Übung Algorithmische Kartografie

Übungsblatt 9

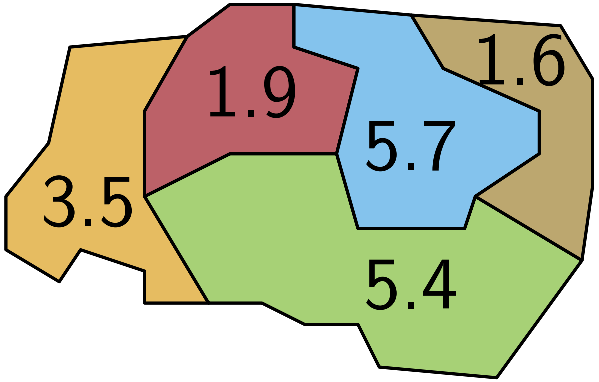
LEHRSTUHL FÜR ALGORITHMIK I · INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK · FAKULTÄT FÜR INFORMATIK

Benjamin Niedermann

04.07.2013

Problemstellung

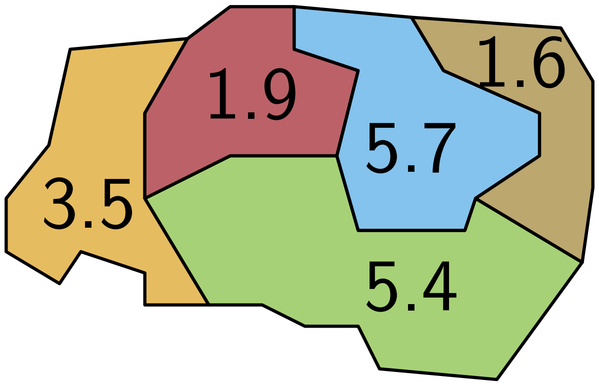
Geg: politische Karte M (Rechtecksunterteilung), positives Gewicht w_i für jede Region R_i



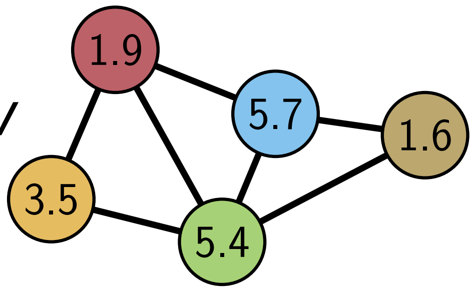
Problemstellung

Geg: politische Karte M (Rechtecksunterteilung), positives Gewicht w_i für jede Region R_i

bzw: knotengewichteter intern triangulierter planar eingeb. Graph G dual zu M, Knoten v_i entspricht Region R_i, Kanten zw. adjazenten Regionen, Knotengewichte w_i



bzw

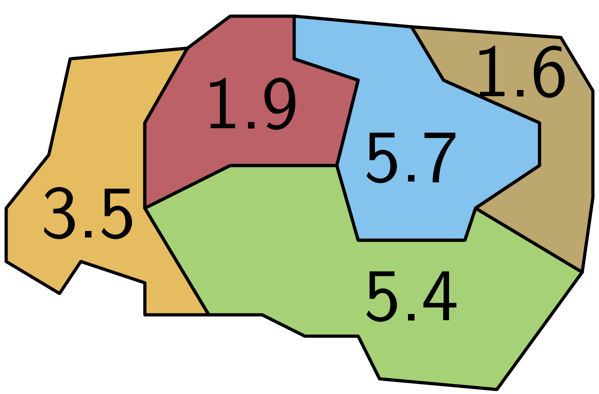


Problemstellung

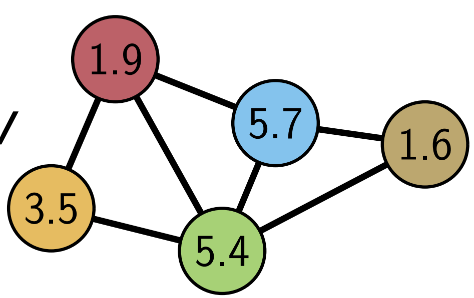
Geg: politische Karte M (Rechtecksunterteilung), positives Gewicht w_i für jede Region R_i

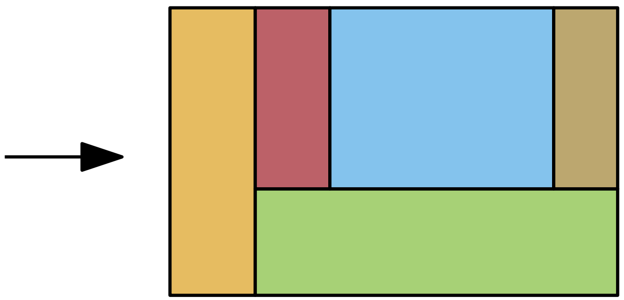
bzw: knotengewichteter intern triangulierter planar eingeb. Graph G dual zu M, Knoten v_i entspricht Region R_i, Kanten zw. adjazenten Regionen, Knotengewichte w_i

Ges: verzerrte Karte M' äquivalent zu M mit $|R_i| = w_i$



bzw





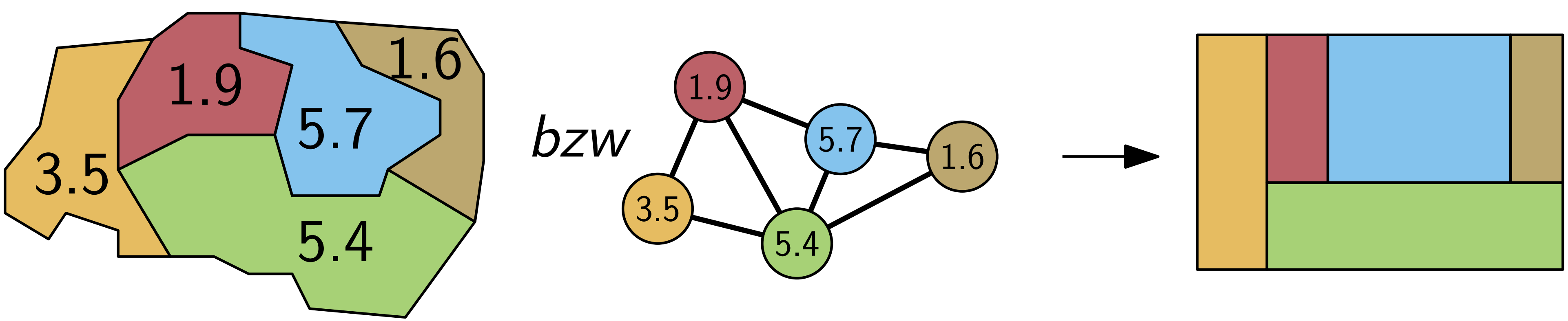
Problemstellung

Geg: politische Karte M (Rechtecksunterteilung), positives Gewicht w_i für jede Region R_i

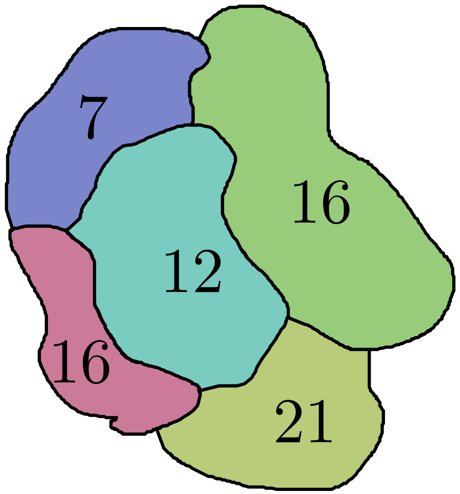
bzw: knotengewichteter intern triangulierter planar eingeb. Graph G dual zu M, Knoten v_i entspricht Region R_i, Kanten zw. adjazenten Regionen, Knotengewichte w_i

Ges: verzerrte Karte M' äquivalent zu M mit $|R_i| = w_i$

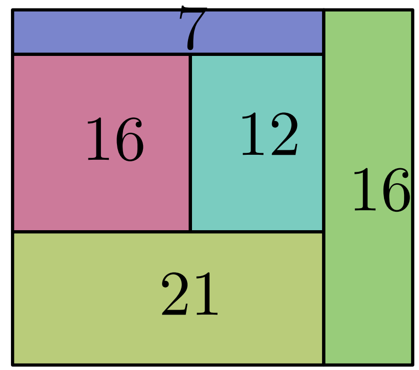
bzw: flächenproportionale Kontaktrepräsentation von G, jeder Knoten v_i als geometrisches Objekt s_i mit Fläche w_i, so dass s_i und s_j sich berühren gdw. $v_i v_j \in E$

