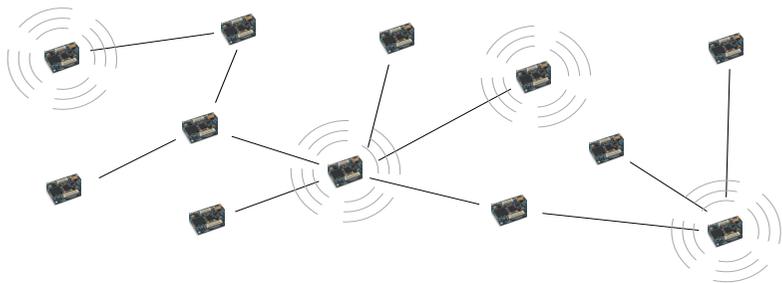


# Algorithmen für Ad-hoc- und Sensornetze

VL 02 – Geographisches Routing

Markus Völker | 25. April 2012 (Version 2)

INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK - LEHRSTUHL FÜR ALGORITHMIK (PROF. WAGNER)



## Überblick

- Ergänzungen zur VL 1: Einführung und Beispiele
  - Leader Election in allgemeinen Graphen
  - Dynamisches Full Link Reversal
- Geographisches Routing
  - Einschub: Drahtlose Kommunikation
  - Unit-Disk-Graphen und Quasi-Unit-Disk-Graphen
  - Greedy Routing
  - Gabriel Graph
  - Facettenrouting (FR)
  - Beschränktes Facettenrouting (BFR)
  - Das  $\Omega(1)$ -Modell
  - Adaptives Facettenrouting (AFR)
  - Greedy adaptives Facettenrouting (GAFR)
  - Optimiertes Facettenrouting (OFR)
  - Greedy optimiertes Facettenrouting (GOFR)
  - Optimiertes adaptives Facettenrouting (OAFR)
  - Greedy optimiertes adaptives Facettenrouting (GOAFR)

## Leader Election - Knobelaufgabe

### Erinnerung: Leader Election

**Gegeben:** Symmetrischer, zusammenhängender Kommunikationsgraph  $G$ .

**Problem:** Genau ein Prozessor soll als *Leader* ausgezeichnet werden.

### Erinnerung: Idee Leader Election in Ringen

Jeder Knoten schickt seine ID nach links und reicht höhere IDs weiter. Wer seine eigene ID hört, schickt Terminierungsnachricht in den Ring und terminiert als Leader.

Wie könnte ein Leader-Election-Algorithmus für allgemeine Graphen aussehen?

## Leader Election in allg. Graphen

Leader Election, Knoten  $p_i$  kennt  $ID_i$

sende  $ID_i$  an alle Nachbarn

setze  $ID_+ \leftarrow ID_i$  und  $parent \leftarrow \perp$

**wenn**  $ID_s$  empfangen wurden **dann**

    wähle maximale empfangene  $ID$  und zugehörigen Sender  $s$

**wenn**  $ID > ID_+$  **dann**

        setze  $ID_+ \leftarrow ID$  und  $parent \leftarrow s$

        sende Nachricht „new follower“ an  $parent$

**wenn** „new follower“ empfangen wurde und  $parent \neq \perp$  **dann**

    sende Nachricht „new follower“ an  $parent^a$

<sup>a</sup>wenn nicht schon geschehen

Wann darf sich ein Knoten mit  $parent = \perp$  zum Leader erklären?  
Wenn zwei Runden keine follower-Nachricht kam! (Ohne Beweis)

# Dynamisches Full Link Reversal

## Erinnerung: Full Link Reversal

- Richte alle Kanten von größerem Label (ID) zu kleinerem
- Wenn ein Knoten  $v \neq t$  keine ausgehenden Kanten hat
  - drehe alle inzidenten Kanten um
  - wähle neues Label größer als bei allen Nachbarn

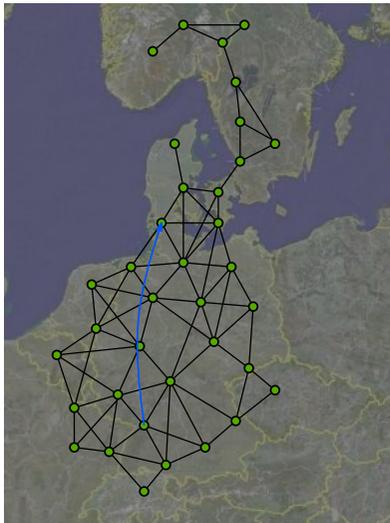
Graphen azyklisch und  $t$ -gerichtet halten:

- Kanten oder Knoten fallen weg
  - entstehende Senken werden durch Link Reversal behoben
- neuer Knoten  $u$ 
  - alle Kanten von  $u$  weg richten
  - wähle Label größer als bei allen Nachbarn
- neue Kante entsteht
  - falsche Richtung könnte Kreis induzieren.
  - richte von größerem Label zu kleinerem, bei Gleichstand betrachte ursprüngliche ID

# Überblick

- Ergänzungen zur VL 1: Einführung und Beispiele
  - Leader Election in allgemeinen Graphen
  - Dynamisches Full Link Reversal
- Geographisches Routing
  - Einschub: Drahtlose Kommunikation
  - Unit-Disk-Graphen und Quasi-Unit-Disk-Graphen
  - Greedy Routing
  - Gabriel Graph
  - Facettenrouting (FR)
  - Beschränktes Facettenrouting (BFR)
  - Das  $\Omega(1)$ -Modell
  - Adaptive Facettenrouting (AFR)
  - Greedy adaptive Facettenrouting (GAFR)
  - Optimierte Facettenrouting (OFR)
  - Greedy optimierte Facettenrouting (GOFR)
  - Optimierte adaptive Facettenrouting (OAFR)
  - Greedy optimierte adaptive Facettenrouting (GOAFR)

# Geographisches Routing



# Geographisches Routing

## Geographisches Routing

- Knoten kennen ihre Geokoordinaten (und die ihrer Nachbarn)
- Pakete enthalten Start- und Zielkoordinaten
- Vollkommen reaktiv: keine Routingtabellen
- Geographisches Routing ist realistisch
  - Knotenpositionen bekannt durch GPS/Galileo oder Lokalisierungsverfahren
  - Zielpositionen bekannt
    - wenn statt Labels Positionen verwendet werden (statisch)
    - wenn Informationen an Zielkoordinaten geroutet werden
    - Beispiel: Location Services (VL03)

# Positionsbewusstsein

## Definition

Eine Einbettung eines Graphen  $G = (V, E)$  ist eine Abbildung  $p : V \rightarrow \mathbb{R}^d$ .

