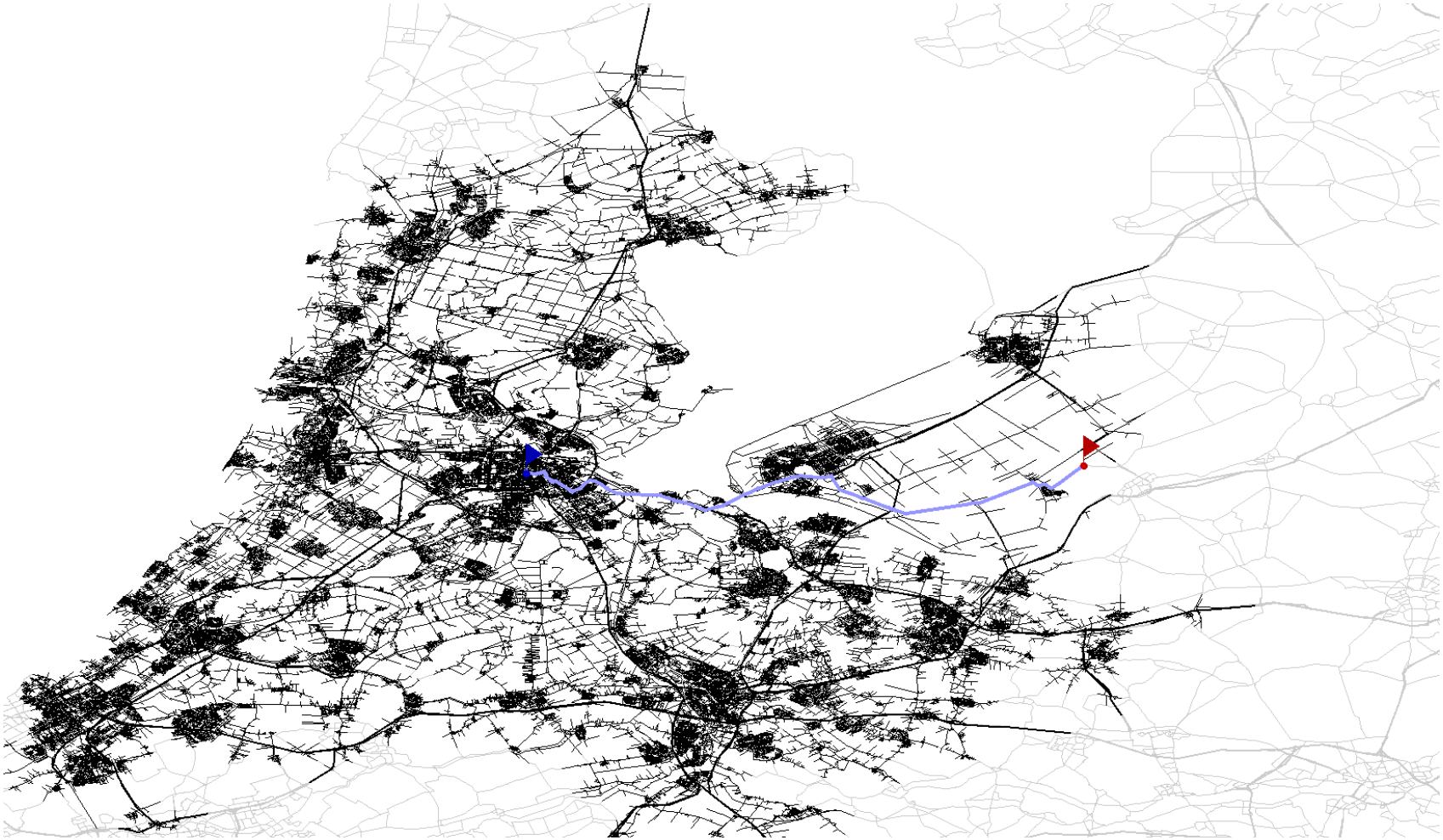
Frage: Was sind mögliche Wechselstrategien?

