Karlsruher Institut für Technologie
Fakultät für Informatik
ITI Wagner

Algorithmische Kartografie
Sommersemester 2013
Martin Nöllenburg/Benjamin Niedermann

Übungsblatt 4

Ausgabe: Dienstag, 21. Mai 2013
Abgabe: Bis spätestens Dienstag, 04. Juni 2013 um 12:00 Uhr.

Hinweis: Abgabe ist sowohl in den Vorlesungen und Übungen als auch im Raum 322 des Informatik-Hauptgebäudes möglich.

1 Neutrale Streifen

Beweisen Sie Lemma 1 aus der Vorlesung vom 14.05.: *Für jede kreuzungsfreie Zuordnung mit minimaler Länge gilt, dass kein Leader einen neutralen Streifen kreuzt.*

Lösung:

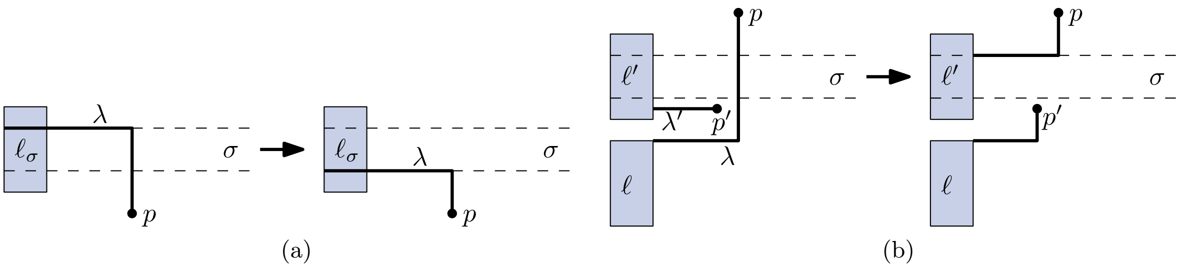

Abbildung 1: Fallunterscheidung für Lemma 1 aus der Vorlesung vom 14.05.2013.

Beweis durch Widerspruch: Annahme es gibt neutralen Streifen σ, der von einem Leader λ gekreuzt wird. O.b.d.A. nehmen wir an, dass $pa_\sigma = la_\sigma$ gilt, ansonsten gilt der symmetrische Fall $pb_\sigma = lb_\sigma$. Sei ℓ_σ das Label, das σ kreuzt, falls es existiert.

1. Fall: Der Leader λ verbindet einen Punkt p mit ℓ_σ. Schiebe den Arm von λ auf die Kante von σ, die am nächsten zu p liegt (siehe Abb. 1a). Aufgrund der angenommenen allgemeinen Lage der Punkte ist dies immer möglich. Damit kreuzt λ den Streifen σ nicht mehr.

2. Fall: Der Leader λ führt von einem Punkt p oberhalb von σ zu einem Label ℓ unterhalb von σ (siehe Abb. 1b). Wegen $pa_\sigma = la_\sigma$ muss es einen Leader λ' geben, der von einem Punkt p' unterhalb von σ zu einem Label ℓ' oberhalb von σ führt. Die Gesamtlänge der Leader kann reduziert werden, indem p mit ℓ' und p' mit ℓ verbunden wird.

3. Fall: Der Leader λ führt von einem Punkt p unterhalb von σ zu einem Label ℓ oberhalb von σ. Symmetrisches Vorgehen wie im zweiten Fall.

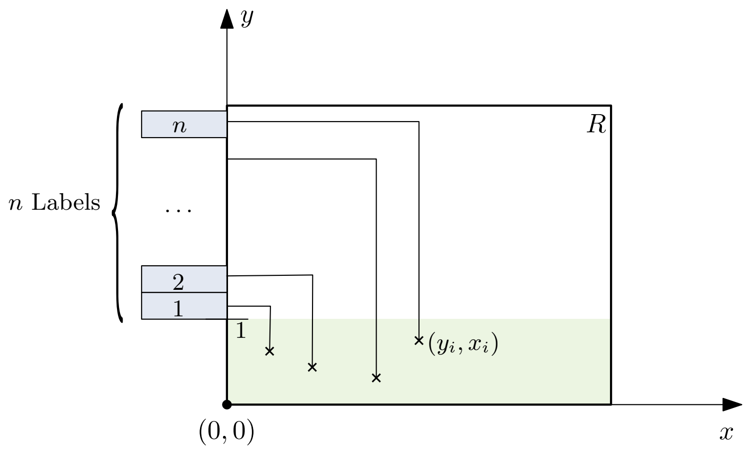

Abbildung 2: Reduktion von Sortieren auf Randbeschriftung.

