

Übungsblatt 3

Ausgabe: Dienstag, 07. Mai 2013

Abgabe: Bis spätestens Dienstag, 14. Mai 2013 um 12:00 Uhr.

Hinweis: Abgabe ist sowohl in den Vorlesungen und Übungen als auch im Raum 322 des Informatik-Hauptgebäudes möglich.

1 Vergleich von diskreten Modellen und Slider-Modellen

In der Vorlesung vom 07.05.2013 wurde sowohl das diskret als auch das Slider-Modell für die Punktbeschriftung von Karten eingeführt. In beiden Modellen überdeckt der Rand eines platzierten Label ℓ dessen zu beschriftenden Punkt p .

1. Slider-Modell: p stimmt mit einem Punkt des Randes von ℓ überein.
2. Diskretes Modell: p stimmt mit einem Punkt einer gegebenen endlichen Teilmenge des Randes von ℓ überein.

Hinzu können noch weitere Unterscheidungen innerhalb der Modelle vorgenommen werden, indem im Slider-Modell Einschränkungen auf bestimmte Seiten des Randes und im diskreten Modell Einschränkungen auf bestimmte Ecken des Randes gemacht werden; siehe Vorlesung.

Um nun zwei Modelle zu vergleichen kann man folgenden Güte-Begriff einführen: Die $M_1 : M_2$ -Güte zwischen zwei Labeling-Modellen M_1 und M_2 ist definiert als

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max \left\{ \frac{\text{Größe der opt. Lösung von } I \text{ bzgl. } M_1}{\text{Größe der opt. Lösung von } I \text{ bzgl. } M_2} \mid \text{Instanz } I \text{ der Größe } n. \right\}$$

1. Zeigen Sie für Einheitsquadrate als Label, dass $\frac{3}{2}$ eine untere Schranke für die Güte zwischen dem Slider-Modell 4S und dem diskreten Modell ist, egal wie viele diskrete Positionen man im letzteren Modell zulässt.
2. Zeigen Sie, dass die $M_1 : M_2$ -Güte zwischen zwei Modellen M_1 und M_2 beliebig schlecht werden kann, wenn man die Label nicht auf Einheitsquadrate beschränkt. Hinweis: Betrachten Sie hierzu die zwei diskreten Modelle 1P und 2P.

Lösung:

1. Siehe Folien der Übung.
2. Siehe Folien der Übung.

2 Unterschiedliche Höhen

Betrachten Sie den in der Vorlesung vorgestellten Greedy-Algorithmus zur Platzierung von Label im Slider-Modell.

1. Wie ändert sich der Approximationsfaktor, wenn man Label verschiedener Höhen zulässt?
2. Kann die Umsetzung des Greedy-Algorithmus mit Laufzeit $O(n \log n)$ auf Label verschiedener Höhen angepasst werden? Falls ja, wie?

Lösung:

1. Es ergibt sich der Approximationsfaktor $\frac{1}{\lceil \frac{h_{max}}{h_{min}} + 1 \rceil}$

Beweis: Sei \mathcal{L} die optimale Lösung für eine gegebene Punktmenge P und sei \mathcal{L}' die Lösung des Greedy-Algorithmus für die selbe Punktmenge. Die Lösung \mathcal{L}' ist maximal in dem Sinne, dass kein weiteres Label zu \mathcal{L}' hinzugefügt werden kann, ohne dass es zu einer Überlappung kommt. Damit gilt für jedes Label ℓ aus \mathcal{L} dass es entweder in \mathcal{L}' liegt oder dass es ein Label aus \mathcal{L}' schneidet, dessen rechte Kante mindestens genauso weit links liegt wie die von ℓ . Weise jedes Label ℓ aus $\mathcal{L} \setminus \mathcal{L}'$ einem Label aus \mathcal{L}' zu, das mindestens so weit links liegt wie ℓ und ℓ schneidet. Weise jedes Label aus $\mathcal{L} \cap \mathcal{L}'$ sich selbst zu.

Jedem Label werden maximal $\lceil \frac{h_{max}}{h_{min}} + 1 \rceil$ viele Labels zugewiesen: Für Labels aus $\mathcal{L} \cap \mathcal{L}'$ gilt dies offensichtlich. Für jedes andere Label $\ell \in \mathcal{L}'$ gilt, dass jedes Label das ℓ zugewiesen ist, die rechte Kante von ℓ schneiden muss. Diese Labels können sich nicht gegenseitig schneiden, da sie aus \mathcal{L} stammen. Die Anzahl dieser wird maximiert, wenn sie alle Höhe h_{min} besitzen und ℓ die Höhe h_{max} besitzt. Damit können es aber maximal $\lceil \frac{h_{max}}{h_{min}} + 1 \rceil$ viele Labels sein, die ℓ zugewiesen werden.

2. Siehe Folien der Übung.

3 Diskrete Modelle

Wie kann der in der Vorlesung vorgestellte Greedy-Algorithmus für diskrete Modelle abgeändert werden? Welcher Approximationsfaktor ergibt sich?

Lösung: Sei F die Front, die während der Ausführung mitgeführt wird, dann sind ausschließlich die vorgegeben Positionen eines Labels interessant, die rechts der Front liegen. Positionen links der Front und auf der Front implizieren einen Konflikt. Damit benötigt man nur den Prioritätsbaum P_{left} , den Heap H_{right} und die Datenstrukturen zur Beschreibung der Front. Die Datenstrukturen P_{right} , H_{in} und H_V fallen weg. Die Approximationsfaktor bleibt verändert sich nicht.