- Sensornetze bringen ihre Einbettung gleich mit!
- zunächst nur in der Ebene:  $d = 2$

## Definition

Ein verteilter Algorithmus auf einem eingebetteten Graphen heißt *positionsbewusst*, wenn jeder Knoten  $v$  seine Position  $p(v)$  und die seiner Nachbarn kennt.

- zunächst nur statisch:  $p$  ändert sich nicht



Was sind Koordinaten wert, wenn die Vernetzung nichts mit ihnen zu tun hat?

## Drahtlose Kommunikation

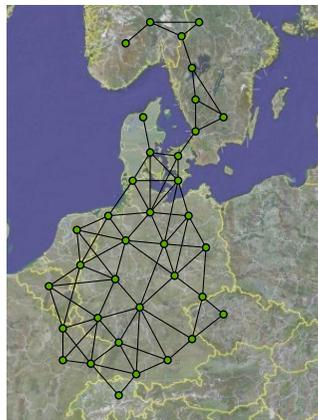
- Signal fällt mit Entfernung ab
- Empfänger braucht gewisse Signalstärke

## Verbindungen

beliebige Graphen

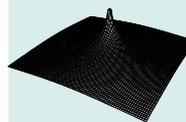
???

???



Was sind Koordinaten wert, wenn die Vernetzung nichts mit ihnen zu tun hat?

## Drahtlose Kommunikation



- Signal fällt mit Entfernung ab
- Empfänger braucht gewisse Signalstärke

## Verbindungen

beliebige Graphen

???

UDG

# Einschub: Drahtlose Kommunikation

## Grundlagen Signalausbreitung

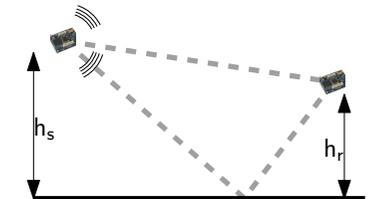
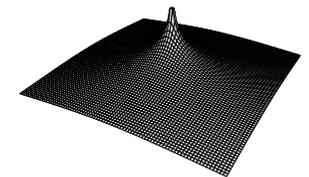
- gemeinsames Medium
- Signalabfall
  - „free space“

$$P_r = \frac{P_s G_s G_r \lambda^2}{(4\pi)^2 L d(r, s)^2}$$

- „two ray ground“

$$P_r \sim \frac{P_s G_s G_r h_s^2 h_r^2}{d(r, s)^4}$$

- plus alle möglichen Effekte
  - Abschattung, Reflexionen, Diffusion, Antennenform,...



## Einschub: Drahtlose Kommunikation

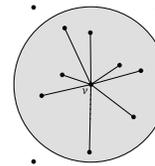
- Signalstärke am Empfänger kann ausreichen
  - um die Nachricht zu entschlüsseln
  - um zu erkennen, dass eine Nachricht gesendet wurde
  - um andere Nachrichten zu stören
- Verbindungen („Links“)
  - Knoten können prinzipiell Nachrichten austauschen
  - (oft nur: geringe Fehlerwahrscheinlichkeit)
  - heute: einfache Verbindungsmodelle (UDG, QUDG)
- Interferenz
  - Kommunikation kann nicht beliebig parallel stattfinden
  - einfache Interferenzmodelle ab übernächster Woche
  - komplexere Modelle in der zweiten Hälfte

## Unit-Disk-Graph

### Definition *Unit-Disk-Graph*

Ein Graph heißt *Unit-Disk-Graph (UDG)*, wenn es eine Einbettung  $\mathbf{p}$  in der Ebene gibt, so dass jeder Knoten genau mit allen Knoten im Abstand  $\leq 1$  verbunden ist, d. h.

$$\{u, v\} \in E \Leftrightarrow |\mathbf{p}(u) - \mathbf{p}(v)| \leq 1$$



#### ■ Achtung:

- UDG zu sein ist eine kombinatorische Eigenschaft
- Ein Unit-Disk-Graph bleibt ein Unit-Disk-Graph, auch wenn man ihn anders einbettet!
- Zu wissen, dass ein Graph ein UDG ist, heißt nicht, eine entsprechende Einbettung zu kennen
- Wir gehen von entsprechender Einbettung aus!

## Unit-Disk-Graph-Modell

### Definition *Unit-Disk-Graph-Modell*

Im *Unit-Disk-Graph-Modell* belegen die Knotenpositionen  $\mathbf{p}$  die Eigenschaft des Kommunikationsgraphen, ein Unit-Disk-Graph zu sein, d. h. es gibt einen Kommunikationsradius  $R$ , so dass

$$\{u, v\} \in E \Leftrightarrow |\mathbf{p}(u) - \mathbf{p}(v)| \leq R$$

- beschreibt zu gegebenen Positionen genau, wie Kommunikationsgraph aussieht
- Vorstellung: alle Sender haben eine gemeinsame maximale Sendereichweite  $R$
- unrealistisch, aber gut zu analysieren

## $d$ -Quasi-Unit-Disk-Graph

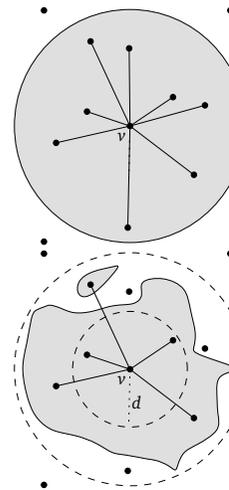
### Definition *$d$ -Quasi-Unit-Disk-Graph*

Ein Graph heißt  *$d$ -Unit-Disk-Graph ( $d$ -QUDG)* für  $d \leq 1$ , wenn es eine Einbettung  $\mathbf{p}$  in die Ebene gibt, so dass jeder Knoten nur mit Knoten in Abstand  $\leq 1$  verbunden ist, darunter mit allen in Abstand  $\leq d$ , d. h.

$$\{u, v\} \in E \Rightarrow |\mathbf{p}(u) - \mathbf{p}(v)| \leq 1$$

und

$$\{u, v\} \notin E \Rightarrow |\mathbf{p}(u) - \mathbf{p}(v)| > d$$



# Geographisches Routing: Problem



**Gegeben:** Eingebetteter Unit-Disk-Graph  $G = (V, E)$ , zwei Knoten  $s, t \in V$ .

**Gesucht:** Positionsbewusste Routingstrategie, um ein Paket, das die Position  $p(t)$  enthält, von  $s$  nach  $t$  zu bringen.

