Karlsruhe Institute of Technology

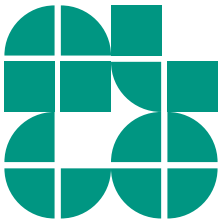
Vorlesung Algorithmische Geometrie

Anwendungen der WSPD & Sichtbarkeitsgraphen

INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK · FAKULTÄT FÜR INFORMATIK

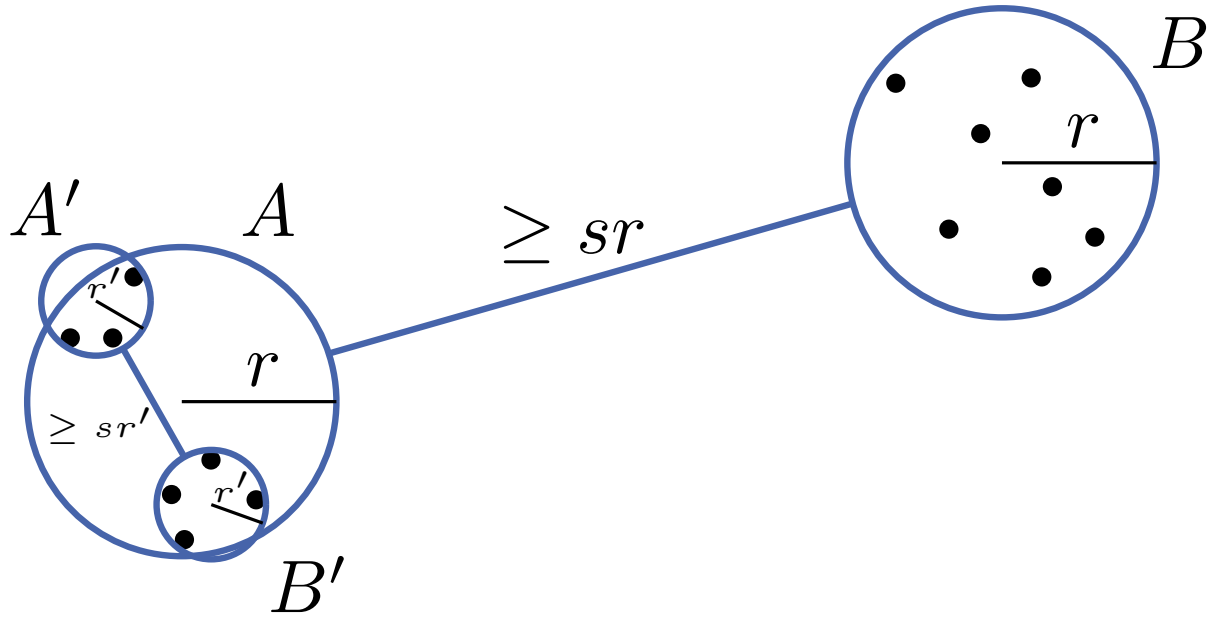
Martin Nöllenburg

10.07.2012



Wdh.: Well-Separated Pair Decomposition

Def.: Ein Paar disjunkter Punktmengen A und B im $\mathbb{R}^d$ heißt s-**well separated** für ein $s > 0$, falls A und B jeweils von einer Kugel mit Radius r überdeckt werden und der Abstand der beiden Kugeln mindestens sr ist.



Wdh.: Well-Separated Pair Decomposition

Def.: Ein Paar disjunkter Punktmengen A und B im $\mathbb{R}^d$ heißt s-**well separated** für ein $s > 0$, falls A und B jeweils von einer Kugel mit Radius r überdeckt werden und der Abstand der beiden Kugeln mindestens sr ist.

Def.: Für eine Punktmenge P und ein $s > 0$ ist eine s-**well separated pair decomposition** (s-WSPD) eine Menge von Paaren $\{\{A_1, B_1\}, \ldots, \{A_m, B_m\}\}$ mit

- $A_i, B_i \subset P$ für alle i
- $A_i \cap B_i = \emptyset$ für alle i
- $\bigcup_{i=1}^{m} A_i \otimes B_i = P \otimes P$
- $\{A_i, B_i\}$ s-well separated für alle i