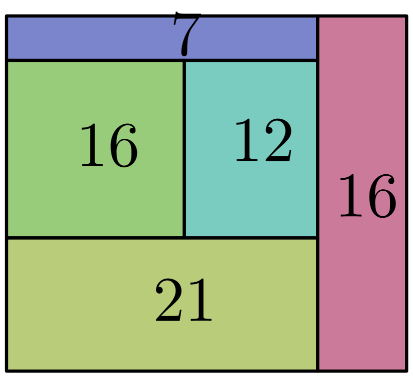


Qualitätskriterien

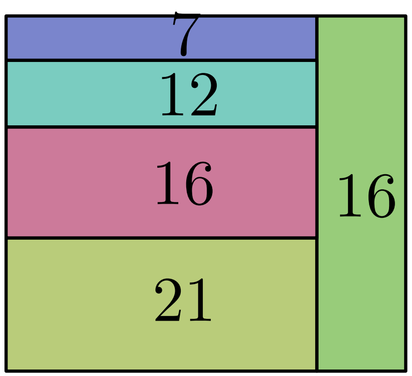


gute Lösung

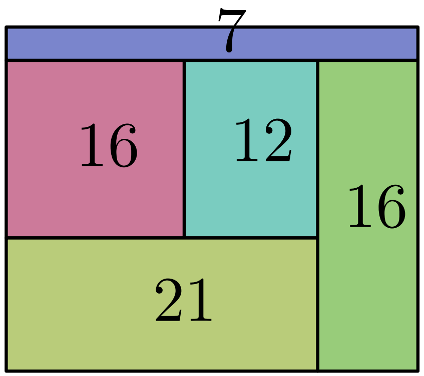




falsche relative Lage



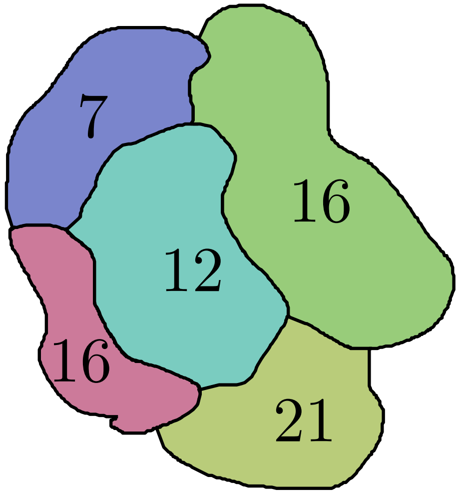
falsche Adjazenzen



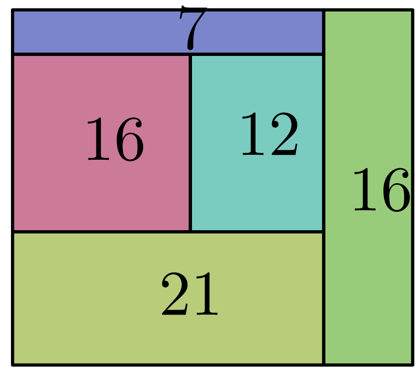
schlechte aspect ratio

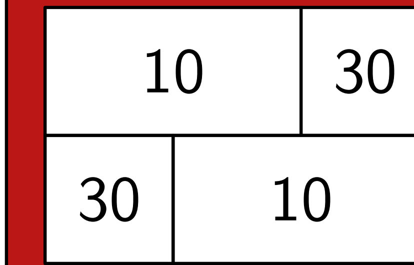
- kleiner Fehler
- korrekte Adjazenzen
- gute aspect ratio
- korrekte relative Positionen

Qualitätskriterien

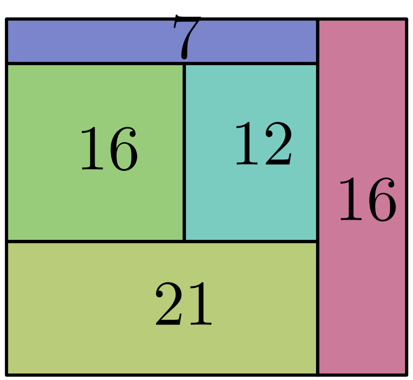


gute Lösung

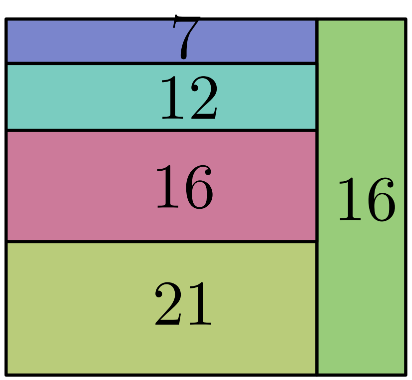




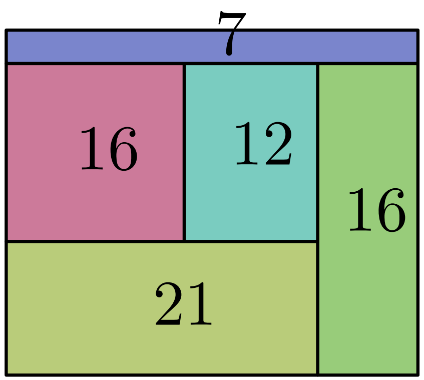
Adjazenzen vs. Flächenfehler



falsche relative Lage



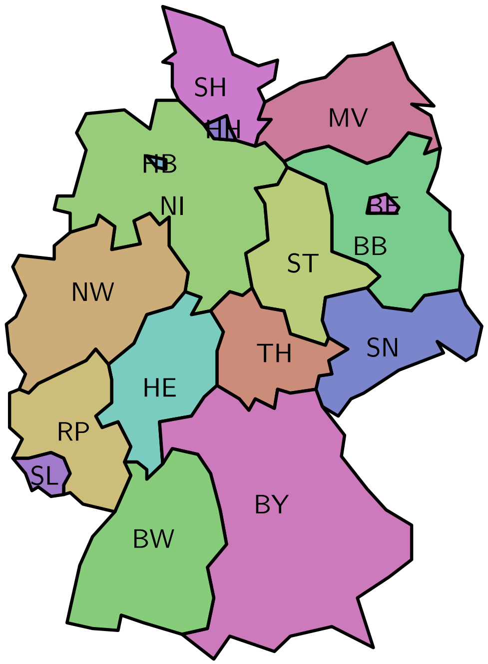
falsche Adjazenzen



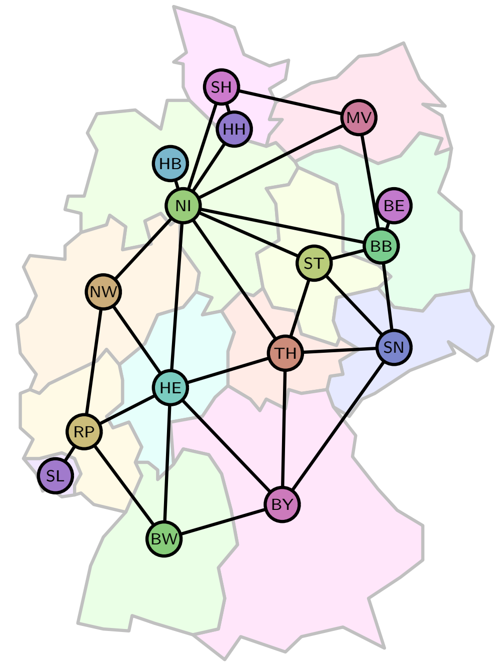
schlechte aspect ratio

- kleiner Fehler
- korrekte Adjazenzen
- gute aspect ratio
- korrekte relative Positionen

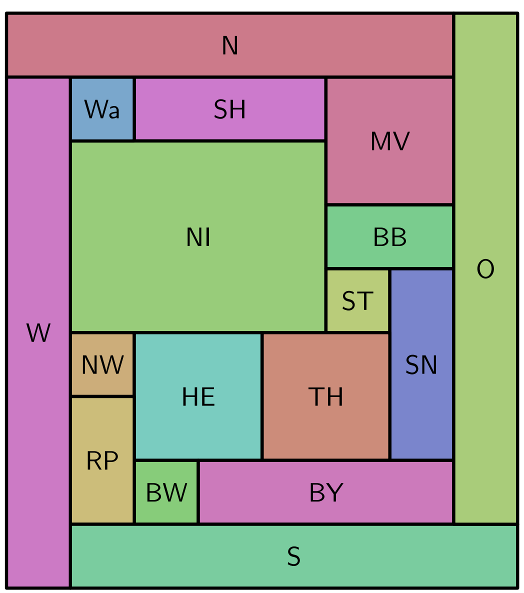
Überblick des Verfahrens [van Kreveld, Speckmann '07]