- Es ist erlaubt, „etwas“ Routinginformationen im Paket zu speichern (neben der Zielposition)

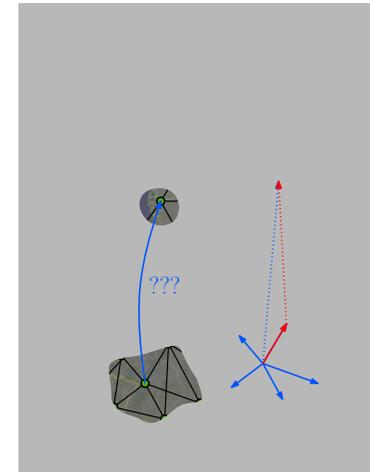
# Greedy Routing



## Greedy Routing

Leite Paket an den Nachbarn, der dem Ziel am nächsten ist.

Was, wenn es nicht weitergeht?



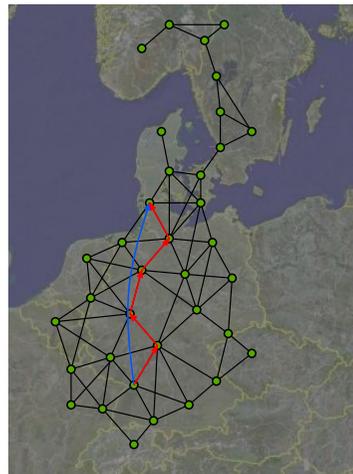
# Greedy Routing



## Greedy Routing

Leite Paket an den Nachbarn, der dem Ziel am nächsten ist.

Was, wenn es nicht weitergeht?



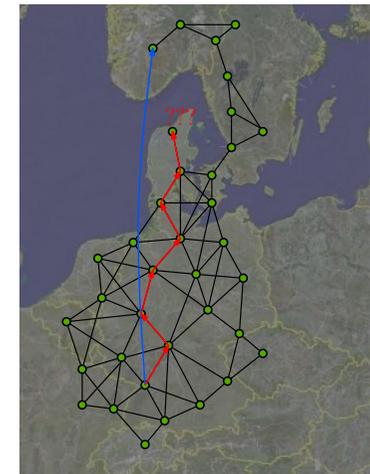
# Greedy Routing



## Greedy Routing

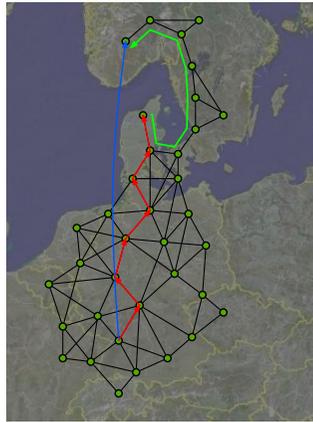
Leite Paket an den Nachbarn, der dem Ziel am nächsten ist.

Was, wenn es nicht weitergeht?



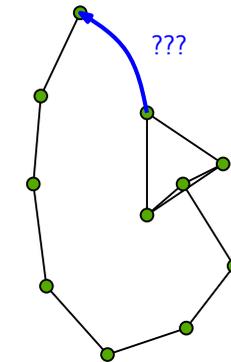
## Alte Bekannte

Idee: Irgendwas mit Rechte-Hand-Regel?



## Alte Bekannte

Idee: Irgendwas mit Rechte-Hand-Regel?



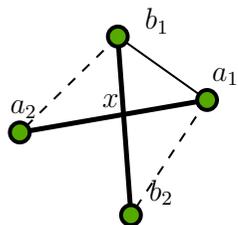
Was haben Irrgärten, was UDG nicht haben?

## Planare Subgraphen

### Lemma

Jeder eingebettete zusammenhängende Unit-Disk-Graph hat einen zusammenhängenden kreuzungsfreien Teilgraphen<sup>a</sup>.

<sup>a</sup>hier immer: geradlinig gezeichnet



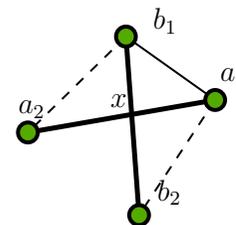
- Betrachte Kreuzung  $x$  von  $\{a_1, a_2\}$  und  $\{b_1, b_2\}$
- o.B.d.A.  $|a_1 - x| \leq 0.5$  und  $|b_1 - x| \leq 0.5$   
 $\Rightarrow |b_1 - a_1| \leq 1$
- $|a_1 - b_2| + |a_2 - b_1| \leq 2$ 
  - $|a_1 - b_2| \leq 1$  oder  $|a_2 - b_1| \leq 1$
- eine der kreuzenden Kanten kann entfernt werden
- Das Lemma gilt für d-UDGs für alle  $d > 1/\sqrt{2}$  (ohne Beweis)

## Planare Subgraphen

### Lemma

Jeder eingebettete zusammenhängende Unit-Disk-Graph hat einen zusammenhängenden kreuzungsfreien Teilgraphen<sup>a</sup>.

<sup>a</sup>hier immer: geradlinig gezeichnet

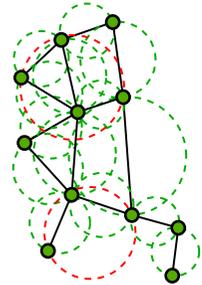


- Betrachte Kreuzung  $x$  von  $\{a_1, a_2\}$  und  $\{b_1, b_2\}$
- o.B.d.A.  $|a_1 - x| \leq 0.5$  und  $|b_1 - x| \leq 0.5$   
 $\Rightarrow |b_1 - a_1| \leq 1$
- $|a_1 - b_2| + |a_2 - b_1| \leq 2$ 
  - $|a_1 - b_2| \leq 1$  oder  $|a_2 - b_1| \leq 1$
- eine der kreuzenden Kanten kann entfernt werden
- Das Lemma gilt für d-UDGs für alle  $d > 1/\sqrt{2}$  (ohne Beweis)

# Gabriel Graph

## Definition

Sei  $P$  eine Menge von Punkten in der Ebene. Der *Gabriel Graph* enthält ein Punktepaar genau dann als Kante, wenn der kleinste Kreis, der beide Punkte enthält, keine weiteren Punkte enthält.

