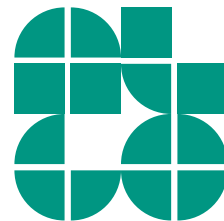


# Vorlesung Algorithmische Kartografie

## Schematisierung von (Straßen-)Karten

LEHRSTUHL FÜR ALGORITHMIK I · INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK · FAKULTÄT FÜR INFORMATIK

Martin Nöllenburg  
30.04.2013



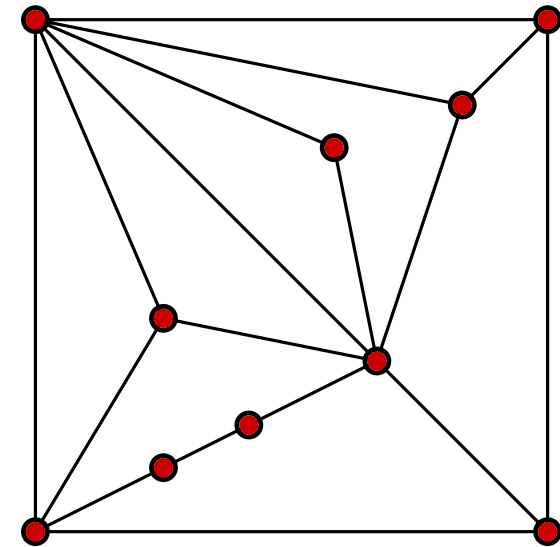


**Graph**  $G = (V, E)$  besteht aus Menge von **Knoten**  $V$   
und Menge von **Kanten**  $E \subseteq V \times V$ .

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}\}$$
$$E = \{(v_1, v_2), (v_1, v_8), (v_2, v_3), (v_3, v_5), (v_3, v_9),$$
$$(v_3, v_{10}), (v_4, v_5), (v_4, v_6), (v_4, v_9), (v_5, v_8),$$
$$(v_6, v_8), (v_6, v_9), (v_7, v_8), (v_7, v_9), (v_8, v_{10}),$$
$$(v_9, v_{10})\}$$

**Graph**  $G = (V, E)$  besteht aus Menge von **Knoten**  $V$   
und Menge von **Kanten**  $E \subseteq V \times V$ .

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}\}$$
$$E = \{(v_1, v_2), (v_1, v_8), (v_2, v_3), (v_3, v_5), (v_3, v_9),$$
$$(v_3, v_{10}), (v_4, v_5), (v_4, v_6), (v_4, v_9), (v_5, v_8),$$
$$(v_6, v_8), (v_6, v_9), (v_7, v_8), (v_7, v_9), (v_8, v_{10}),$$
$$(v_9, v_{10})\}$$



Eine **Graphenzeichnung** ist eine Abbildung  $\Gamma$  in die Ebene  $\mathbb{R}^2$

- jeder Knoten  $v \in V$  wird abgebildet auf Punkt  $\Gamma(v)$
- jede Kante  $e = (u, v) \in E$  wird abgebildet auf Kurve  $\Gamma(e)$  mit Endpunkten  $\Gamma(u)$  und  $\Gamma(v)$ .

# Das Graph-Layout-Problem

## Graph-Layout-Problem

**geg:** Graph  $G = (V, E)$

**ges:** *schöne* Zeichnung  $\Gamma$

## Graph-Layout-Problem

**geg:** Graph  $G = (V, E)$

**ges:** *schöne* Zeichnung  $\Gamma$

**Aber was heißt *schön*?**

→ definiere Kriterien für schöne Zeichnungen

## Graph-Layout-Problem

geg: Graph  $G = (V, E)$

ges: *schöne* Zeichnung  $\Gamma$

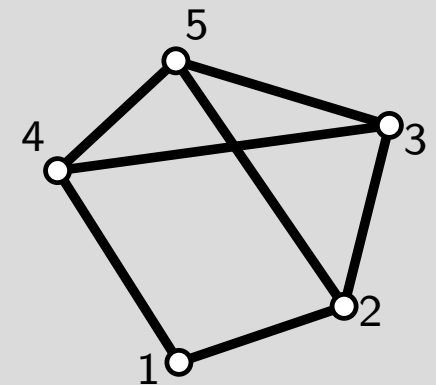
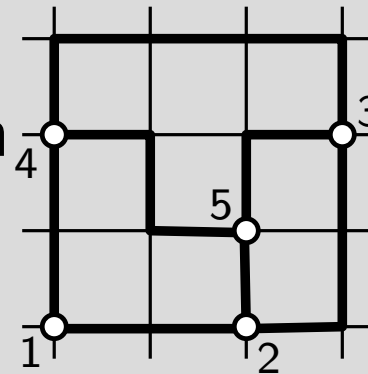
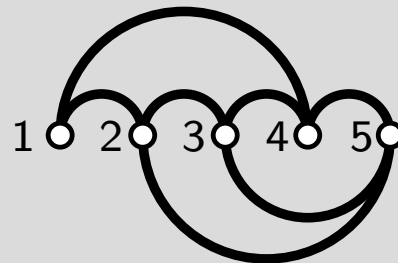
Aber was heißt *schön*?

→ definiere Kriterien für schöne Zeichnungen

### 1) Zeichenkonventionen

zwingende Layouteigenschaften, z.B.

- geradlinige Kanten
- eingeschränkte Kantenrichtungen
- Gitterzeichnungen
- kreuzungsfrei
- ...



## Graph-Layout-Problem

**geg:** Graph  $G = (V, E)$

**ges:** *schöne* Zeichnung  $\Gamma$

**Aber was heißt *schön*?**

→ definiere Kriterien für schöne Zeichnungen

### 1) Zeichenkonventionen

### 2) Ästhetikkriterien

Optimierungskriterien, z.B.

- Anzahl Kreuzungen/Knicke
- uniforme Kantenlängen
- Winkelauflösung
- ...



## Graph-Layout-Problem

**geg:** Graph  $G = (V, E)$

**ges:** *schöne* Zeichnung  $\Gamma$

**Aber was heißt *schön*?**

→ definiere Kriterien für schöne Zeichnungen

1) Zeichenkonventionen

2) Ästhetikkriterien

3) Lokale Nebenbedingungen

- eingeschränkte Positionen für Nachbarknoten
- Bedingungen für Knotengruppen
- ...

Gra

## Graph-Layout-Problem 2.0

geg

geg: Graph  $G = (V, E)$

ges

ges: Zeichnung  $\Gamma$ , die

- Zeichenkonventionen erfüllt
- Ästhetikkriterien optimiert
- lokale Nebenbedingungen erfüllt

1) Zeichenkonventionen

2) Ästhetikkriterien

3) Lokale Nebenbedingungen

- eingeschränkte Positionen für Nachbarknoten
- Bedingungen für Knotengruppen
- ...

Gra

## Graph-Layout-Problem 2.0

geg

geg: Graph  $G = (V, E)$

ges

ges: Zeichnung  $\Gamma$ , die

- Zeichenkonventionen erfüllt
- Ästhetikkriterien optimiert
- lokale Nebenbedingungen erfüllt

1) Zeichenkonventionen

2) Ästhetikkriterien

$G$  kann geometrisch oder kombinat.  
eingebetteter Graph sein

3) Lokale Nebenbedingungen

- eingeschränkte Positionen für Nachbarknoten
- Bedingungen für Knotengruppen
- ...

# Schematisierung

Hier bedeutet Schematisierung das Zeichnen von Graphen mit diskreten und oft uniformen

**Winkeleinschränkungen**

für die Kantenrichtungen/-steigungen.

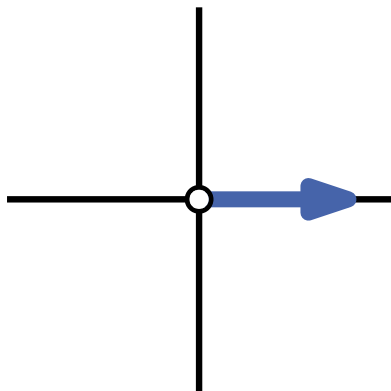
# Schematisierung

Hier bedeutet Schematisierung das Zeichnen von Graphen mit diskreten und oft uniformen

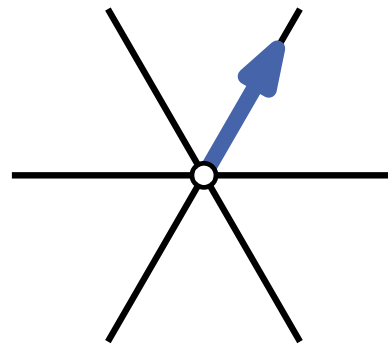
## Winkелеinschränkungen

für die Kantenrichtungen/-steigungen.

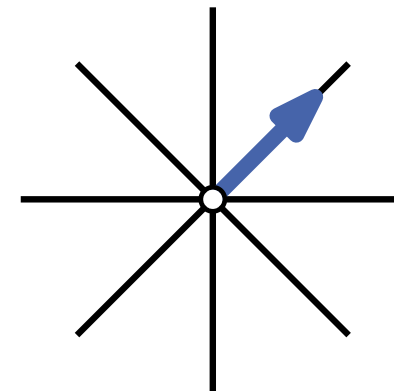
Beispiele:



rektilinear



hexilinear



oktilinear

...

# Schematisierung

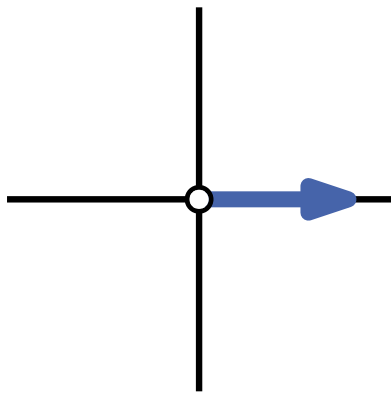
Hier bedeutet Schematisierung das Zeichnen von Graphen mit diskreten und oft uniformen

## Winkелеinschränkungen

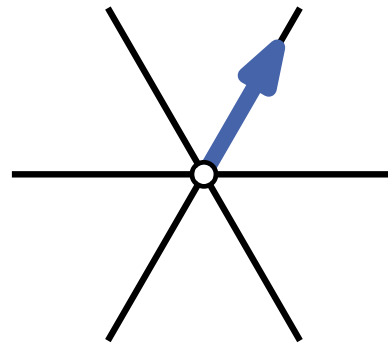
für die Kantenrichtungen/-steigungen.

Beispiele:

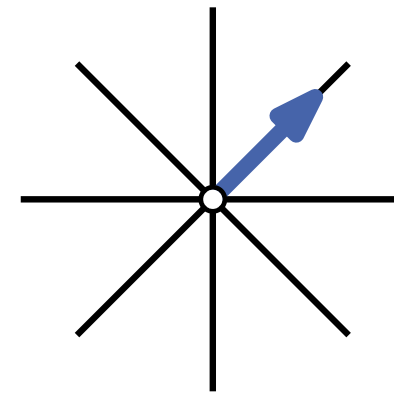
Winkелеinschränkungen meist als **Zeichenkonventionen** modelliert



rektilinear



hexilinear



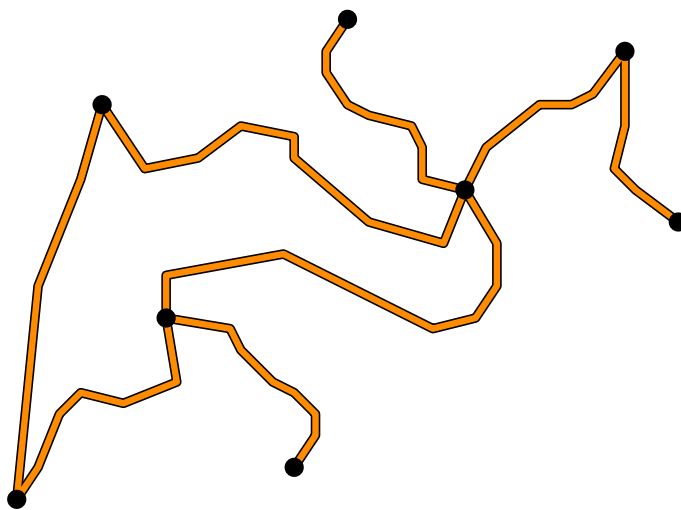
oktilinear

...

