Überblick

- Clustering
  - Was bisher geschah
  - Luby's MIS-Algorithmus & Beweis
  - Von MIS zu CDS
- Vorlesungsevaluation
- Medium Access Control (MAC) und Coloring
  - MAC-Layer / Motivation
  - Einstieg ins Färben

Organisatorisches

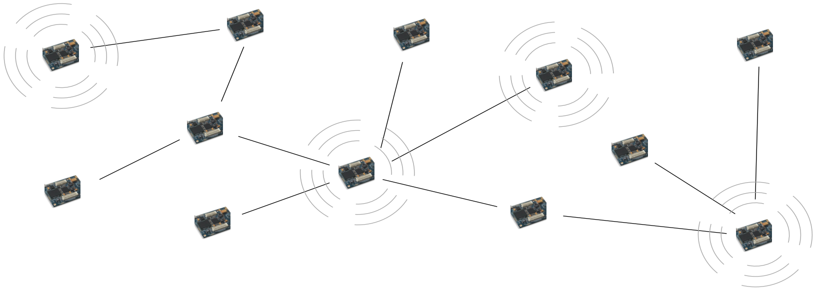
- Vorlesung am 11.07.2012 muss leider verschoben werden
- Mögliche Ausweichtermine
  - Freitag, 06.07.2012, 11:30 Uhr
  - Freitag, 13.07.2012, 11:30 Uhr
- Können alle freitags?

Algorithmen für Ad-hoc- und Sensornetze

VL 9b – Clustering (2. Teil)

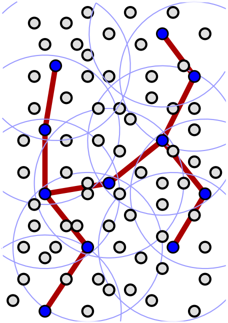
Markus Völker | 27. Juni 2012 (Version 1)

INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK - LEHRSTUHL FÜR ALGORITHMIK (PROF. WAGNER)



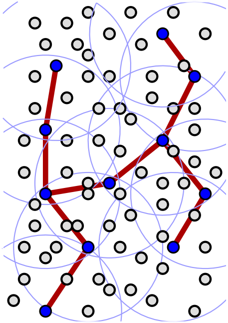
Erinnerung: Motivation Domin. Sets

- In dichten Sensornetzen sollen *Clusterheads* Koordination für abhängige Knoten übernehmen
- Clusterheads müssen alle Knoten abdecken (Dominating Set)
- Manchmal: Clusterheads müssen auch noch verbunden sein (Connected Dominating Set)
  - Bsp.: Routing auf Backbone



Minimum Dominating Set (MDS)

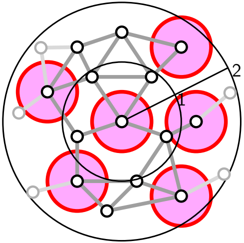
- Dominating Set minimaler Kardinalität
- NP-schwer zu berechnen
- Gute Approximation in allgemeinen Graphen verteilt sehr kompliziert. „Machbar“ war nur
  - eine schnelle & beliebig schlechte Approximation
  - eine beliebig langsame $(1 + \ln \Delta)$-Approximation



Bounded Independence Graphs

Beobachtung

In einem Unit-Disk-Graph können in der r-Hop-Nachbarschaft $N^r(u)$ jedes Knotens nur höchstens $12r^2$ Knoten liegen, die sich *paarweise* nicht sehen



- sowas heißt *Independent Set*
- Verallgemeinert:
  Bounded Independence Graphs (BIG)
  - für andere (konstante) Werte von 12 & 2
  - bildet quasi alle denkbaren Sensornetze ab
  - wesentliches Merkmal: In konstanter Entfernung immer nur konstante Anzahl unabhängiger Knoten!

Maximal Independent Sets (MIS) vs. Minimum Dominating Sets (MDS)

- *Inklusionsmaximale* Independent Sets sind Dominating Sets
  - jeder Knoten muss einen Nachbarn im MIS haben
- wir wissen schon, dass MIS auch nicht „viel“ größer als ein Minimum Dominating Set sein können:

Erkenntnis

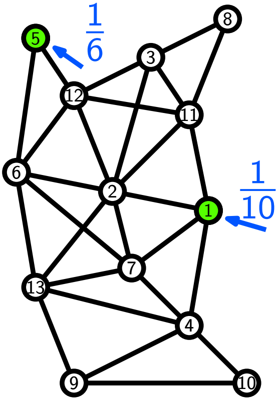
In BIGs (Sensornetzen) reicht es, ein inklusionsmaximales Independent Set zu finden, um ein kardinalitätsminimales Dominating Set bis auf einen konstanten Faktor zu approximieren!

- Uns fehlt noch: Ein Algorithmus, der *inklusionsmaximale Independent Sets (MIS)* schnell und verteilt berechnet!

Verteilter MIS-Algo: Luby-MIS

Luby-MIS

1. initial sind alle Knoten weiß
2. jeder Knoten v zählt weiße Knoten in 1-Hop-Nachbarschaft $N^1(v)$
3. in jeder Runde färbt sich jeder weiße Knoten v mit Wahrscheinlichkeit $1/2w_v$ grün
4. ein grüner Knoten v färbt sich schwarz, wenn er keinen grünen Nachbarn u hat mit $w_u > w_v$, sonst wieder weiß
   - bei gleichem w. wird der Knoten mit höherer ID schwarz
5. Nachbarn von schwarzen Knoten werden grau und werden inaktiv