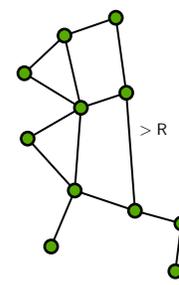


- Gabriel Graph ist planar, aber kann „lange“ Kanten enthalten
  - schränke UDG auf GG-Kanten ein!
  - $UDG \cap GG$  ist lokal entscheidbar
- $UDG \cap GG$  ist planar
- $UDG \cap GG$  ist zshg.  $\Leftrightarrow$  UDG ist zshg.
- Beweise übernächste Woche!
- QUDG: Cross-Link-Detection-Protokolle!

# Gabriel Graph

## Definition

Sei  $P$  eine Menge von Punkten in der Ebene. Der *Gabriel Graph* enthält ein Punktepaar genau dann als Kante, wenn der kleinste Kreis, der beide Punkte enthält, keine weiteren Punkte enthält.

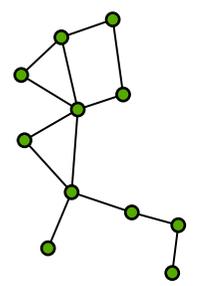


- Gabriel Graph ist planar, aber kann „lange“ Kanten enthalten
  - schränke UDG auf GG-Kanten ein!
  - $UDG \cap GG$  ist lokal entscheidbar
    - beide Enden „sehen“ störende Knoten
- $UDG \cap GG$  ist planar
- $UDG \cap GG$  ist zshg.  $\Leftrightarrow$  UDG ist zshg.
- Beweise übernächste Woche!
- QUDG: Cross-Link-Detection-Protokolle!

# Gabriel Graph

## Definition

Sei  $P$  eine Menge von Punkten in der Ebene. Der *Gabriel Graph* enthält ein Punktepaar genau dann als Kante, wenn der kleinste Kreis, der beide Punkte enthält, keine weiteren Punkte enthält.

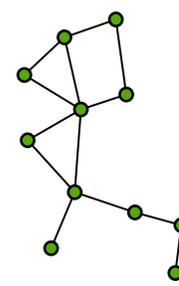


- Gabriel Graph ist planar, aber kann „lange“ Kanten enthalten
  - schränke UDG auf GG-Kanten ein!
  - $UDG \cap GG$  ist lokal entscheidbar
    - beide Enden „sehen“ störende Knoten
- $UDG \cap GG$  ist planar
- $UDG \cap GG$  ist zshg.  $\Leftrightarrow$  UDG ist zshg.
- Beweise übernächste Woche!
- QUDG: Cross-Link-Detection-Protokolle!

# Gabriel Graph

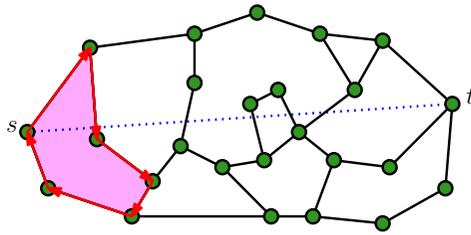
## Definition

Sei  $P$  eine Menge von Punkten in der Ebene. Der *Gabriel Graph* enthält ein Punktepaar genau dann als Kante, wenn der kleinste Kreis, der beide Punkte enthält, keine weiteren Punkte enthält.



- Gabriel Graph ist planar, aber kann „lange“ Kanten enthalten
  - schränke UDG auf GG-Kanten ein!
  - $UDG \cap GG$  ist lokal entscheidbar
    - beide Enden „sehen“ störende Knoten
- $UDG \cap GG$  ist planar
- $UDG \cap GG$  ist zshg.  $\Leftrightarrow$  UDG ist zshg.
- Beweise übernächste Woche!
- QUDG: Cross-Link-Detection-Protokolle!

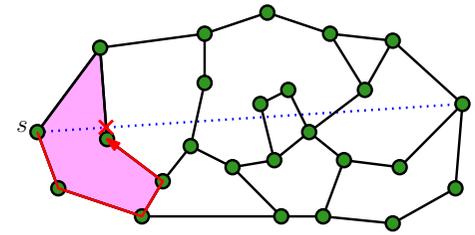
## Facettenrouting (FR)



### Facettenrouting [Kranakis et al. '99]

- Erkunde Facette, in die  $\vec{st}$  zeigt
- Kehre zu Schnitt mit  $\vec{st}$  zurück, der  $t$  am nächsten ist
- Wechsle zur angrenzenden Facette

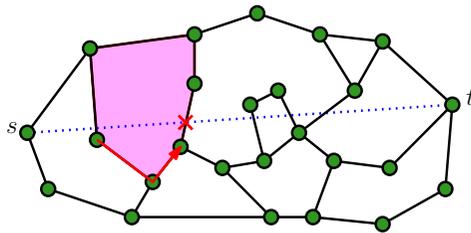
## Facettenrouting (FR)



### Facettenrouting [Kranakis et al. '99]

- Erkunde Facette, in die  $\vec{st}$  zeigt
- Kehre zu Schnitt mit  $\vec{st}$  zurück, der  $t$  am nächsten ist
- Wechsle zur angrenzenden Facette

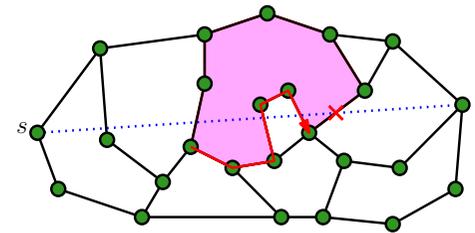
## Facettenrouting (FR)



### Facettenrouting [Kranakis et al. '99]

- Erkunde Facette, in die  $\vec{st}$  zeigt
- Kehre zu Schnitt mit  $\vec{st}$  zurück, der  $t$  am nächsten ist
- Wechsle zur angrenzenden Facette

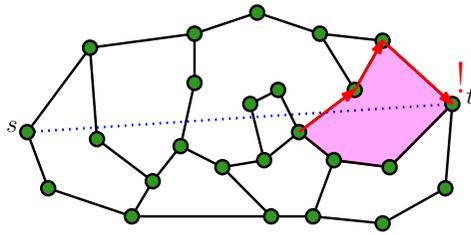
## Facettenrouting (FR)



### Facettenrouting [Kranakis et al. '99]

- Erkunde Facette, in die  $\vec{st}$  zeigt
- Kehre zu Schnitt mit  $\vec{st}$  zurück, der  $t$  am nächsten ist
- Wechsle zur angrenzenden Facette

