Karlsruher Institut für Technologie

Algorithmen für Routenplanung

4. Termin, Sommersemester 2012

Daniel Delling | 7. Mai 2012

Institut für Theoretische Informatik · Algorithmik I · Prof. Dr. Dorothea Wagner

Wiederholung

A*-Algorithmus

- Benutze Potentialfunktion $\pi : V \to \mathbb{R}$ mit

$$\text{len}(u, v) - \pi(u) + \pi(v) \geq 0 \qquad \forall (u, v) \in E$$

- Keys in der Priority-Queue sind $d[u] + \pi(u)$ für alle $u \in V$
- Wenn $\pi(t) = 0$, dann $\pi(u) \leq d(u, t)$
- Je besser untere Schranke für $d(u, t)$ desto besser die Zielrichtung

A* $\leftrightarrow$ Dijkstra

- Definiere $G_\pi = (V, E, \text{len}_\pi)$ mit

$$\text{len}_\pi(u, v) := \text{len}(u, v) - \pi(u) + \pi(v)$$

- Dann: Dijkstra auf G_π entspricht A* auf G

Wiederholung

Frage: Was ist eine gute Potentialfunktion für A*?

Idee: Benutze Landmarken und die Dreiecksungleichung

Vorberechnung:

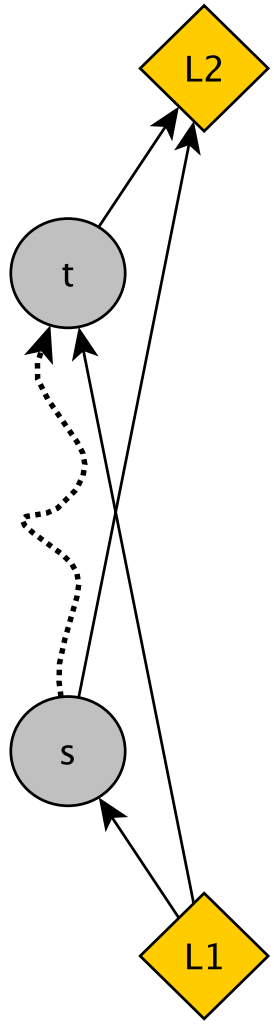
- Wähle $L \subseteq V$ ($L \approx 16$) Landmarken
- Berechne Distanz von und zu allen Landmarken

Anfrage:

- Benutze

$$\pi(u) := \max_{\ell \in L} \{\max\{d(\ell, t) - d(\ell, u), d(u, \ell) - d(t, \ell)\}\}$$

als gültiges Potential



Eine Intuition für den ALT-Suchraum

Der Suchraum von Dijkstra's Algorithmus

$$V_d(s,t) = \{v \in V \mid \text{dist}(s,v) \leq \text{dist}(s,t)\}$$

ist ein graphentheoretischer Kreis.

Eine Intuition für den ALT-Suchraum

Der Suchraum von ALT ist

$$V^L(s,t) \subseteq \{v \in V \mid \text{dist}(s,v) + \pi^L(v) \leq \text{dist}(s,t)\}$$

mit Potentialen

$$\pi_t^{l+}(u) = d(l,t) - d(l,u)$$
$$\pi_t^{l-}(u) = d(u,l) - d(t,l)$$

Wir betrachten jedes $l \in L$ einzeln

$$V_{l+}(s,t) = \{v \in V \mid \text{dist}(s,v) + \text{dist}(v,l) \leq \text{dist}(s,t) + \text{dist}(t,l)\}$$

$$V_{l-}(s,t) = \{v \in V \mid \text{dist}(s,v) - \text{dist}(l,v) \leq \text{dist}(s,t) - \text{dist}(l,t)\}$$

Eine Intuition für den ALT-Suchraum

$$V_{l^+}(s,t) = \{v \in V \mid \text{dist}(s,v) + \text{dist}(v,l) \leq \text{dist}(s,t) + \text{dist}(t,l)\}$$

ist eine graphentheoretische Ellipse.

$$V_{l^-}(s,t) = \{v \in V \mid \text{dist}(s,v) - \text{dist}(l,v) \leq \text{dist}(s,t) - \text{dist}(l,t)\}$$

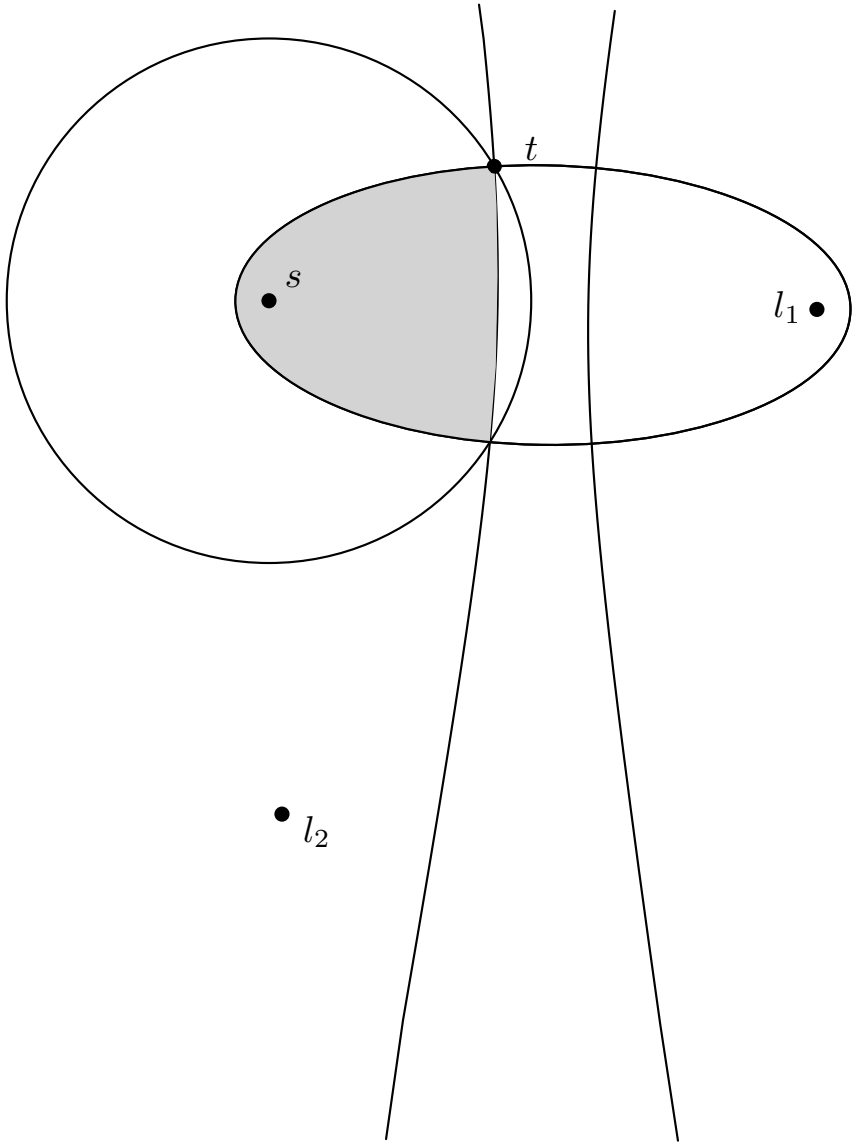
ist eine graphentheoretische Hyperbel.