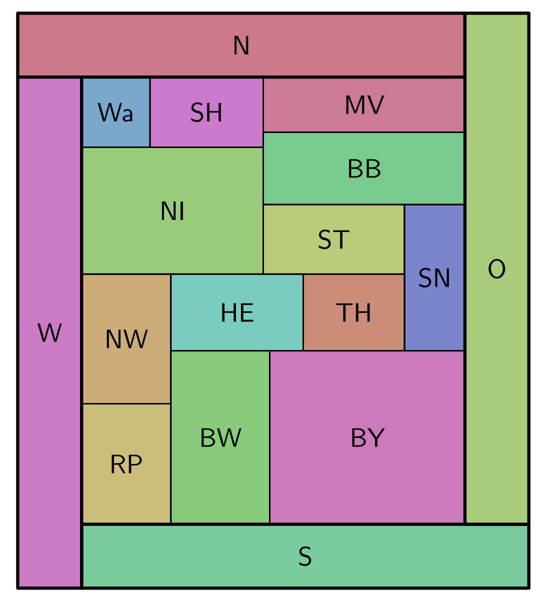
Eingabekarte



Dualgraph



Rechtecksdual

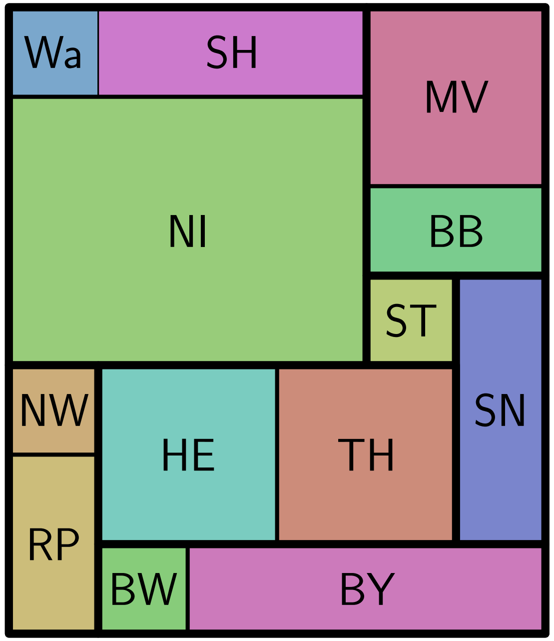


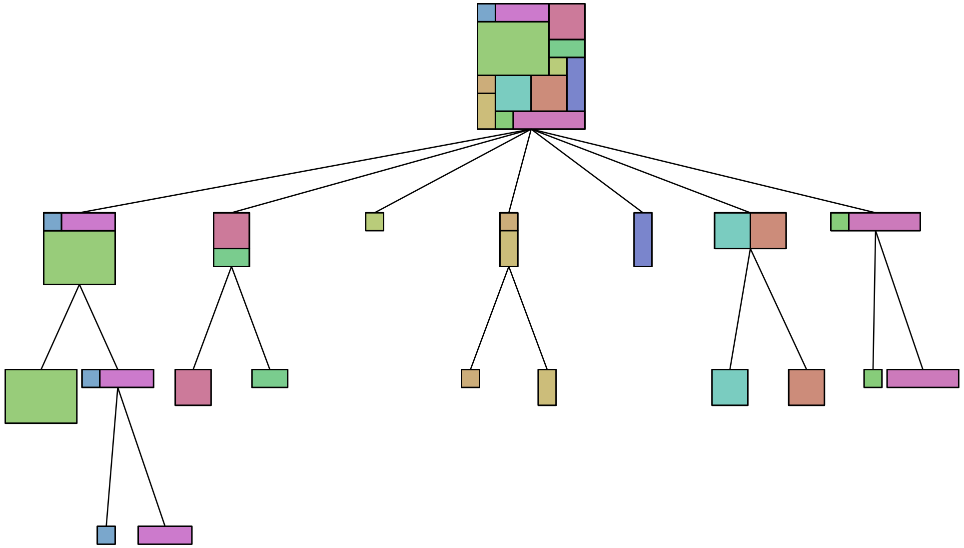
Kartogramm

Problem: Flächenzuweisung

- abstraktes Rechtecksdual benötigt noch korrekte Flächen

betrachte hierarchische Rechteckszerlegung:



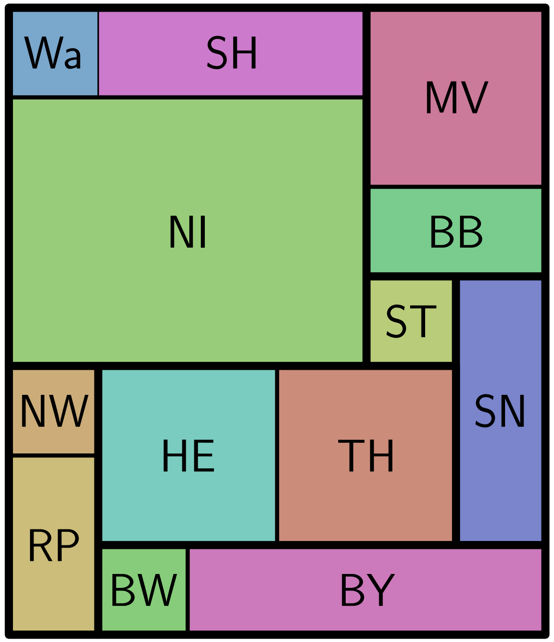


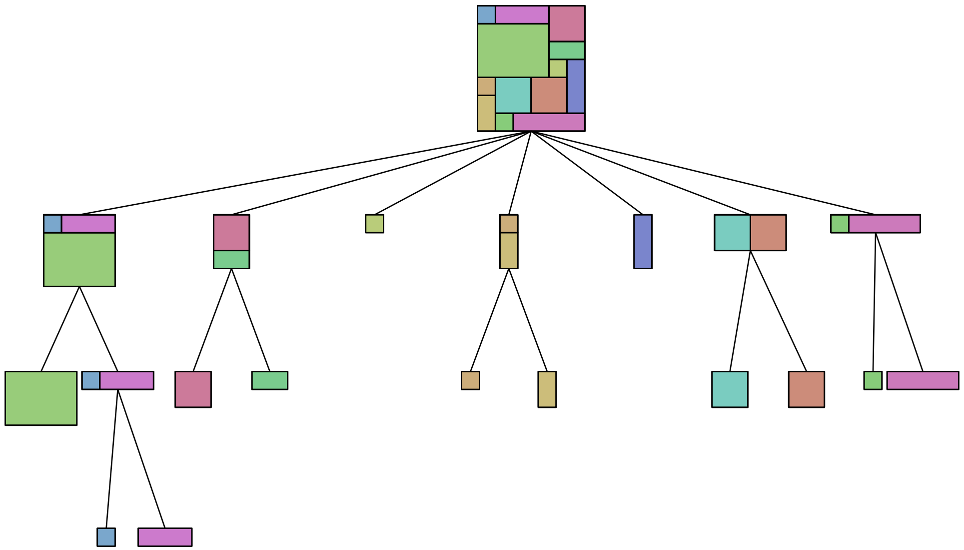
gruppiere Rechtecke, die zusammen größere Rechtecke bilden

Problem: Flächenzuweisung

- abstraktes Rechtecksdual benötigt noch korrekte Flächen

betrachte hierarchische Rechteckszerlegung:



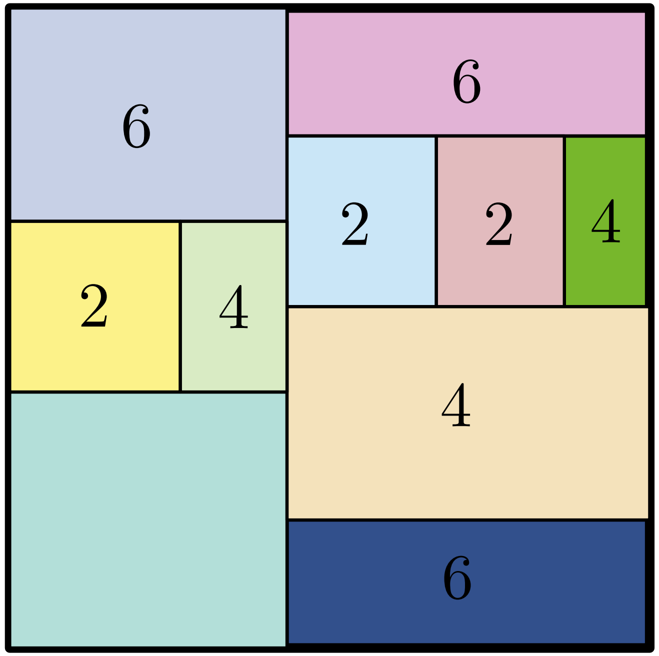


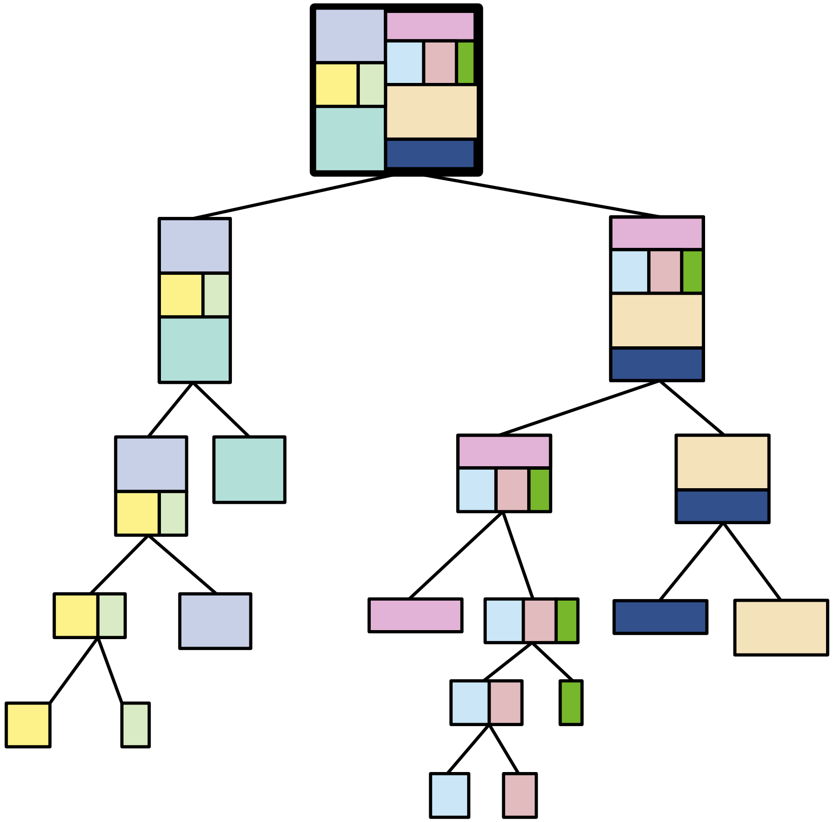
gruppiere Rechtecke, die zusammen größere Rechtecke bilden

- **zerschneidbare** Rechtecke, die in zwei Teile zerfallen
  $\rightarrow$ leichter Fall (s. Übung)
- komplexere Rechtecke
  $\rightarrow$ Algorithmus für **L-zerlegbare** Layouts

Aufgabe 1

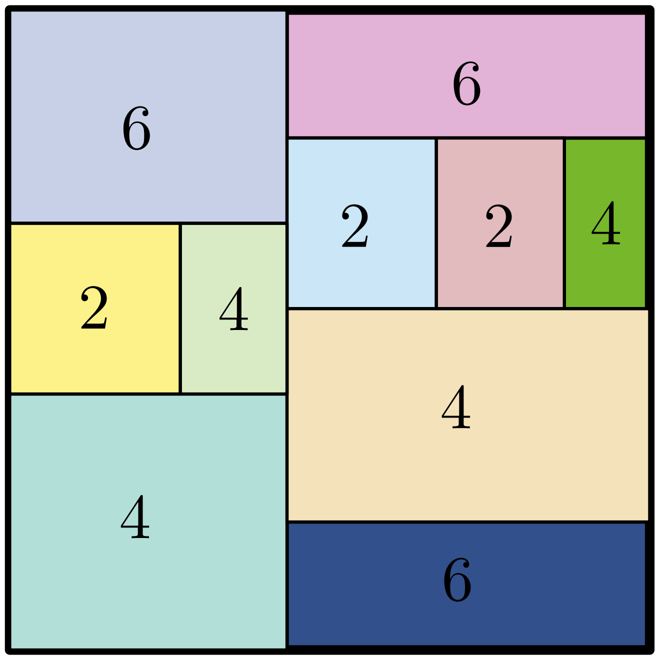
Annahme: Rechtecksdual besteht nur aus zerschneibaren Rechtecken.