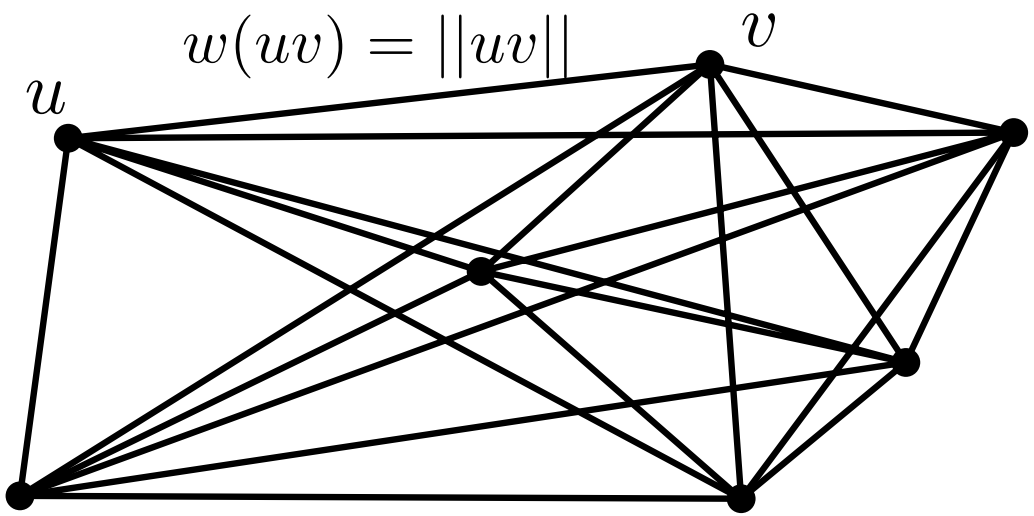
Wdh.: t-Spanner

Karlsruhe Institute of Technology

Für eine Menge P von n Punkten in $\mathbb{R}^d$ ist der **Euklidische Graph** $\mathcal{EG}(P) = (P, \binom{P}{2})$ der vollständige gewichtete Graph, dessen Kantengewichte dem Euklidischen Abstand der Kantenendpunkte entsprechen.

Wdh.: t-Spanner

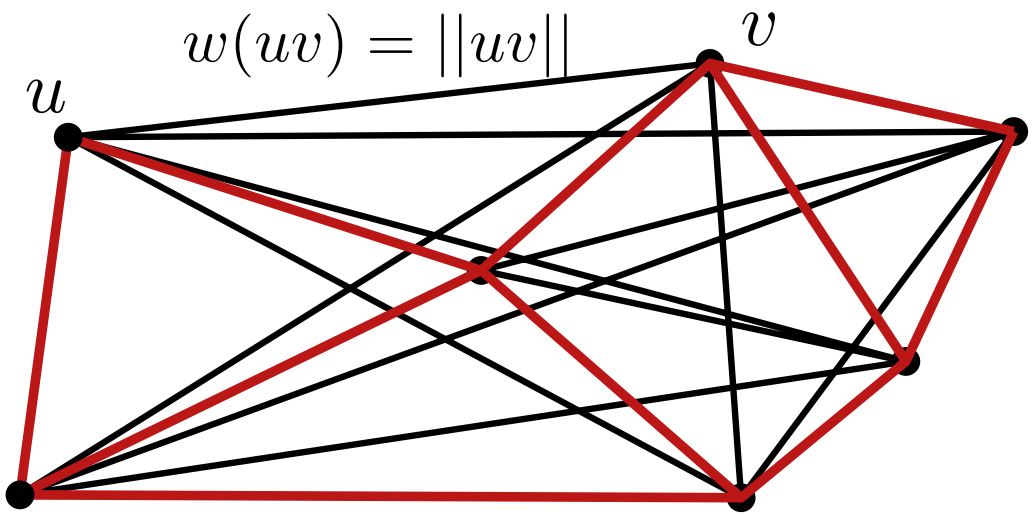
Für eine Menge P von n Punkten in $\mathbb{R}^d$ ist der **Euklidische Graph** $\mathcal{EG}(P) = (P, \binom{P}{2})$ der vollständige gewichtete Graph, dessen Kantengewichte dem Euklidischen Abstand der Kantenendpunkte entsprechen.



Wdh.: t-Spanner

Für eine Menge P von n Punkten in $\mathbb{R}^d$ ist der **Euklidische Graph** $\mathcal{EG}(P) = (P, \binom{P}{2})$ der vollständige gewichtete Graph, dessen Kantengewichte dem Euklidischen Abstand der Kantenendpunkte entsprechen.

Da $\mathcal{EG}(P)$ $\Theta(n^2)$ Kanten hat, wird oft ein dünner Graph mit $O(n)$ Kanten gesucht, dessen kürzeste Wege die Kantengewichte in $\mathcal{EG}(P)$ approximieren.