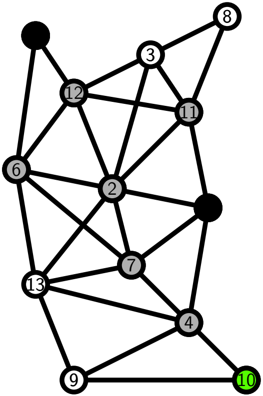
Runde 3

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Verteilter MIS-Algo: Luby-MIS

Luby-MIS

1. initial sind alle Knoten weiß
2. jeder Knoten v zählt weiße Knoten in 1-Hop-Nachbarschaft $N^1(v)$
3. in jeder Runde färbt sich jeder weiße Knoten v mit Wahrscheinlichkeit $1/2w_v$ grün
4. ein grüner Knoten v färbt sich schwarz, wenn er keinen grünen Nachbarn u hat mit $w_u > w_v$, sonst wieder weiß
   - bei gleichem w. wird der Knoten mit höherer ID schwarz
5. Nachbarn von schwarzen Knoten werden grau und werden inaktiv

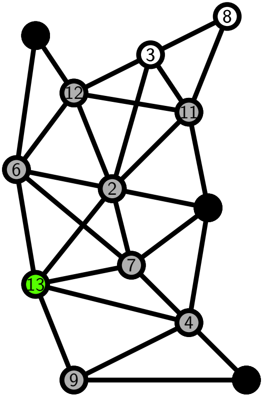


Runde 5

Verteilter MIS-Algo: Luby-MIS

Luby-MIS

1. initial sind alle Knoten weiß
2. jeder Knoten v zählt weiße Knoten in 1-Hop-Nachbarschaft $N^1(v)$
3. in jeder Runde färbt sich jeder weiße Knoten v mit Wahrscheinlichkeit $1/2w_v$ grün
4. ein grüner Knoten v färbt sich schwarz, wenn er keinen grünen Nachbarn u hat mit $w_u > w_v$, sonst wieder weiß
   - bei gleichem w. wird der Knoten mit höherer ID schwarz
5. Nachbarn von schwarzen Knoten werden grau und werden inaktiv

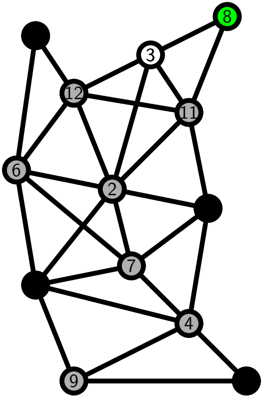


Runde 6

Verteilter MIS-Algo: Luby-MIS

Luby-MIS

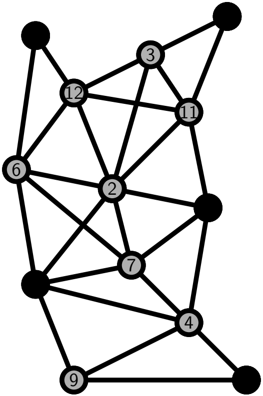
1. initial sind alle Knoten weiß
2. jeder Knoten v zählt weiße Knoten in 1-Hop-Nachbarschaft $N^1(v)$
3. in jeder Runde färbt sich jeder weiße Knoten v mit Wahrscheinlichkeit $1/2w_v$ grün
4. ein grüner Knoten v färbt sich schwarz, wenn er keinen grünen Nachbarn u hat mit $w_u > w_v$, sonst wieder weiß
   - bei gleichem w. wird der Knoten mit höherer ID schwarz
5. Nachbarn von schwarzen Knoten werden grau und werden inaktiv



Verteilter MIS-Algo: Luby-MIS

Luby-MIS

1. initial sind alle Knoten weiß
2. jeder Knoten v zählt weiße Knoten in 1-Hop-Nachbarschaft $N^1(v)$
3. in jeder Runde färbt sich jeder weiße Knoten v mit Wahrscheinlichkeit $1/2w_v$ grün
4. ein grüner Knoten v färbt sich schwarz, wenn er keinen grünen Nachbarn u hat mit $w_u > w_v$, sonst wieder weiß
   - bei gleichem $w.$ wird der Knoten mit höherer ID schwarz
5. Nachbarn von schwarzen Knoten werden grau und werden inaktiv



Runde 8

Analyse Luby: Satz und Beweisstruktur

Satz

Luby-MIS berechnet ein MIS erwartet in $O(\log n)$ Runden.

- Luby berechnet offenbar ein MIS ✓

Beweisstruktur Laufzeit

Drei Lemmata, um erwartete Anzahl Runden zu beweisen:

1. Jeder Knoten färbt sich mit bestimmter W'keit *schwarz*
   - wird ein Knoten grün, wird er in mindestens der Hälfte der Fälle auch schwarz
2. es gibt *gute* Knoten, die mit konstanter W'keit grau werden
3. mehr als die Hälfte der Kanten ist inzident zu einem *guten* Endknoten

$\Rightarrow$ jede Runde fällt konstanter Anteil verbleibender Kanten weg!

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

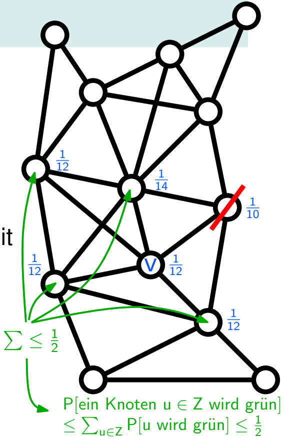
Luby-Lemma 1

Luby-Lemma 1

Jeder Knoten v färbt sich in Schritt 2 mindestens mit Wahrscheinlichkeit $1/4w_v$ schwarz.

