Karlsruher Institut für Technologie
Fakultät für Informatik
ITI Wagner

Algorithmische Kartografie
Sommersemester 2013
Martin Nöllenburg/Benjamin Niedermann

Übungsblatt 7

Ausgabe: Mittwoch, 12. Juni 2013
Abgabe: Bis spätestens Dienstag, 18. Juni 2013 um 12:00 Uhr.

Hinweis: Abgabe ist sowohl in den Vorlesungen und Übungen als auch im Raum 322 des Informatik-Hauptgebäudes möglich.

1 Konflikte

1. Zeigen Sie, dass zwei rotierende Labels maximal vier gemeinsame Konfliktphasen besitzen können, wenn man annimmt, dass der Ankerpunkt innerhalb oder auf dem Rand des jeweiligen Labels liegen muss.
2. Geben Sie eine notwendige Bedingung dafür an, dass zwei Labels, die am unteren linken Eckpunkt verankert sind, in einem Konflikt stehen während sie rotieren.
3. Beruht diese notwendige Bedingung auf der Wahl der Verankerung?

Lösung: Lösung siehe Folien der Übung vom 20.06.

2 Schubfachprinzip

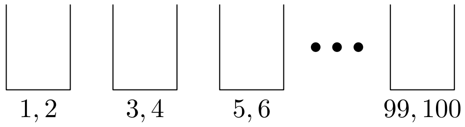
1. Sei $S \subseteq \{1, \ldots, 100\}$ eine Teilmenge mit 51 Elementen. Zeigen Sie, dass es in S mindestens zwei aufeinander folgende Zahlen gibt.
2. Sei $S \subseteq \{1, \ldots, 100\}$ eine Teilmenge mit zehn Elementen. Zeigen Sie, dass man immer zwei nicht-leere Teilmengen $S_1, S_2 \subseteq S$ finden kann, sodass gilt:

$$\sum_{x \in S_1} x = \sum_{x \in S_2} x$$

Lösung: Das *Schubfachprinzip* ist wie folgt formuliert: *Verteilt man n Objekte auf k Mengen, so gibt es mindestens eine Menge, in der sich mindestens $\lceil \frac{n}{k} \rceil$ Objekte befinden.*

Beweis befindet sich auf den Folien der Übung vom 20.06. Mithilfe des Schubfachprinzips lassen sich die zwei Teilaufgaben lösen.

1. Teile die Zahlen 1 bis 100 in 50 aufeinanderfolgende Paare auf und erstelle für jedes dieser Paare einen Behälter:

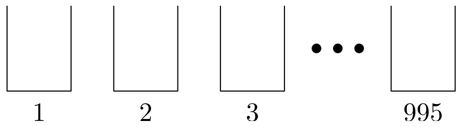


Sortiert man nun die 51 Elemente entsprechend der Indizierung der Behälter in die 50 Behälter ein, folgt direkt aus dem Schubfachprinzip, dass es einen Behälter geben muss, der zwei Elemente enthält. Damit ist die Aussage gezeigt.

2. Offensichtlich gilt für jede Teilmenge $S \subseteq \{1, \ldots, 100\}$ mit zehn Elementen

$$1 \leq \sum_{x \in S} x \leq 955,$$

denn $91 + \cdots + 100 = 955$. Für jede dieser möglichen Summen erstellen wir einen Behälter:



Andererseits gibt es $2^{10} - 1 = 1023$ viele verschiedene nicht leere Teilmengen einer Menge S mit zehn Elementen. Wenn wir also diese Teilmengen von S entsprechend ihrer Summen in die Behälter einsortieren, so gibt es nach dem Schubfachprinzip mindestens einen Behälter, der zwei Teilmengen enthält.

3 Line-Stabbing für statische Kartenbeschriftung

Betrachten Sie das statische Beschriftungsproblem für das 1-Positions-Model 1P. Dieses Problem ist äquivalent zu dem Problem UNABHÄNGIGERECHTECKE:

Gegeben: Menge L achsenparalleler Rechtecke.

Gesucht: Größte Menge $S \subseteq L$, sodass für alle Rechtecke $\ell_1, \ell_2 \in S$ mit $\ell_1 \neq \ell_2$ gilt ℓ_1 und ℓ_2 schneiden sich nicht.

Nehmen Sie an, dass die Rechtecke alle gleich hoch sind. Geben Sie einen $\frac{1}{2}$-approximativen Algorithmus für UNABHÄNGIGERECHTECKE an. Welche Laufzeit besitzt dieser?

Lösung: Lösung siehe Folien der Übung vom 20.06.