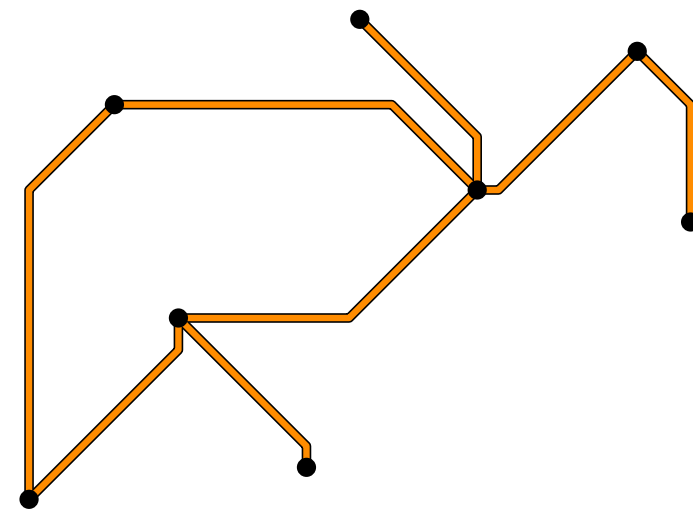
# Schematische Straßenkarten

**Geg:** Straßenkarte  $M = \{c_1, \dots, c_m\}$ , wobei jedes  $c_i$  einfacher Kantenzug ist und keine zwei  $c_i, c_j$  ( $i \neq j$ ) sich schneiden (außer an gemeinsamen Endknoten)

**Ges:** Topologisch äquivalente schematische Karte  $M' = \{c'_1, \dots, c'_m\}$  mit **gleichen Endpunkten** wie  $M$ , wobei jedes  $c'_i$  oktilinear ist und  $\leq 2$  Knicke hat  
→ verzerre Straßenform, aber nicht Kreuzungen und Orte



Eingabekarte  $M$

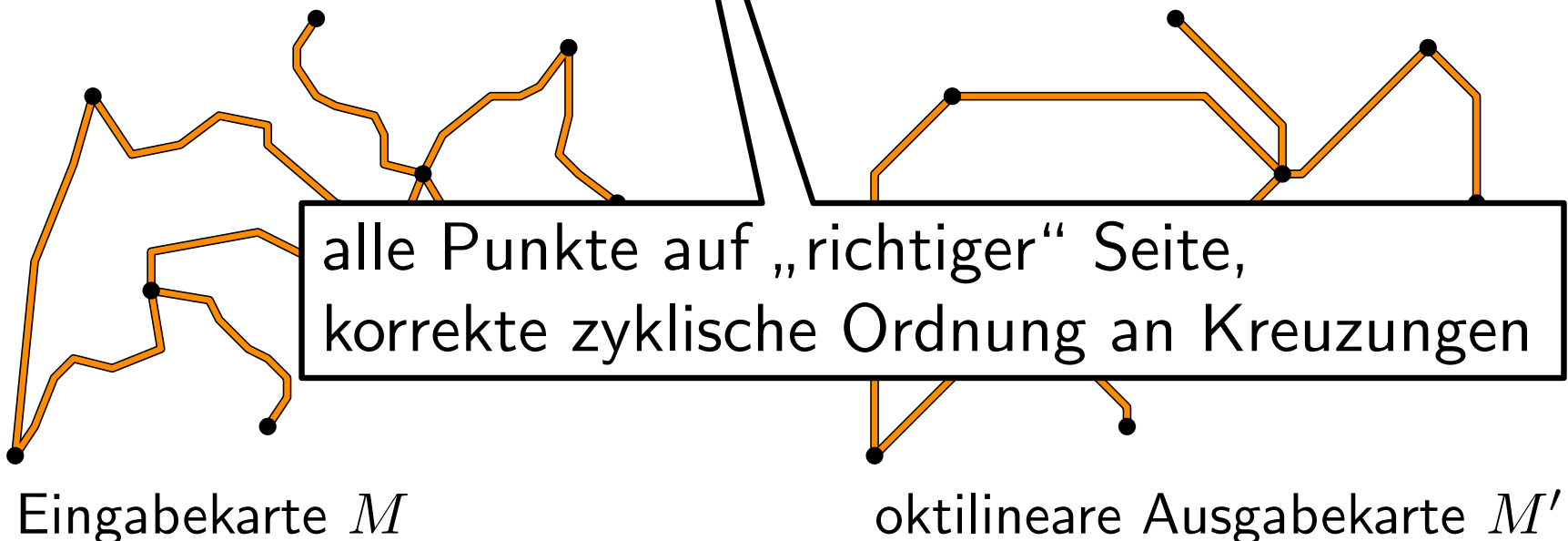


oktilineare Ausgabekarte  $M'$

# Schematische Straßenkarten

**Geg:** Straßenkarte  $M = \{c_1, \dots, c_m\}$ , wobei jedes  $c_i$  einfacher Kantenzug ist und keine zwei  $c_i, c_j$  ( $i \neq j$ ) sich schneiden (außer an gemeinsamen Endknoten)

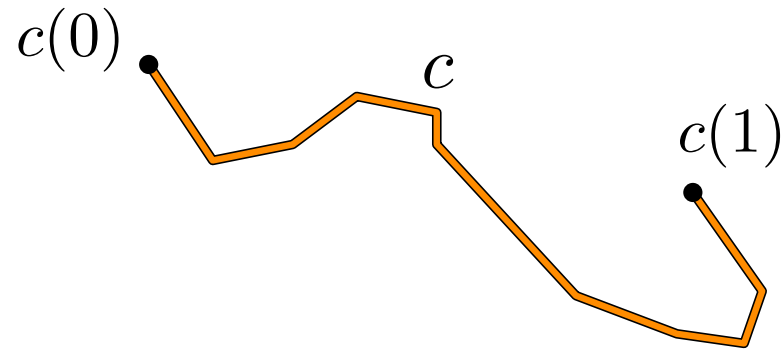
**Ges:** Topologisch äquivalente schematische Karte  $M' = \{c'_1, \dots, c'_m\}$  mit **gleichen Endpunkten** wie  $M$ , wobei jedes  $c'_i$  oktilinear ist und  $\leq 2$  Knicke hat  
→ verzerre Straßenform, aber nicht Kreuzungen und Orte





# Notation

Betrachte Kantenzug/Pfad  $c$  als Abbildung  $c : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  
wobei die Endpunkte jeweils  $c(0)$  und  $c(1)$  sind.

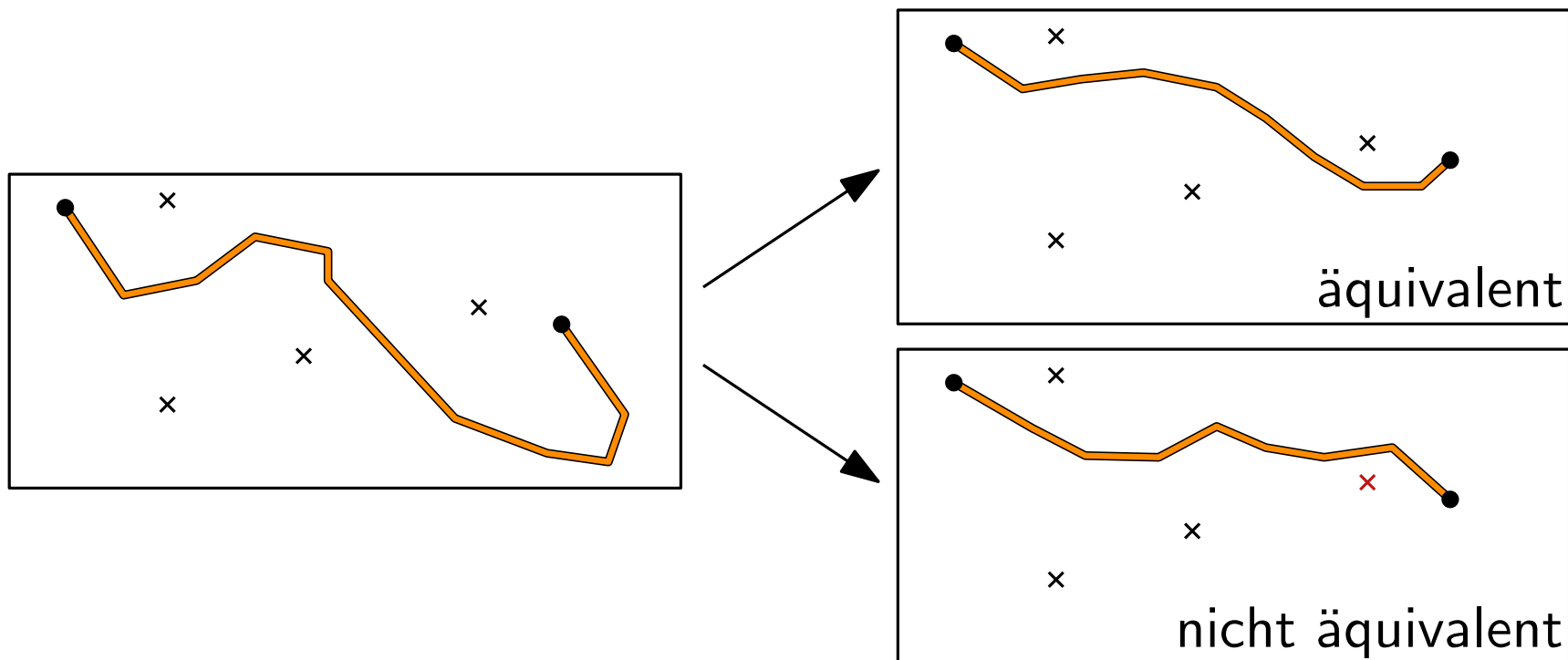


$P_M$ : Menge der Endpunkte von  $M$

# Äquivalente Karten

**Def:** Gegeben Menge von Hindernissen  $P$  sind zwei Pfade  $c, c'$  **äquivalent**, falls es eine stetige Abbildung  $F : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus P$  gibt, die  $c$  in  $c'$  transformiert

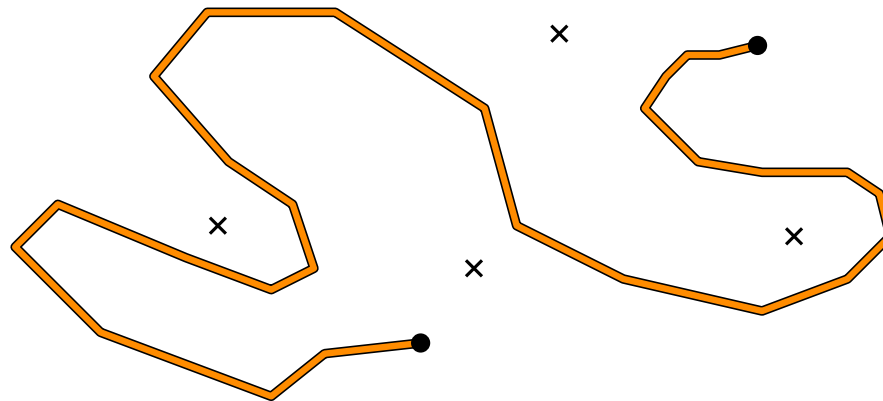
**Def:** Zwei Karten  $M$  und  $M'$  sind **äquivalent**, falls alle  $c_i \in M$  und  $c'_i \in M'$  äquivalent in  $(\mathbb{R}^2 \setminus P_m) \cup \{c_i(0), c_i(1)\}$  sind



# Vertikale Pfadordnung

**Def:** Für Pfad  $a$  und Punkt  $p$  liegt  $p$  **oberhalb/unterhalb** von  $a$ , falls für **jeden** zu  $a$  äquivalenten Pfad  $a'$  in  $\mathbb{R}^2 \setminus \{p\}$  der entsprechende vertikale Strahl von  $p$  Pfad  $a'$  schneidet.

