

Zweites Übungsblatt

Ausgabe: 6. Mai 2013

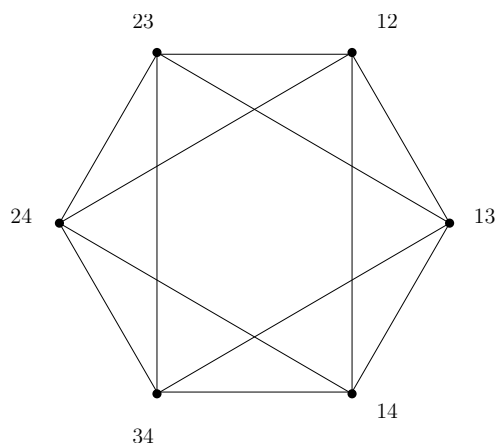
Abgabe: keine, wird in der Übung besprochen

1 Maximal planare Graphen und Triangulierungen

Gegeben sei ein einfacher Graph G mit einer planaren Einbettung. G heißt *maximal planar*, falls keine Kante so zu G hinzugefügt werden kann, dass die Einbettung planar und der Graph einfach bleibt. G heißt *trianguliert*, falls jede Facette an genau drei Knoten angrenzt. Zeigen Sie, dass G genau dann maximal planar ist, wenn G trianguliert ist.

2 Der Petersengraph

Definition: Der Graph T_n hat als Knotenmenge die zweielementigen Teilmengen der Menge $\{1, \dots, n\}$. Zwei Knoten sind genau dann durch eine Kante verbunden, wenn der Schnitt der zugehörigen Mengen nicht leer ist. Die Abbildung rechts zeigt T_4 . Der Komplementgraph¹ P von T_5 heißt Petersengraph.



Teil 1: Zeichnen sie P .

Teil 2: Zeigen Sie auf drei verschiedene Arten, dass der Petersengraph nicht planar ist.

Teil 3: Zeigen oder widerlegen Sie: Wenn ein einfacher Graph H eine Unterteilung eines einfachen Graphen G als Teilgraph enthält, dann enthält H den Graphen G auch als Minor.

Teil 4: Zeigen oder widerlegen Sie: Wenn ein einfacher Graph H einen Graphen G als Minor enthält, dann enthält H auch eine Unterteilung von G als Teilgraph.

Bitte Wenden!

¹Der Komplementgraph zu $G = (V, E)$ ist $\overline{G} = (V, \binom{V}{2} \setminus E)$

3 Außenplanare Graphen

Ein planarer Graph G heißt *außenplanar*, falls er eine planare Zeichnung besitzt, in der jeder Knoten auf dem Rand der äußeren Facette liegt. Eine äquivalente Formulierung ist, dass G genau dann außenplanar ist, wenn man zu G noch einen weiteren Knoten mit Kanten zu allen vorhandenen Knoten hinzufügen kann, ohne die Planarität von G zu verletzen.

1. Zeigen Sie: Ein Graph G ist genau dann außenplanar, wenn er keine Unterteilung von K_4 oder $K_{2,3}$ enthält.
2. Zeigen Sie, dass ein außenplanarer Graph G mit n Knoten höchstens $2n-3$ Kanten enthält.

4 Selbstdualität

Definition: G heißt *selbstdual*, wenn G isomorph zum geometrischen Dualgraphen G^* ist.

1. Zeigen Sie, dass für einen selbstdualen Graph mit n Knoten und m Kanten gilt: $m = 2n-2$.
2. Geben Sie für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ einen selbstdualen Graphen G mit einer festen Einbettung an.

5 PQ-Bäume und lineare Ordnungen

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass mit Hilfe von PQ-Bäumen zirkuläre Ordnungen mit Konsekutivitätsbedingungen repräsentiert werden können.

a) Zeigen Sie, dass sich mit PQ-Bäumen auch lineare Ordnungen mit Konsekutivitätsbedingungen repräsentieren lassen.

Hinweis: Fügen Sie hierzu ein zusätzliches "Sonderblatt" hinzu.

b) Geben Sie einen Algorithmus an, der gegeben eine Matrix, deren Einträge 0 oder 1 sind, entscheidet, ob sich die Spalten der Matrix so permutieren lassen, dass in jeder Zeile die 1en konsekutiv sind.