Wdh.: t-Spanner

Für eine Menge P von n Punkten in $\mathbb{R}^d$ ist der **Euklidische Graph** $\mathcal{EG}(P) = (P, \binom{P}{2})$ der vollständige gewichtete Graph, dessen Kantengewichte dem Euklidischen Abstand der Kantenendpunkte entsprechen.

Da $\mathcal{EG}(P)$ $\Theta(n^2)$ Kanten hat, wird oft ein dünner Graph mit $O(n)$ Kanten gesucht, dessen kürzeste Wege die Kantengewichte in $\mathcal{EG}(P)$ approximieren.

Def.: Ein gewichteter Graph G mit Knotenmenge P heißt t-**Spanner** für P und einen Dehnungsfaktor $t \geq 1$, falls für alle Paare $x, y \in P$ gilt

$$||xy|| \leq \delta_G(x, y) \leq t \cdot ||xy||,$$

wobei $\delta_G(x, y) =$ Länge kürzester x-y-Weg in G.

Wdh.: WSPD und t-Spanner

Def.: Für n Punkte P in $\mathbb{R}^d$ und eine WSPD W von P definiere den Graphen $G = (P, E)$ mit $E = \{\{x, y\} \mid \{u, v\} \in W \text{ und } \mathsf{rep}(u) = x, \mathsf{rep}(v) = y\}$.

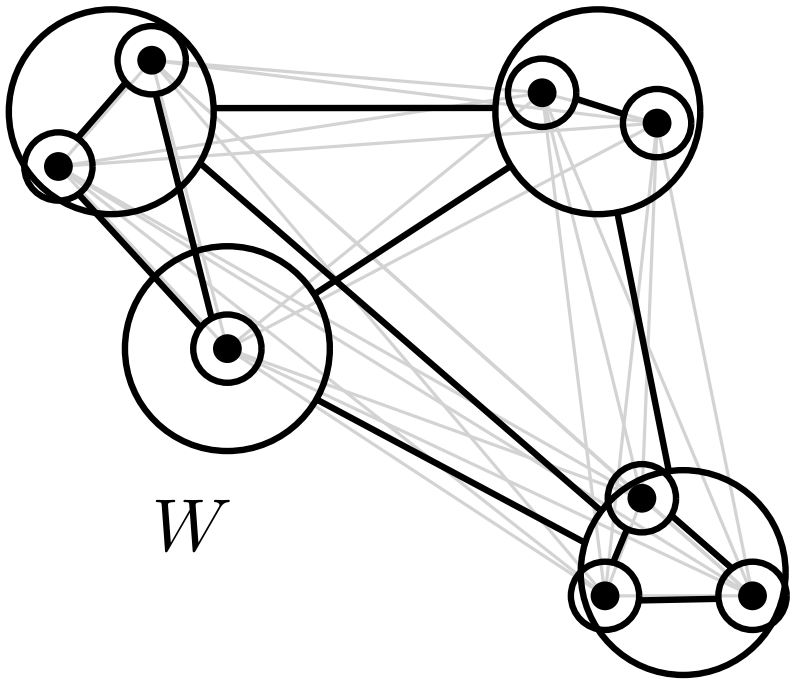
Wdh.: Jedes Paar $\{u, v\} \in W$ entspricht zwei Quadtreeknoten u und v. Aus jedem Quadtreeknoten wird wie folgt ein Repräsentant gewählt. Für Blatt u definiere den Repräsentanten

$$\mathsf{rep}(u) = \begin{cases} p & \text{falls } P_u = \{p\} \ (u \text{ ist Blatt}) \\ \emptyset & \text{sonst.} \end{cases}$$

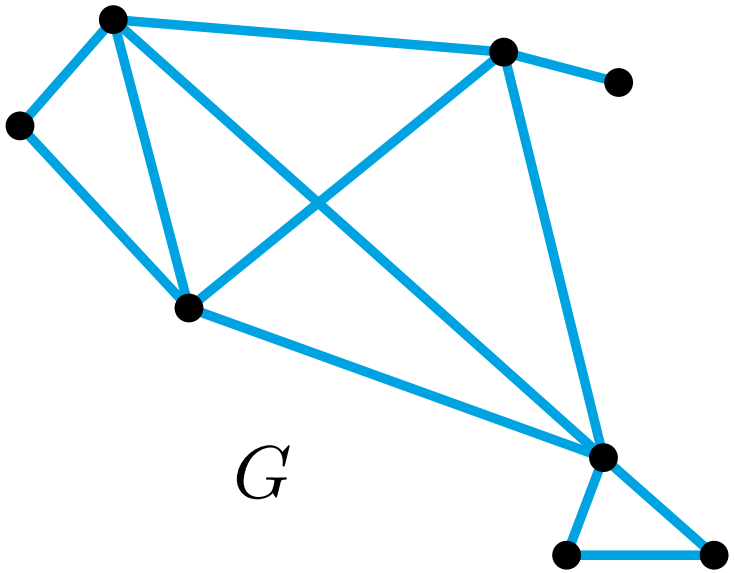
Für einen inneren Knoten v setze $\mathsf{rep}(v) = \mathsf{rep}(u)$ für ein nichtleeres Kind u von v.

