Karlsruher Institut für Technologie
Fakultät für Informatik
ITI Wagner

Algorithmische Kartografie
Sommersemester 2013
Martin Nöllenburg/Benjamin Niedermann

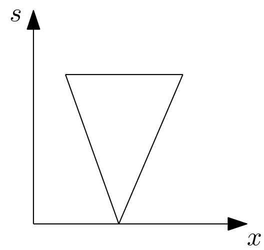
Übungsblatt 6

Ausgabe: Mittwoch, 05. Juni 2013
Abgabe: Bis spätestens Dienstag, 11. Juni 2013 um 12:00 Uhr.

Hinweis: Abgabe ist sowohl in den Vorlesungen und Übungen als auch im Raum 322 des Informatik-Hauptgebäudes möglich.

1 Zoomen von 1D-Labels

Betrachtet man Kartenbeschriftung in 1D, so werden werden Labels als offene Intervalle auf der x-Achse repräsentiert, die jeweils an einem festen Punkt verankert sind. Während das Zoomen eines Labels im zweidimensionalen Fall durch eine Pyramide im Raum beschrieben werden kann, beschreibt man das Zoomen eines Labels im eindimensionalen Fall entsprechend als Dreieck in der Ebene:



Betrachten Sie die Problemstellung 1D-Zooming:

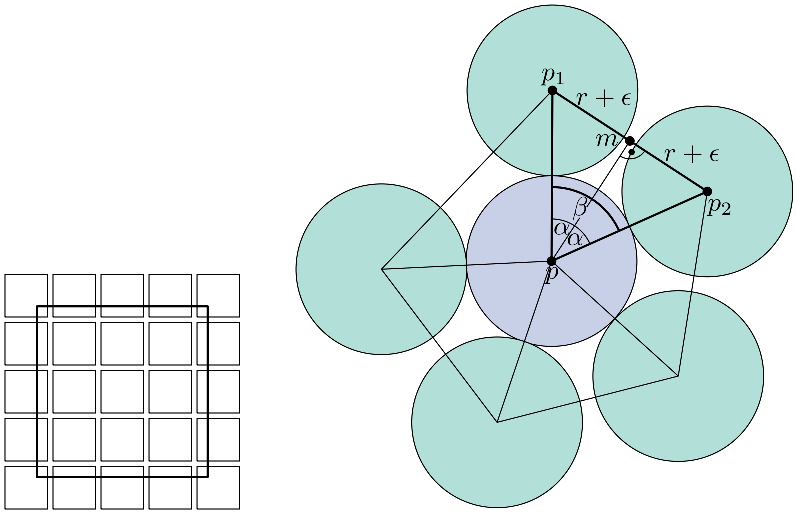
Gegeben: Menge $\mathcal{E}$ von Labeldreiecken mit verfügbaren Intervallen $(0, S_{max})$ für alle $E \in \mathcal{E}$.

Gesucht: Aktive Intervalle $(0, A_E)$ für alle $E \in \mathcal{E}$, sodass $\sum_{E\in\mathcal{E}} A_E$ maximiert wird.

1. Stellen Sie ein dynamisches Programm auf, das 1D-Zooming löst.
2. Funktioniert Ihr dynamisches Programm auch, wenn nicht verlangt wird, dass die aktiven Intervalle bei 0 beginnen?
3. Nennen Sie einen Anwendungsfall für das eindimensionale Zoomen.

Lösung:

1. Siehe Folien der Übung vom 13.06.2013.



(a) (b)

2. Nein, das dynamische Programm funktioniert nicht mehr, da das höchste *Labeldreieck* die Instanz nicht mehr in zwei unabhängige Teilinstanzen aufteilt.

3. Darstellung einer Zeitleiste, z.B. Zeitgeschichte der Erde.

2 Approximations-Faktoren

Betrachten Sie in dieser Aufgabe die Problemstellung 2D-Zooming für den zweidimensionalen Fall, wie er in der Vorlesung vorgestellt wurde.

Gegeben: Menge $\mathcal{E}$ von Labelpyramiden mit verfügbaren Intervallen (s_E, S_E) für alle $E \in \mathcal{E}$.

Gesucht: Aktive Intervalle (a_E, A_E) für alle $E \in \mathcal{E}$, sodass $\sum_{E \in \mathcal{E}} (A_E - a_e)$ maximiert wird.

1. Nehmen Sie an, dass die Labels Quadrate unterschiedlicher Größe sein dürfen, aber das größte und kleinste Label ein Flächenverhältnis von W aufweisen, d.h. insbesondere für alle Skalierungsfaktoren s und alle Labelpyramiden $E, E' \in \mathcal{E}$ gilt:

$$\frac{|tr_s(E)|}{|tr_s(E')|} \leq W,$$

wobei $|tr_s(E)|$ die Fläche der Spur $tr_s(E)$ bezeichnet. Welchen Approximationsfaktor liefert Algorithmus 1 aus der Vorlesung vom 04.06?