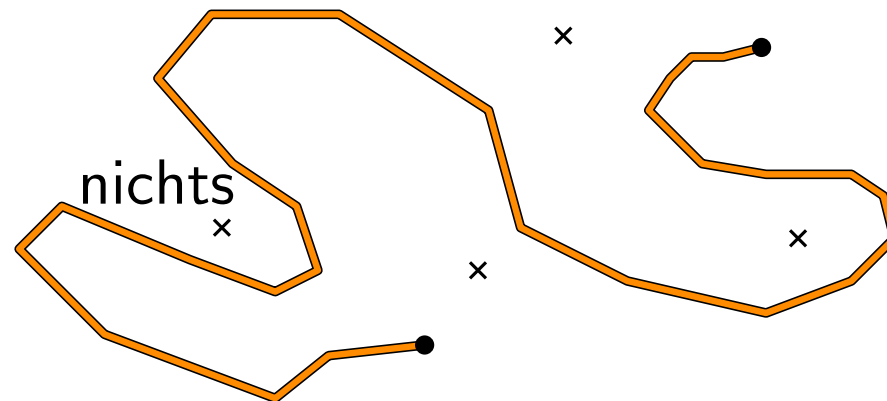
Die Ordnung zweier Pfade  $a, b$  ist definiert durch die Lage der Endpunkte des einen Pfades zum anderen Pfad.



# Vertikale Pfadordnung

**Def:** Für Pfad  $a$  und Punkt  $p$  liegt  $p$  **oberhalb/unterhalb** von  $a$ , falls für **jeden** zu  $a$  äquivalenten Pfad  $a'$  in  $\mathbb{R}^2 \setminus \{p\}$  der entsprechende vertikale Strahl von  $p$  Pfad  $a'$  schneidet.

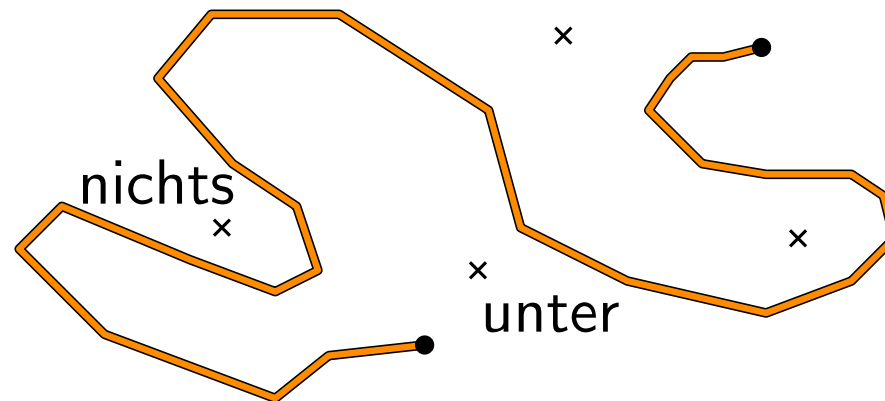
Die Ordnung zweier Pfade  $a, b$  ist definiert durch die Lage der Endpunkte des einen Pfades zum anderen Pfad.



# Vertikale Pfadordnung

**Def:** Für Pfad  $a$  und Punkt  $p$  liegt  $p$  **oberhalb/unterhalb** von  $a$ , falls für **jeden** zu  $a$  äquivalenten Pfad  $a'$  in  $\mathbb{R}^2 \setminus \{p\}$  der entsprechende vertikale Strahl von  $p$  Pfad  $a'$  schneidet.

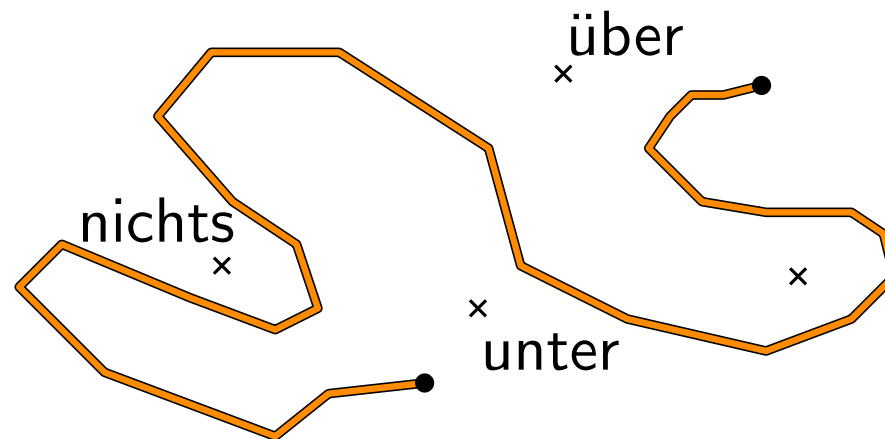
Die Ordnung zweier Pfade  $a, b$  ist definiert durch die Lage der Endpunkte des einen Pfades zum anderen Pfad.



# Vertikale Pfadordnung

**Def:** Für Pfad  $a$  und Punkt  $p$  liegt  $p$  **oberhalb/unterhalb** von  $a$ , falls für **jeden** zu  $a$  äquivalenten Pfad  $a'$  in  $\mathbb{R}^2 \setminus \{p\}$  der entsprechende vertikale Strahl von  $p$  Pfad  $a'$  schneidet.

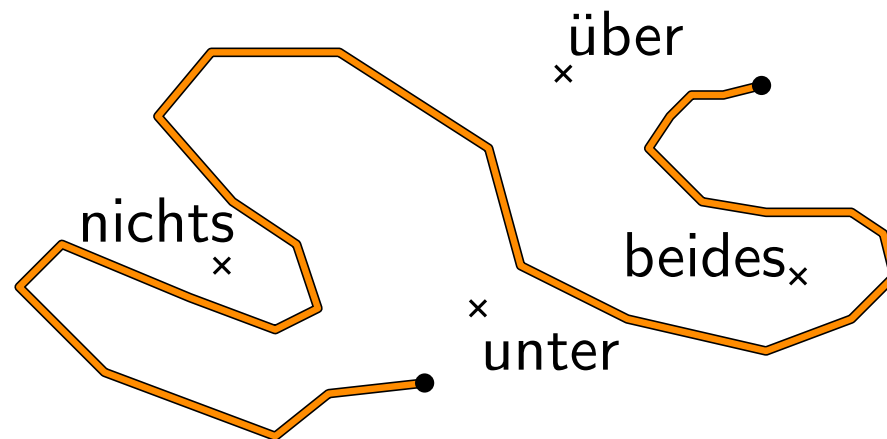
Die Ordnung zweier Pfade  $a, b$  ist definiert durch die Lage der Endpunkte des einen Pfades zum anderen Pfad.



# Vertikale Pfadordnung

**Def:** Für Pfad  $a$  und Punkt  $p$  liegt  $p$  **oberhalb/unterhalb** von  $a$ , falls für **jeden** zu  $a$  äquivalenten Pfad  $a'$  in  $\mathbb{R}^2 \setminus \{p\}$  der entsprechende vertikale Strahl von  $p$  Pfad  $a'$  schneidet.

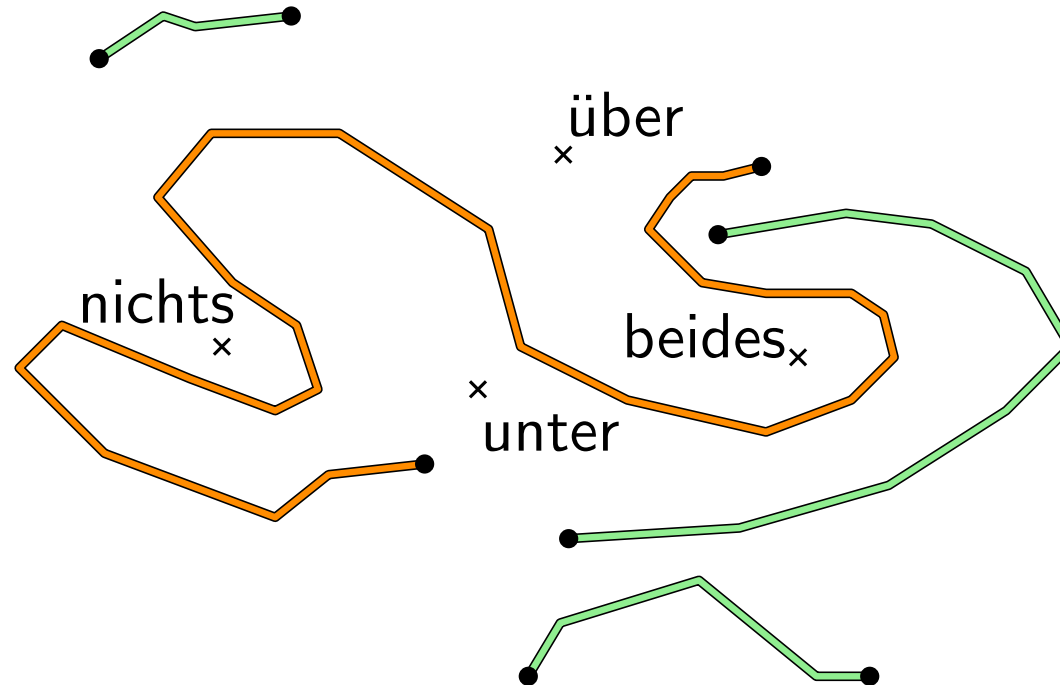
Die Ordnung zweier Pfade  $a, b$  ist definiert durch die Lage der Endpunkte des einen Pfades zum anderen Pfad.



# Vertikale Pfadordnung

**Def:** Für Pfad  $a$  und Punkt  $p$  liegt  $p$  **oberhalb/unterhalb** von  $a$ , falls für **jeden** zu  $a$  äquivalenten Pfad  $a'$  in  $\mathbb{R}^2 \setminus \{p\}$  der entsprechende vertikale Strahl von  $p$  Pfad  $a'$  schneidet.

Die Ordnung zweier Pfade  $a, b$  ist definiert durch die Lage der Endpunkte des einen Pfades zum anderen Pfad.