Wdh.: WSPD und t-Spanner

Def.: Für n Punkte P in $\mathbb{R}^d$ und eine WSPD W von P definiere den Graphen $G = (P, E)$ mit $E = \{\{x, y\} \mid \{u, v\} \in W \text{ und } \mathsf{rep}(u) = x, \mathsf{rep}(v) = y\}$.



W



G

Wdh.: WSPD und t-Spanner

Def.: Für n Punkte P in $\mathbb{R}^d$ und eine WSPD W von P definiere den Graphen $G = (P, E)$ mit $E = \{\{x, y\} \mid \{u, v\} \in W \text{ und } \mathsf{rep}(u) = x, \mathsf{rep}(v) = y\}$.

Lemma: Ist W eine s-WSPD für ein geeignetes $s = s(t)$, so ist G ein t-Spanner für P mit $O(s^d n)$ Kanten.

Wdh.: WSPD und t-Spanner

Def.: Für n Punkte P in $\mathbb{R}^d$ und eine WSPD W von P definiere den Graphen $G = (P, E)$ mit $E = \{\{x, y\} \mid \{u, v\} \in W \text{ und } \mathsf{rep}(u) = x, \mathsf{rep}(v) = y\}$.

Lemma: Ist W eine s-WSPD für ein geeignetes $s = s(t)$, so ist G ein t-Spanner für P mit $O(s^d n)$ Kanten.

Satz: Für eine Menge P von n Punkten in $\mathbb{R}^d$ und ein $\varepsilon \in (0, 1]$ kann ein $(1+\varepsilon)$-Spanner für P mit $O(n/\varepsilon^d)$ Kanten in $O(n \log n + n/\varepsilon^d)$ Zeit berechnet werden.

Weitere Anwendungen der WSPD

Euklidischer MST

Problem: Finde für eine Punktmenge P einen minimalen Spannbaum (MST) im Euklidischen Graphen $\mathcal{EG}(P)$.

Euklidischer MST

Problem: Finde für eine Punktmenge P einen minimalen Spannbaum (MST) im Euklidischen Graphen $\mathcal{EG}(P)$.

Prim: MST in einem Graph $G = (V, E)$ kann in $O(|E| + |V| \log |V|)$ Zeit berechnet werden.

Euklidischer MST

Problem: Finde für eine Punktmenge P einen minimalen Spannbaum (MST) im Euklidischen Graphen $\mathcal{EG}(P)$.

Prim: MST in einem Graph $G = (V, E)$ kann in $O(|E| + |V| \log |V|)$ Zeit berechnet werden.

- $\mathcal{EG}(P)$ hat $\Theta(n^2)$ Kanten $\Rightarrow$ Laufzeit $\Theta(n^2)$:-(
- $(1+\varepsilon)$-Spanner für P hat $O(n/\varepsilon^d)$ Kanten
  $\Rightarrow$ Laufzeit $O(n \log n + n/\varepsilon^d)$:-)

Euklidischer MST

Problem: Finde für eine Punktmenge P einen minimalen Spannbaum (MST) im Euklidischen Graphen $\mathcal{EG}(P)$.

Prim: MST in einem Graph $G = (V, E)$ kann in $O(|E| + |V| \log |V|)$ Zeit berechnet werden.

- $\mathcal{EG}(P)$ hat $\Theta(n^2)$ Kanten $\Rightarrow$ Laufzeit $\Theta(n^2)$:-(
- $(1+\varepsilon)$-Spanner für P hat $O(n/\varepsilon^d)$ Kanten
  $\Rightarrow$ Laufzeit $O(n \log n + n/\varepsilon^d)$:-)

Wie gut ist der MST eines $(1+\varepsilon)$-Spanners?