2 Untere Schranke

Beweisen Sie Lemma 3 aus der Vorlesung vom 14.05.: *Eine kreuzungsfreie Zuordnung kann nicht schneller als in* $\Omega(n \log n)$ *Zeit berechnet werden.* Verwenden Sie hierzu, dass in einem vergleichsbasierten Rechnermodell eine Sequenz bestehend aus n Zahlen nicht schneller als in $\Omega(n \log n)$ Zeit sortiert werden kann.

Lösung: Betrachte die Sequenz $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^+$ positiver Zahlen, die nicht unbedingt sortiert ist. Mithilfe des einseitigen Randbeschriftungsproblem kann diese Sequenz sortiert werden. Hierzu erstellen wir basierend auf $x_1, \ldots, x_n$ eine Instanz (R, L, P) des einseitigen Randbeschriftungsproblem, dessen kreuzungsfreie Lösung eine Sortierung von $x_1, \ldots, x_n$ induziert (siehe Abb. 2):

1. Lege die linke untere Ecke des Rechtecks R auf den Ursprung $(0, 0)$ und wähle die Ausmaße von R geeignet groß.
2. Setze $P = \{p_1 = (x_1, y_1), \ldots, p_n = (x_n, y_n)\}$ mit $0 < y_i < 1$ für $1 \leq i \leq n$ und $y_i \neq y_j$ für $1 \leq i < j \leq n$.
3. $L = \{\ell_1, \ldots, \ell_n\}$, sodass Label ℓ_i mit $1 \leq i \leq n$ sein rechten unteren Eckpunkt an Koordinate $(0, i)$ hat.

Die aufsteigende Sortierung von $x_1, \ldots, x_n$ kann nun abgelesen werden, indem man die Sequenz der Punkte betrachtet, die mit $\ell_1, \ldots, \ell_n$ in dieser Reihenfolge verbunden sind. Jede andere Kombination zwischen Labels und Punkten führt zu Kreuzungen zwischen Leaders. Damit ist es mindestens so schwierig eine kreuzungsfreie Lösung für das einseitige Randbeschriftungsproblem zu finden, wie das Sortieren von Zahlen.

3 Zweiseitiger Fall

In dieser Aufgabe soll das zweiseitige Boundary-Labeling-Problem mit po-Leadern betrachtet werden. Hierzu seien die Punkte in P und die Label in L einer Instanz (L, P, R) in allgemeiner Lage gegeben.

1. Nehmen Sie an, dass die Label an zwei benachbarten Seiten von R angrenzen. Kann für n Label und n Punkte immer eine kreuzungsfreie Zuordnung gefunden werden?
2. Nehmen Sie an, dass die Label an zwei gegenüberliegenden Seiten von R angrenzen. Kann für n Label und n Punkte immer eine kreuzungsfreie Zuordnung gefunden werden?
   (a) Falls ja, geben Sie einen Algorithmus an, der eine solche Zuordnung findet.
   (b) Falls nein, geben Sie einen Algorithmus an, der für eine gegebene Instanz überprüft, ob eine kreuzungsfreie Zuordnung existiert.

Lösung: Siehe Folien der Übung vom 06.06.2013.

4 Allgemeine Lage

In der Vorlesung wurde angenommen, dass für eine gegebene Instanz (L, P, R) sich die Punkte in P und die Label in L in allgemeiner Lage befinden, d.h. keine zwei Punkte in P liegen auf einer gemeinsamen horizontalen oder vertikalen Gerade und kein Punkt in P liegt auf einer horizontalen Gerade, welche die oberere oder untere Seite eines Labels verlängert. Zeigen Sie, wie diese Einschränkung aufgehoben werden kann.

Lösung: Siehe Folien der Übung vom 06.06.2013.