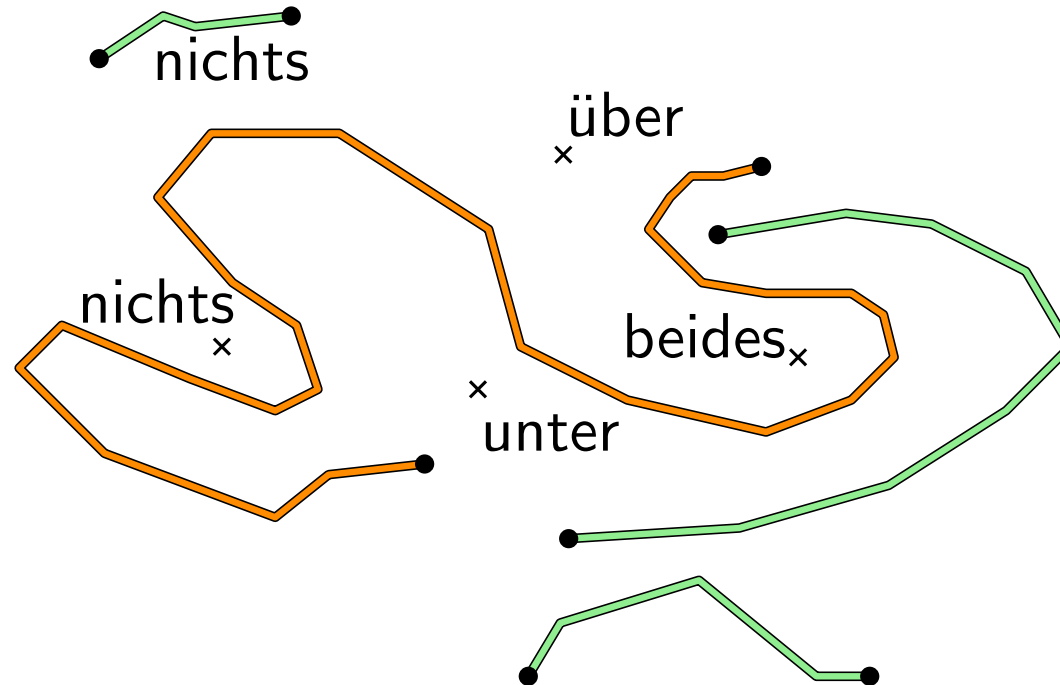




# Vertikale Pfadordnung

**Def:** Für Pfad  $a$  und Punkt  $p$  liegt  $p$  **oberhalb/unterhalb** von  $a$ , falls für **jeden** zu  $a$  äquivalenten Pfad  $a'$  in  $\mathbb{R}^2 \setminus \{p\}$  der entsprechende vertikale Strahl von  $p$  Pfad  $a'$  schneidet.

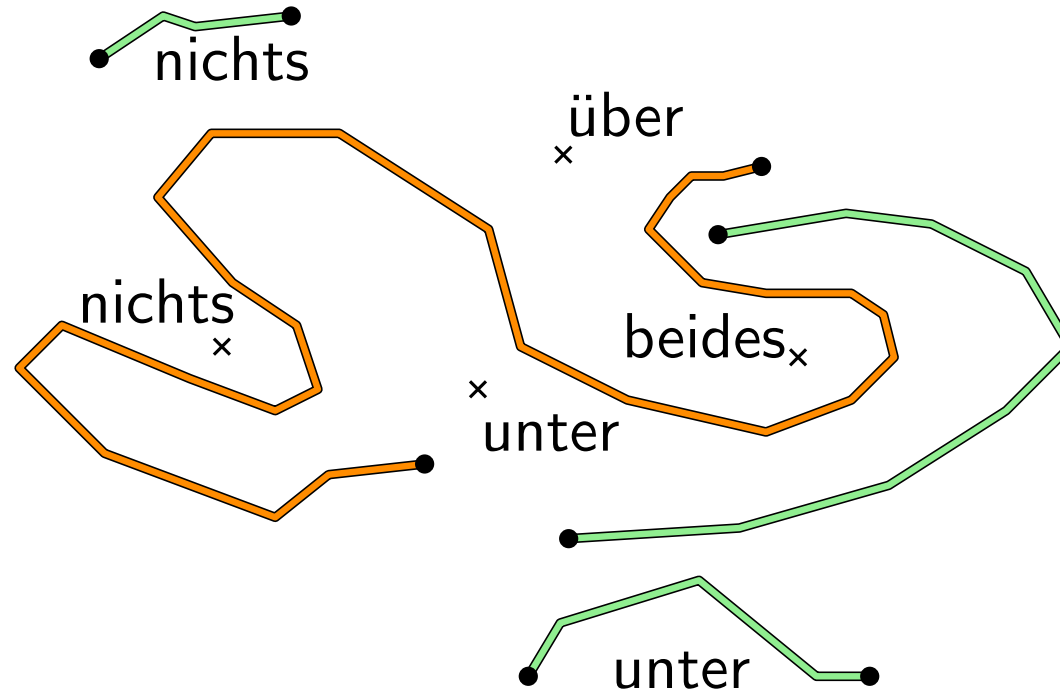
Die Ordnung zweier Pfade  $a, b$  ist definiert durch die Lage der Endpunkte des einen Pfades zum anderen Pfad.



# Vertikale Pfadordnung

**Def:** Für Pfad  $a$  und Punkt  $p$  liegt  $p$  **oberhalb/unterhalb** von  $a$ , falls für **jeden** zu  $a$  äquivalenten Pfad  $a'$  in  $\mathbb{R}^2 \setminus \{p\}$  der entsprechende vertikale Strahl von  $p$  Pfad  $a'$  schneidet.

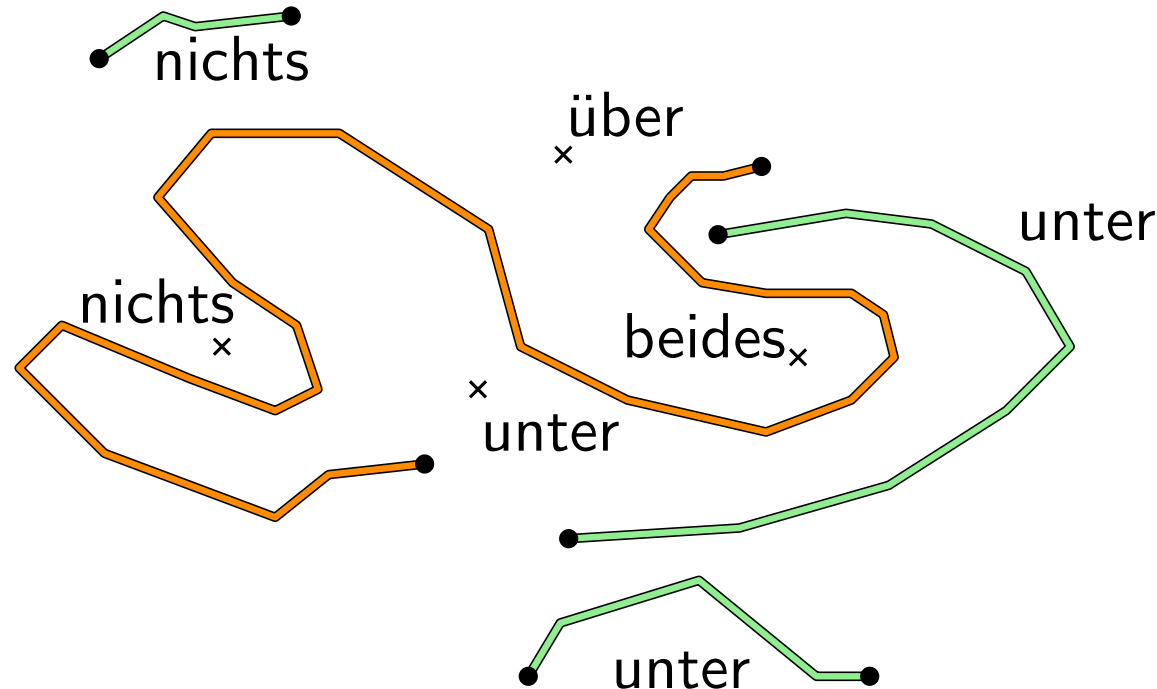
Die Ordnung zweier Pfade  $a, b$  ist definiert durch die Lage der Endpunkte des einen Pfades zum anderen Pfad.



# Vertikale Pfadordnung

**Def:** Für Pfad  $a$  und Punkt  $p$  liegt  $p$  **oberhalb/unterhalb** von  $a$ , falls für **jeden** zu  $a$  äquivalenten Pfad  $a'$  in  $\mathbb{R}^2 \setminus \{p\}$  der entsprechende vertikale Strahl von  $p$  Pfad  $a'$  schneidet.

Die Ordnung zweier Pfade  $a, b$  ist definiert durch die Lage der Endpunkte des einen Pfades zum anderen Pfad.

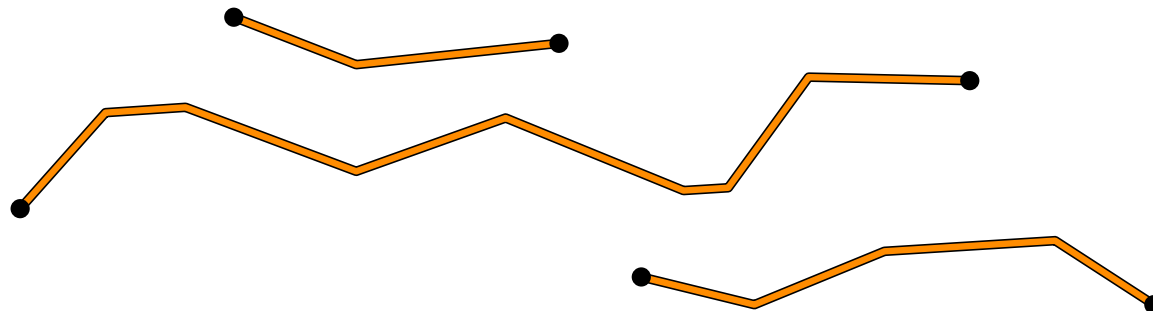


# Vertikale Pfadordnung

**Def:** Für Pfad  $a$  und Punkt  $p$  liegt  $p$  **oberhalb/unterhalb** von  $a$ , falls für **jeden** zu  $a$  äquivalenten Pfad  $a'$  in  $\mathbb{R}^2 \setminus \{p\}$  der entsprechende vertikale Strahl von  $p$  Pfad  $a'$  schneidet.

Die Ordnung zweier Pfade  $a, b$  ist definiert durch die Lage der Endpunkte des einen Pfades zum anderen Pfad.

**Bem:** Für  $x$ -monotone Pfade ist die Definition äquivalent zur Definition  $a$  **oberhalb**  $b$  ( $a \succ b$ ) gdw. es Punkte  $(x, y_a) \in a$  und  $(x, y_b) \in b$  gibt mit  $y_a > y_b$ .



# Ordnung in monotonen Karten

Karte  $M$  ist **monoton**, falls jeder Pfad in  $M$   $x$ -monoton ist.

**Lemma 1:** Für monotone Karte  $M$  ist die Vertikalordnung  $\succ$  azyklisch; eine Totalordnung, die  $\succ$  erweitert, kann in  $O(n \log n)$  Zeit bestimmt werden, wobei  $n$  die Knotenzahl in  $M$  ist.

**Beweis:** Übungsblatt

# Ordnung in monotonen Karten

Karte  $M$  ist **monoton**, falls jeder Pfad in  $M$   $x$ -monoton ist.

**Lemma 1:** Für monotone Karte  $M$  ist die Vertikalordnung  $\succ$  azyklisch; eine Totalordnung, die  $\succ$  erweitert, kann in  $O(n \log n)$  Zeit bestimmt werden, wobei  $n$  die Knotenzahl in  $M$  ist.