Euklidischer MST

Problem: Finde für eine Punktmenge P einen minimalen Spannbaum (MST) im Euklidischen Graphen $\mathcal{EG}(P)$.

Prim: MST in einem Graph $G = (V, E)$ kann in $O(|E| + |V| \log |V|)$ Zeit berechnet werden.

- $\mathcal{EG}(P)$ hat $\Theta(n^2)$ Kanten $\Rightarrow$ Laufzeit $\Theta(n^2)$:-(
- $(1+\varepsilon)$-Spanner für P hat $O(n/\varepsilon^d)$ Kanten
  $\Rightarrow$ Laufzeit $O(n \log n + n/\varepsilon^d)$:-)

Wie gut ist der MST eines $(1+\varepsilon)$-Spanners?

Satz 1: Der aus einem $(1+\varepsilon)$-Spanner von P gewonnene MST ist eine $(1+\varepsilon)$-Approximation des EMST von P.

Durchmesser von P

Problem: Finde den Durchmesser einer Punktmenge P, d.h. das Paar $\{x, y\} \subset P$ mit größtem Abstand.

Durchmesser von P

Problem: Finde den Durchmesser einer Punktmenge P, d.h. das Paar $\{x, y\} \subset P$ mit größtem Abstand.

- brute-force alle Punktpaare testen $\Rightarrow$ Laufzeit $O(n^2)$:-(
- teste Abstände $||\text{rep}(u)\ \text{rep}(v)||$ aller ws-Paare $\{P_u, P_v\}$ $\Rightarrow$ Laufzeit $O(n \log n + s^d n)$:-)

Durchmesser von P

Problem: Finde den Durchmesser einer Punktmenge P, d.h. das Paar $\{x, y\} \subset P$ mit größtem Abstand.

- brute-force alle Punktpaare testen $\Rightarrow$ Laufzeit $O(n^2)$:-(
- teste Abstände $||\text{rep}(u)\ \text{rep}(v)||$ aller ws-Paare $\{P_u, P_v\}$ $\Rightarrow$ Laufzeit $O(n \log n + s^d n)$:-)

Wie gut ist der berechnete Durchmesser?

Durchmesser von P

Problem: Finde den Durchmesser einer Punktmenge P, d.h. das Paar $\{x, y\} \subset P$ mit größtem Abstand.

- brute-force alle Punktpaare testen $\Rightarrow$ Laufzeit $O(n^2)$:-(
- teste Abstände $||\text{rep}(u)\ \text{rep}(v)||$ aller ws-Paare $\{P_u, P_v\}$ $\Rightarrow$ Laufzeit $O(n \log n + s^d n)$:-)

Wie gut ist der berechnete Durchmesser?

Satz 2: Der aus einer s-WSPD von P für $s = 4/\varepsilon$ berechnete Durchmesser ist eine $(1+\varepsilon)$-Approximation des Durchmessers von P.

Diskussion

Karlsruhe Institute of Technology

Welche weiteren Anwendungen hat die WSPD?

Diskussion

Welche weiteren Anwendungen hat die WSPD?

WSPD bietet sich immer dann an, wenn man auf die $\Theta(n^2)$ exakten Distanzen in einer Punktmenge verzichten kann und diese stattdessen approximiert. Ein Beispiel sind kräftebasierte Layoutalgorithmen im Graphenzeichnen, wo paarweise Abstoßungskräfte von n Objekten berechnet werden müssen.

Diskussion

Welche weiteren Anwendungen hat die WSPD?

WSPD bietet sich immer dann an, wenn man auf die $\Theta(n^2)$ exakten Distanzen in einer Punktmenge verzichten kann und diese stattdessen approximiert. Ein Beispiel sind kräftebasierte Layoutalgorithmen im Graphenzeichnen, wo paarweise Abstoßungskräfte von n Objekten berechnet werden müssen.

Wozu geometrisch approximieren?

Diskussion

Welche weiteren Anwendungen hat die WSPD?

WSPD bietet sich immer dann an, wenn man auf die $\Theta(n^2)$ exakten Distanzen in einer Punktmenge verzichten kann und diese stattdessen approximiert. Ein Beispiel sind kräftebasierte Layoutalgorithmen im Graphenzeichnen, wo paarweise Abstoßungskräfte von n Objekten berechnet werden müssen.

Wozu geometrisch approximieren?

Einerseits ersetzt man dadurch langsame Berechnungen durch schnellere (aber ungenauere), andererseits sind oft auch die Eingabedaten schon mit einer gewissen Ungenauigkeit behaftet, so dass approximative Lösungen je nach Anwendung ausreichend sind.