- v färbt sich mit Wahrscheinlichkeit $1/2w_v$ grün
- dann halten v nur noch Knoten u mit $w_u \geq w_v$ auf!
  - es gibt höchstens w_v solche Nachbarn
  - jeder davon wurde höchstens mit Wahrscheinlichkeit $1/2w_u \leq 1/2w_v$ grün

  $\Rightarrow$ so ein grünes u gibt es nur mit W'keit $p \leq w_v \cdot 1/2w_v = 1/2$ (klar?)
- v wird schwarz, wenn es erst grün, dann schwarz wird, also mind. mit W'keit $1/2w_v \cdot 1/2 = 1/4w_v$

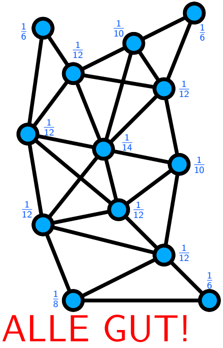


Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Gute Knoten, schlechte Knoten

Definitionen

Ein weißer Knoten v ist *gut*, wenn $\sum_{u \text{ weiß mit } \{u,v\} \in E} 1/2w_u \geq 1/6$.



Gute Knoten, schlechte Knoten

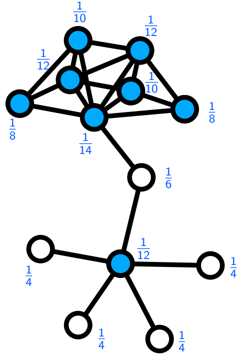
Definitionen

Ein weißer Knoten v ist *gut*, wenn $\sum_{u \text{ weiß mit } \{u,v\} \in E} 1/2w_u \geq 1/6$.

Intuition:

- *Gute* Knoten haben entweder sehr viele Nachbarn oder Nachbarn mit geringem w_u

$\Rightarrow$ W'keit, dass einer von den Nachbarn schwarz wird, ist sehr hoch!



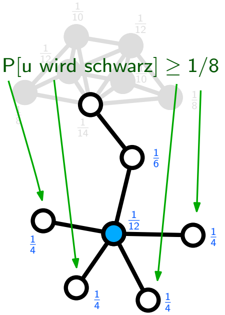
Luby-Lemma 2

Luby-Lemma 2

In einer Runde wird jeder gute Knoten v mindestens mit W'keit $1/36$ grau gefärbt.

Fall 1: Es gibt einen Nachbarn u von v mit $w_u \leq 2$

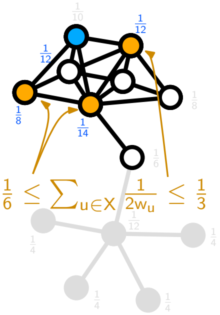
$\overset{\text{Lemma 1}}{\Rightarrow}$ u wird mit W'keit $\geq 1/8$ *schwarz* ✓



Luby-Lemma 2

Luby-Lemma 2

In einer Runde wird jeder gute Knoten v mindestens mit W'keit $1/36$ grau gefärbt.



Fall 1: Es gibt einen Nachbarn u von v mit $w_u \leq 2$

$\overset{\text{Lemma 1}}{\Rightarrow}$ u wird mit W'keit $\geq 1/8$ *schwarz* ✓

Fall 2: Jeder Nachbar u von v hat $w_u \geq 3$

- für jeden Nachbarn u gilt $1/2w_u \leq 1/6$
- es gibt eine Menge X von Nachbarn, für die gilt $\frac{1}{6} \leq \sum_{u \in X} \frac{1}{2w_u} \leq \frac{1}{3}$
- von denen wird mit W'keit $\geq 1/36$ einer schwarz! (Beweis kommt gleich noch)

Zu zeigen

Aus einer Menge X von Knoten mit

$$\frac{1}{6} \leq \sum_{u \in X} \frac{1}{2w_u} \leq \frac{1}{3}$$

wird mindestens mit W'keit $1/36$ einer schwarz.

$$\begin{aligned} & P[\text{ein } u \in X \text{ schwarz}] \\ & \quad \geq P[\text{genau ein } u \in X \text{ schwarz}] \end{aligned}$$

- $P[\text{ein } u \in X \text{ schwarz}] \geq P[\text{genau ein } u \in X \text{ schwarz}]$
  - klar, der Fall links schließt den Fall rechts ein

Zu zeigen

Aus einer Menge X von Knoten mit
$$\frac{1}{6} \leq \sum_{u \in X} \frac{1}{2w_u} \leq \frac{1}{3}$$
wird mindestens mit W'keit $1/36$ einer schwarz.

$$P[\text{ein } u \in X \text{ schwarz}]$$
$$\geq P[\text{genau ein } u \in X \text{ schwarz}]$$
$$\geq \sum_{u \in X} \left(P[u \text{ schw.}] - \sum_{v \in X} P[u \text{ schw. und } v \text{ schw.}] \right)$$

- $P[\text{genau ein } u \in X \text{ schw.}] \geq \sum_{u \in X} \left(P[u \text{ schw.}] - \sum_{v \in X} P[u \text{ schw. und } v \text{ schw.}] \right)$
  - $P[\text{genau ein } u \in X \text{ schwarz}] \geq \sum_{u \in X} P[\text{genau } u \in X \text{ schwarz}]$!
  - ziehe von den Fällen, wo u schwarz ist, Fälle ab, wo ein bestimmter anderer schwarz ist (damit ziehen wir nur zu viel ab!)