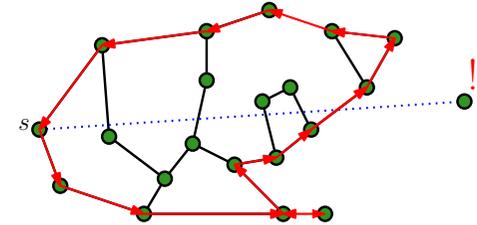
## Facettenrouting (FR)



### Facettenrouting [Kranakis et. al. '99]

- Erkunde Facette, in die  $\vec{st}$  zeigt
- Kehre zu Schnitt mit  $\vec{st}$  zurück, der  $t$  am nächsten ist
- Wechsle zur angrenzenden Facette

## Facettenrouting (FR)

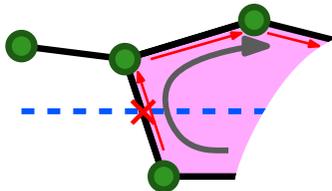


### Fehlerbehandlung

- Was, wenn kein besserer Schnitt gefunden wird?
- Schicke Paket mit Fehlermeldung an  $s$  zurück
- einfach wieder per **Facettenrouting**

## Regeln des Facettenroutings

- Routinginformation komplett in Nachricht enthalten
  - Start- und Zielkoordinaten
  - bester Übergangsknoten zur nächsten Facette
- Vollständig lokal
  - Positionen der Nachbarknoten reichen aus
  - Facettenerkundung nur implizit durch Linke-Hand-Regel



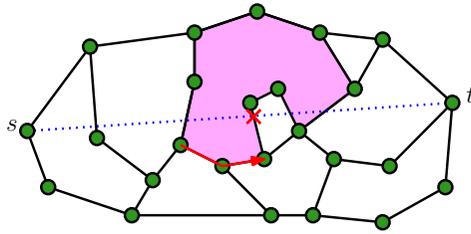
## Korrektheitsbeweis und Laufzeit

### Satz

Facettenrouting findet in  $O(n)$  Schritten zum Ziel oder erkennt fehlenden Zusammenhang.

- Beweis:
  - Jede Facette wird maximal einmal behandelt
    - Facetten ohne Schnitt mit  $\vec{st}$  fallen weg
    - sortiere andere Facetten nach letztem Schnitt mit  $\vec{st}$
    - Facetten werden nur aufsteigend besucht!
  - jede Kante wird maximal viermal genutzt
    - zweimal in jeder anliegenden Facette (Erkundung, Rückkehr zum besten Schnitt)
  - Euler: Planare Graphen haben maximal  $3n - 6 \in O(n)$  Kanten
  - Fehlermeldung kann Aufwand verdoppeln

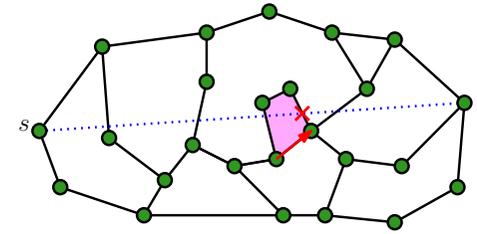
## Vereinfachung Facettenrouting



### Vereinfachtes Facettenrouting

- Erkunde Facette, in die  $\vec{st}$  zeigt
- Sobald besserer Schnitt mit  $\vec{st}$  gefunden ist
  - Wechsle zur angrenzenden Facette
- beende, wenn Facette keinen besseren Schnitt enthält
  
- Korrekt, aber asymptotisch nicht besser! (ohne Beweis)

## Vereinfachung Facettenrouting



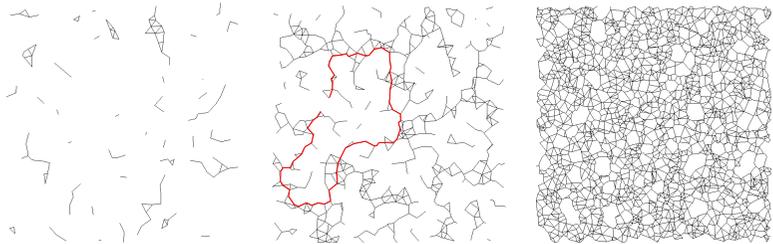
### Vereinfachtes Facettenrouting

- Erkunde Facette, in die  $\vec{st}$  zeigt
- Sobald besserer Schnitt mit  $\vec{st}$  gefunden ist
  - Wechsle zur angrenzenden Facette
- beende, wenn Facette keinen besseren Schnitt enthält
  
- Korrekt, aber asymptotisch nicht besser! (ohne Beweis)

## Bessere Analyse

Facettenrouting findet in  $O(n)$  Schritten zum Ziel oder erkennt fehlenden Zusammenhang. Was, wenn Start und Ziel dicht beieinander liegen?

- Nicht immer gibt es einen kurzen Weg!

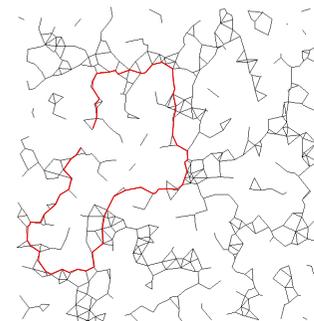


kein Zusammenhang

interessant

greedy ausreichend

## Bessere Analyse



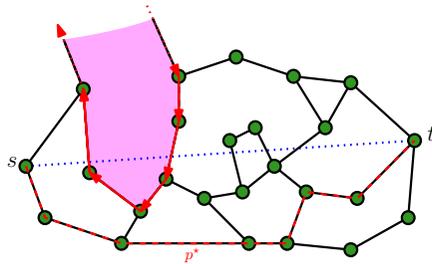
- Kosten des kürzesten Weges  $c(p^*)$
- Euklidischer Abstand  $|\mathbf{p}(s) - \mathbf{p}(t)|$
- $c(p^*) \gg |\mathbf{p}(s) - \mathbf{p}(t)|$

Kann man wenigstens so routen, dass man nicht beliebig schlechter als der kürzeste Weg ist?

## Bessere Analyse? Unmöglich!

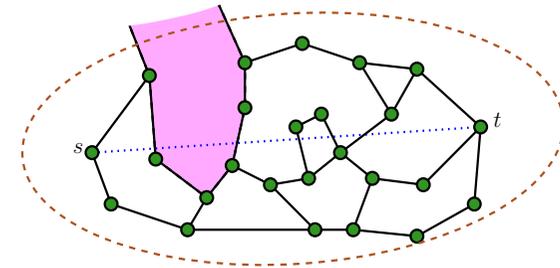
### Problem

Facettenrouting lässt keine Abschätzung der Weglänge in Abhängigkeit vom kürzesten Weg zu!