Diskussion

Welche weiteren Anwendungen hat die WSPD?

WSPD bietet sich immer dann an, wenn man auf die $\Theta(n^2)$ exakten Distanzen in einer Punktmenge verzichten kann und diese stattdessen approximiert. Ein Beispiel sind kräftebasierte Layoutalgorithmen im Graphenzeichnen, wo paarweise Abstoßungskräfte von n Objekten berechnet werden müssen.

Wozu geometrisch approximieren?

Einerseits ersetzt man dadurch langsame Berechnungen durch schnellere (aber ungenauere), andererseits sind oft auch die Eingabedaten schon mit einer gewissen Ungenauigkeit behaftet, so dass approximative Lösungen je nach Anwendung ausreichend sind.

Geht es nicht auch genauso schnell exakt?

Diskussion

Welche weiteren Anwendungen hat die WSPD?

WSPD bietet sich immer dann an, wenn man auf die $\Theta(n^2)$ exakten Distanzen in einer Punktmenge verzichten kann und diese stattdessen approximiert. Ein Beispiel sind kräftebasierte Layoutalgorithmen im Graphenzeichnen, wo paarweise Abstoßungskräfte von n Objekten berechnet werden müssen.

Wozu geometrisch approximieren?

Einerseits ersetzt man dadurch langsame Berechnungen durch schnellere (aber ungenauere), andererseits sind oft auch die Eingabedaten schon mit einer gewissen Ungenauigkeit behaftet, so dass approximative Lösungen je nach Anwendung ausreichend sind.

Geht es nicht auch genauso schnell exakt?

Oft im $\mathbb{R}^2$ ja, aber nicht mehr im $\mathbb{R}^d$ für $d > 2$. (EMST, Durchmesser)

Rückblick und Prüfungsvorbereitung

Was haben wir bisher alles behandelt?

Was haben wir bisher alles behandelt?

t-Spanner

Ebenenunterteilung

konvexe Hülle (2d und 3d)

Quadtrees

randomisierte Algorithmen

kd-Trees

Voronoi-Diagramme

Dualität

Polygontriangulierung

Streckenschnitte

WSPD

Schnitt von Halbebenen

Delaunay-Triangulierung

Lineares Programmieren

Sweep-Line Algorithmen

Trapezzerlegung

Range-Trees

Geradenarrangements

Divide & Conquer

Was kommt in der Prüfung dran?

- grundlegende Problemdefinitionen

Was kommt in der Prüfung dran?

- grundlegende Problemdefinitionen
- Aufbau und Queries von Datenstrukturen

Was kommt in der Prüfung dran?

- grundlegende Problemdefinitionen
- Aufbau und Queries von Datenstrukturen
- Zusammenhänge zwischen verschiedenen Datenstrukturen

Was kommt in der Prüfung dran?

- grundlegende Problemdefinitionen
- Aufbau und Queries von Datenstrukturen
- Zusammenhänge zwischen verschiedenen Datenstrukturen
- Eigenschaften und Ablauf der Algorithmen

Was kommt in der Prüfung dran?

- grundlegende Problemdefinitionen
- Aufbau und Queries von Datenstrukturen
- Zusammenhänge zwischen verschiedenen Datenstrukturen
- Eigenschaften und Ablauf der Algorithmen
- zentrale Beweisideen, nicht die genauen technischen Details

Was kommt in der Prüfung dran?

- grundlegende Problemdefinitionen
- Aufbau und Queries von Datenstrukturen
- Zusammenhänge zwischen verschiedenen Datenstrukturen
- Eigenschaften und Ablauf der Algorithmen
- zentrale Beweisideen, nicht die genauen technischen Details
- Einsatz der Algorithmen und Datenstrukturen in Anwendungen

Was kommt in der Prüfung dran?

- grundlegende Problemdefinitionen
- Aufbau und Queries von Datenstrukturen
- Zusammenhänge zwischen verschiedenen Datenstrukturen
- Eigenschaften und Ablauf der Algorithmen
- zentrale Beweisideen, nicht die genauen technischen Details
- Einsatz der Algorithmen und Datenstrukturen in Anwendungen
- bei 3SWS bzw. im Master: Stoff der Übungen

Was kommt in der Prüfung dran?

- grundlegende Problemdefinitionen
- Aufbau und Queries von Datenstrukturen
- Zusammenhänge zwischen verschiedenen Datenstrukturen
- Eigenschaften und Ablauf der Algorithmen
- zentrale Beweisideen, nicht die genauen technischen Details
- Einsatz der Algorithmen und Datenstrukturen in Anwendungen
- bei 3SWS bzw. im Master: Stoff der Übungen

Wie vorbereiten?