2. Nehmen Sie nun an, dass die Labels Kreise sind. Zeigen Sie folgenden Satz:

Satz 1. *Für n kreisförmige Labels gleicher Größe kann eine $\frac{1}{6}$-Approximation von 2D-*Zooming *in Zeit $O(n^2)$ und Speicher $O(n)$ berechnet werden.*

Lösung:

1. Seien Q und Q' zwei achsen-parallele Quadrate mit Flächenverhältnis W, also insbesondere mit Seitenverhältnis $\sqrt{W}$. O.B.d.A. sei $W > 1$, Q hat Seitenlänge $\sqrt{W}$ und Q' hat

Seitenlänge 1. Wir bestimmen nun wie viele Kopien von Q' platziert werden können, sodass sie Q schneiden ohne sich gegenseitig zu schneiden. Offensichtlich können maximal $\lceil\sqrt{W}\rceil \leq \sqrt{W}+1$ viele Kopien von Q' eine horizontale Strecke der Länge $\sqrt{W}$ schneiden ohne dass sie sich gegenseitig schneiden. Analog können maximal $\lceil\sqrt{W}\rceil \leq \sqrt{W}+1$ viele Kopien von Q' eine vertikale Strecke der Länge $\sqrt{W}$ schneiden ohne dass sie sich gegenseitig schneiden. Folglich können maximal $(\sqrt{W}+1)^2$ viele Kopien von Q' das Quadrat Q schneiden ohne dass sie sich gegenseitig schneiden (siehe Abb. 1a). Nach Lemma 2 aus der Vorlesung vom 04.06.2013 ergibt sich damit ein Approximationsfaktor $\frac{1}{(\sqrt{W}+1)^2}$ für Algorithmus 1.

2. Wir zeigen, dass maximal 5 Kreise mit Radius r einen weiteren Kreis C mit Radius r schneiden können, ohne dass sie sich gegenseitig schneiden. Damit ergibt sich nach Lemma 2 der Vorlesung der Approximationsfaktor $\frac{1}{5}$ für Algorithmus 1.

   Sei p der Mittelpunkt von C und seien $C_1, \ldots, C_k$ maximal viele Kreise mit Radius r, die C schneiden ohne dass sie sich gegenseitig schneiden. Wir bezeichnen die Mittelpunkte dieser Kreise mit $p_1, \ldots, p_n$. O.B.d.A. nehmen wir an, dass die Kreise $C_1, \ldots, C_k$ nur den Rand von C schneiden, aber nicht dessen Inneres. Ansonsten können wir die Kreise entsprechend nach außen schieben. Hinzu benennen wir sie so, dass sie in der Folge $C_1, C_2, \ldots, C_k$ den Rand schneiden.

   Betrachte zwei Kreise C_i und C_j, die aufeinander folgend C schneiden (siehe C_1 und C_2 in Abb. 1b). Damit sie sich nicht schneiden, müssen ihre Mittelpunkte mindestens Abstand $r+\epsilon$ für $\epsilon > 0$ haben. Damit k möglichst groß ist, können wir annehmen dass der Innenwinkel β an p des Dreiecks $p_i p p_j$ kleiner als 180° ist.

   Sei m der Mittelpunkt der Strecke $\overline{p_i p_j}$. Da sowohl p_i also auch p_j Abstand r zu p besitzt, sind $\overline{p_i p_j}$ und $\overline{pm}$ orthogonal zu einander. Folglich, ergibt sich für den Winkel α eingeschlossen von $\overline{pm}$ und $\overline{pp_1}$

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{r+\epsilon}{2r}\right)$$

   Da arcsin zwischen -1 und 1 streng monoton ansteigt und $\arcsin(\frac{1}{2}) = 30°$ gilt, muss gelten: $\alpha > 30°$. Damit besitzt das Dreieck $p_i p p_j$ einen Innenwinkel $\beta = \alpha + \alpha > 60°$ an p. Da wir für jedes aufeinander folgende Paar von Kreisen so argumentieren können, gilt wegen $\frac{360°}{\beta} < 6$ dass $k = 5$ gelten muss.

3 Unentschieden

In Algorithmus 1 aus der Vorlesung vom 04.06 wird $\mathcal{E}$ lexikografisch nach (A_E, S_E) sortiert. Zeigen Sie mithilfe eines Beispiels, dass der Approximationsfaktor von $\frac{1}{4}$ aus Satz 2 der Vorlesung nicht gilt, wenn eine beliebige Reihenfolge zweier Pyramidenstümpfe E und E' mit $A_E = A_{E'}$ angenommen wird.

Lösung: Siehe Folien der Übung vom 13.06.2013.