Gibt es einen besseren Routingalgorithmus?

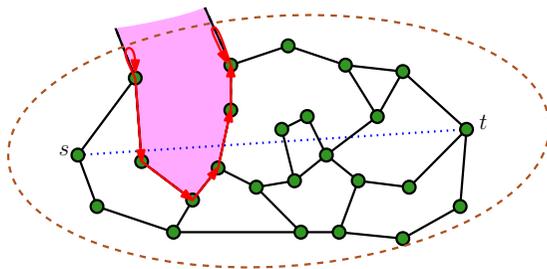
## Beschränktes Facettenrouting (BFR)



### Lemma

Ein Weg  $p$  zwischen  $s$  und  $t$  mit Länge  $c(p)$  liegt vollständig innerhalb der Ellipse mit Foci  $s, t$  und Hauptachse  $c(p)$ . Diese Ellipse ist Menge aller Punkte  $x$  mit  $|p(x) - p(s)| + |p(x) - p(t)| \leq c(p)$ .

## Beschränktes Facettenrouting (BFR)



### Beschränktes Facettenrouting (BFR)

Ist die Länge  $c(p^*)$  des kürzesten Weges bekannt, beschränke Facettenrouting durch Ellipse mit Foci  $s$  und  $t$  und Länge der Hauptachse  $c(p^*)$ .

## The secret ingredient: $\Omega(1)$ -Modell

### Definition: $\Omega(1)$ -Modell

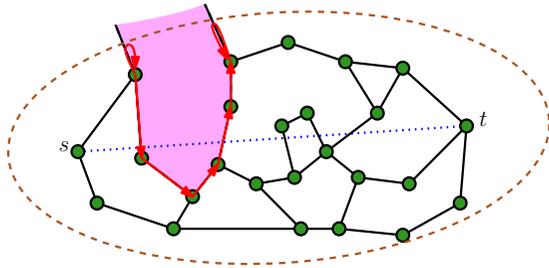
Im  $\Omega(1)$ -Modell ist der minimale Abstand zwischen zwei Knoten durch eine Konstante  $d_0$  nach unten beschränkt.

### Lemma

Im  $\Omega(1)$ -Modell besucht das beschränkte Facettenrouting nur  $O(c(p^*)^2)$  Knoten.

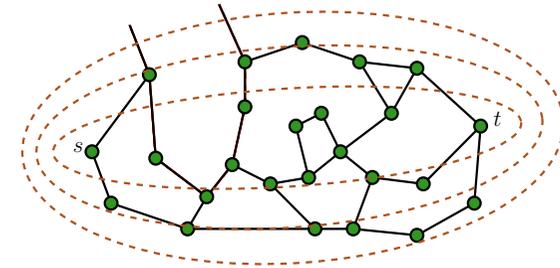
- Beweis:
  - Ellipse ist vollständig in Kreis mit Durchmesser  $c(p^*)$  um Mitte von  $s$  und  $t$  enthalten.
  - In einen Kreis mit Durchmesser  $d$  passen nur  $O((d/d_0)^2)$  Punkte mit paarweisem Abstand  $d_0$
  - $d_0$  konstant  $\Rightarrow O(c(p^*)^2)$  Knoten im Kreis!

## Beschränktes Facettenrouting (BFR)



Woher sollte man wissen, wie lang der kürzeste Weg zwischen Start- und Zielknoten ist? Was macht man, wenn man es nicht weiß?

## Adaptives Facettenrouting (AFR)



### Adaptives Facettenrouting (AFR)

Ist die Weglänge  $c(p^*)$  zum Ziel nicht bekannt, führe BFR mit  $c_0 = 2 \cdot |st|$  durch. Schlägt das Routing fehl, starte BFR mit  $c_1 = 2 \cdot c_0, c_2 = 2 \cdot c_1 \dots (c_i = 2^i \cdot c_0)$

## Adaptives Facettenrouting – Analyse

### Satz

Im  $\Omega(1)$ -Modell erreicht das Adaptive Facettenrouting das Ziel mit Kosten in  $O(c^2(p^*))$ , wenn die optimale Route Kosten  $c(p^*)$  hat.

#### Beweis

- spätestens in Runde  $k$  erfolgreich mit  $c_{k-1} \leq c(p^*) \leq c_k$
- $\text{cost}_{\text{AFR}} = \sum_{i=0}^k c_i^2 = \sum_{i=0}^k (2^i c_0)^2 = \sum_{i=0}^k 4^i c_0^2$
- $= \frac{4^{k+1}-1}{3} c_0^2 < \frac{16}{3} (2^{k-1} c_0)^2 = \frac{16}{3} c_{k-1}^2 \leq \frac{16}{3} c^2(p^*)$

## Adaptives Facettenrouting – Analyse

### Bemerkung

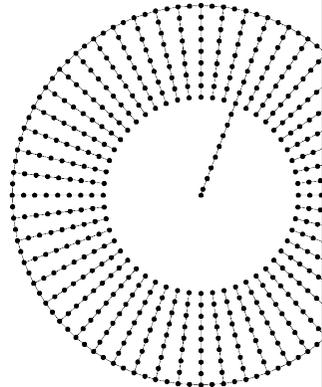
Fehlender Zusammenhang wird in  $O(n' \log n')$  Schritten erkannt, wenn  $n'$  die Anzahl der Knoten in der Zhgs.-Komponente von  $s$  ist.