- Vorlesungsfolien **und** Tafelbeweise aus angegebener Literatur (v.a. [BCKO08] und tlws. Skript [M10])
- Übungsaufgaben
- *ergänzend* nicht behandeltes Material aus der Literatur

Was kommt in der Prüfung dran?

- grundlegende Problemdefinitionen
- Aufbau und Queries von Datenstrukturen
- Zusammenhänge zwischen verschiedenen Datenstrukturen
- Eigenschaften und Ablauf der Algorithmen
- zentrale[illegible]hen Details
- Einsatz[illegible]
  Anwend[illegible]
- bei 3SWS bzw. im Master: Stoff der Übungen

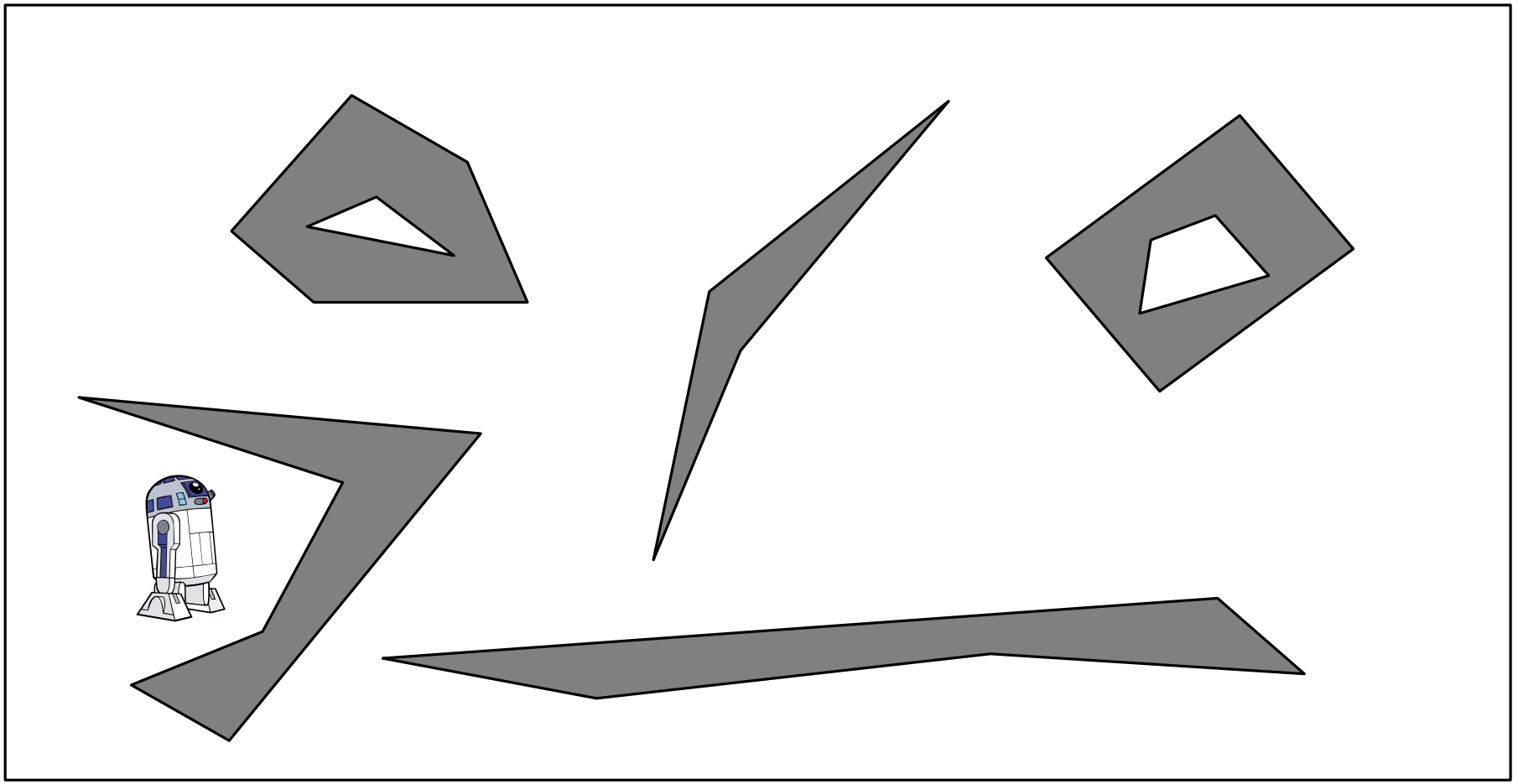
Weitere Fragen?