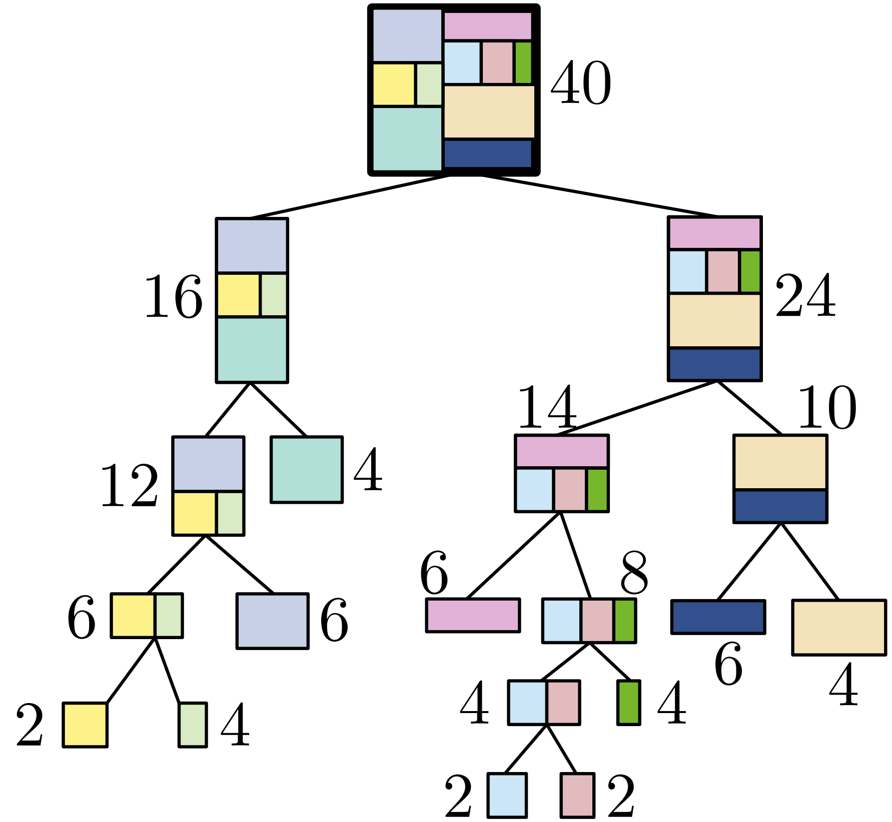




Aufgabe 1

Annahme: Rechtecksdual besteht nur aus zerschneibaren Rechtecken.



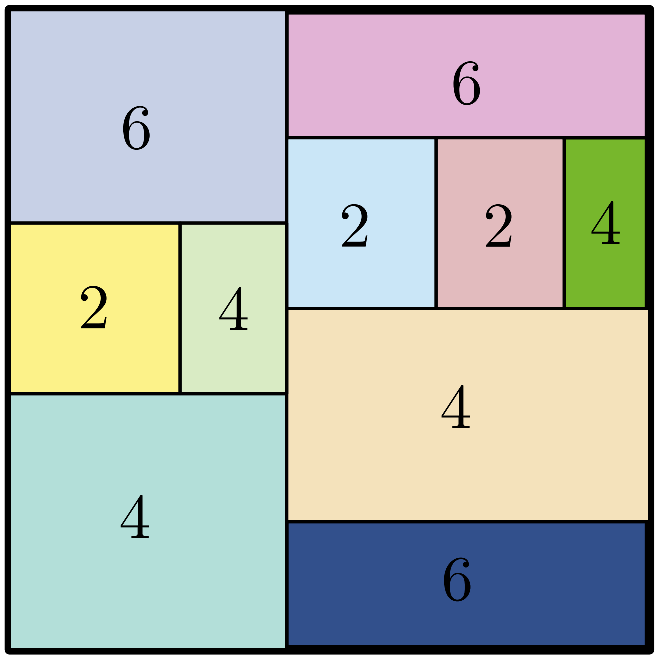


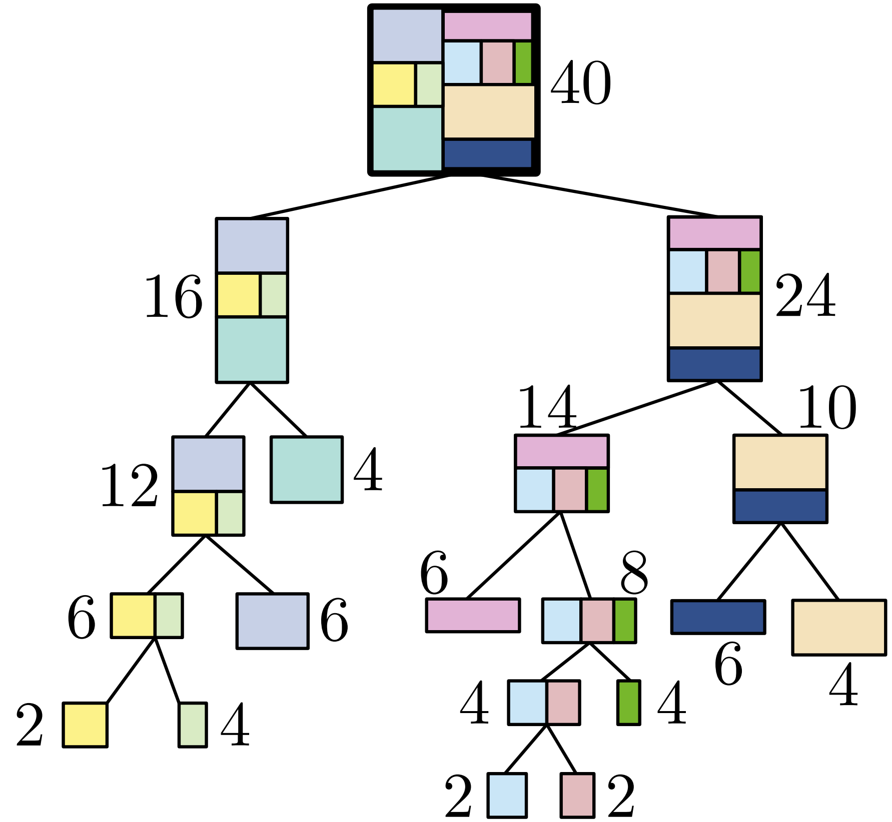
Flächenbedarf von jedem *atomaren* Rechteck bekannt

$\rightarrow$ Fläche von zusammengesetzten Rechtecken bekannt.

Aufgabe 1

Annahme: Rechtecksdual besteht nur aus zerschneibaren Rechtecken.





Flächenbedarf von jedem *atomaren* Rechteck bekannt
$\rightarrow$ Fläche von zusammengesetzten Rechtecken bekannt.

Top-Down-Ansatz: Steige rekursiv im Baum ab und passe Größe der Rechtecke entsprechend an.

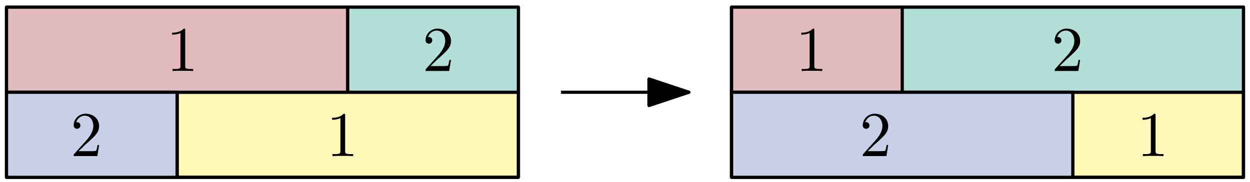
Aufgabe 1

Bleiben die Adjazenzen immer erhalten?

Aufgabe 1

Bleiben die Adjazenzen immer erhalten?

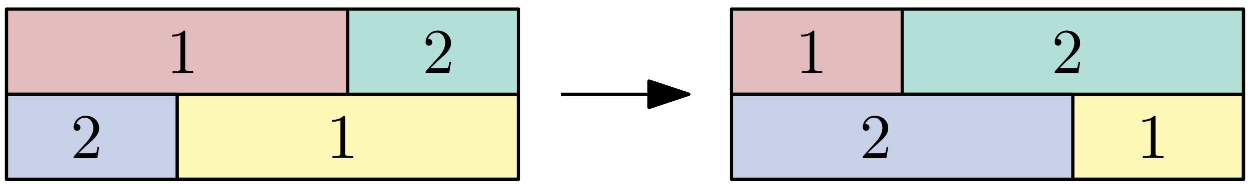
Antwort: Nein!



Aufgabe 1

Bleiben die Adjazenzen immer erhalten?