- Entferntester Knoten ist maximal  $n'$  Funkradien von  $s$  entfernt
- Nach  $O(\log n')$  Ellipsenverdoppelungen alle Knoten enthalten
  - Erkennung: Paket „stößt“ nicht mehr gegen die Ellipse
- $\Rightarrow O(\log n')$  BFR-Phasen mit je maximal  $O(n')$  Schritten

# $O(c(p^*)^2)$ ist worst-case-optimal



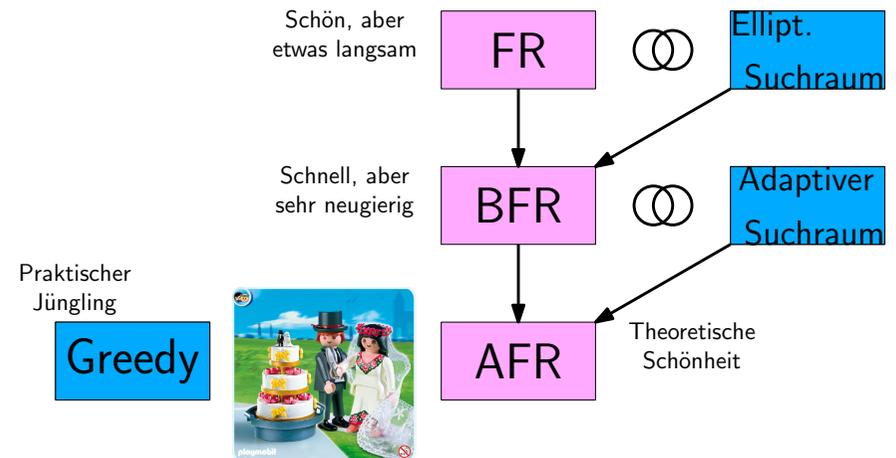
- $c$  Pfade vom Rand Richtung Mitte
  - jeder hat Länge  $\Theta(c)$
- Ziel: Knoten in der Mitte
- Start: Beliebiger Knoten auf dem Ring
- Ohne Routinginformationen könnte jeder Pfad zur Mitte führen
- Verfahren muss  $\Omega(c)$  Pfade testen.
- Besten Weg hat Länge  $O(c)$
- Kosten:  $\Omega(c^2)$  statt  $O(c)$



## Satz

AFR ist (asymptotisch) worst-case-optimal.

# Überblick der bish. Algorithmen



# Greedy AFR (GAFR)



- Eigentlich ist Facettenrouting immer nur „Plan B“
  - Greedy Routing schneller, weniger fehleranfällig
  - Greedy Routing kann alle Verbindungen nutzen
- Verbinde Greedy Routing und Facettenrouting
  - 1 Route greedy, bis Paket an Knoten  $p$  steckenbleibt
  - 2 Starte adaptives Facettenrouting für Start  $p$ , Ziel  $t$
  - 3 Stoppe, sobald *eine Facette* passiert ist
  - 4 Gehe zurück zu 1.

## Satz

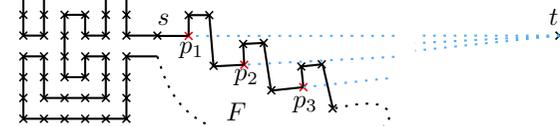
Greedy AFR ist nicht asymptotisch worst-case-optimal.

# Suboptimalität Greedy+AFR



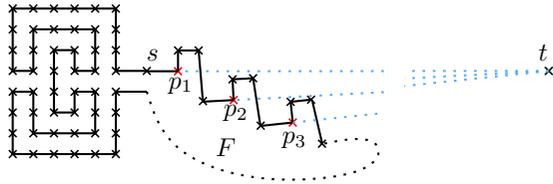
- Erinnerung:
  - AFR zerfällt in BFR-Schritte verschiedener Ellipsen.
  - In jedem BFR-Durchgang wird jede Facette nur einmal besucht
  - Aufwand linear in der Anzahl der Knoten (der Fläche der Ellipse)
- Greedy-Schritte zerstören diese Eigenschaft!
- Beweisskizze (betrachte „passende“ Ellipse):

- Instanz mit Kosten  $\in \Theta(c_k^3)$ :



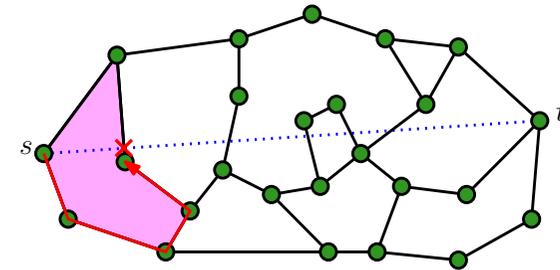
- Facettenrouting startet an  $p_1, p_2, p_3, \dots$  ( $\Theta(c_k)$  mal)
- Facette  $F$  enthält  $\Theta(c_k^2)$  Knoten.

## Zurück zum Facettenrouting



- Was läuft falsch?
  - Selbst „bester“ Schnittpunkt von  $\vec{p_i t}$  mit Facettenrand kein guter Startpunkt für Greedy-Routing.
  - Greedy-Routing trifft immer wieder auf dieselbe Facette.
  - Facettenrouting erkundet immer wieder dieselbe Facette.
- Facettenrouting lässt sich so anpassen, dass das nicht passiert.

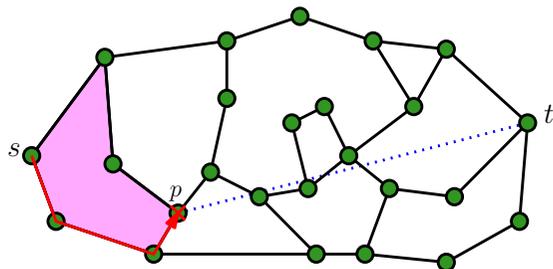
## Optimiertes Facettenrouting (OFR)



### Herkömmliches Facettenrouting

- Erkunde Facette, in die  $\vec{st}$  zeigt
- Kehre zu Schnitt mit  $\vec{st}$  zurück, der  $t$  am nächsten ist
- Wechsle zur angrenzenden Facette

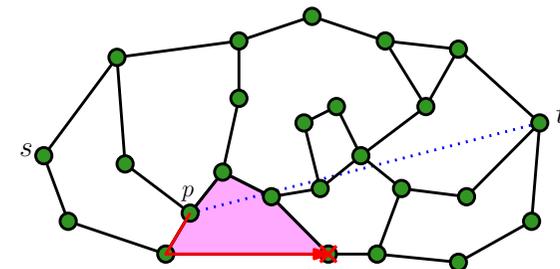
## Optimiertes Facettenrouting (OFR)



### Optimiertes Facettenrouting [Wattenhofer et al. '03]

- Erkunde Facette, in die  $\vec{st}$  zeigt
- Kehre zum Punkt zurück, der  $t$  am nächsten ist
- Wechsle zur angrenzenden Facette

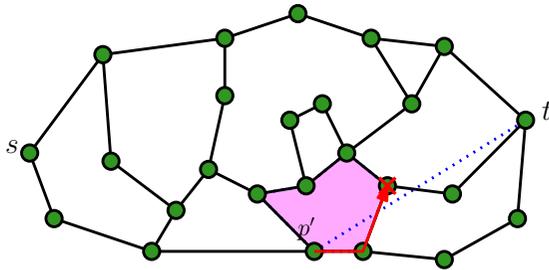
## Optimiertes Facettenrouting (OFR)