Der Suchraum

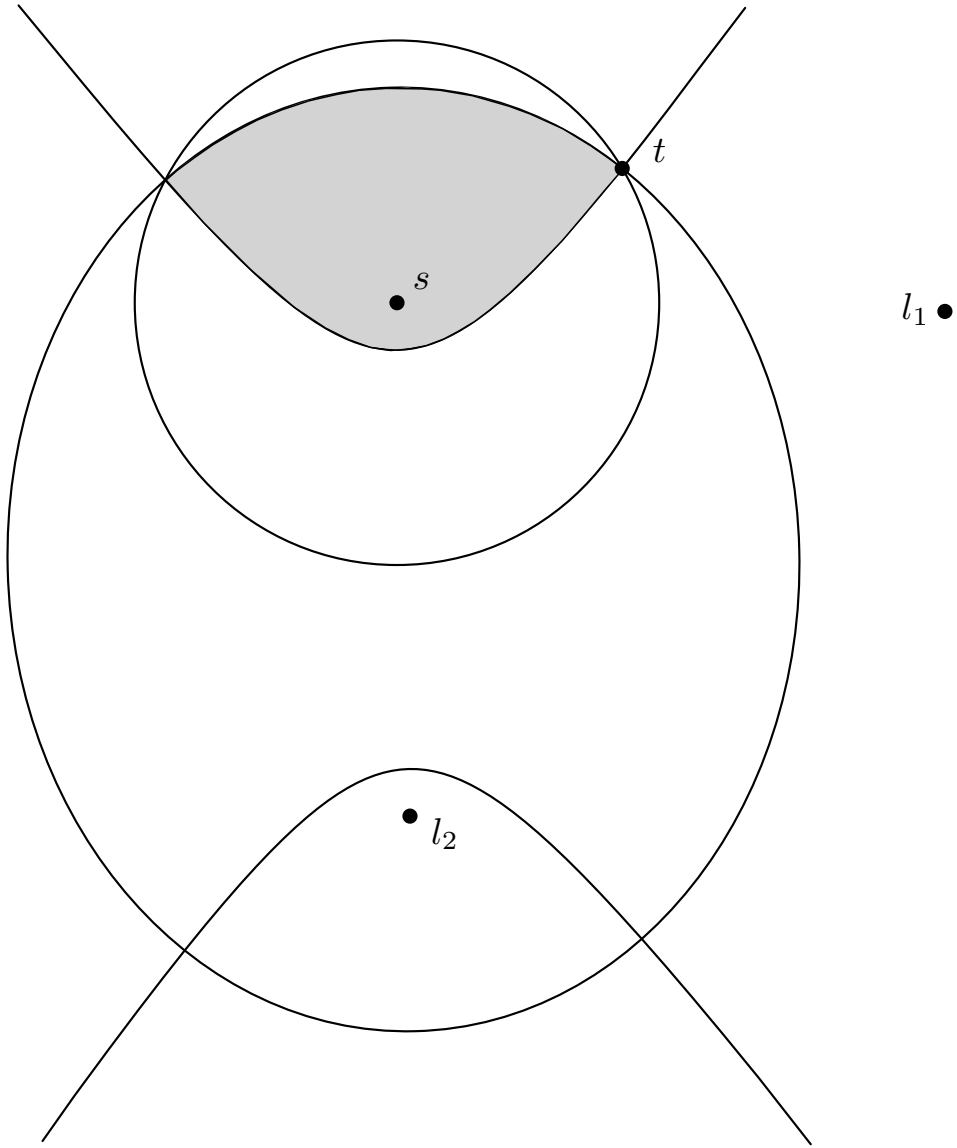
$$V^L(s,t) \subseteq \{v \in V \mid \text{dist}(s,v) + \pi^L(v) \leq \text{dist}(s,t)\}$$

ist die Schnittmenge aus den Ellipsen und Hyperbeln über alle Landmarken in L.

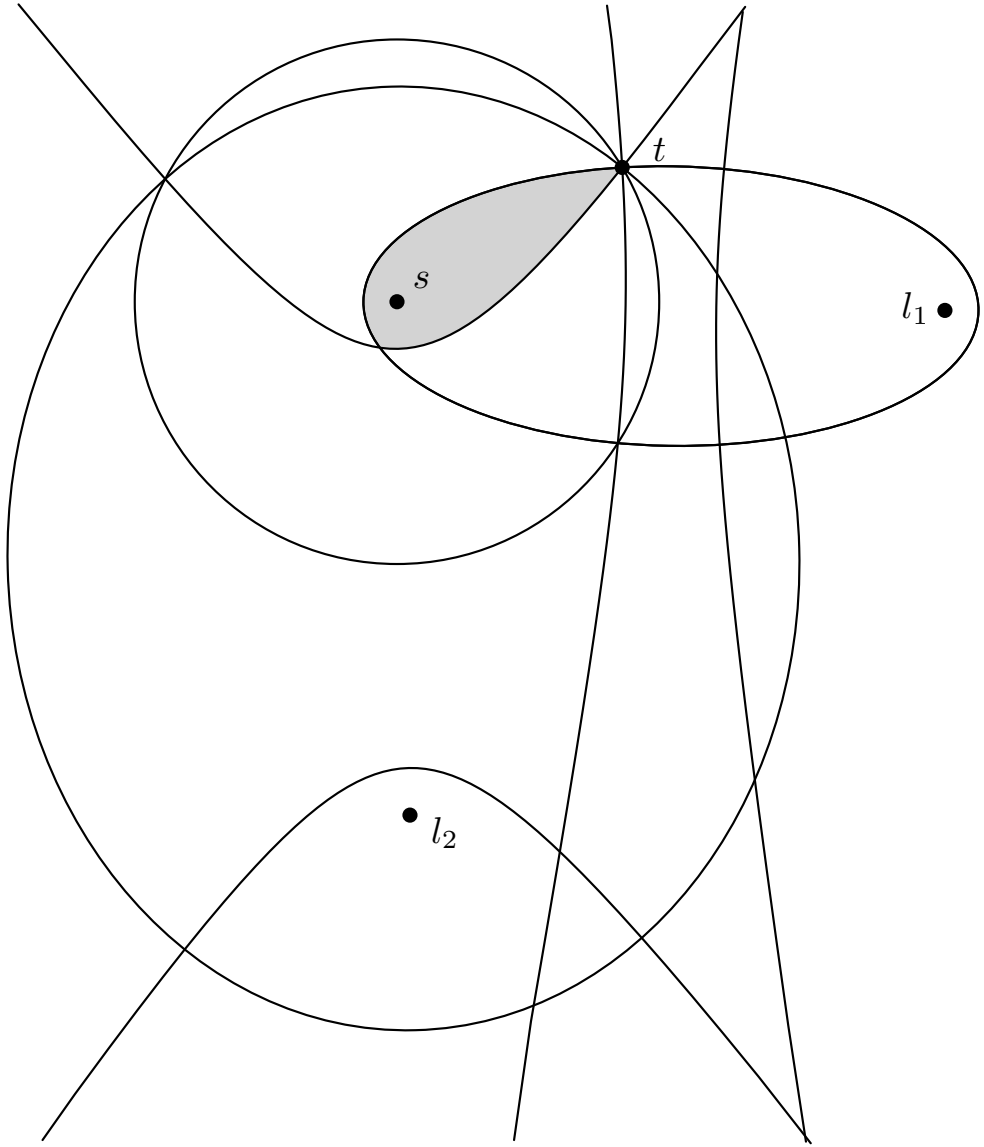
Eine Intuition für den ALT-Suchraum



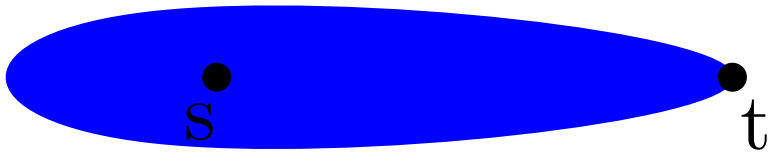
Eine Intuition für den ALT-Suchraum



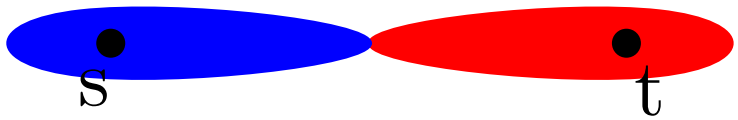
Eine Intuition für den ALT-Suchraum



Bidirektionaler A*



Bidirektionaler A*



Bidirektionaler A*

Erster Ansatz:

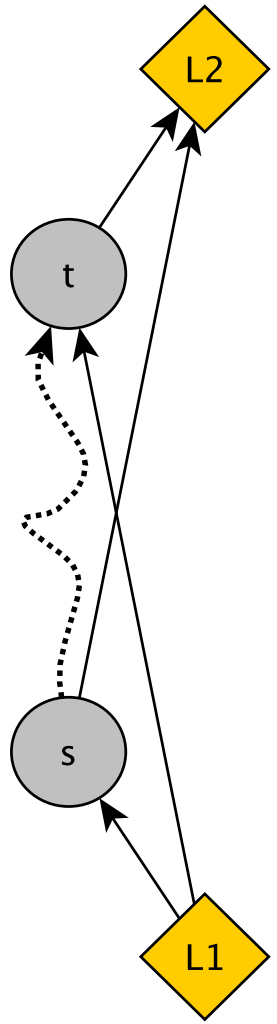
- benutze Vorwärtspot π_f und Rückwärtspot π_b

$$\pi_f(u) = \max_{\ell \in L}\{\max\{d(\ell,t) - d(\ell,u), d(u,\ell) - d(t,\ell)\}\}$$

$$\pi_b(u) = \max_{\ell \in L}\{\max\{d(\ell,u) - d(\ell,s), d(s,\ell) - d(u,\ell)\}\}$$

Problem:

- Suchen operieren auf unterschiedlichen Längenfunktionen
- konservatives Abbruchkriterium:
  - stoppe erst, wenn $\mathit{minKey}(\overrightarrow{Q}) > \mu$ oder $\mathit{minKey}(\overleftarrow{Q}) > \mu$



Bidirektionaler A*

Zweiter Ansatz:

- Wann operieren Suchen auf dem gleichen Graphen?
- wenn

$$\begin{aligned} \text{len}_{\pi_r}(v,u) &= \text{len}\,\pi_f(u,v) \\ \text{len}(u,v) - \pi_r(v) + \pi_r(u) &= \text{len}(u,v) - \pi_f(u) + \pi_f(v) \\ -\pi_r(v) + \pi_r(u) &= -\pi_f(u) + \pi_f(v) \end{aligned}$$

- $\pi_r + \pi_f \equiv \text{const.}$

Bidirektionaler A*

Idee:

- nehme Kombination aus π_f und π_r

$$p_f = \frac{\pi_f - \pi_r}{2} \qquad p_r = \frac{\pi_r - \pi_f}{2} = -p_f$$

Somit

- wie bidirektionaler Dijkstra
- aber mit $d(s,u) + p_f(u)$ und $d(v,t) + p_r(v)$ als keys
- stoppe wenn $\mathit{minKey}(\overrightarrow{Q}) + \mathit{minKey}(\overleftarrow{Q}) > \mu_{p_f} = \mu + p_f(s) - p_f(t)$
- dadurch bidirektional zielgerichtet

ALT [Goldberg et al. 04,05]

- **A***, **L**andmarken, **T**riangle inequality (Dreiecksungleich)
- bidirektionaler Landmarken-A*(2. Ansatz)
- aktive Landmarken
- pruning
- meist 16 Landmarken
- meist avoid oder maxCover Landmarken

Experimente

Eingaben:

- Straßennetzwerke
  - Europa: 18 Mio. Knoten, 42 Mio. Kanten
  - USA: 22 Mio. Knoten, 56 Mio. Kanten

Evaluation:

- Vorberechnung in Minuten und zusätzliche Bytes pro Knoten
- durchschnittlicher Suchraum (#abgearbeitete Knoten) und Suchzeiten (in *ms*) von 10 000 Zufallsanfragen

Zufallsanfragen ALT

		PREPRO		QUERY UNIDIR.			QUERY BIDIR.		
	algorithm	time [min]	space [B/n]	# settled nodes	time [ms]	spd up	# settled nodes	time [ms]	spd up
EUR	DIJKSTRA	0	0	9 114 385	5 591.6	1.0	4 764 110	2 713.2	2.1
	ALT-4	12.1	32	1 289 070	469.1	11.9	355 442	254.1	22.0
	ALT-8	26.1	64	1 019 843	391.6	14.3	163 776	127.8	43.8
	ALT-16	85.1	128	815 639	327.6	17.1	74 669	53.6	104.3
	ALT-24	145.2	192	742 958	303.7	18.4	56 338	44.2	126.5
	ALT-32	27.1	256	683 566	301.4	18.6	40 945	29.4	190.2
	ALT-64	68.2	512	604 968	288.5	19.4	25 324	19.6	285.3
USA	DIJKSTRA	0	0	11 847 523	6 780.7	1.0	7 345 846	3 751.4	1.8
	ALT-8	44.5	64	922 897	329.8	20.6	328 140	219.6	30.9
	ALT-16	103.2	128	762 390	308.6	22.0	180 804	129.3	52.4
	ALT-32	35.8	256	628 841	291.6	23.3	109 727	79.5	85.3
	ALT-64	92.9	512	520 710	268.8	25.2	68 861	48.9	138.7

Beobachtungen

- bidirektionale Suche: Beschleunigung von 2
- unidirektionaler ALT: mehr als 16 Landmarken nicht sinnvoll
- bidirektionaler ALT: verdoppelung der Landmarken halbiert den Suchraum (ungefähr)
- 16 Landmarken: Beschleunigung $\approx$ 100 für Europa
- 64 Landmarken: Beschleunigung $\approx$ 300 für Europa
- hoher Speicherverbrauch (Graph-DS: 424 MB, pro Landmarke: 144 MB, Europa)
- USA schlechter als Europa (Vermutung: schlechtere Hierarchie)

Dijkstra-Rank

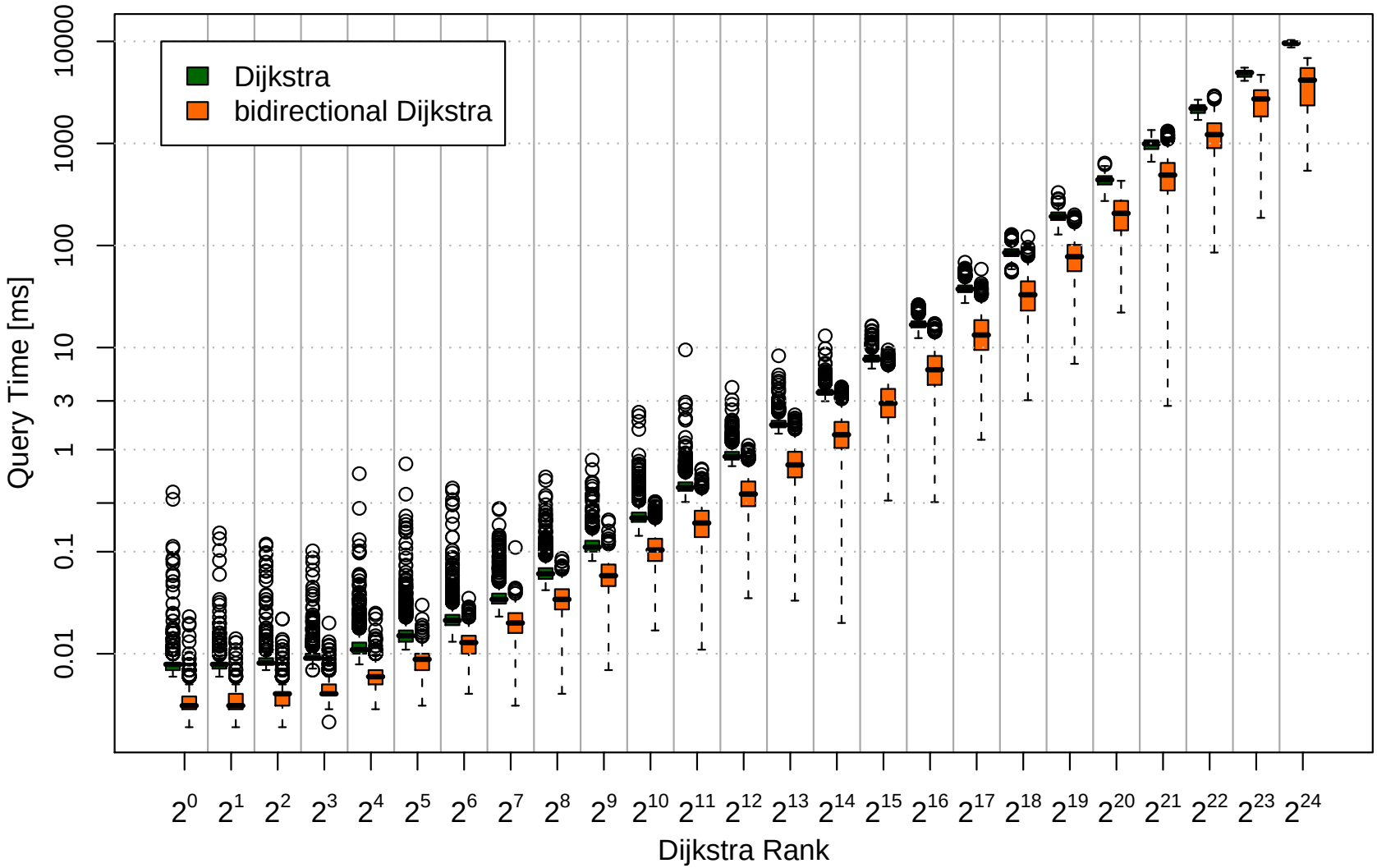
Problem:

- Zufallsanfragen geben wenig Informationen
- Wie ist die Varianz?
- Werden nahe oder ferne Anfragen beschleunigt?

Idee:

- DIJKSTRA definiert für gegebenen Startknoten Ordnung für auf den Knoten
- DIJKSTRA-Rang $r_s(u)$ eines Knoten u für gegebenes s
- wähle 1000 Startknoten und analysiere jeweils die Suchzeiten um die Knoten mit Rang $2^1, \ldots, 2^{\log n}$ zu finden
- zeichne Plot

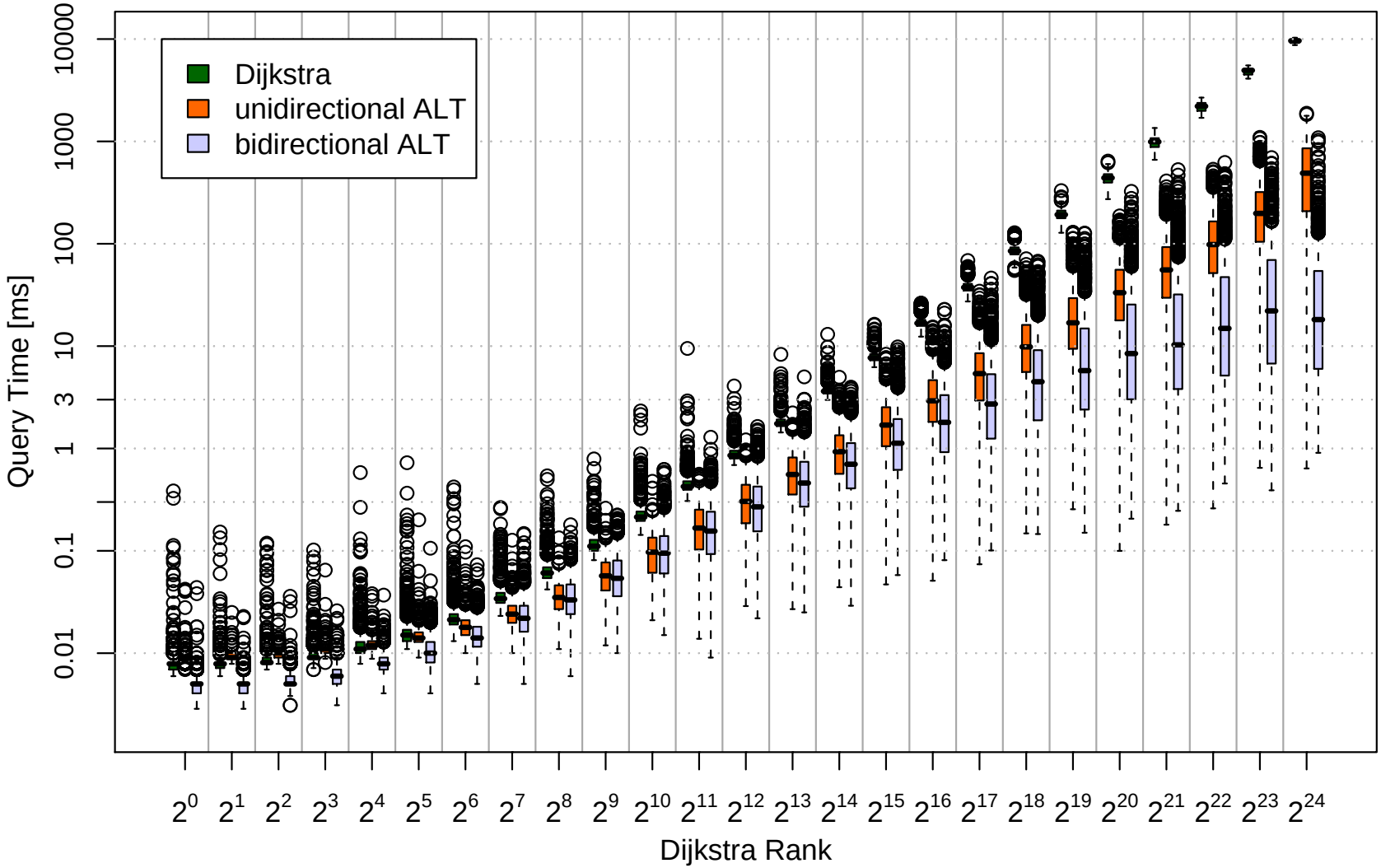
Lokale Anfragen Bidirektionale Suche



Beobachtungen

- Ausreißer bei nahen Anfragen (vor allem unidirektional)
- Beschleunigung unabhängig vom Rang (immer ca. Faktor 2)
- Varianz etwas höher als bei unidirektionaler Suche
- manche Anfragen sehr schnell

Lokale Anfragen ALT

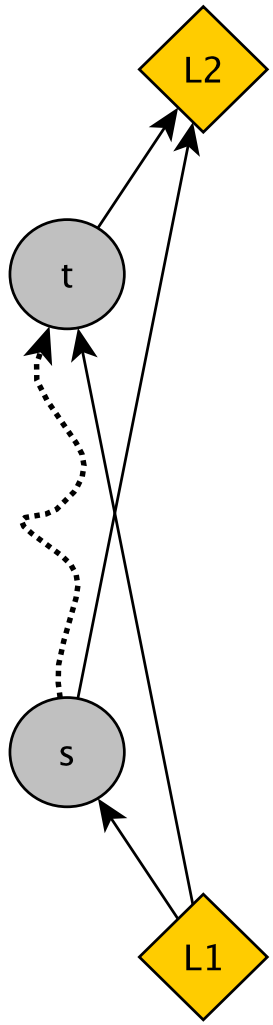


Beobachtungen

- Beschleunigung steigt mit Rang
- kaum Beschleunigung für nahe Anfragen
- hohe Varianz für ALT
- Ausreißer bis zu Faktor 100 langsamer als Median

Zusammenfassung ALT

- Zielgerichtet durch geänderte Reihenfolge, wie Knoten abgearbeitet werden
- wird erreicht durch hinzufügen eines Knotenpotentials π
- korrekt wenn $\text{len}(u, v) - \pi(u) + \pi(v) \geq 0$ für alle Kanten
- Potentiale durch Landmarken
- kann bidirektional gemacht werden
- Beschleunigung von bis zu 300 gegenüber Dijkstra
- aber hoher Platzverbrauch (Reduktion später)
- hohe Varianz (manche Anfragen haben keine guten Landmarken)



Ideensammlung

Wie Suche zielgerichtet machen?