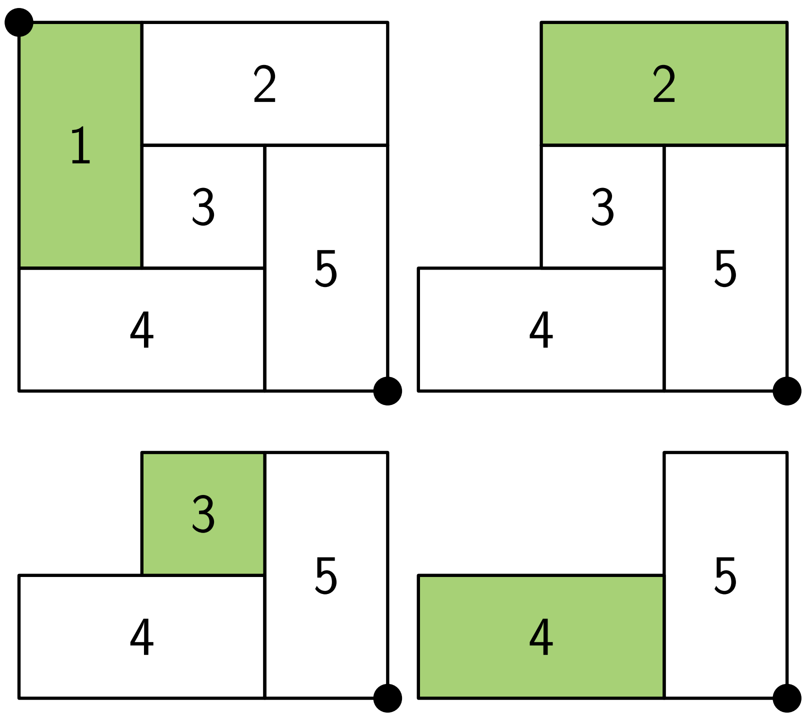
Antwort: Nein!



Allerdings: Adjazenzen werden nur aufgelöst, wenn es nicht anders geht.

L-zerlegbare Layouts

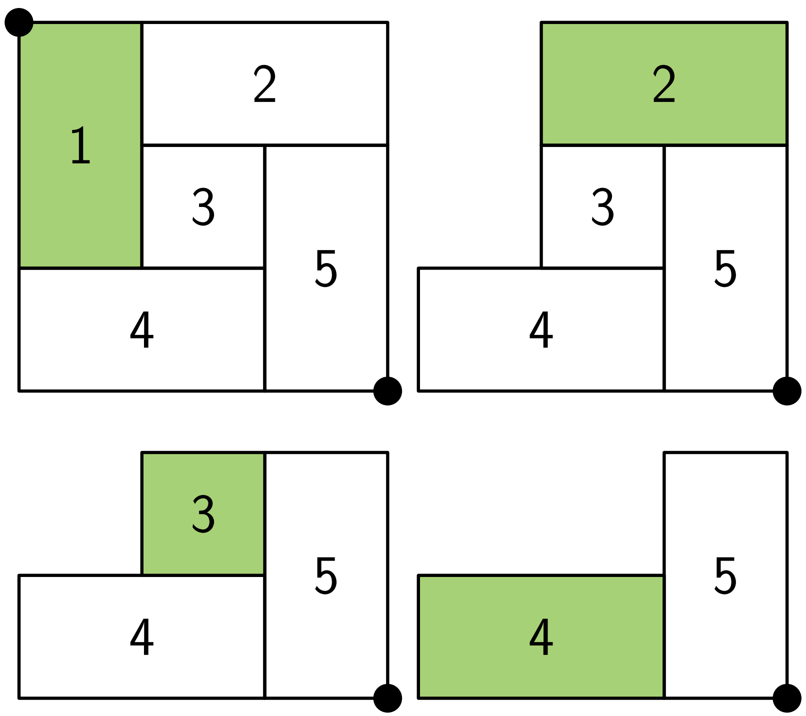
Ein irreduzibles Rechteckslayout $\mathcal{R}$ heißt **L-zerlegbar**, falls es eine Folge $(R_1, R_2, \ldots, R_n)$ der Rechtecke von $\mathcal{R}$ gibt, so dass R_1 und R_n in gegenüberliegenden Ecken von $\mathcal{R}$ liegen und jedes Polygon $\cup_{j=i}^{n} R_j$ L-förmig ist.



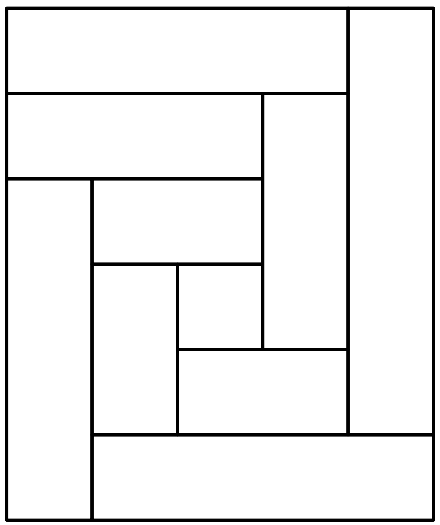
L-Zerlegungssequenz

L-zerlegbare Layouts

Ein irreduzibles Rechteckslayout $\mathcal{R}$ heißt **L-zerlegbar**, falls es eine Folge $(R_1, R_2, \ldots, R_n)$ der Rechtecke von $\mathcal{R}$ gibt, so dass R_1 und R_n in gegenüberliegenden Ecken von $\mathcal{R}$ liegen und jedes Polygon $\cup_{j=i}^{n} R_j$ L-förmig ist.



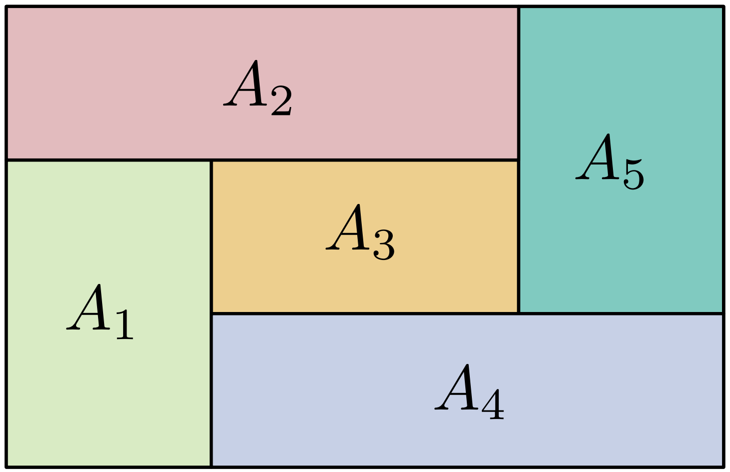
L-Zerlegungssequenz



nicht L-förmig zerlegbar

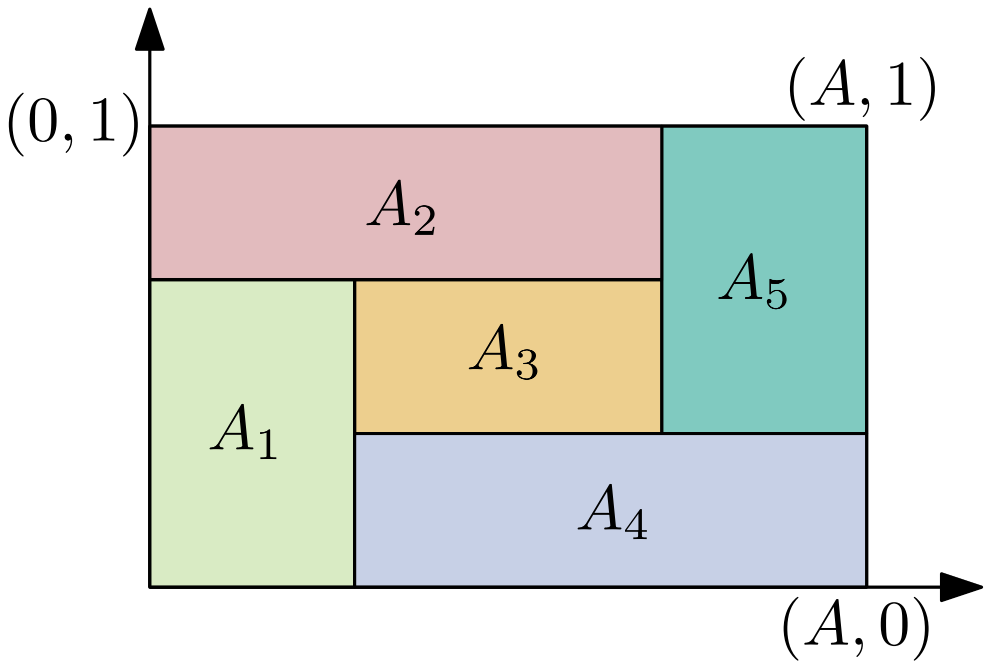
Aufgabe 2

Einfachstes L-zerlegbares Rechteckslayout:



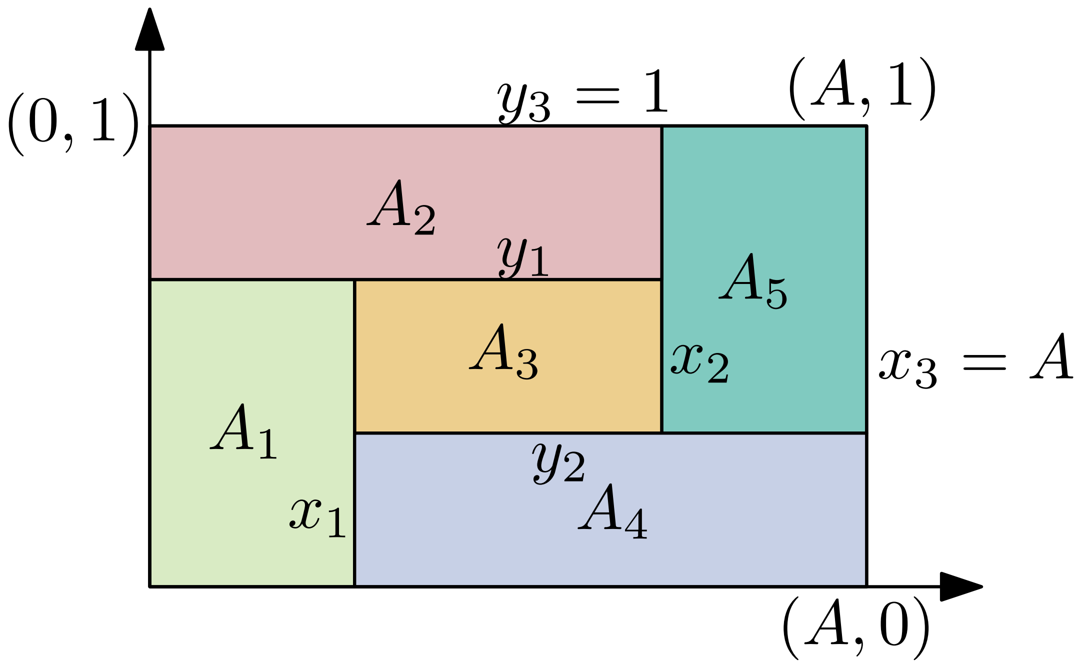
Aufgabe 2

Einfachstes L-zerlegbares Rechteckslayout: $A = A_1 + \ldots + A_5$



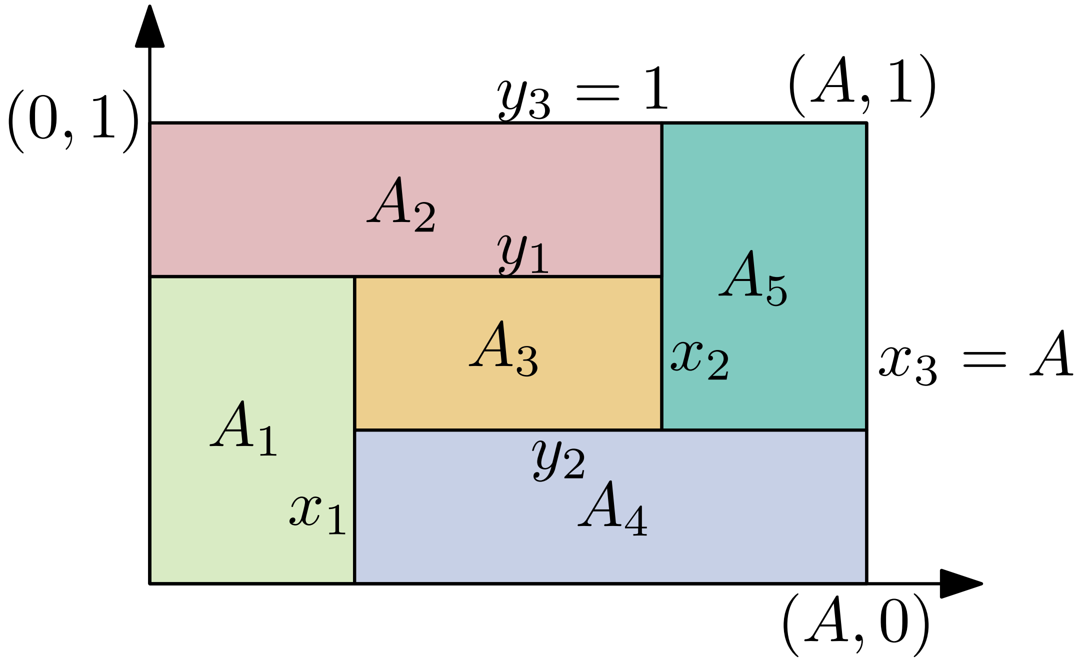
Aufgabe 2

Einfachstes L-zerlegbares Rechteckslayout: $A = A_1 + \ldots + A_5$



Aufgabe 2

Einfachstes L-zerlegbares Rechteckslayout: $A = A_1 + \ldots + A_5$



$$x_1 \cdot y_1 = A_1$$

$$x_2 \cdot (1 - y_1) = A_2$$

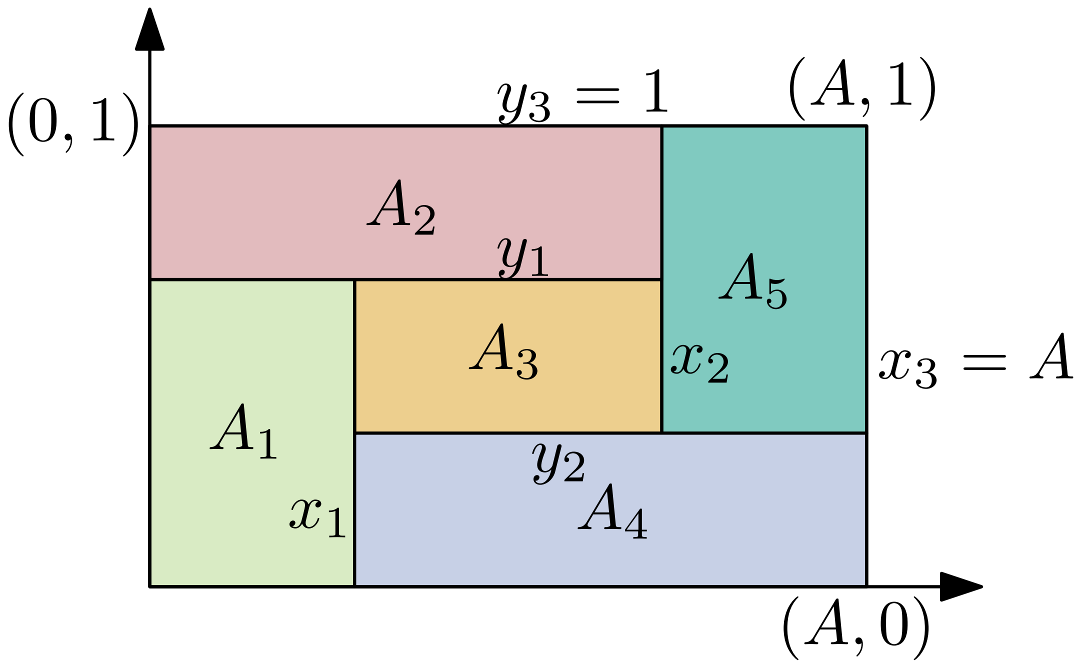
$$(x_2 - x_1) \cdot (y_1 - y_2) = A_3$$

$$(x_3 - x_1) \cdot y_2 = A_4$$

$$(x_3 - x_2) \cdot (1 - y_2) = A_5$$

Aufgabe 2

Einfachstes L-zerlegbares Rechteckslayout: $A = A_1 + \ldots + A_5$

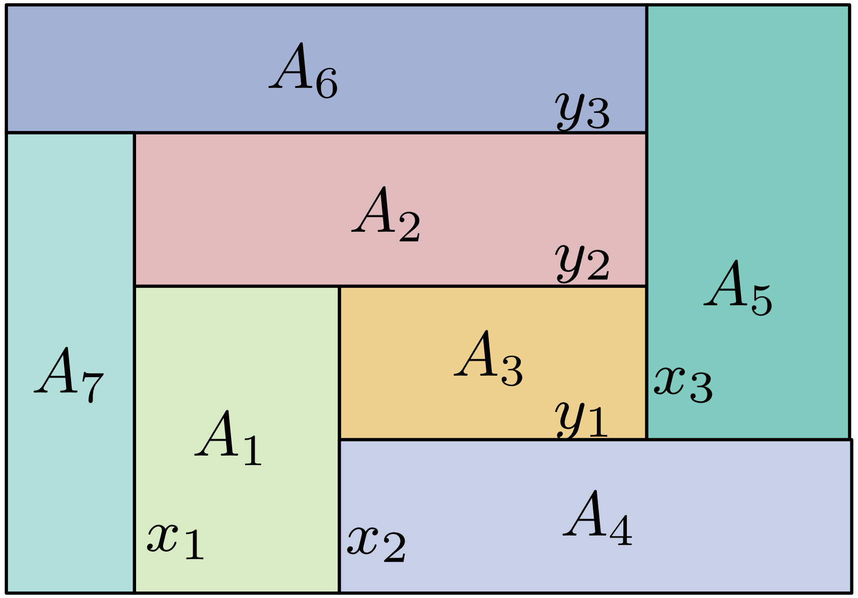


$$x_1 \cdot y_1 = A_1$$
$$x_2 \cdot (1 - y_1) = A_2$$
$$(x_2 - x_1) \cdot (y_1 - y_2) = A_3$$
$$(x_3 - x_1) \cdot y_2 = A_4$$
$$(x_3 - x_2) \cdot (1 - y_2) = A_5$$

Verlangt Lösung von quadratischen Gleichungen

$\longrightarrow$ noch handhabbar

Aufgabe 2



$$A_1 = (x_2 - x_1) \cdot y_2$$
$$A_2 = (x_3 - x_1) \cdot (y_3 - y_2)$$
$$A_3 = (x_3 - x_2) \cdot (y_2 - y_1)$$
$$A_4 = (A - x_2) \cdot y_1$$
$$A_5 = (A - x_3) \cdot (1 - y_1)$$
$$A_6 = x_3 \cdot (1 - y_3)$$
$$A_7 = x_1 \cdot y_3$$

Verlangt Lösung von Gleichungen bestehend aus Polynomen 6ten Grads.