**Beweis:** Übungsblatt

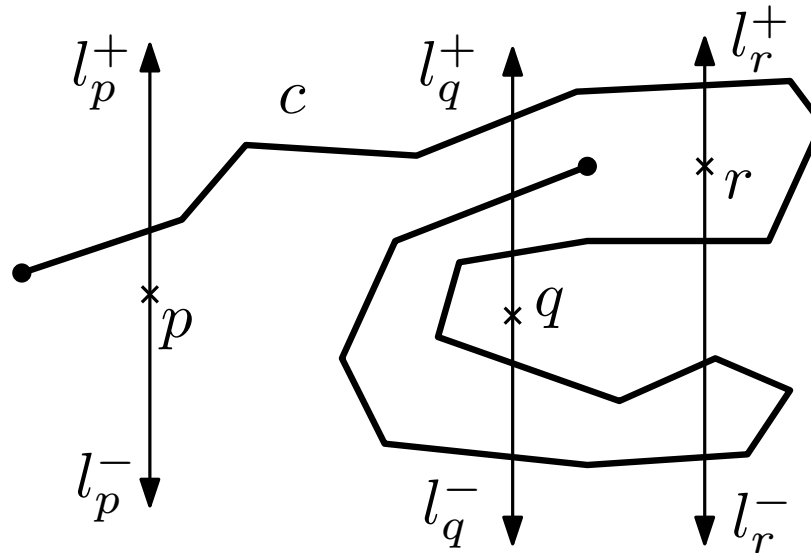
**Lemma 2:** Zwei monotone Karten  $M$  und  $M'$  sind äquivalent gdw. sie die gleiche Vertikalordnung  $\succ$  definieren.

**Beweis:** Tafel



# Kanonische Folgen

Sei  $P$  Punktmenge und  $c$  ein Pfad.

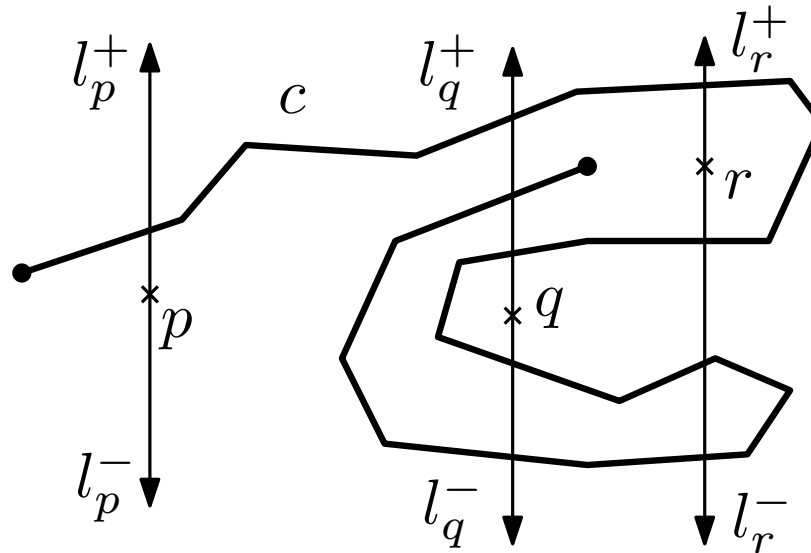


Definiere vertikale Strahlen  $l_p^+$  und  $l_p^-$  für jeden Punkt  $p$  in  $P$ .



# Kanonische Folgen

Sei  $P$  Punktmenge und  $c$  ein Pfad.



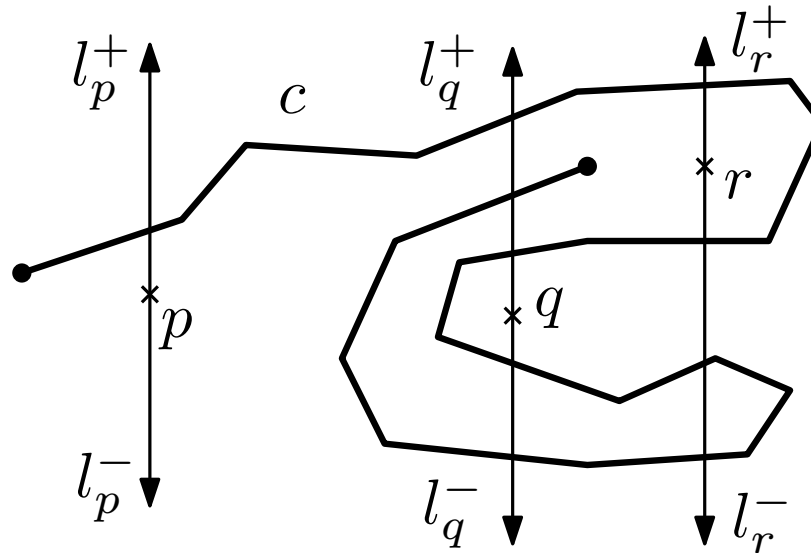
Definiere vertikale Strahlen  $l_p^+$  und  $l_p^-$  für jeden Punkt  $p$  in  $P$ .

Betrachte Folge von gekreuzten Strahlen beim Laufen entlang von  $c$ .

$$l_p^+, l_q^+, l_r^+, l_r^-, l_q^+, l_q^-, l_r^-, l_r^-, l_q^-, l_q^+$$

# Kanonische Folgen

Sei  $P$  Punktmenge und  $c$  ein Pfad.



Definiere vertikale Strahlen  $l_p^+$  und  $l_p^-$  für jeden Punkt  $p$  in  $P$ .

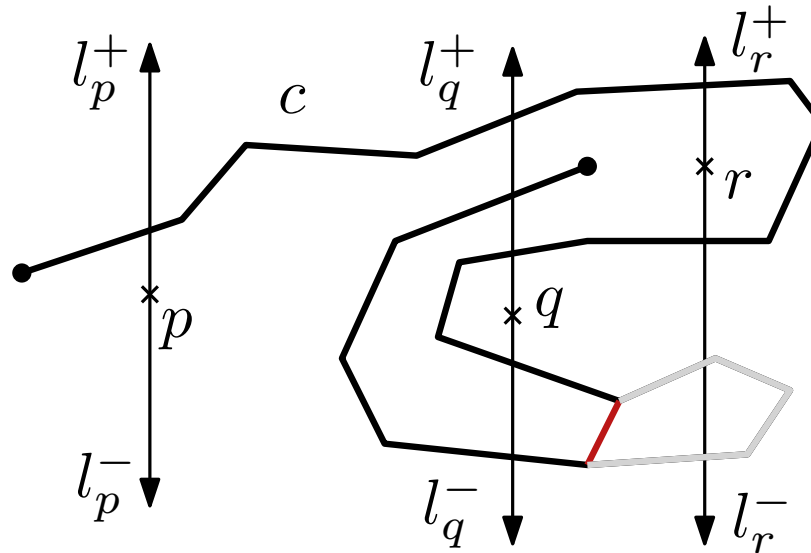
Betrachte Folge von gekreuzten Strahlen beim Laufen entlang von  $c$ .

$$l_p^+, l_q^+, l_r^+, l_r^-, l_q^+, l_q^-, l_r^-, l_r^-, l_q^-, l_q^+$$

Lösche benachbarte Paare gleicher Strahlen um die **kanonische Folge** von  $c$  zu erhalten.

# Kanonische Folgen

Sei  $P$  Punktmenge und  $c$  ein Pfad.



Definiere vertikale Strahlen  $l_p^+$  und  $l_p^-$  für jeden Punkt  $p$  in  $P$ .

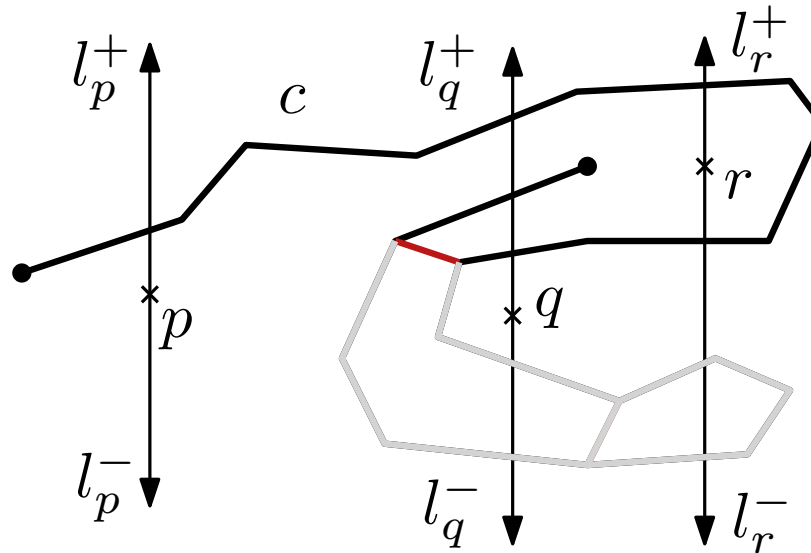
Betrachte Folge von gekreuzten Strahlen beim Laufen entlang von  $c$ .

$$l_p^+, l_q^+, l_r^+, l_r^-, l_q^+, l_q^-, \cancel{l_r^-}, \cancel{l_r^-}, l_q^-, l_q^+$$

Lösche benachbarte Paare gleicher Strahlen um die **kanonische Folge** von  $c$  zu erhalten.

# Kanonische Folgen

Sei  $P$  Punktmenge und  $c$  ein Pfad.



Definiere vertikale Strahlen  $l_p^+$  und  $l_p^-$  für jeden Punkt  $p$  in  $P$ .

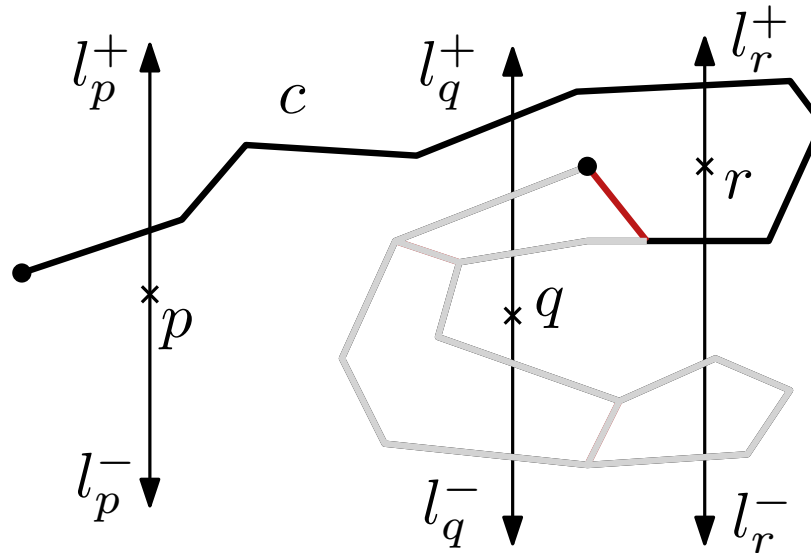
Betrachte Folge von gekreuzten Strahlen beim Laufen entlang von  $c$ .

$$l_p^+, l_q^+, l_r^+, l_r^-, l_q^+, \cancel{l_q^-}, \cancel{l_r^-}, \cancel{l_r^-}, \cancel{l_q^-}, l_q^+$$

Lösche benachbarte Paare gleicher Strahlen um die **kanonische Folge** von  $c$  zu erhalten.

# Kanonische Folgen

Sei  $P$  Punktmenge und  $c$  ein Pfad.



Definiere vertikale Strahlen  $l_p^+$  und  $l_p^-$  für jeden Punkt  $p$  in  $P$ .

Betrachte Folge von gekreuzten Strahlen beim Laufen entlang von  $c$ .

$$l_p^+, l_q^+, l_r^+, l_r^-, \cancel{l_q^+}, \cancel{l_q^-}, \cancel{l_r^-}, \cancel{l_r^+}, \cancel{l_q^-}, \cancel{l_q^+}$$

Lösche benachbarte Paare gleicher Strahlen um die **kanonische Folge** von  $c$  zu erhalten.