Wechselstrategien

Mögliche Wechselstrategien

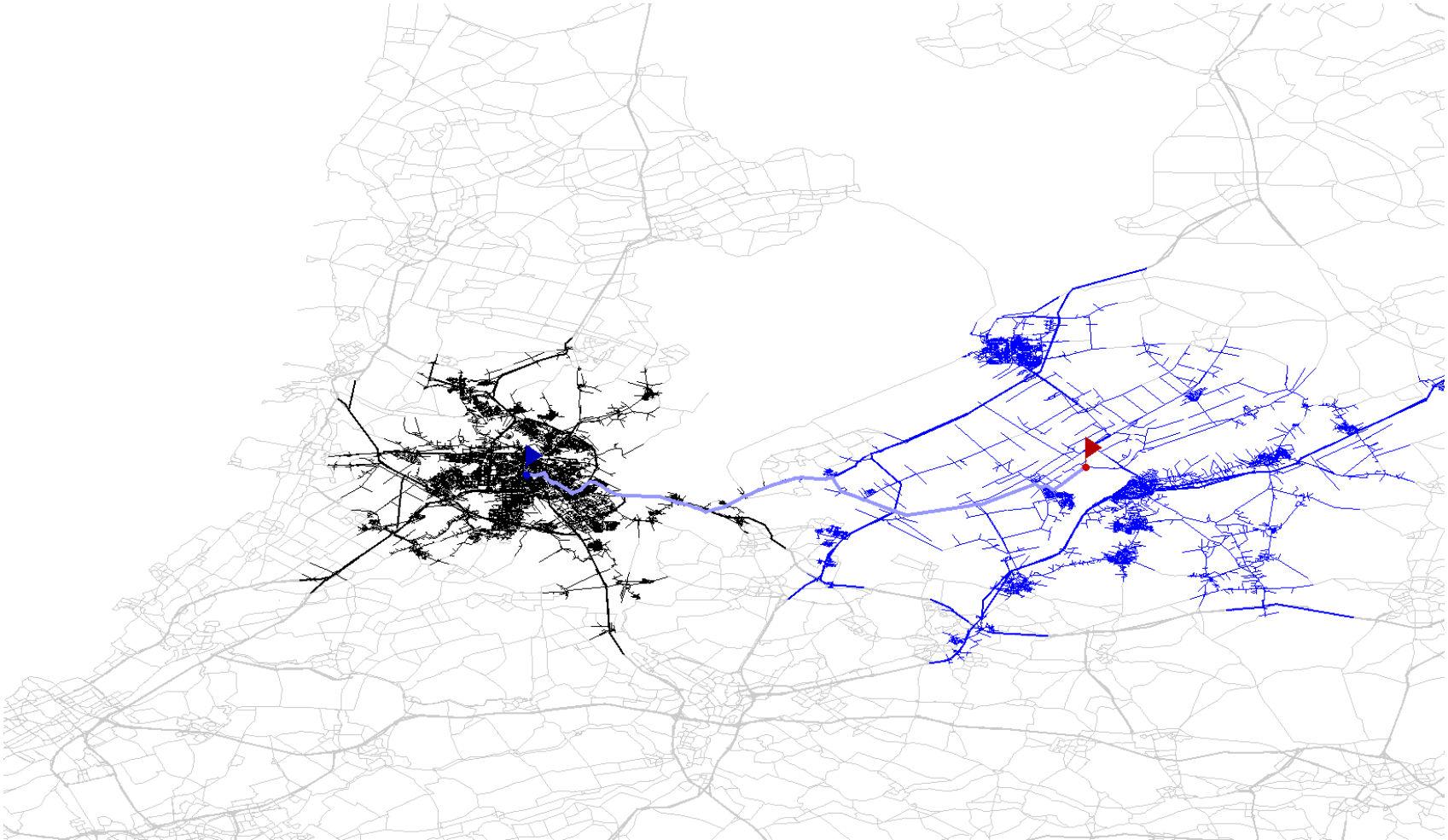
- Prinzipiell jede Wechselstrategie möglich
- Parallele Ausführung auf zwei Kernen
- Wechsle nach jedem Schritt zur entgegengesetzten Suche
- Führe immer die Suche mit dem kleineren minimalen Queueelement aus

Beispiel



Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Beispiel



Bemerkungen

Beschleunigung

- Annahme: Suchraum ist Kreisscheibe mit Radius r.

$\Rightarrow$ Speedup bzgl. Suchraum (ca.):

$$\frac{\text{Dijkstra}}{\text{Bidir. Suche}} \approx \frac{\pi r^2}{2 \cdot \pi \left(\frac{r}{2}\right)^2} = 2$$

- Führe Suchen *parallel* aus.

$\Rightarrow$ Gesamtspeedup ca. 4.

Bemerkungen

Beschleunigung

- Annahme: Suchraum ist Kreisscheibe mit Radius r.

$\Rightarrow$ Speedup bzgl. Suchraum (ca.):

$$\frac{\text{Dijkstra}}{\text{Bidir. Suche}} \approx \frac{\pi r^2}{2 \cdot \pi \left(\frac{r}{2}\right)^2} = 2$$

- Führe Suchen *parallel* aus.

$\Rightarrow$ Gesamtspeedup ca. 4.

Wichtiger Bestandteil vieler effizienter Techniken!

Nächster Termin

Karlsruher Institut für Technologie

Mittwoch, 24 April 2013