Aufgabe 3: Quadratisches Programm

Gegeben sei ein Rechtecksdual $\mathcal{R}$ mit Rechtecken $R_1, \ldots, R_n$, sowie Flächenwerte $A_1, \ldots, A_n$ und ein Fehlerwert $\epsilon > 0$. Gesucht ist ein Rechteckskartogramm basierend auf $\mathcal{R}$, sodass

- für alle $1 \leq i \leq n$ das Rechteck R_i die Fläche A'_i mit $A_i - \epsilon \leq A'_i \leq A_i + \epsilon$ besitzt und
- die Nachbarschaften aus $\mathcal{R}$ erhalten bleiben.

Gesucht: Quadratisches Programm

Aufgabe 3: Quadratisches Programm

Gegeben sei ein Rechtecksdual $\mathcal{R}$ mit Rechtecken $R_1, \ldots, R_n$, sowie Flächenwerte $A_1, \ldots, A_n$ und ein Fehlerwert $\epsilon > 0$. Gesucht ist ein Rechteckskartogramm basierend auf $\mathcal{R}$, sodass

- für alle $1 \leq i \leq n$ das Rechteck R_i die Fläche A'_i mit $A_i - \epsilon \leq A'_i \leq A_i + \epsilon$ besitzt und
- die Nachbarschaften aus $\mathcal{R}$ erhalten bleiben.

Gesucht: Quadratisches Programm

1. Variablen: $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$
2. quadratische Zielfunktion: $f(\overline{x})$
3. Quad. Nebenbedingungen: $C_1(\overline{x}) \leq b_1$

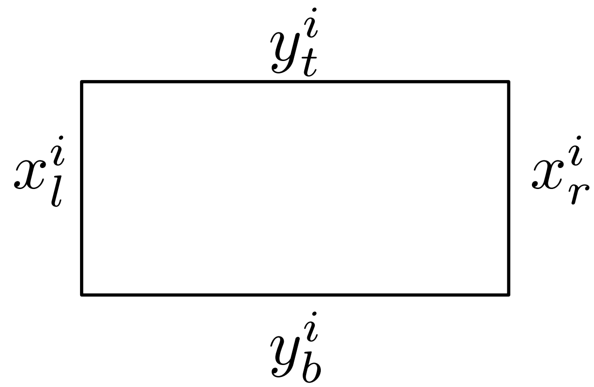
   $\ldots$

   $C_m(\overline{x}) \leq b_m$

$f(\overline{x})$, $C_i(\overline{x})$: Polynome zweiten Grades

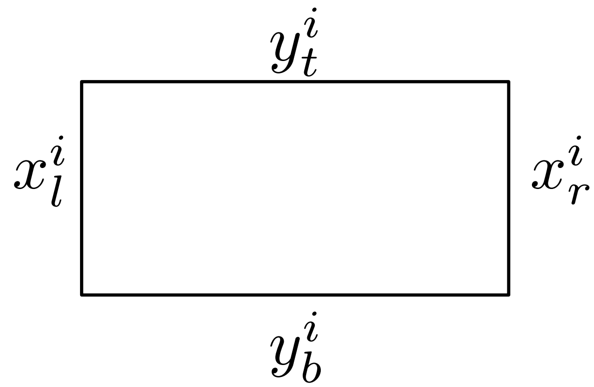
Quadratisches Programm

Für jedes Rechteck R_i führe Variablen $(x_l^i, x_r^i, y_t^i, y_b^i)$ ein:



Quadratisches Programm

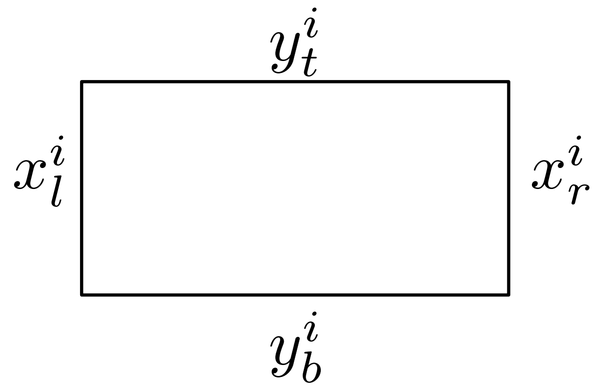
Für jedes Rechteck R_i führe Variablen $(x_l^i, x_r^i, y_t^i, y_b^i)$ ein:



Bedingungen:

Quadratisches Programm

Für jedes Rechteck R_i führe Variablen $(x_l^i, x_r^i, y_t^i, y_b^i)$ ein:



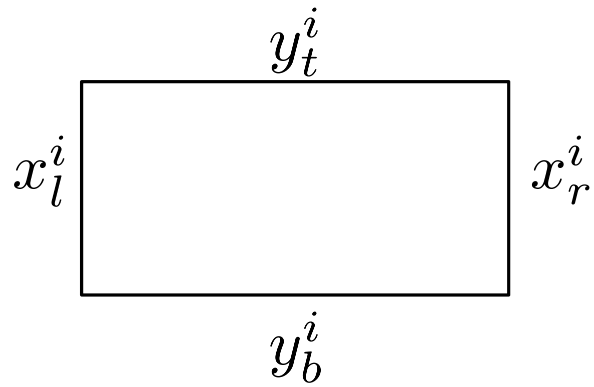
Bedingungen:

$$x_l^i < x_r^i \text{ und } y_l^i < y_r^i \tag{1}$$

Für jedes Rechteck R_i:

Quadratisches Programm

Für jedes Rechteck R_i führe Variablen $(x_l^i, x_r^i, y_t^i, y_b^i)$ ein:



Bedingungen:

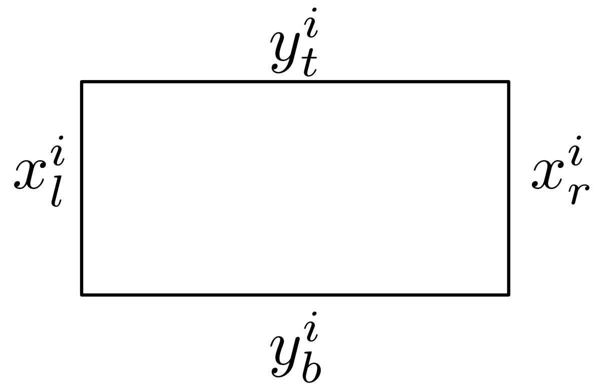
$$x_l^i < x_r^i \text{ und } y_l^i < y_r^i \tag{1}$$

Für jedes Rechteck R_i:

$$(x_r^i - x_l^i) \cdot (y_r^i - y_l^i) \geq (1 - \epsilon) \cdot A_i \tag{2}$$

Quadratisches Programm

Für jedes Rechteck R_i führe Variablen $(x_l^i, x_r^i, y_t^i, y_b^i)$ ein:



Bedingungen:

$$x_l^i < x_r^i \text{ und } y_l^i < y_r^i \tag{1}$$

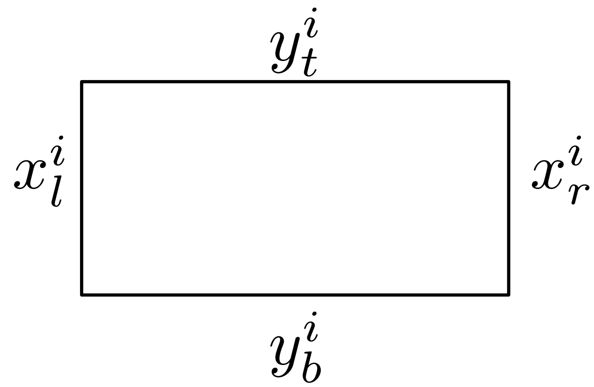
Für jedes Rechteck R_i:

$$(x_r^i - x_l^i) \cdot (y_r^i - y_l^i) \geq (1 - \epsilon) \cdot A_i \tag{2}$$

$$(x_r^i - x_l^i) \cdot (y_r^i - y_l^i) \leq (1 + \epsilon) \cdot A_i \tag{3}$$

Quadratisches Programm

Für jedes Rechteck R_i führe Variablen $(x_l^i, x_r^i, y_t^i, y_b^i)$ ein:



Bedingungen:

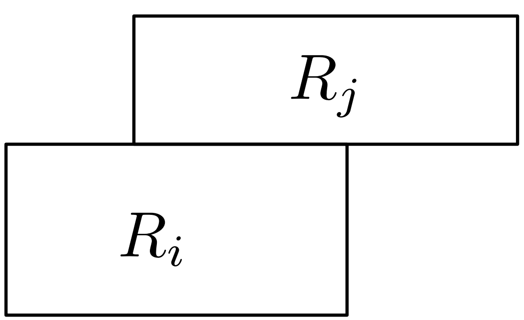
Für jedes Rechteck R_i:

$$x_l^i < x_r^i \text{ und } y_l^i < y_r^i \tag{1}$$

$$(x_r^i - x_l^i) \cdot (y_r^i - y_l^i) \geq (1 - \epsilon) \cdot A_i \tag{2}$$

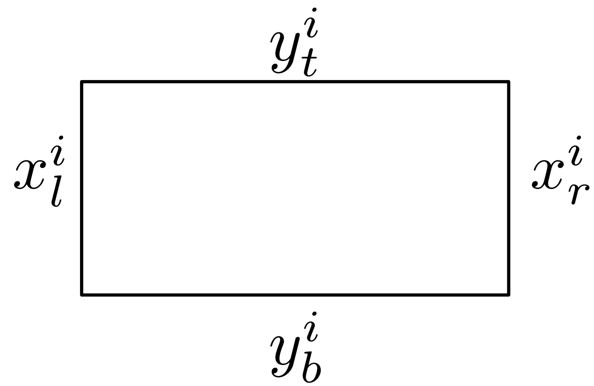
$$(x_r^i - x_l^i) \cdot (y_r^i - y_l^i) \leq (1 + \epsilon) \cdot A_i \tag{3}$$