# Kanonische Folgen

Sei  $P$  Punktmenge und  $c$  ein Pfad.

**Lemma 3:** [Cabello, Liu, Mantler, Snoeyink '04]

Zwei Pfade  $c$  und  $c'$  mit den gleichen Endpunkten sind äquivalent bzgl.  $P$  gdw. sie die gleiche kanonische Folge besitzen.

Definiere vertikale Strahlen  $l_p^+$  und  $l_p^-$  für jeden Punkt  $p$  in  $P$ .

Betrachte Folge von gekreuzten Strahlen beim Laufen entlang von  $c$ .

$$l_p^+, l_q^+, l_r^+, l_r^-, \cancel{l_q^+}, \cancel{l_q^-}, \cancel{l_r^-}, \cancel{l_r^+}, \cancel{l_q^-}, \cancel{l_q^+}$$

Lösche benachbarte Paare gleicher Strahlen um die **kanonische Folge** von  $c$  zu erhalten.

# Skizze des Schematisierungs-Algorithmus

[Cabello, de Berg, van Kreveld '05]

**Input:** Karte  $M$

**Output:** schematisierte äquivalente Karte  $M'$  (falls existiert)

- 1 zerlege nicht-monotone Pfade in monotone Teile
- 2 erstelle rektifizierte Karte  $R$  mit achsenparallelen Pfaden
- 3 wandle  $R$  in kanonische Form  $R_c$  um
- 4 berechne Totalordnung  $>$  der Pfade aus  $R_c$
- 5 konstruiere inkrementell schematische Karte  $M'$  durch höchstmögliches Hinzufügen von Pfaden entsprechend  $>$





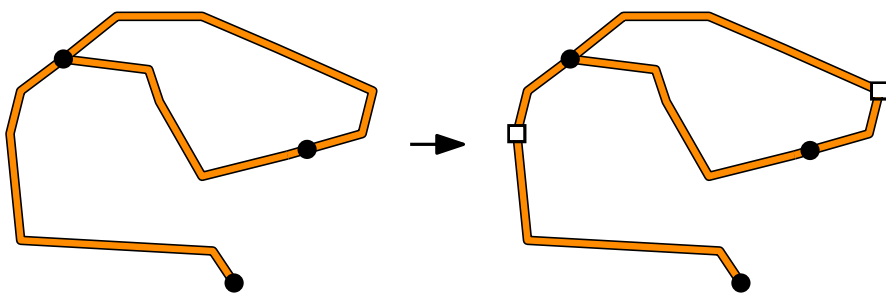
# Skizze des Schematisierungs-Algorithmus

[Cabello, de Berg, van Kreveld '05]

**Input:** Karte  $M$

**Output:** schematisierte äquivalente Karte  $M'$  (falls existiert)

- 1 zerlege nicht-monotone Pfade in monotone Teile
- 2 erstelle rektifizierte Karte  $R$  mit achsenparallelen Pfaden
- 3 wandle  $R$  in kanonische Form  $R_c$  um
- 4 berechne Totalordnung  $\succ$  der Pfade aus  $R_c$
- 5 konstruiere inkrementell schematische Karte  $M'$  durch höchstmögliches Hinzufügen von Pfaden entsprechend  $\succ$



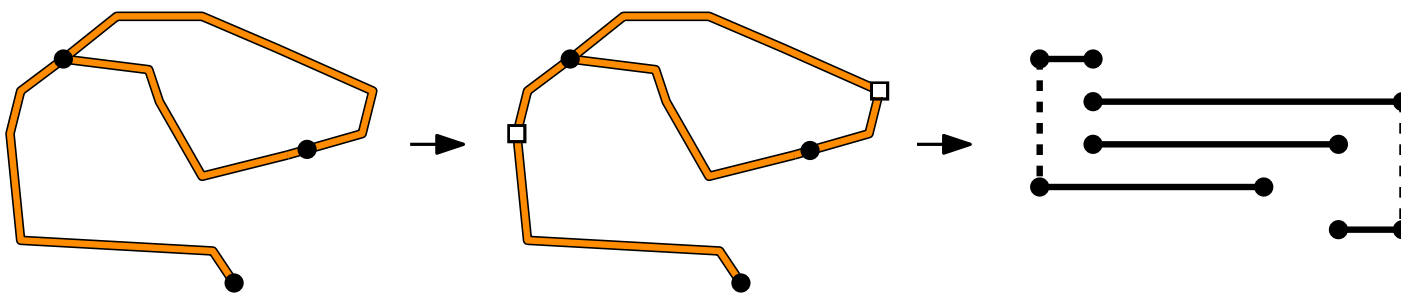
# Skizze des Schematisierungs-Algorithmus

[Cabello, de Berg, van Kreveld '05]

**Input:** Karte  $M$

**Output:** schematisierte äquivalente Karte  $M'$  (falls existiert)

- 1 zerlege nicht-monotone Pfade in monotone Teile
- 2 erstelle rektifizierte Karte  $R$  mit achsenparallelen Pfaden
- 3 wandle  $R$  in kanonische Form  $R_c$  um
- 4 berechne Totalordnung  $\succ$  der Pfade aus  $R_c$
- 5 konstruiere inkrementell schematische Karte  $M'$  durch höchstmögliches Hinzufügen von Pfaden entsprechend  $\succ$



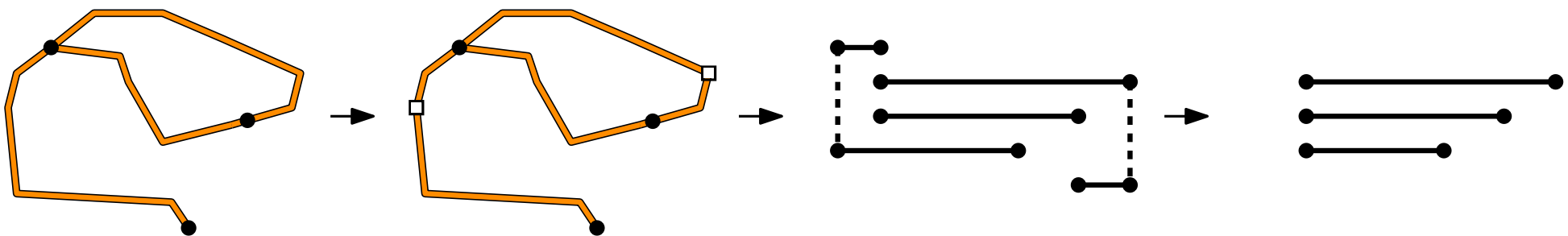
# Skizze des Schematisierungs-Algorithmus

[Cabello, de Berg, van Kreveld '05]

**Input:** Karte  $M$

**Output:** schematisierte äquivalente Karte  $M'$  (falls existiert)

- 1 zerlege nicht-monotone Pfade in monotone Teile
- 2 erstelle rektifizierte Karte  $R$  mit achsenparallelen Pfaden
- 3 wandle  $R$  in kanonische Form  $R_c$  um
- 4 berechne Totalordnung  $\succ$  der Pfade aus  $R_c$
- 5 konstruiere inkrementell schematische Karte  $M'$  durch höchstmögliches Hinzufügen von Pfaden entsprechend  $\succ$



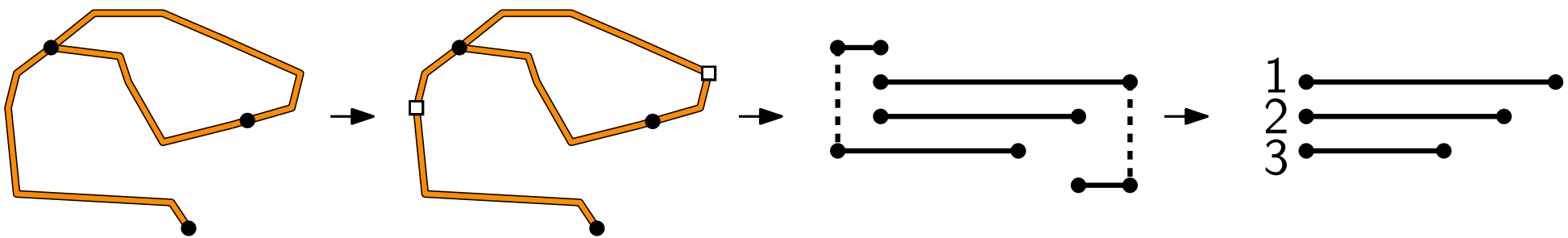
# Skizze des Schematisierungs-Algorithmus

[Cabello, de Berg, van Kreveld '05]

**Input:** Karte  $M$

**Output:** schematisierte äquivalente Karte  $M'$  (falls existiert)

- 1 zerlege nicht-monotone Pfade in monotone Teile
- 2 erstelle rektifizierte Karte  $R$  mit achsenparallelen Pfaden
- 3 wandle  $R$  in kanonische Form  $R_c$  um
- 4 berechne Totalordnung  $\succ$  der Pfade aus  $R_c$
- 5 konstruiere inkrementell schematische Karte  $M'$  durch höchstmögliches Hinzufügen von Pfaden entsprechend  $\succ$



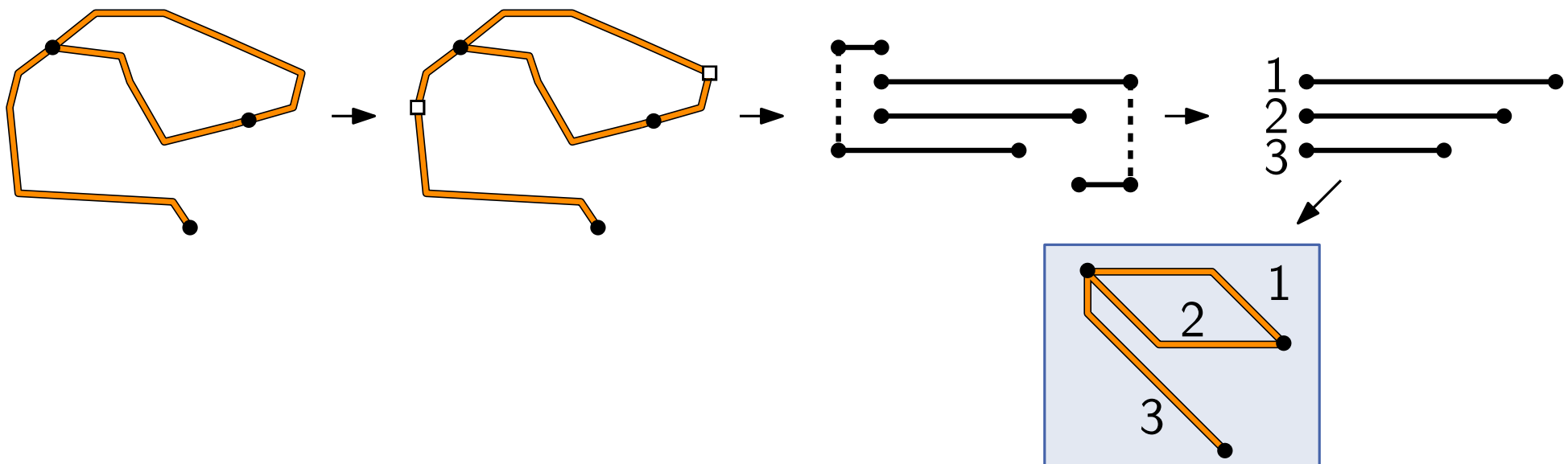
# Skizze des Schematisierungs-Algorithmus

[Cabello, de Berg, van Kreveld '05]

**Input:** Karte  $M$

**Output:** schematisierte äquivalente Karte  $M'$  (falls existiert)

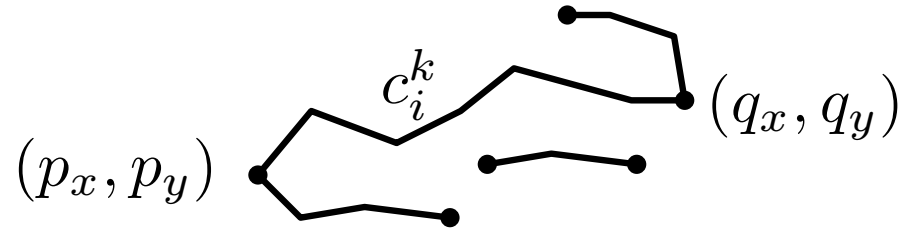
- 1 zerlege nicht-monotone Pfade in monotone Teile
- 2 erstelle rektifizierte Karte  $R$  mit achsenparallelen Pfaden
- 3 wandle  $R$  in kanonische Form  $R_c$  um
- 4 berechne Totalordnung  $\succ$  der Pfade aus  $R_c$
- 5 konstruiere inkrementell schematische Karte  $M'$  durch höchstmögliches Hinzufügen von Pfaden entsprechend  $\succ$



# Rektifizierte Karte

Nach dem Zerlegen von  $M$  in monotone Teilpfade ergibt Lemma 1 eine Totalordnung der Teilpfade in  $O(n \log n)$  Zeit.