### Optimiertes Facettenrouting [Wattenhofer et al. '03]

- Erkunde Facette, in die  $\vec{st}$  zeigt
- Kehre zum Punkt zurück, der  $t$  am nächsten ist
- Wechsle zur angrenzenden Facette

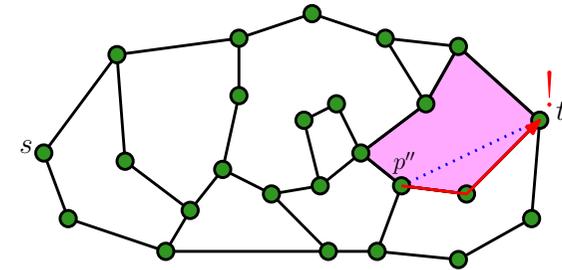
## Optimiertes Facettenrouting (OFR)



### Optimiertes Facettenrouting [Wattenhofer et al. '03]

- Erkunde Facette, in die  $\vec{st}$  zeigt
- Kehre zum Punkt zurück, der  $t$  am nächsten ist
- Wechsle zur angrenzenden Facette

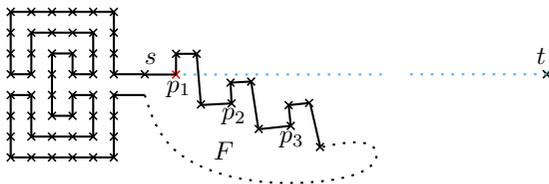
## Optimiertes Facettenrouting (OFR)



### Optimiertes Facettenrouting [Wattenhofer et al. '03]

- Erkunde Facette, in die  $\vec{st}$  zeigt
- Kehre zum Punkt zurück, der  $t$  am nächsten ist
- Wechsle zur angrenzenden Facette

## Greedy+Optimiertes Facettenrouting (GOFR)



- Greedy Routing stockt bei  $p_1$
- Facettenrouting endet nicht in Schnitt von  $\vec{p_1 t}$  mit Facettenrand, sondern bei  $p_t$
- Greedy Routing kommt nicht wieder an den Rand von  $F$ .

## Optimiertes adaptives FR (OAFR)

### Satz

Für das optimierte Facettenrouting gelten alle Aussagen bis auf die Suboptimalität in Verbindung mit Greedy-Routing analog.

- Optimiertes FR findet in  $O(n)$  Schritten zum Ziel.
- Beschränktes optimiertes Facettenrouting mit geschätzter Pfadlänge  $c$  findet in  $c^2$  Schritten zum Ziel oder erkennt fehlenden Zusammenhang.
- Adaptives optimiertes FR findet in  $c^2(p^*)$  zum Ziel.
- Adaptives optimiertes FR erkennt fehlenden Zusammenhang in  $O(n' \log n')$  Schritten.

## Greedy + Optimiertes adaptives FR (GOAFR)

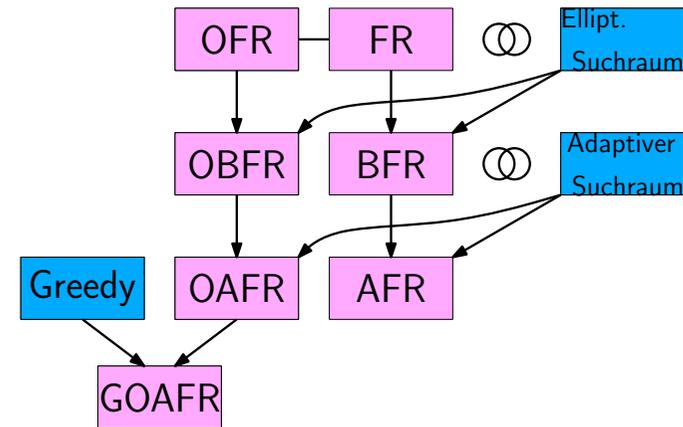
### Greedy + Optimiertes adaptives Facettenrouting

- 1 Route greedy, bis Paket an Knoten  $p$  steckenbleibt
- 2 Starte optimiertes, adaptives FR für Start  $p$ , Ziel  $t$
- 3 Stoppe, sobald *eine Facette* passiert ist
- 4 Gehe zurück zu 1.

### Satz

GOAFR ist asymptotisch worst-case-optimal. (Ohne Beweis)

## Überblick der Zusammenhänge



## Denkanstoß

Können wir irgendwas davon noch in 3D verwenden?

- Modelle?
- Greedy Routing?
- Facettenrouting?
- Schranken?



## Empfehlung weiterführende Literatur

F. Kuhn, R. Wattenhofer, Y. Zhang, A. Zollinger:  
*Geometric Ad-Hoc Routing: Of Theory and Practice.*  
In: Proceedings of the 22nd ACM Symposium on Principles of Distributed Computing (PODC '03), 2003.

- GOAFR+ Algorithmus
  - asymptotisch worst-case optimal
  - kommt ohne  $\Omega(1)$ -Modell Annahme aus
- Behandlung verschiedener Kostenfunktionen

## Was mitnehmen?

- Neue Modelle!
  - UDG: stark idealisiert, aber sehr mächtig
  - QUDG: etwas allgemeiner, immer noch idealisiert
  - Gabriel Graph: planar und lokal berechenbar
  - $\Omega(1)$ -Modell: vernünftige Annahme zur Analyse!
  
- Zahlreiche Ansätze zum Georouting
  - Greedy Routing
  - Facettenrouting auf planaren Graphen in vielen Varianten
    - Kombinationen verschiedener Ansätze

## Literatur zur Vorlesung

- ① E. Kranakis, H. Singh, J. Urrutia: *Compass Routing on Geometric Networks*. In Proceedings of the 11th Canadian Conference on Computational Geometry, 1999
  
- ② F. Kuhn, R. Wattenhofer, A. Zollinger: *Worst-Case Optimal and Average-Case Efficient Geometric Ad-Hoc Routing*. In: Proceedings of the 4th ACM International Symposium on Mobile Ad-Hoc Networking and Computing (MobiHoc '03), 2003
  
- ③ P. Santi: *Topology Control in Wireless Ad Hoc and Sensor Networks*. Wiley, 2005