Zu zeigen

Aus einer Menge X von Knoten mit

$$\frac{1}{6} \leq \sum_{u \in X} \frac{1}{2w_u} \leq \frac{1}{3}$$

wird mindestens mit W'keit $1/36$ einer schwarz.

$$\begin{aligned}
&P[\text{ein } u \in X \text{ schwarz}] \\
&\qquad \geq P[\text{genau ein } u \in X \text{ schwarz}] \\
&\qquad \geq \textstyle\sum_{u \in X} \left(P[u \text{ schw.}] - \sum_{v \in X} P[u \text{ schw. und } v \text{ schw.}]\right) \\
&\qquad \geq \textstyle\sum_{u \in X} P[u \text{ schw.}] - \sum_{u,v \in X} P[u \text{ schw. und } v \text{ schw.}]
\end{aligned}$$

- (einfaches Aufteilen der Summe)

Zu zeigen

Aus einer Menge X von Knoten mit
$$\frac{1}{6} \leq \sum_{u \in X} \frac{1}{2w_u} \leq \frac{1}{3}$$
wird mindestens mit W'keit $1/36$ einer schwarz.

$$
\begin{aligned}
&P[\text{ein } u \in X \text{ schwarz}]\\
&\quad \geq P[\text{genau ein } u \in X \text{ schwarz}]\\
&\quad \geq \textstyle\sum_{u \in X} \left(P[u \text{ schw.}] - \sum_{v \in X} P[u \text{ schw. und } v \text{ schw.}]\right)\\
&\quad \geq \textstyle\sum_{u \in X} P[u \text{ schw.}] - \sum_{u,v \in X} P[u \text{ schw. und } v \text{ schw.}]\\
&\quad \geq \textstyle\sum_{u \in X} P[u \text{ schw.}] - \sum_{u,v \in X} P[u \text{ grün und } v \text{ grün}]
\end{aligned}
$$

- $\sum_{u,v \in X} P[u \text{ schw. und } v \text{ schw.}] \leq \sum_{u,v \in X} P[u \text{ grün und } v \text{ grün}]$
  - nur wer grün war, kann schwarz werden

Zu zeigen

Aus einer Menge X von Knoten mit

$$\frac{1}{6} \leq \sum_{u \in X} \frac{1}{2w_u} \leq \frac{1}{3}$$

wird mindestens mit W'keit $1/36$ einer schwarz.

$$
\begin{aligned}
&P[\text{ein } u \in X \text{ schwarz}] \\
&\quad \geq P[\text{genau ein } u \in X \text{ schwarz}] \\
&\quad \geq \textstyle\sum_{u \in X} \left(P[u \text{ schw.}] - \sum_{v \in X} P[u \text{ schw. und } v \text{ schw.}]\right) \\
&\quad \geq \textstyle\sum_{u \in X} P[u \text{ schw.}] - \sum_{u,v \in X} P[u \text{ schw. und } v \text{ schw.}] \\
&\quad \geq \textstyle\sum_{u \in X} P[u \text{ schw.}] - \sum_{u,v \in X} P[u \text{ grün und } v \text{ grün}] \\
&\quad \geq \textstyle\sum_{u \in X} P[u \text{ schw.}] - \sum_{u,v \in X} (P[u \text{ grün}] \cdot P[v \text{ grün}])
\end{aligned}
$$

- $\sum_{u,v \in X} P[u \text{ grün und } v \text{ grün}] \leq \sum_{u,v \in X} P[u \text{ grün}] \cdot P[v \text{ grün}]$
  - *grün werden Knoten unabhängig!*

Zu zeigen

Aus einer Menge X von Knoten mit
$$\frac{1}{6} \leq \sum_{u \in X} \frac{1}{2w_u} \leq \frac{1}{3}$$
wird mindestens mit W'keit $1/36$ einer schwarz.

$$
\begin{aligned}
& P[\text{ein } u \in X \text{ schwarz}] \\
& \quad \geq P[\text{genau ein } u \in X \text{ schwarz}] \\
& \quad \geq \textstyle\sum_{u \in X} \left(P[u \text{ schw.}] - \sum_{v \in X} P[u \text{ schw. und } v \text{ schw.}]\right) \\
& \quad \geq \textstyle\sum_{u \in X} P[u \text{ schw.}] - \sum_{u,v \in X} P[u \text{ schw. und } v \text{ schw.}] \\
& \quad \geq \textstyle\sum_{u \in X} P[u \text{ schw.}] - \sum_{u,v \in X} P[u \text{ grün und } v \text{ grün}] \\
& \quad \geq \textstyle\sum_{u \in X} P[u \text{ schw.}] - \sum_{u,v \in X} (P[u \text{ grün}] \cdot P[v \text{ grün}]) \\
& \quad \geq \textstyle\sum_{u \in X} P[u \text{ schw.}] - \sum_{u \in X} P[u \text{ grün}] \cdot \sum_{v \in X} P[v \text{ grün}]
\end{aligned}
$$

- Ausklammern

Zu zeigen

Aus einer Menge X von Knoten mit
$$\frac{1}{6} \leq \sum_{u \in X} \frac{1}{2w_u} \leq \frac{1}{3}$$
wird mindestens mit W'keit $1/36$ einer schwarz.

$$
\begin{aligned}
& P[\text{ein } u \in X \text{ schwarz}] \\
& \quad \geq P[\text{genau ein } u \in X \text{ schwarz}] \\
& \quad \geq \textstyle\sum_{u \in X} \left(P[u \text{ schw.}] - \sum_{v \in X} P[u \text{ schw. und } v \text{ schw.}] \right) \\
& \quad \geq \textstyle\sum_{u \in X} P[u \text{ schw.}] - \sum_{u,v \in X} P[u \text{ schw. und } v \text{ schw.}] \\
& \quad \geq \textstyle\sum_{u \in X} P[u \text{ schw.}] - \sum_{u,v \in X} P[u \text{ grün und } v \text{ grün}] \\
& \quad \geq \textstyle\sum_{u \in X} P[u \text{ schw.}] - \sum_{u,v \in X} (P[u \text{ grün}] \cdot P[v \text{ grün}]) \\
& \quad \geq \textstyle\sum_{u \in X} P[u \text{ schw.}] - \sum_{u \in X} P[u \text{ grün}] \cdot \sum_{v \in X} P[v \text{ grün}] \\
& \quad \geq \textstyle\sum_{u \in X} \frac{1}{4w_u} - \sum_{u \in X} \frac{1}{2w_u} \cdot \sum_{v \in X} \frac{1}{2w_v}
\end{aligned}
$$