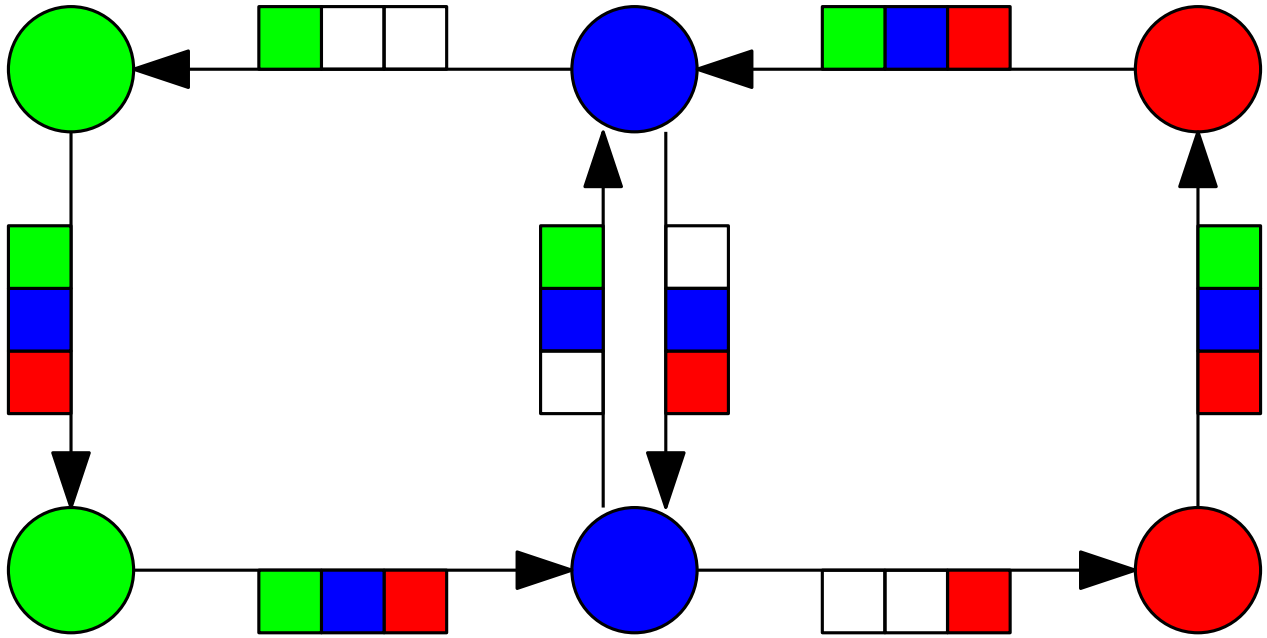
- Nichtbeachten von Kanten oder Knoten die in die “falsche” Richtung führen
- Reihenfolge in der Knoten besucht werden ändern

Jetzt: ersteres

Arc-Flags

Idee:

- partitioniere Graphen in k Zellen
- hänge Label mit k Bits an jede Kante
- gibt an, ob e für Ziele in Zielzelle T benötigt wird



Anfragen

ARC-FLAG-DIJKSTRA($G = (V, E)$, s, t, Arc-Flags $\mathrm{AF}_\cdot(\cdot)$)

```
1  d[s] = 0
2  Q.clear(), Q.add(s, 0)
3  while !Q.empty() do
4      u ← Q.deleteMin()
5      forall edges e = (u, v) ∈ E do
6          if d[u] + len(e) < d[v] and AF_T(e) = true then
7              d[v] ← d[u] + len(e)
8              if v ∈ Q then Q.decreaseKey(v, d[v])
9              else Q.insert(v, d[v])
```

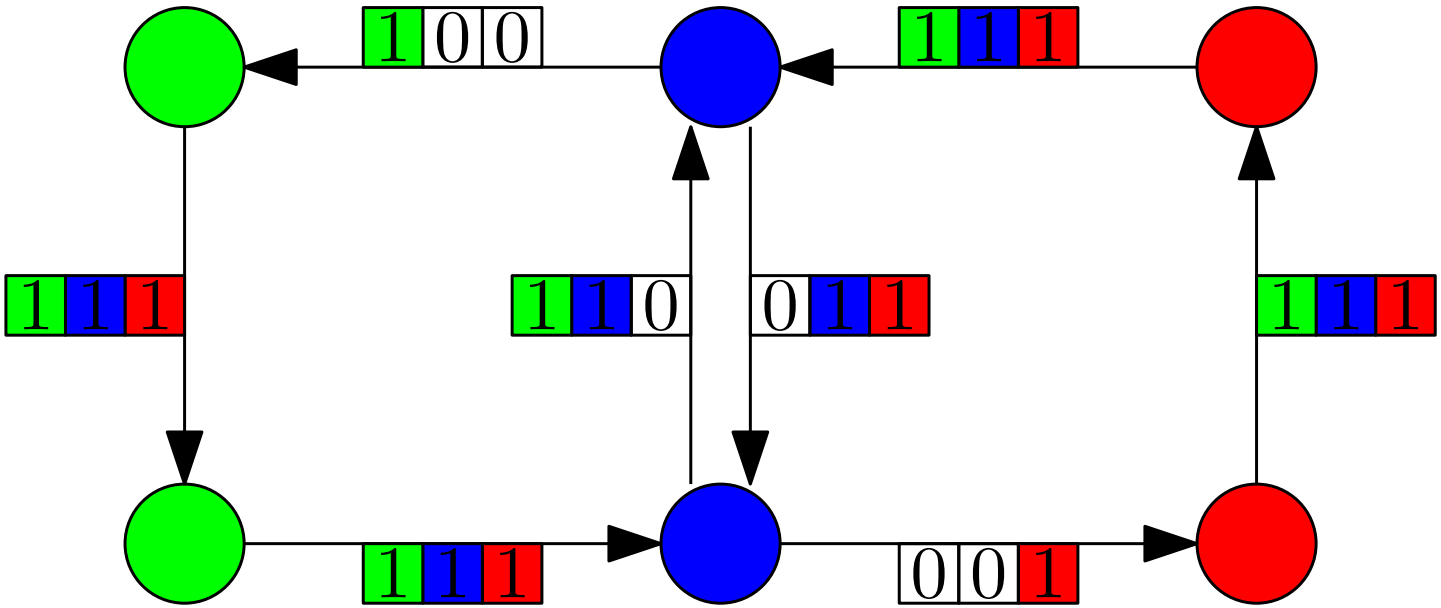
Vorberechnung

Zwei Schritte:

- Partitionierung
- setze korrekte Flaggen

Flaggenberechnung: Erster Versuch

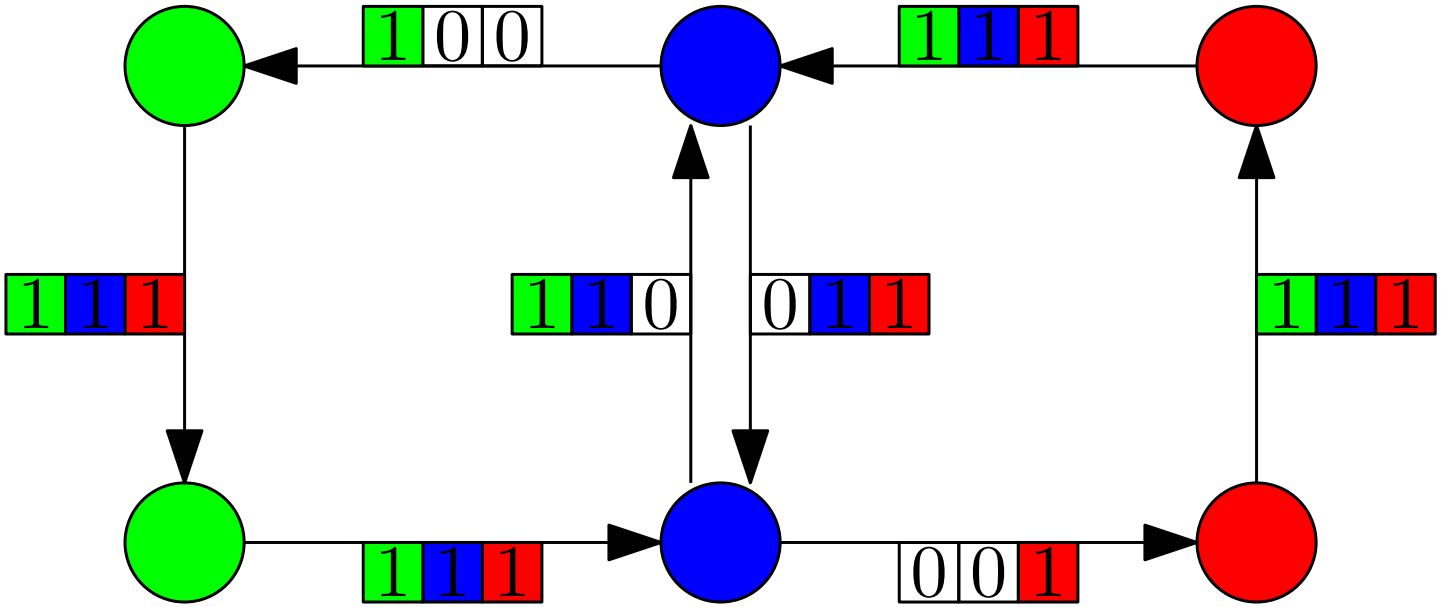
- von jedem Knoten
- konstruiere Rückwärts KW-Baum
- setze Flagge der Region der Wurzel für jede Baumkante
- APSP



Randknotenbäume

Beobachtung: Man muss durch Randknoten in die Zelle

- setze Intra-Zellen Kanten auf `true`
- einen Rückwärts Dijkstra-Baum pro Randknoten b
- setze Flagge $AF_{region(b)}(e) = \texttt{true}$ wenn e Baumkante des Baums von b ist



Zentralisierte Bäume

verallgemeinere Dijkstra:

- für jede Region r (mit Randknotenmenge B_r)
- hänge Label $l(u)$ der Größe $|B_r|$ an jeden Knoten u
- speichert den Abstand $d(u, b)$ für alle $b \in B_r$
- triviale Intialisierung der Randknoten, füge alle in Queue ein
- nehme Knoten u aus der Queue (key: $\min\{l(u)\}$)
- relaxiere Kanten (u, v):
  - erzeuge Label l durch $l(u) + \text{len}(u, v)$
  - checke ob l das Label $l(v)$ verbessert
- breche ab, wenn keine Verbesserungen mehr möglich sind
- setze Flagge auf `true` wenn $d(u, b) + \text{len}(u, v) = d(v, b)$ gilt

Zentralisierte Bäume

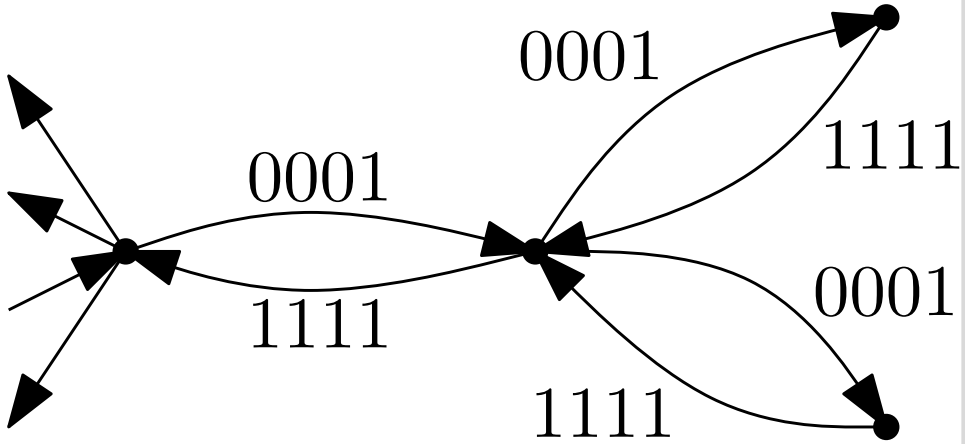
Bemerkungen:

- Knoten können mehrfach besucht werden (label-correcting)
- Prioritäten der Knoten beliebig wählbar
  - z.B. Minimum über alle Einträge von u oder auch nur der vorläufigen
  - hängt von Eingabe ab
- hoher Speicherverbrauch durch n Label der Größe $|B_r|$
  - 18 Mio. Knoten und 1000 Randknoten $\Rightarrow$ 72 GB
  - teile Arbeit in mehrere Schritte mit maximal 100 Randknoten
  - meist Beschleunigung um Faktor 4 gegenüber Randknotenansatz

Automatisches Setzen von Flaggen

Beobachtung:

- Für manche Kanten kann man die Flaggen automatisch setzen



Angehangene Bäume:

- Kanten zur Wurzel hin haben alle Flaggen gesetzt
- Kanten von Wurzel weg haben nur eine Flagge gesetzt
- also können die Bäume vor der Vorberechnung vom Graphen entfernt werden
- Knotenzahl verringert sich um 1 Drittel

Partitionierung

Anforderungen:

- balanciert

mögliche Partitionen:

- Gitter
- Quad-Baum
  - iterativ in 4 Zellen unterteilen
- kd-Baum
  - Verallgemeinerung von Quad-Baum

weitere Anforderungen?

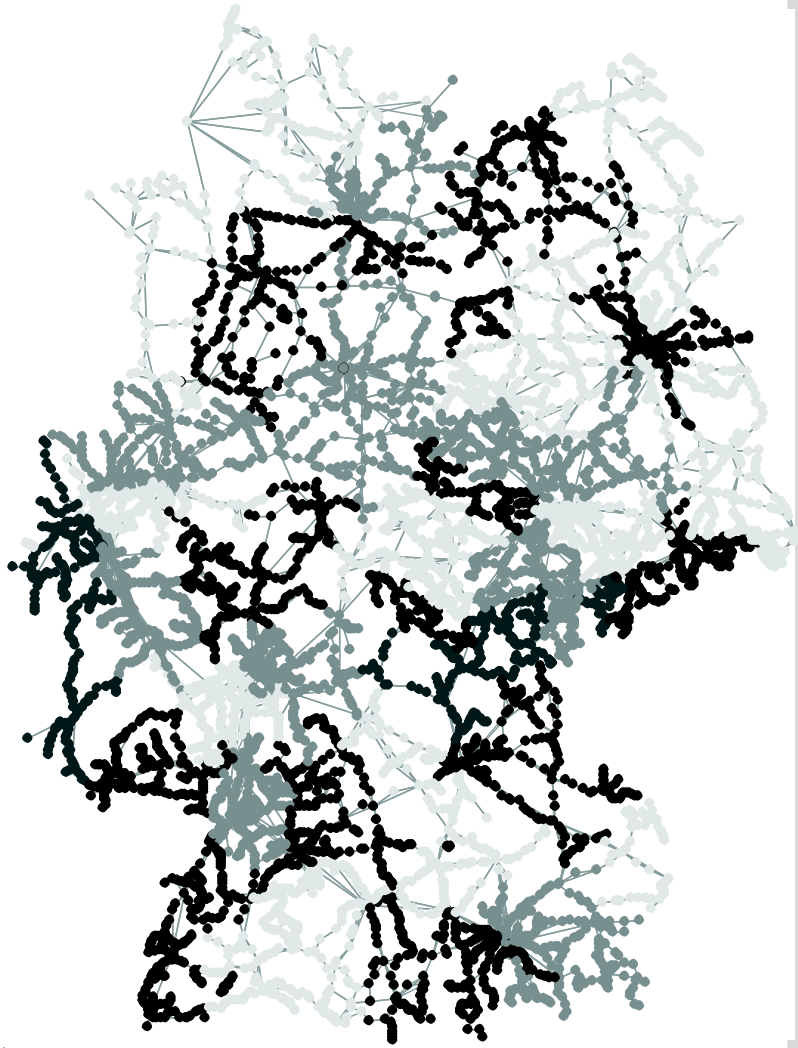
Partitionierung

Anforderungen:

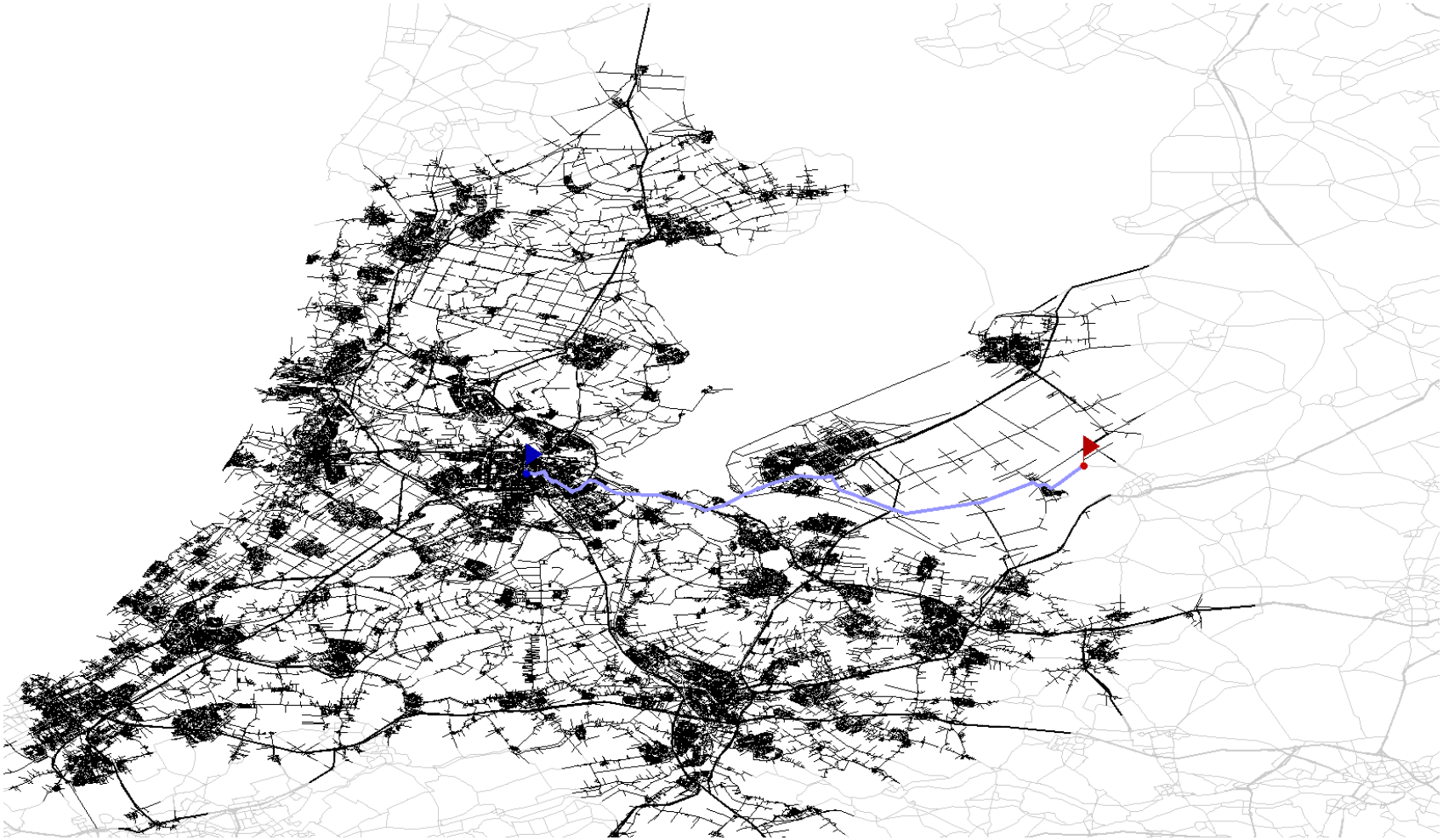
- ausbalanciert
- wenige Randknoten
- zusammenhängend

Black-Box Partitionierer:

- benutzen keine Einbettung
- oft: teilen rekursiv Graphen in k Teile mit kleinem Schnitt
- bringen gute Lösungen für Arc-Flags

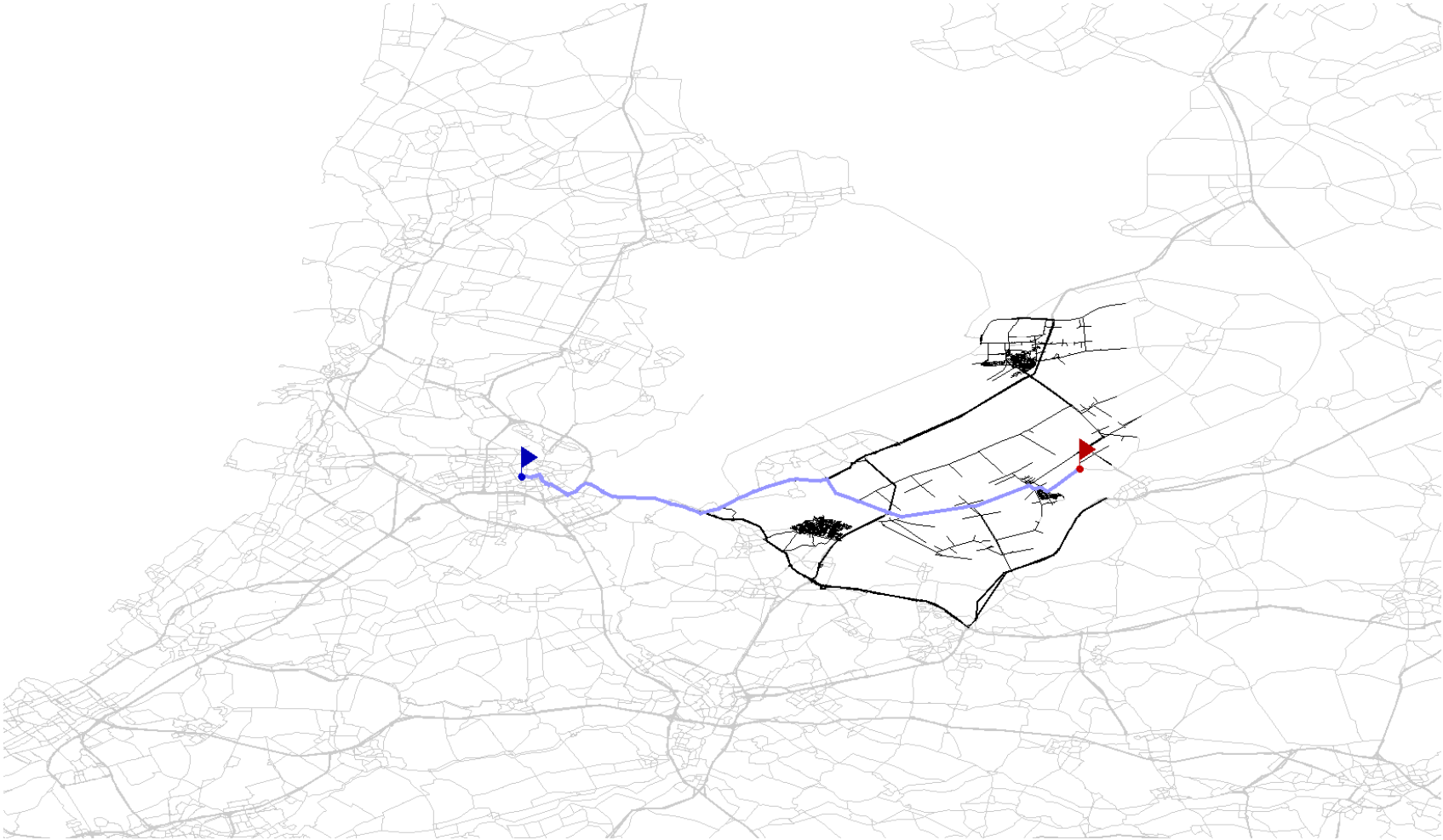


Suchraum



Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Suchraum



Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Diskussion

Vorteile:

- einfacher Anfrage Algorithmus
- leicht on-top auf bestehende Systeme zu setzen
- ausreichende Beschleunigung

Nachteile:

- hohe Vorberechnungsdauer
- weitere?

