Viertes Übungsblatt

Ausgabe: 22. Mai 2013
Abgabe: keine, wird in der Übung besprochen

1 Echte Intervallgraphen

Sei $\mathcal{I} = \{I_1, \dots, I_n\}$ eine Menge von Intervallen in $\mathbb{R}$. Dann lässt sich ein Graph $G_{\mathcal{I}} = (\mathcal{I}, E_{\mathcal{I}})$ definieren, durch $\{I_i, I_j\} \in E_{\mathcal{I}}$ genau dann wenn $i \neq j$ und $I_i \cap I_j \neq \emptyset$. Die Menge $\mathcal{I}$ heißt *Intervall-Repräsentation* von $G_{\mathcal{I}}$. Ein Graph G heißt *Intervall-Graph*, wenn er eine Intervall-Repräsentation besitzt, das heißt, wenn es eine Menge $\mathcal{I}$ von Intervallen gibt, sodass G isomorph zu $G_{\mathcal{I}}$ ist.

Eine besondere Art von Intervall-Repräsentationen sind *echte Intervall-Repräsentationen*, bei denen kein Intervall ein anderes echt enthält. Das heißt, für $I_i, I_j \in \mathcal{I}$ mit $i \neq j$ gilt weder $I_i \subsetneq I_j$ noch $I_j \subsetneq I_i$. Ein Intervallgraph, der eine echte Intervall-Repräsentation besitzt ist ein *echter Intervallgraph*. Im Folgenden soll ein effizienter Algorithmus zur Erkennung echter Intervallgraphen konstruiert werden.

a) Zeigen Sie: Ein Graph $G = (V, E)$ is genau dann ein echter Intervallgraph, wenn es eine (lineare) Ordnung $\prec$ seiner Knoten gibt, sodass für jeden Knoten gilt, dass er und seine Nachbarschaft in $\prec$ konsekutiv sind.

   Hinweis: Betrachten Sie die Ordnung der linken bzw. rechten Endpunkte der Intervalle.

b) Geben Sie einen Algorithmus an, der für einen gegebenen Graphen G entscheidet, ob G ein echter Intervall-Graph ist. Was ist die benötigte Laufzeit?

2 Dualgraph

Geben Sie einen linearen Algorithmus an, der aus den Inzidenzlisten zu $\mathcal{G}$ die Inzidenzlisten des kombinatorischen Dualgraphen $\mathcal{G}^*$ konstruiert.

3 Verschiedene Bäume

1. Zeigen oder widerlegen Sie: In jedem planaren, zusammenhängenden Graphen gibt es einen Knoten w und einen Breitensuchbaum T mit Wurzel w und Höhe höchstens $2\sqrt{n}$.

2. Zeigen oder widerlegen Sie: In jedem planaren, zusammenhängenden Graphen gibt es einen Knoten w und einen Breitensuchbaum T mit Wurzel w so, dass der PLANAR-SEPARATOR-Algorithmus spätestens nach Schritt 4 mit $S = S_m \cup S_M$ einen gültigen Separator findet.

Bitte wenden!

4 Folgerung aus dem Planar Separator Theorem:

Zu einem zusammenhängenden, planaren Graphen $G = (V, E)$ mit $n \geq 5$ Knoten und maximalem Knotengrad Δ gibt es einen Schnitt $S \subseteq E$ von G mit $|S| \leq 4\Delta\sqrt{n}$, so dass $G - S = (V, E \setminus S)$ aus zwei disjunkten Graphen $G_1 = (V_1, E_1)$ und $G_2 = (V_2, E_2)$ mit $|V_1| \leq \frac{2}{3}n$, $|V_2| \leq \frac{2}{3}n$, $V_1 \cup V_2 = V$ und $E_1 \cup E_2 = E \setminus S$ besteht.

5 Umfang

Der *Umfang* (engl. girth) eines (ungewichteten) Graphen G ist die Länge (= Anzahl der Kanten) eines kürzesten Kreises in G. Enthält G keinen Kreis, so ist der Umfang ∞.

a) Geben Sie einen Algorithmus an, der für einen gegeben Knoten v von G die Länge des kürzesten Kreises berechnet auf dem v liegt.

b) Verwenden Sie das Verfahren aus Aufgabenteil a), um für einen beliebigen Graphen den Umfang zu berechnen. Welche Laufzeit erhalten Sie?

c) Beschleunigen Sie Ihren Algorithmus für den Fall, dass der Eingabegraph planar ist.

6 Große und kleine Matchings

Geben Sie für jede natürliche Zahl $n \geq 2$ einen zusammenhängenden Graphen mit n Knoten an, für den ein Matching maximaler Kardinalität genau

1. $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ Kanten
2. eine Kante

enthält. Geben Sie jeweils an, wie ein solches kardinalitätsmaximales Matching aussieht.

7 Perfekte Matchings

Ein Matching M zu einem Graphen G heißt *perfekt*, falls jeder Knoten von G zu einer Kante aus M inzident ist. Für welche $n \geq 1$ und $m \geq 1$ besitzen die folgenden Graphen jeweils ein perfektes Matching?

1. P_n (der Graph bestehend aus einem einfachen Weg mit n Knoten)
2. C_n (der Graph bestehend aus einem einfachen Kreis mit n Knoten)
3. Q_n
4. K_n
5. $K_{n,m}$