- $\sum_{u \in X} P[u \text{ schw.}] \geq \sum_{u \in X} \frac{1}{4w_u}$ nach Lemma 1
- $\sum_{x \in X} P[x \text{ grün}] = \sum_{x \in X} \frac{1}{2w_x}$ nach Definition

Zu zeigen

Aus einer Menge X von Knoten mit
$$\frac{1}{6} \le \sum_{u \in X} \frac{1}{2w_u} \le \frac{1}{3}$$
wird mindestens mit W'keit $1/36$ einer schwarz.

$$
\begin{aligned}
& P[\text{ein } u \in X \text{ schwarz}] \\
& \quad \ge P[\text{genau ein } u \in X \text{ schwarz}] \\
& \quad \ge \textstyle\sum_{u \in X} \left(P[u \text{ schw.}] - \sum_{v \in X} P[u \text{ schw. und } v \text{ schw.}]\right) \\
& \quad \ge \textstyle\sum_{u \in X} P[u \text{ schw.}] - \sum_{u,v \in X} P[u \text{ schw. und } v \text{ schw.}] \\
& \quad \ge \textstyle\sum_{u \in X} P[u \text{ schw.}] - \sum_{u,v \in X} P[u \text{ grün und } v \text{ grün}] \\
& \quad \ge \textstyle\sum_{u \in X} P[u \text{ schw.}] - \sum_{u,v \in X} (P[u \text{ grün}] \cdot P[v \text{ grün}]) \\
& \quad \ge \textstyle\sum_{u \in X} P[u \text{ schw.}] - \sum_{u \in X} P[u \text{ grün}] \cdot \sum_{v \in X} P[v \text{ grün}] \\
& \quad \ge \textstyle\sum_{u \in X} \frac{1}{4w_u} - \sum_{u \in X} \frac{1}{2w_u} \cdot \sum_{v \in X} \frac{1}{2w_v} \\
& \quad \ge \textstyle\left(\sum_{u \in X} \frac{1}{2w_u}\right) \cdot \left(\frac{1}{2} - \sum_{v \in X} \frac{1}{2w_v}\right)
\end{aligned}
$$

- Ausklammern

Zu zeigen

Aus einer Menge X von Knoten mit
$$\frac{1}{6} \leq \sum_{u \in X} \frac{1}{2w_u} \leq \frac{1}{3}$$
wird mindestens mit W'keit $1/36$ einer schwarz.

$$
\begin{aligned}
& P[\text{ein } u \in X \text{ schwarz}] \\
& \quad \geq P[\text{genau ein } u \in X \text{ schwarz}] \\
& \quad \geq \textstyle\sum_{u \in X} \left(P[u \text{ schw.}] - \sum_{v \in X} P[u \text{ schw. und } v \text{ schw.}]\right) \\
& \quad \geq \textstyle\sum_{u \in X} P[u \text{ schw.}] - \sum_{u,v \in X} P[u \text{ schw. und } v \text{ schw.}] \\
& \quad \geq \textstyle\sum_{u \in X} P[u \text{ schw.}] - \sum_{u,v \in X} P[u \text{ grün und } v \text{ grün}] \\
& \quad \geq \textstyle\sum_{u \in X} P[u \text{ schw.}] - \sum_{u,v \in X} (P[u \text{ grün}] \cdot P[v \text{ grün}]) \\
& \quad \geq \textstyle\sum_{u \in X} P[u \text{ schw.}] - \sum_{u \in X} P[u \text{ grün}] \cdot \sum_{v \in X} P[v \text{ grün}] \\
& \quad \geq \textstyle\sum_{u \in X} \frac{1}{4w_u} - \sum_{u \in X} \frac{1}{2w_u} \cdot \sum_{v \in X} \frac{1}{2w_v} \\
& \quad \geq \textstyle\left(\sum_{u \in X} \frac{1}{2w_u}\right) \cdot \left(\frac{1}{2} - \sum_{v \in X} \frac{1}{2w_v}\right) \geq \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{36}
\end{aligned}
$$

- $\sum_{u \in X} \frac{1}{2w_u} \geq \frac{1}{6}$ nach Vorauss.
- $\sum_{v \in X} \frac{1}{2w_v} \leq \frac{1}{3}$ nach Vorauss.

Luby-Lemma 2

Luby-Lemma 2

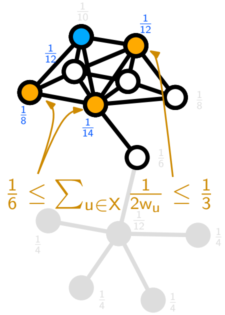
In einer Runde wird jeder gute Knoten v mindestens mit W'keit $1/36$ grau gefärbt.

Fall 1: Es gibt einen Nachbarn u von v mit $w_u \leq 2$

$\overset{\text{Lemma 1}}{\Rightarrow}$ u wird mit W'keit $\geq 1/8$ *schwarz* ✓

Fall 2: Jeder Nachbar u von v hat $w_u \geq 3$

- für jeden Nachbarn u gilt $1/2w_u \leq 1/6$
- es gibt eine Menge X von Nachbarn, für die gilt $\frac{1}{6} \leq \sum_{u \in X} \frac{1}{2w_u} \leq \frac{1}{3}$
- von denen wird mit W'keit $\geq 1/36$ einer schwarz! ✓



Gute *Kanten*, schlechte *Kanten*

Wiederholung: Definition

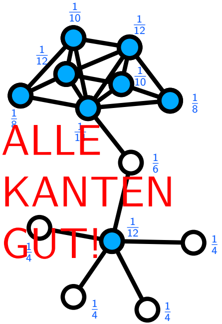
Ein weißer Knoten v ist *gut*, wenn $\sum_{u \text{ weiß mit } \{u,v\} \in E} 1/2w_u \geq 1/6$.

