Karlsruher Institut für Technologie
Fakultät für Informatik
ITI Wagner

Algorithmische Kartografie
Sommersemester 2013
Martin Nöllenburg/Benjamin Niedermann

Übungsblatt 10

Ausgabe: Mittwoch, 03. Juni 2013
Abgabe: Bis spätestens Dienstag, 09. Juli 2013 um 12:00 Uhr.

Hinweis: Abgabe ist sowohl in den Vorlesungen und Übungen als auch im Raum 322 des Informatik-Hauptgebäudes möglich.

1 Schnyder Realizer

In der Vorlesung vom 2. Juli wurden folgende Aussagen für einen triangulierten planaren Graphen G eingeführt:

a) Eine kanonische Ordnung der Knoten von G definiert einen Schnyder Realizer von G, indem jedem Knoten v_i drei ausgehende Kanten zum ersten und letzten Knoten in C_{i-1} und zum Nachfolger mit höchstem Index zugeordnet werden.

b) Ein Schnyder Realizer in G mit Bäumen T_1, T_2, T_3 definiert eine kanonische Ordnung als topologische Ordnung des azyklischen Graphen $T_1 \cup T_2^{-1} \cup T_3^{-1}$.
(T^{-1}: invertiere Kantenrichtungen von T)

1. Zeigen Sie, dass die in a) beschriebene Konstruktion tatsächlich einen Schnyder Realizer ergibt.
2. Zeigen Sie, dass die in b) beschriebene Konstruktion tatsächlich eine kanonische Ordnung ergibt.

2 Kartogramme mit Kreisbögen

In der Vorlesung vom 2. Juli wurde ein heuristischer Algorithmus für die Erstellung von *Circular Arc Cartograms* eingeführt, der auf Netzwerkflüssen basiert.

1. An welchen Stellen beruht dieser Algorithmus auf heuristischen Überlegungen?
2. Überlegen Sie sich Verbesserungsmöglichkeiten oder alternative Lösungsansätze zur Erstellung von Circular Arc Cartograms.

3 Rechtecksduale

Betrachten Sie das Problem MinimiereRechtecksdual:

Gegeben: Ein Rechtecksdual $\mathcal{R}$ bestehend aus den Rechtecken $R_1, \ldots, R_n$, *Zielbreiten* $w_1, \ldots, w_n \in \mathbb{R}^+$ und *Zielhöhen* $h_1, \ldots, h_n \in \mathbb{R}^+$.

Gesucht: Für jedes Rechteck R_i, $1 \leq i \leq n$ Breite w_i' und Höhe h_i' sodass

a) die Adjazenzen aus $\mathcal{R}$ erhalten bleiben, und

b) $w_i' \geq w_i$ und $h_i' \geq h_i$ für alle $1 \leq i \leq n$, und

c) $\sum_{i=1}^n w_i' + \sum_{i=1}^n h_i'$ minimiert wird.

1. Lösen Sie MinimiereRechtecksdual mithilfe des Minimalkostenflussproblems (siehe Flussmodell unten).
2. Kann Ihr Verfahren auf den Fall angepasst werden, dass Zielflächen gegeben sind und die Flächen von $R_1, \ldots, R_n$ entsprechend angepasst werden sollen?

Allgemeines Flussmodell: Gegeben sei ein *Netzwerk* $(D = (V, A); b; l; u)$ bestehend aus einem gerichteten Graph $D = (V, A)$, untere Kapazitäten $l : A \to \mathbb{R}_0^+$ und obere Kapazitäten $u : A \to \mathbb{R}_0^+$ und eine Knotenbewertung $b : V \to \mathbb{R}$ mit $\sum_{i \in V} b(i) = 0$. Eine Abbildung $X : A \to \mathbb{R}_0^+$ heißt Fluss, falls sie folgende Bedingungen erfüllt:

1. Kapazitätsbedingung:

$$\forall (i,j) \in A : l(i,j) \leq X(i,j) \leq u(i,j)$$

2. Flusserhaltungsbedingung:

$$\forall i \in V \backslash \{s,t\} : \sum_{j:(i,j) \in A} X(i,j) - \sum_{j:(j,i) \in A} X(j,i) = b(i)$$

Knoten $v \in V$ mit $b(i) > 0$ heißen *Quellen* und solche mit $b(v) < 0$ *Senken.*

Das *allgemeine Flussproblem* besteht dann darin, einen zulässigen Fluss zu finden, d.h. einen Fluss, der b berücksichtigt.

Das *Minimalkostenflussproblem* (*MinCostFlow*) besteht darin einen zulässigen Fluss X mit minimalen Kosten bezüglich einer gegebenen Kostenfunktion $cost \colon A \to \mathbb{R}_0^+$ zu finden, wobei die Kosten des Flusses wie folgt definiert sind:

$$cost(X) = \sum_{(i,j) \in A} cost(i,j) \cdot X(i,j) \ .$$