Für benachbarte Rechtecke R_i und R_j, beispielweise:



Quadratisches Programm

Für jedes Rechteck R_i führe Variablen $(x_l^i, x_r^i, y_t^i, y_b^i)$ ein:



Bedingungen:

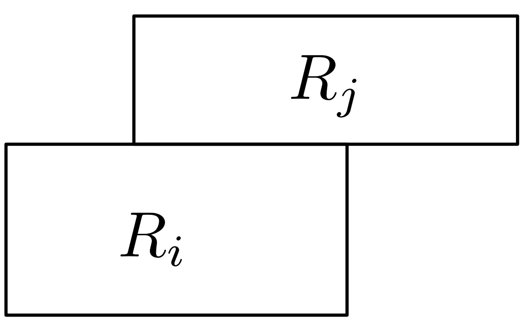
Für jedes Rechteck R_i:

$$x_l^i < x_r^i \text{ und } y_l^i < y_r^i \tag{1}$$

$$(x_r^i - x_l^i) \cdot (y_r^i - y_l^i) \geq (1 - \epsilon) \cdot A_i \tag{2}$$

$$(x_r^i - x_l^i) \cdot (y_r^i - y_l^i) \leq (1 + \epsilon) \cdot A_i \tag{3}$$

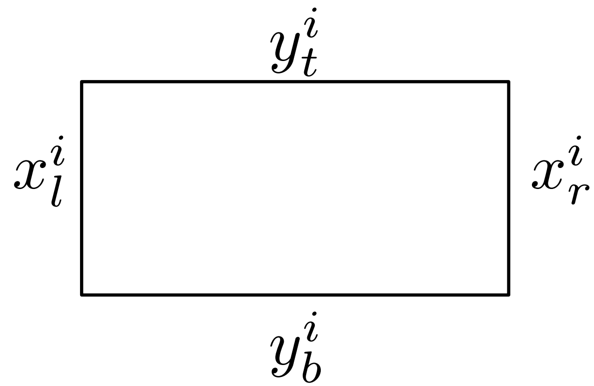
Für benachbarte Rechtecke R_i und R_j, beispielweise:



$$y_t^i = y_b^j \tag{4}$$

Quadratisches Programm

Für jedes Rechteck R_i führe Variablen $(x_l^i, x_r^i, y_t^i, y_b^i)$ ein:



Bedingungen:

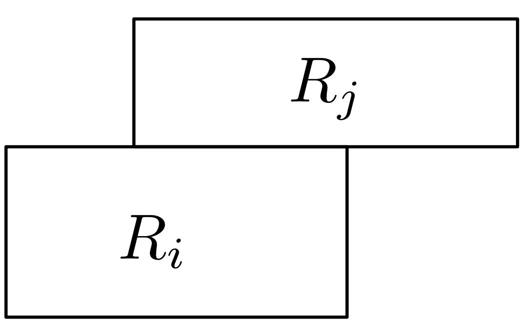
Für jedes Rechteck R_i:

$$x_l^i < x_r^i \text{ und } y_l^i < y_r^i \tag{1}$$

$$(x_r^i - x_l^i) \cdot (y_r^i - y_l^i) \geq (1 - \epsilon) \cdot A_i \tag{2}$$

$$(x_r^i - x_l^i) \cdot (y_r^i - y_l^i) \leq (1 + \epsilon) \cdot A_i \tag{3}$$

Für benachbarte Rechtecke R_i und R_j, beispielweise:

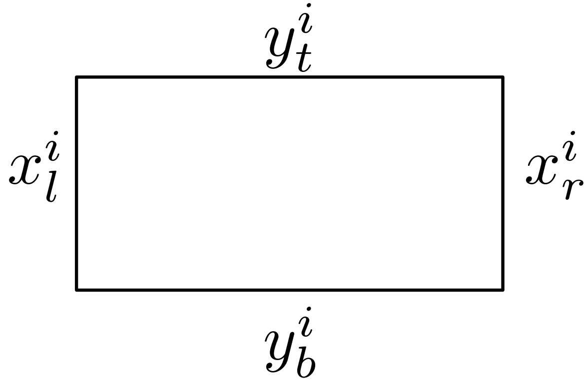


$$y_t^i = y_b^j \tag{4}$$

$$x_l^i \leq x_l^j \leq x_r^i \text{ und } x_l^j \leq x_r^i \leq x_r^j \tag{5}$$

Quadratisches Programm

Für jedes Rechteck R_i führe Variablen $(x_l^i, x_r^i, y_t^i, y_b^i)$ ein:



Bedingungen:

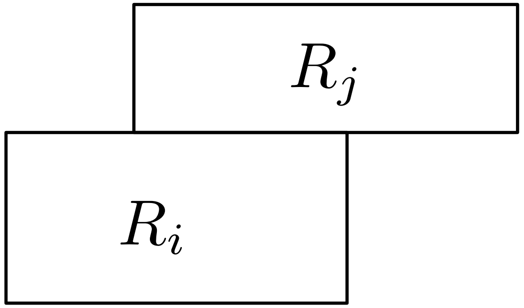
Für jedes Rechteck R_i:

$$x_l^i < x_r^i \text{ und } y_l^i < y_r^i \tag{1}$$

$$(x_r^i - x_l^i) \cdot (y_r^i - y_l^i) \geq (1 - \epsilon) \cdot A_i \tag{2}$$

$$(x_r^i - x_l^i) \cdot (y_r^i - y_l^i) \leq (1 + \epsilon) \cdot A_i \tag{3}$$

Für benachbarte Rechtecke R_i und R_j, beispielweise:



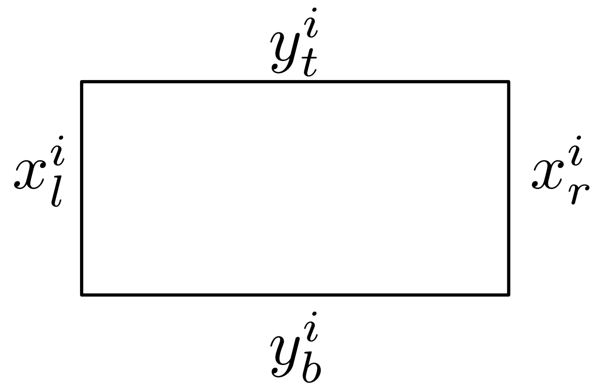
$$y_t^i = y_b^j \tag{4}$$

$$x_l^i \leq x_l^j \leq x_r^i \text{ und } x_l^j \leq x_r^i \leq x_r^j \tag{5}$$

Analog: restliche Nachbarschaftsfälle

Quadratisches Programm

Für jedes Rechteck R_i führe Variablen $(x_l^i, x_r^i, y_t^i, y_b^i)$ ein:



Bedingungen:

$$x_l^i < x_r^i \text{ und } y_l^i < y_r^i \quad (1)$$

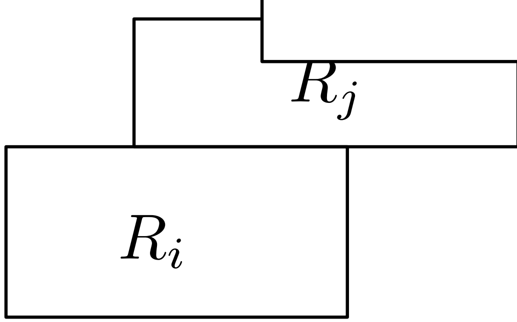
Für jedes Rechteck R_i:

$$(x_r^i - x_l^i) \cdot (y_r^i - y_l^i) \geq (1 - \epsilon) \cdot A_i \quad (2)$$

(3)

Zielfunktion: Minimiere ϵ.

Für benach



(4)

$$x_l^i \leq x_l^j \leq x_r^i \text{ und } x_l^j \leq x_r^i \leq x_r^j \quad (5)$$

Analog: restliche Nachbarschaftsfälle

Anrechenbarkeit der Veranstaltung

IN4INAEA, IN4INDAA, Einzelmodul → 5 LP

IN4INACG → 3 LP (dafür ohne Übung)

IN4INAEA: Algorithm Engineering und Anwendungen

IN4INDAA: Design und Analyse von Algorithmen

IN4INACG: Computergrafik

Algorithmische Kartografie in der Praxis

Projekt zum Semesterabschluss (16.7.)

Welche Algorithmen werden in gängigen Kartografiesystemen tatsächlich verwendet?

Gruppe 1:
Online-Systeme

Gruppe 2:
Professionelle GIS Software

Gruppe 3:
Kartografie-Software

Algorithmische Kartografie in der Praxis

Projekt zum Semesterabschluss (16.7.)

Welche Algorithmen werden in gängigen Kartografiesystemen tatsächlich verwendet?

Gruppe 1:
Online-Systeme

Gruppe 2:
Professionelle GIS Software

Gruppe 3:
Kartografie-Software

Finden Sie für Ihre Kategorie an Produkten heraus, welche Algorithmen für die in der Vorlesung behandelten Probleme z.B. zur Beschriftung, zur Linienvereinfachung, für Kartogramme implementiert sind.

Stellen Sie Ihre Ergebnisse in zwei Wochen in einer kurzen Präsentation von 10–15 Minuten vor.

Ablauf konkret

1) Gruppeneinteilung

Gruppe 1:
Online-Systeme

Gruppe 2:
Professionelle GIS Software

Gruppe 3:
Kartografie-Software

2) Interne Aufgabenverteilung und erste Recherchen

3) Treffen mit Betreuer (Freitag, 5.7.)

4) Detaillierte Untersuchung der Fragen, Erstellung der Präsentation

5) Treffen mit Betreuer (Freitag 12.7.)

6) Abschlusspräsentation der Ergebnisse (Dienstag 16.7.)