- *gute Knoten gibt es manchmal nur wenige!*
  - zum Beispiel bei Sternen

$\Rightarrow$ da hilft uns die Aussage nicht, dass wir immer einen konstanten Anteil verlieren!

Definition

Eine Kante heißt *aktiv*, wenn beide Endpunkte weiß sind, und *gut*, wenn zusätzlich ein Endpunkt gut ist.



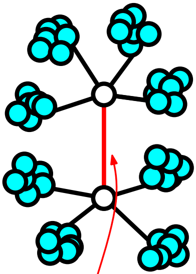
Gute *Kanten*, schlechte *Kanten*

Wiederholung: Definition

Ein weißer Knoten v ist *gut*, wenn $\sum_{u \text{ weiß mit } \{u,v\} \in E} 1/2w_u \geq 1/6$.

- *gute Knoten gibt es manchmal nur wenige!*
  - zum Beispiel bei Sternen

$\Rightarrow$ da hilft uns die Aussage nicht, dass wir immer einen konstanten Anteil verlieren!



Definition

Eine Kante heißt *aktiv*, wenn beide Endpunkte weiß sind, und *gut*, wenn zusätzlich ein Endpunkt gut ist.

- inaktive Kanten können wir ignorieren
  - beschränken uns auf „weißen“ Graphen
- gute Kanten werden mit konstanter Wahrscheinlichkeit inaktiv!

Luby-Lemma 3

Luby-Lemma 3

Immer mindestens die Hälfte der aktiven Kanten ist gut.

- wir richten jede Kante so, dass sie auf den Endknoten u mit dem höheren w_u zeigt
- Bei einem schlechten Knoten u gilt

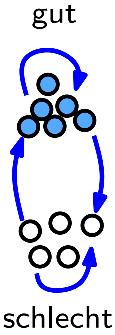
$$\text{Eingangsgrad} \leq 2 \cdot \text{Ausgangsgrad}$$

  - sonst gilt für mehr als $w_u/3$ Nachbarn v: $w_v \leq w_u$
  - dann wäre u gut:

$$\sum_{v \in N^1(u)} \frac{1}{2w_v} \geq \frac{w_u}{3} \cdot \frac{1}{2w_u} = \frac{1}{6}$$

$\Rightarrow$ mindestens die Hälfte der Kanten zeigt auf gute Knoten

  - wenn mehr als die Hälfte der eigehenden Enden an schlechten Knoten liegen, reichen alle ausgehenden Enden nicht aus!



Analyse Luby: Satz und Beweisstruktur

Satz

Luby-MIS berechnet ein MIS erwartet in $O(\log n)$ Runden.

- Luby berechnet offenbar ein MIS ✓
- Zu jedem Zeitpunkt ist mindestens die Hälfte der aktiven Kanten *gut* (Lemma 3)
  - $\Rightarrow$ mindestens ein Endpunkt ist gut
  - $\Rightarrow$ der wird mit W'keit $\geq 1/36$ grau (Lemma 2)
  - $\Rightarrow$ die Kante wird mit W'keit $\geq 1/36$ inaktiv

$\Rightarrow$ jede Runde werden (erwartet) mindestens $\frac{1}{72}$ der aktiven Kanten inaktiv

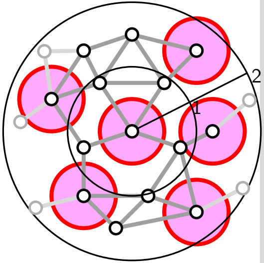
- nach $O(\log |E|)$ Runden ist keine Kante mehr aktiv
- Wenn keine Kante mehr aktiv ist, sind weiße Knoten isoliert!
  - die können sich auch direkt schwarz färben
- $\log |E| \leq \log n^2 = 2 \log n \Rightarrow O(\log n)$ Runden

Vom MIS zum CDS (Hausaufgabe)

Erinnerung: BIG

Ein Graph hat beschränkte Unabhängigkeit (BIG), wenn für konstantes c in jeder r-Hop-Nachbarschaft maximal $O(r^c)$ unabhängige Knoten liegen.

- bestes Beispiel: UDG
  - jede r-Hop-Nachbarschaft enthält maximal $12r^2$ unabhängige Knoten!

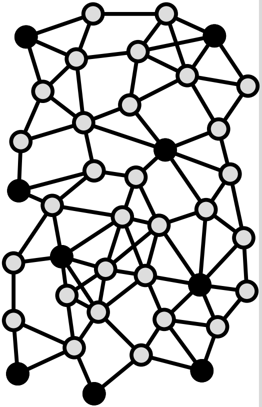


Vom MIS zum CDS (Hausaufgabe)

Erinnerung: BIG

Ein Graph hat beschränkte Unabhängigkeit (BIG), wenn für konstantes c in jeder r-Hop-Nachbarschaft maximal $O(r^c)$ unabhängige Knoten liegen.