Sei  $c_i^k$  ein monotoner Teilpfad von  $c_i$  mit linkem Endpunkt  $(p_x, p_y)$  und rechtem Endpunkt  $(q_x, q_y)$ .

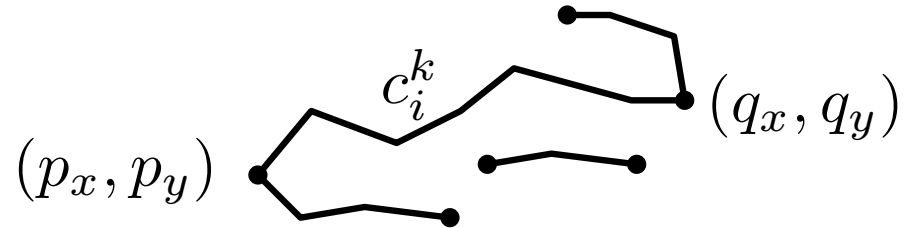


**Lemma 1:** Für monotone Karte  $M$  ist die Vertikalordnung  $\succ$  azyklisch; eine Totalordnung, die  $\succ$  erweitert, kann in  $O(n \log n)$  Zeit bestimmt werden, wobei  $n$  die Knotenzahl in  $M$  ist.

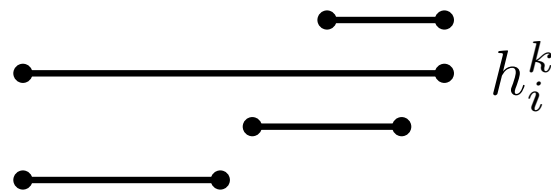
# Rektifizierte Karte

Nach dem Zerlegen von  $M$  in monotone Teilpfade ergibt Lemma 1 eine Totalordnung der Teilpfade in  $O(n \log n)$  Zeit.

Sei  $c_i^k$  ein monotoner Teilpfad von  $c_i$  mit linkem Endpunkt  $(p_x, p_y)$  und rechtem Endpunkt  $(q_x, q_y)$ .



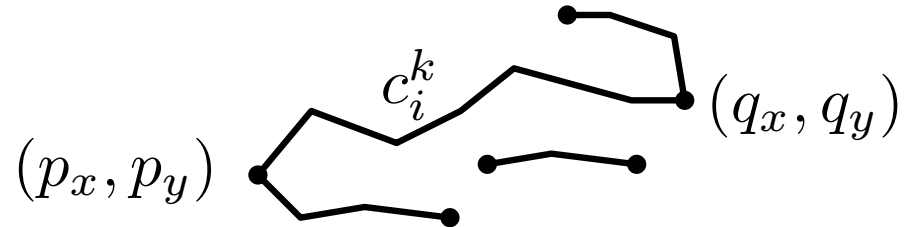
Erstelle horizontale Strecke  $h_i^k = [p_x, q_x] \times r_i^k$ , wobei  $r_i^k$  der Rang von  $c_i^k$  in der Totalordnung ist.



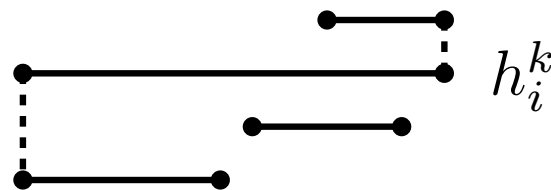
# Rektifizierte Karte

Nach dem Zerlegen von  $M$  in monotone Teilpfade ergibt Lemma 1 eine Totalordnung der Teilpfade in  $O(n \log n)$  Zeit.

Sei  $c_i^k$  ein monotoner Teilpfad von  $c_i$  mit linkem Endpunkt  $(p_x, p_y)$  und rechtem Endpunkt  $(q_x, q_y)$ .



Erstelle horizontale Strecke  $h_i^k = [p_x, q_x] \times r_i^k$ , wobei  $r_i^k$  der Rang von  $c_i^k$  in der Totalordnung ist.



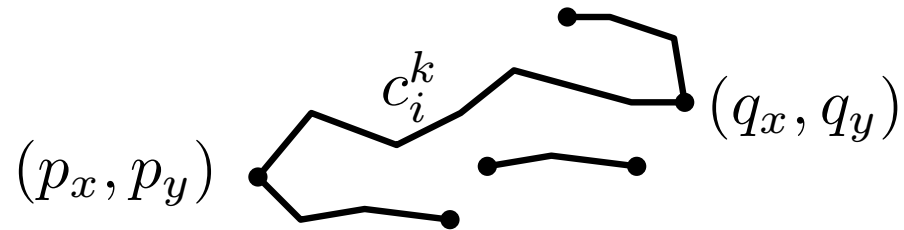
Verknüpfe horizontale Strecken des gleichen Pfades  $c_i$  vertikal zu einem Pfad  $c'_i$ . Das ergibt **rektifizierte Karte**  $R$ .



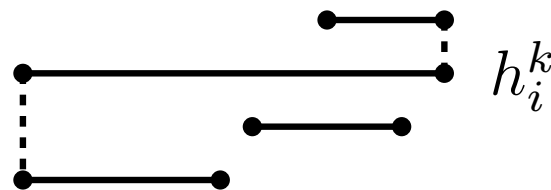
N  
L  
S  
( $p_x, p_y$ )

**Lemma 4:**  
 $R$  ist eine Karte, die die gleiche vertikale Pfadordnung wie  $M$  hat. Ihre Komplexität ist linear in der von  $M$  und sie kann in  $O(n \log n)$  Zeit erstellt werden.

( $q_x, q_y$ )



Erstelle horizontale Strecke  $h_i^k = [p_x, q_x] \times r_i^k$ , wobei  $r_i^k$  der Rang von  $c_i^k$  in der Totalordnung ist.



Verknüpfe horizontale Strecken des gleichen Pfades  $c_i$  vertikal zu einem Pfad  $c'_i$ . Das ergibt **rektifizierte Karte**  $R$ .

# Kanonische rektifizierte Karte

Die rektifizierte Karte  $R$  kann in  $O(n \log n)$  Zeit in ihre **kanonische Rektifizierung** überführt werden.

[Cabello, Liu, Mantler, Snoeyink '04]

Jeder Pfad in der kanonischen Rektifizierung  $R'$  ist äquivalent zu einem Pfad in  $R$  und hat die minimale Anzahl  $x$ -monotoner Teilstücke.

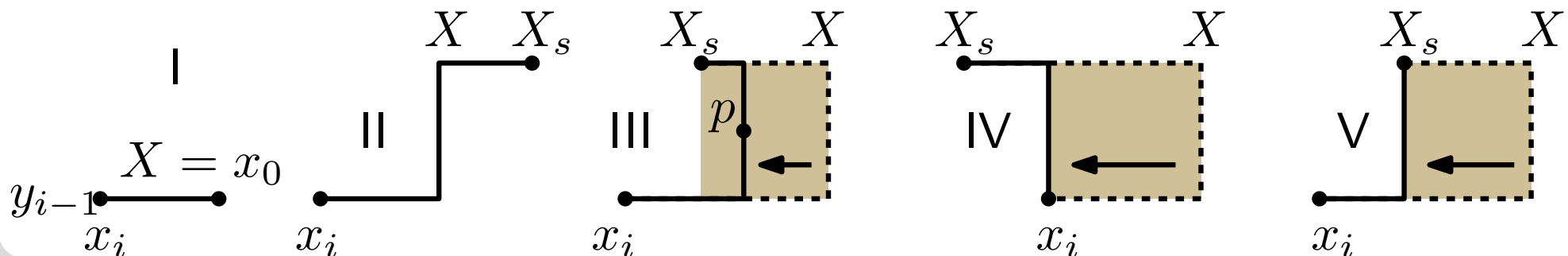
# Kanonische rektifizierte Karte

Die rektifizierte Karte  $R$  kann in  $O(n \log n)$  Zeit in ihre **kanonische Rektifizierung** überführt werden.

[Cabello, Liu, Mantler, Snoeyink '04]

Jeder Pfad in der kanonischen Rektifizierung  $R'$  ist äquivalent zu einem Pfad in  $R$  und hat die minimale Anzahl  $x$ -monotoner Teilstücke.

- Idee:**
- Pfad  $c_i$  als Liste  $x_0, y_0, x_1, y_1, \dots, y_{n-1}, x_n$
  - für  $i = 1, \dots, n$  erstelle kanonischen rektifizierten Pfad von  $(x_0, y_0)$  bis  $(x_i, y_{i-1})$  auf Stack  $S$
  - fünf Fälle für  $(y_{i-1}, x_i)$  und  $\text{top3}(S) = X, Y_s, X_s$



# Äquivalente monotone Karte

**Satz 1:** Für eine Karte  $M$  mit  $n$  Knoten, kann die Existenz einer äquivalenten monotonen Karte in  $O(n \log n)$  Zeit entschieden werden.

**Beweis:** (Skizze)

nutze range query Datenstruktur

- kanonische Rektifizierung  $N$  berechnen:  $O(n \log n)$  Zeit

# Äquivalente monotone Karte

**Satz 1:** Für eine Karte  $M$  mit  $n$  Knoten, kann die Existenz einer äquivalenten monotonen Karte in  $O(n \log n)$  Zeit entschieden werden.

**Beweis:** (Skizze)

- kanonische Rektifizierung  $N$  berechnen:  $O(n \log n)$  Zeit
- kanonische Folge eines Pfads  $c$  in  $M$  und seiner Rektifizierung  $c'$  in  $N$  (mehrfache Vorkommen eines Punkts zählen einfach) sind identisch

# Äquivalente monotone Karte

**Satz 1:** Für eine Karte  $M$  mit  $n$  Knoten, kann die Existenz einer äquivalenten monotonen Karte in  $O(n \log n)$  Zeit entschieden werden.