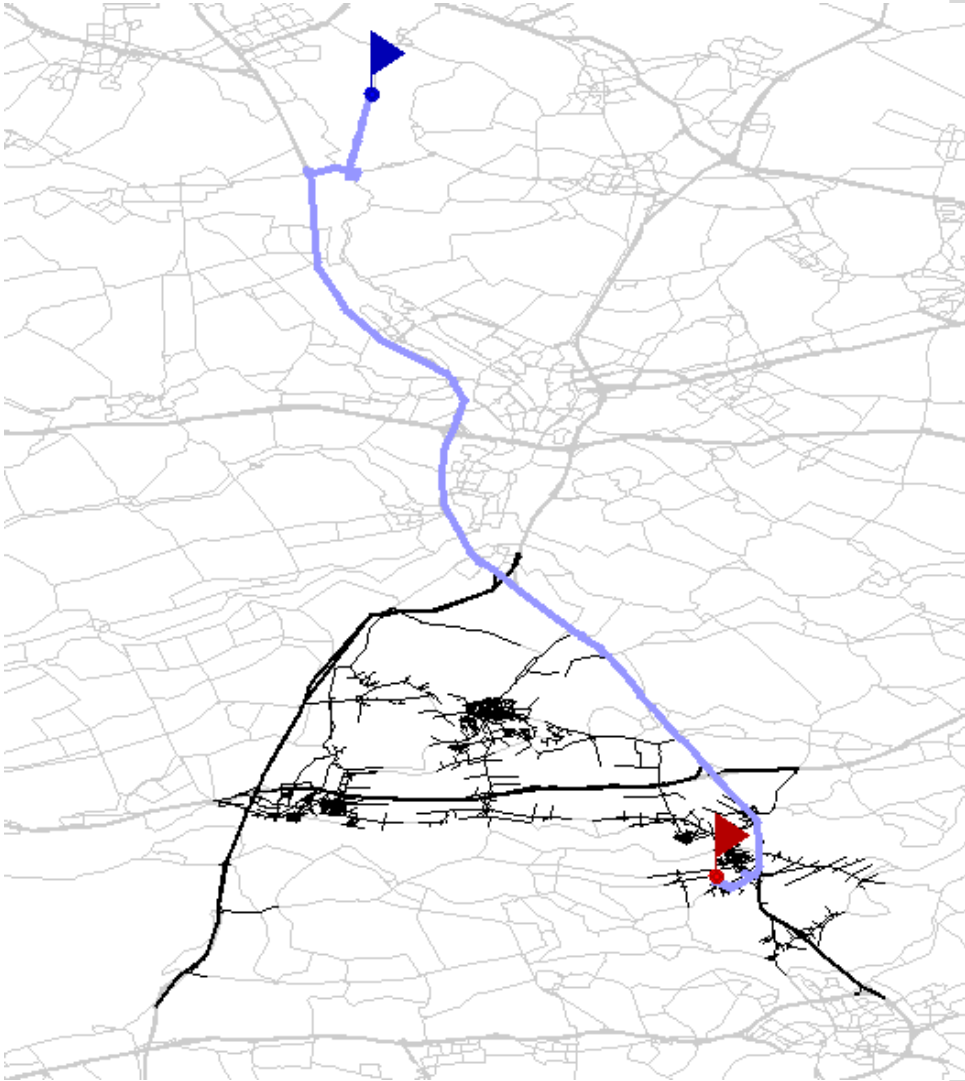
Coning-Effekt

Beobachtung:

- lange Zeit nur eine Kante wichtig
- daher immer nur ein Knoten in der Queue
- aber: je näher an der Zelle, desto mehr Kanten werden wichtig
- Suche fächert sich auf
- in Zelle werden dann alle Kanten relaxiert

Zwei Ansätze:

- bidirektionale Flags
- multi-level Flags



Bidirektionale Arc-Flags

Vorberechung:

- Vorwärts- und Rückwärtsflaggen
- Rückwärtsflaggen können analog für eingehende Kanten berechnet werden
- Vorberechungszeit in gerichteten Graphen erhöht sich um Faktor 2

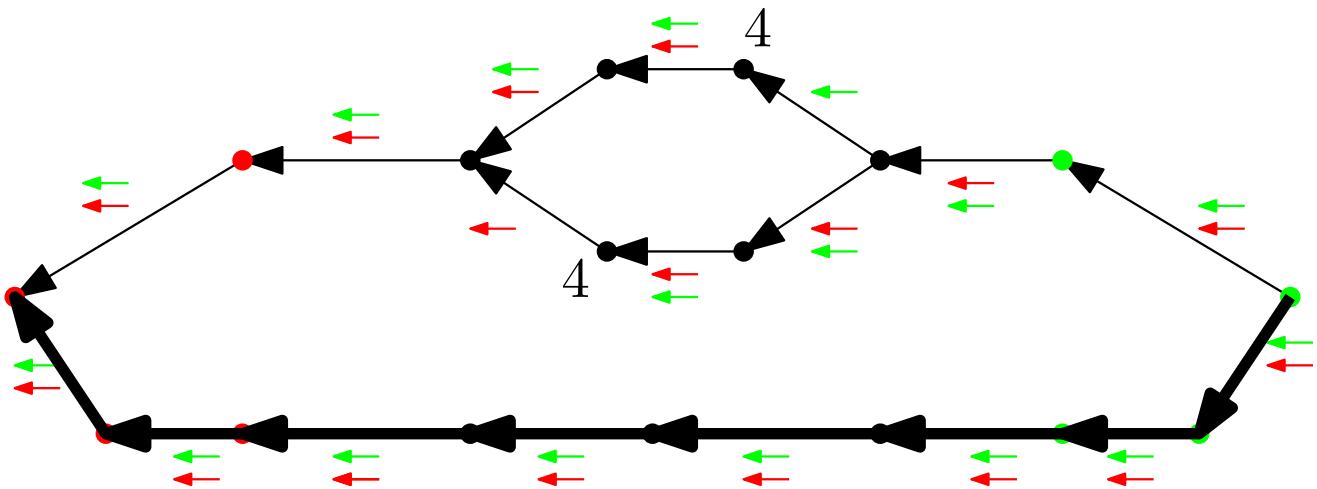
Anfrage:

- bidirektional:
  - Vorwärtssuche relaxiert nur Kanten mit Flagge für T
  - Rückwärtssuche nur Kanten mit Flaggen für S
- normales Stopp-Kriterium von bidirektionalem Dijkstra

Bidirektionale Arc-Flags

Problem:

- Eindeutigkeit der Wege
- eventuell nicht korrekt



Lösung:

- kommt in Straßengraphen kaum vor
- daher öffne Flaggen für alle möglichen Wege

Literatur

Literatur (Arc-Flags):

- Moritz Hilger and Ekkehard Köhler and Rolf H. Möhring and Heiko Schilling:
  Fast Point-to-Point Shortest Path Computations with Arc-Flags
  In: *Shortest Paths: Ninth DIMACS Implementation Challenge, 2009*

Literatur (ALT):

- Andrew Goldberg, Georg Harrelson, SODA 2005
- Andrew Goldberg, Renato Werneck, ALENEX 2005

Nächste Termine

Karlsruher Institut für Technologie

Mittwoch, 9.5.2012

Montag, 14.5.2012
Mittwoch, 16.5.2012