- bestes Beispiel: UDG
  - jede r-Hop-Nachbarschaft enthält maximal $12r^2$ unabhängige Knoten!
- jede konstante Nachbarschaft eines Knotens enthält nur konstante Anzahl von unabhängigen Knoten

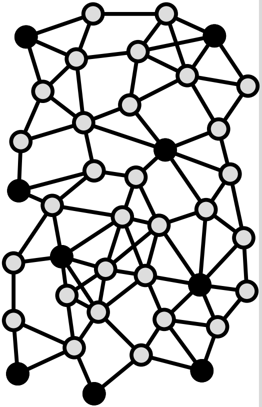


Vom MIS zum CDS (Hausaufgabe)

Erinnerung: BIG

Ein Graph hat beschränkte Unabhängigkeit (BIG), wenn für konstantes c in jeder r-Hop-Nachbarschaft maximal $O(r^c)$ unabhängige Knoten liegen.

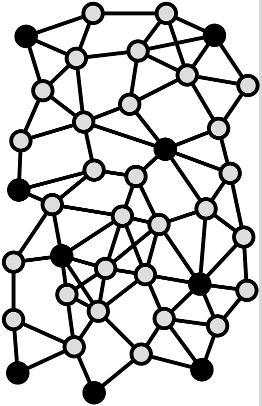
- bestes Beispiel: UDG
  - jede r-Hop-Nachbarschaft enthält maximal $12r^2$ unabhängige Knoten!
- jede konstante Nachbarschaft eines Knotens enthält nur konstante Anzahl von unabhängigen Knoten
- in BIG ist jedes MIS I eine konstante MDS-Approximation



Vom MIS zum CDS (Hausaufgabe)

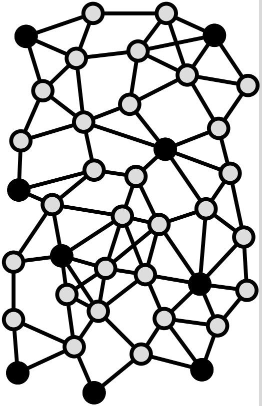
Erinnerung: BIG

Ein Graph hat beschränkte Unabhängigkeit (BIG), wenn für konstantes c in jeder r-Hop-Nachbarschaft maximal $O(r^c)$ unabhängige Knoten liegen.



- bestes Beispiel: UDG
  - jede r-Hop-Nachbarschaft enthält maximal $12r^2$ unabhängige Knoten!
- jede konstante Nachbarschaft eines Knotens enthält nur konstante Anzahl von unabhängigen Knoten
- in BIG ist jedes MIS I eine konstante MDS-Approximation
- wie wird aus I eine konstante MCDS-Approximation?

Vom MIS zum CDS (Hausaufgabe)



Erinnerung: BIG

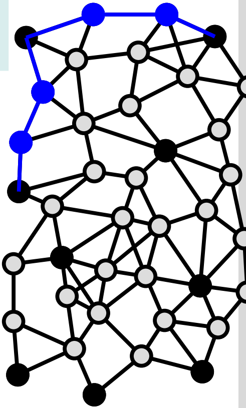
Ein Graph hat beschränkte Unabhängigkeit (BIG), wenn für konstantes c in jeder r-Hop-Nachbarschaft maximal $O(r^c)$ unabhängige Knoten liegen.

- bestes Beispiel: UDG
  - jede r-Hop-Nachbarschaft enthält maximal $12r^2$ unabhängige Knoten!
- jede konstante Nachbarschaft eines Knotens enthält nur konstante Anzahl von unabhängigen Knoten
- in BIG ist jedes MIS I eine konstante MDS-Approximation
- wie wird aus I eine konstante MCDS-Approximation?

Vom MIS zum CDS (Lösung)

MIS-Ergänzung

Sei G ein BIG und I eine maximale unabhängige Menge. Für jedes Paar $u, v \in I$ mit $d_G(u, v) \leq 3$ wähle einen kürzesten Pfad und füge die Knoten zu I hinzu.

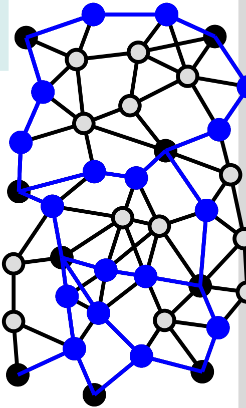


Vom MIS zum CDS (Lösung)

MIS-Ergänzung

Sei G ein BIG und I eine maximale unabhängige Menge. Für jedes Paar $u, v \in I$ mit $d_G(u, v) \leq 3$ wähle einen kürzesten Pfad und füge die Knoten zu I hinzu.

- das ist immer noch ein DS (klar)

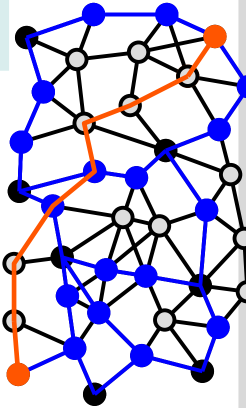


Vom MIS zum CDS (Lösung)

MIS-Ergänzung

Sei G ein BIG und I eine maximale unabhängige Menge. Für jedes Paar $u, v \in I$ mit $d_G(u, v) \leq 3$ wähle einen kürzesten Pfad und füge die Knoten zu I hinzu.

- das ist immer noch ein DS (klar)
- das ist ein *Connected* Dominating Set
  - betrachte beliebige Knoten $a, b \in I$ und beliebigen Pfad von $a = v_1, \ldots, v_k = b$ in G

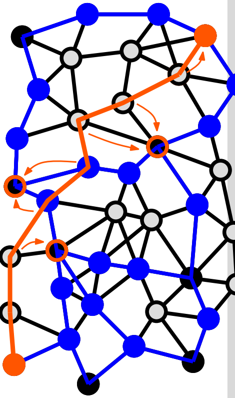


Vom MIS zum CDS (Lösung)

MIS-Ergänzung

Sei G ein BIG und I eine maximale unabhängige Menge. Für jedes Paar $u, v \in I$ mit $d_G(u, v) \leq 3$ wähle einen kürzesten Pfad und füge die Knoten zu I hinzu.