**Beweis:** (Skizze)

- kanonische Rektifizierung  $N$  berechnen:  $O(n \log n)$  Zeit
- kanonische Folge eines Pfads  $c$  in  $M$  und seiner Rektifizierung  $c'$  in  $N$  (mehrfache Vorkommen eines Punkts zählen einfach) sind identisch

**Beh:**  $N$  monoton  $\Leftrightarrow M$  hat äquivalente monotone Karte

# Äquivalente monotone Karte

**Satz 1:** Für eine Karte  $M$  mit  $n$  Knoten, kann die Existenz einer äquivalenten monotonen Karte in  $O(n \log n)$  Zeit entschieden werden.

**Beweis:** (Skizze)

- kanonische Rektifizierung  $N$  berechnen:  $O(n \log n)$  Zeit
- kanonische Folge eines Pfads  $c$  in  $M$  und seiner Rektifizierung  $c'$  in  $N$  (mehrfache Vorkommen eines Punkts zählen einfach) sind identisch

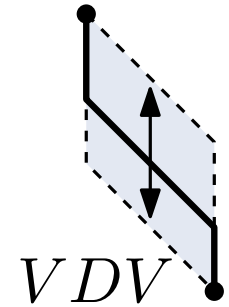
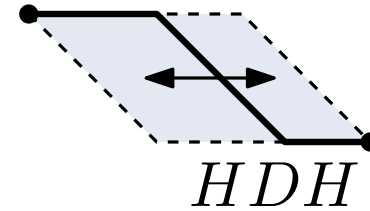
**Beh:**  $N$  monoton  $\Leftrightarrow M$  hat äquivalente monotone Karte

**Korollar 1:** Wenn eine Karte  $M$  eine äquivalente monotone Karte besitzt, kann eine passende Totalordnung der Pfade in  $O(n \log n)$  Zeit berechnet werden.

Folgt aus Satz 1 und Lemma 1.

# Platzieren von Pfaden

Definiere Typen zulässiger Pfade, z.B.  $\{HDH, VDV\}$

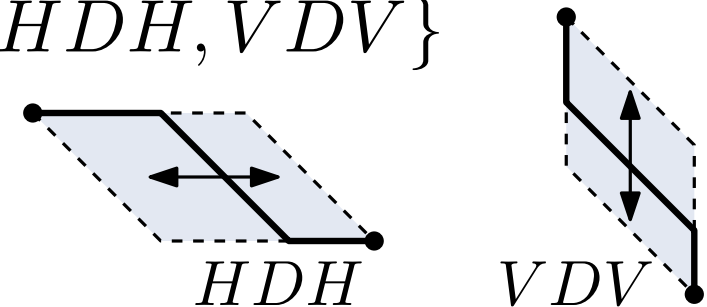




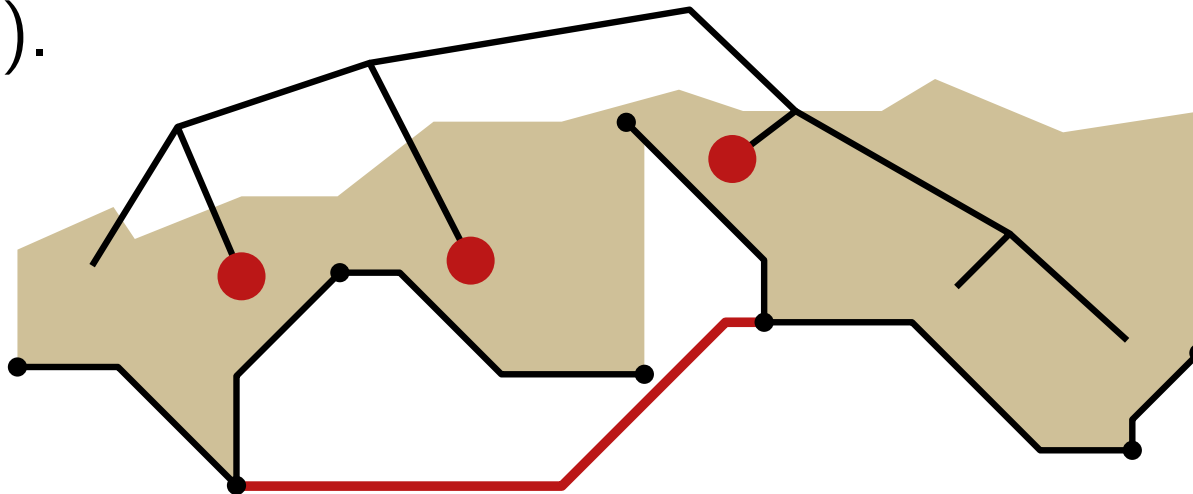
# Platzieren von Pfaden

Definiere Typen zulässiger Pfade, z.B.  $\{HDH, VDV\}$

Füge Pfade von  $M$  als  $HDH$ - oder  $VDV$ -Pfade nach der Totalordnung der kanonischen Rektifizierung ein.



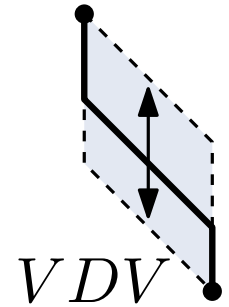
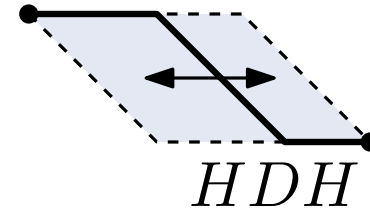
Verwalte lower envelope der Pfade als binären Suchbaum und platziere jeden neuen Pfad höchstmöglich (maximaler Platz für den Rest).



# Platzieren von Pfaden

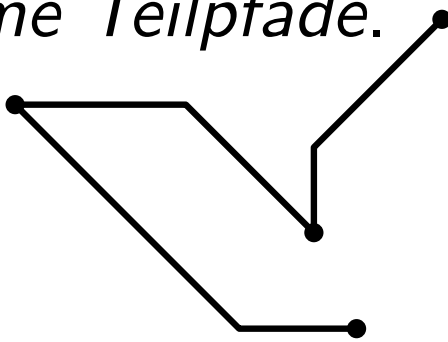
Definiere Typen zulässiger Pfade, z.B.  $\{HDH, VDV\}$

Füge Pfade von  $M$  als  $HDH$ - oder  $VDV$ -Pfade nach der Totalordnung der kanonischen Rektifizierung ein.

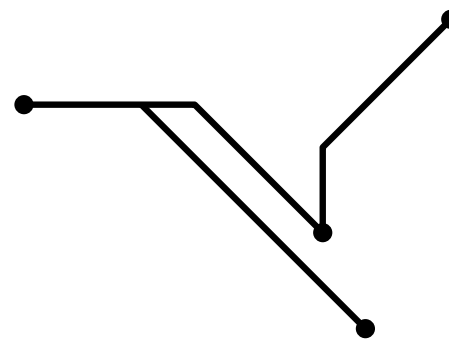


Verwalte lower envelope der Pfade als binären Suchbaum und platziere jeden neuen Pfad höchstmöglich (maximaler Platz für den Rest).

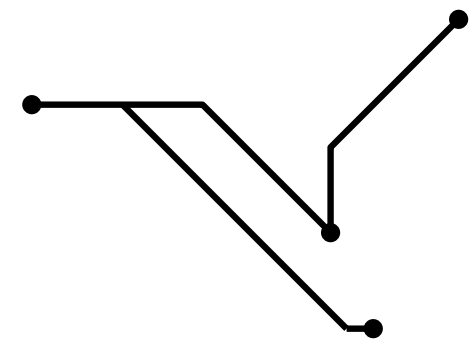
Optional: vertikaler Mindestabstand, erlaube/verbiete *gemeinsame Teilpfade*.



keine gemeinsamen Teilpfade

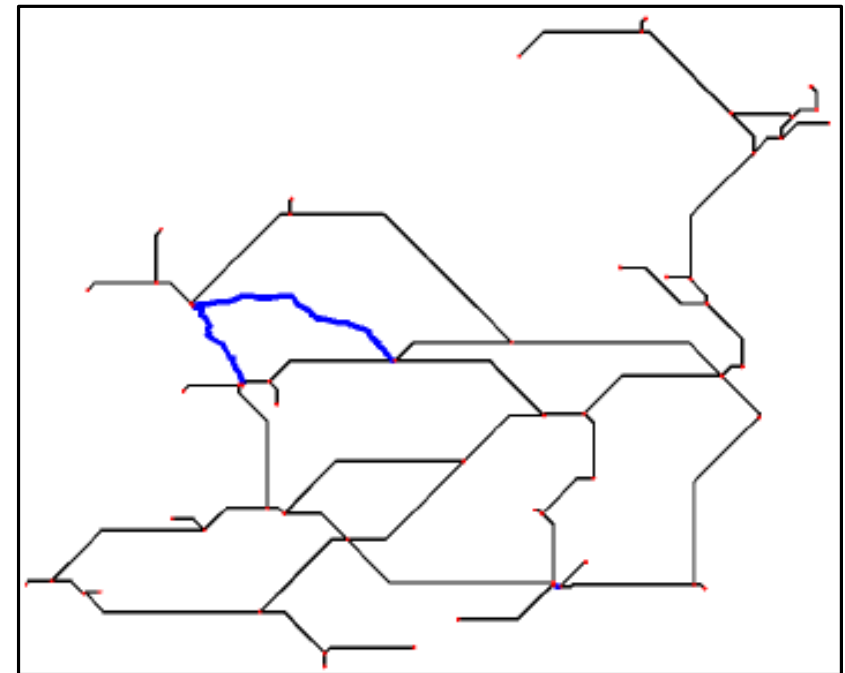
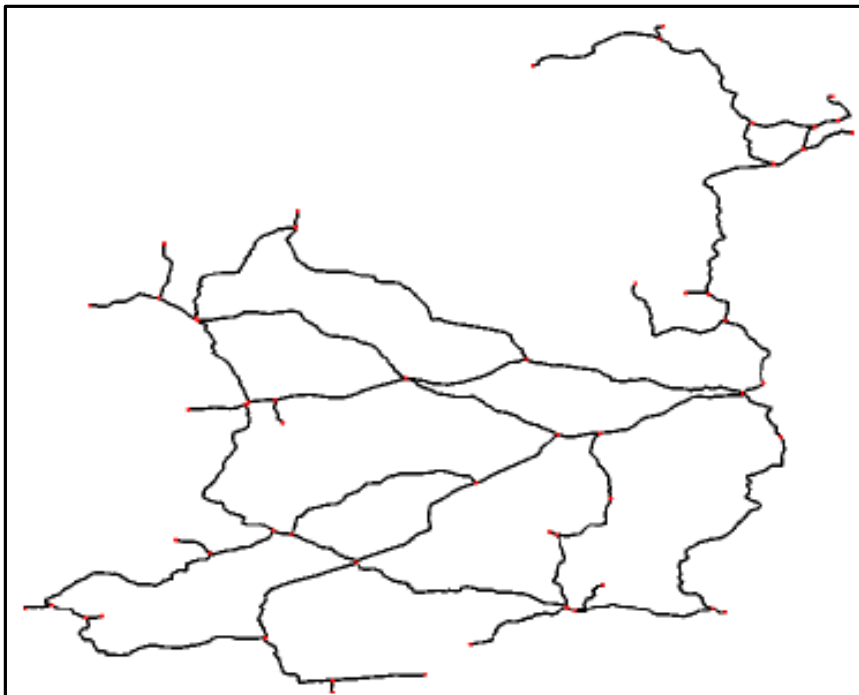


gem. Teilpfade



gem. Teilpfade  
mit Mindestabstand

**Satz 2:** Gegeben eine Karte  $M$ , kann eine äquivalente monotone HDH/VDV-Karte in  $O(n \log n)$  Zeit berechnet werden, falls sie existiert; andernfalls lässt sich Nichtexistenz melden.



Schienennetz von Irland