- das ist immer noch ein DS (klar)
- das ist ein *Connected* Dominating Set
  - betrachte beliebige Knoten $a, b \in I$ und beliebigen Pfad von $a = v_1, \ldots, v_k = b$ in G
  - jeder Knoten v_i hat einen Knoten $u_i \in I$ in Abstand 1
  - betrachte Folge $a = u_0, \ldots, u_k = b$ dieser Knoten



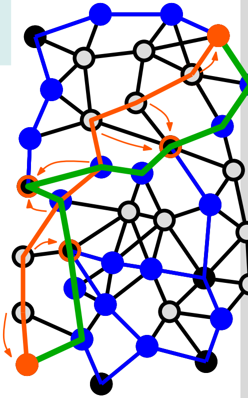
Vom MIS zum CDS (Lösung)

MIS-Ergänzung

Sei G ein BIG und I eine maximale unabhängige Menge. Für jedes Paar $u, v \in I$ mit $d_G(u, v) \leq 3$ wähle einen kürzesten Pfad und füge die Knoten zu I hinzu.

- das ist immer noch ein DS (klar)
- das ist ein *Connected* Dominating Set
  - betrachte beliebige Knoten $a, b \in I$ und beliebigen Pfad von $a = v_1, \ldots, v_k = b$ in G
  - jeder Knoten v_i hat einen Knoten $u_i \in I$ in Abstand 1
  - betrachte Folge $a = u_0, \ldots, u_k = b$ dieser Knoten
  - zwei aufeinanderfolgende u_i, u_{i+1} haben höchstens Abstand 3

  $\Rightarrow$ Ergänzung enthält einen Pfad

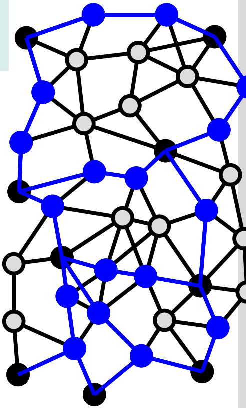


Vom MIS zum CDS (Lösung)

MIS-Ergänzung

Sei G ein BIG und I eine maximale unabhängige Menge. Für jedes Paar $u, v \in I$ mit $d_G(u, v) \leq 3$ wähle einen kürzesten Pfad und füge die Knoten zu I hinzu.

- das ist immer noch ein DS (klar)
- das ist ein *Connected* Dominating Set
- das fügt nur $O(|I|)$ Knoten hinzu
  - jeder Knoten $u \in I$ verbindet sich zu maximal $12r^2$ anderen (in UDG, $c' \cdot 3^c$ mit Konstanten c', c in BIG)
  - für jede Verbindung werden höchstens 2 Knoten eingefügt

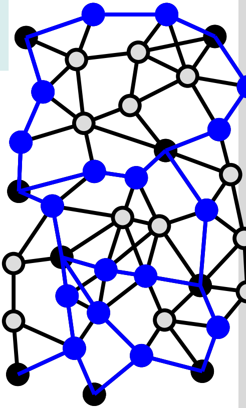


Vom MIS zum CDS (Lösung)

MIS-Ergänzung

Sei G ein BIG und I eine maximale unabhängige Menge. Für jedes Paar $u, v \in I$ mit $d_G(u, v) \leq 3$ wähle einen kürzesten Pfad und füge die Knoten zu I hinzu.

- das ist immer noch ein DS (klar)
- das ist ein *Connected* Dominating Set
- das fügt nur $O(|I|)$ Knoten hinzu
- damit sind wir nach Ergänzung immer noch nur um konstanten Faktor von $|\mathrm{DS}_{\mathrm{OPT}}|$ entfernt, also sicher auch von $|\mathrm{CDS}_{\mathrm{OPT}}|$!



Noch ein kurzer Blick zurück

Karlsruher Institut für Technologie

- Wir haben Minimum (Connected) Dominating Sets gesucht
  - in allgemeinen Graphen war das nicht ganz leicht
- In Sensornetzen wachsen Nachbarschaften nicht beliebig
  - im Wesentlichen ist die Nachbarschaft in geometrischer Nachbarschaft enthalten
  - pro Fläche können nicht beliebig viele Knoten unabhängig sein
- Maximale Independent Sets sind immer Dominating Sets
- in Sensornetzen approximieren sie Minimum Dominating Sets bis auf konstanten Faktor
- hier kostet es auch nicht mehr, die Knoten zu verbinden!
- Luby liefert schnelles MIS
  - sogar in allgemeinen Graphen (da wären sie nur nicht so wertvoll)

Empfehlung ergänzende Literatur

Stefan Schmid, Roger Wattenhofer: *Algorithmic Models for Sensor Networks*.
In: Proceedings of the 14th International Workshop on Parallel and Distributed Real-Time Systems (WPDRTS), 2006.

- UDQ, QUDG, Unit Ball Graphs
- Doubling Metrics
- Verschiedene Interferenzmodelle
  - Hop Interference, Protocol Modell, SINR Modell, ...
- Algorithmenklassifikationen (z.B. global, lokal, verteilt)
- Knotenverteilungen (zufällig, worst-case)
- ...

Vorlesungsevaluierung

Literatur

Karlsruher Institut für Technologie

1. V. Chvátal: *A greedy heuristic for the set covering problems*. In: Operations Research 4(3), pp. 233–235, 1979
2. S. Schmid, R. Wattenhofer: *Algorithmic Models for Sensor Networks*. In: 14th International Workshop on Parallel and Distributed Real-Time Systems (WPDRTS), 2006
3. M. Luby: *A simple parallel algorithm for the maximal independent set problem*. In: Proc. of the 17th Annual ACM Symp. on Theory of Computing (STOC'85), 1985