Wie vorbereiten?

- Vorlesungsfolien **und** Tafelbeweise aus angegebener Literatur (v.a. [BCKO08] und tlws. Skript [M10])
- Übungsaufgaben
- *ergänzend* nicht behandeltes Material aus der Literatur

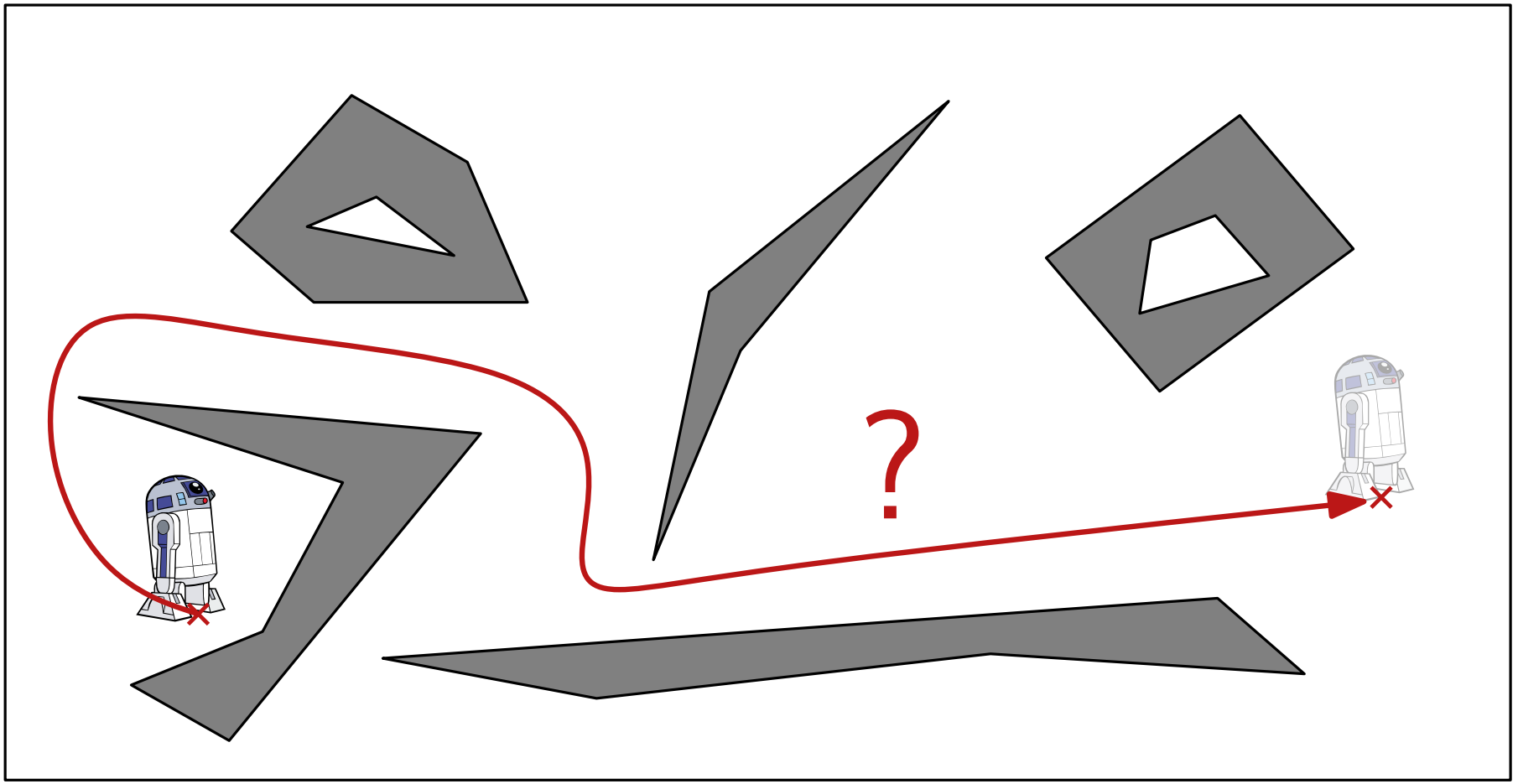
Sichtbarkeitsgraphen

Bewegungsplanung für Roboter



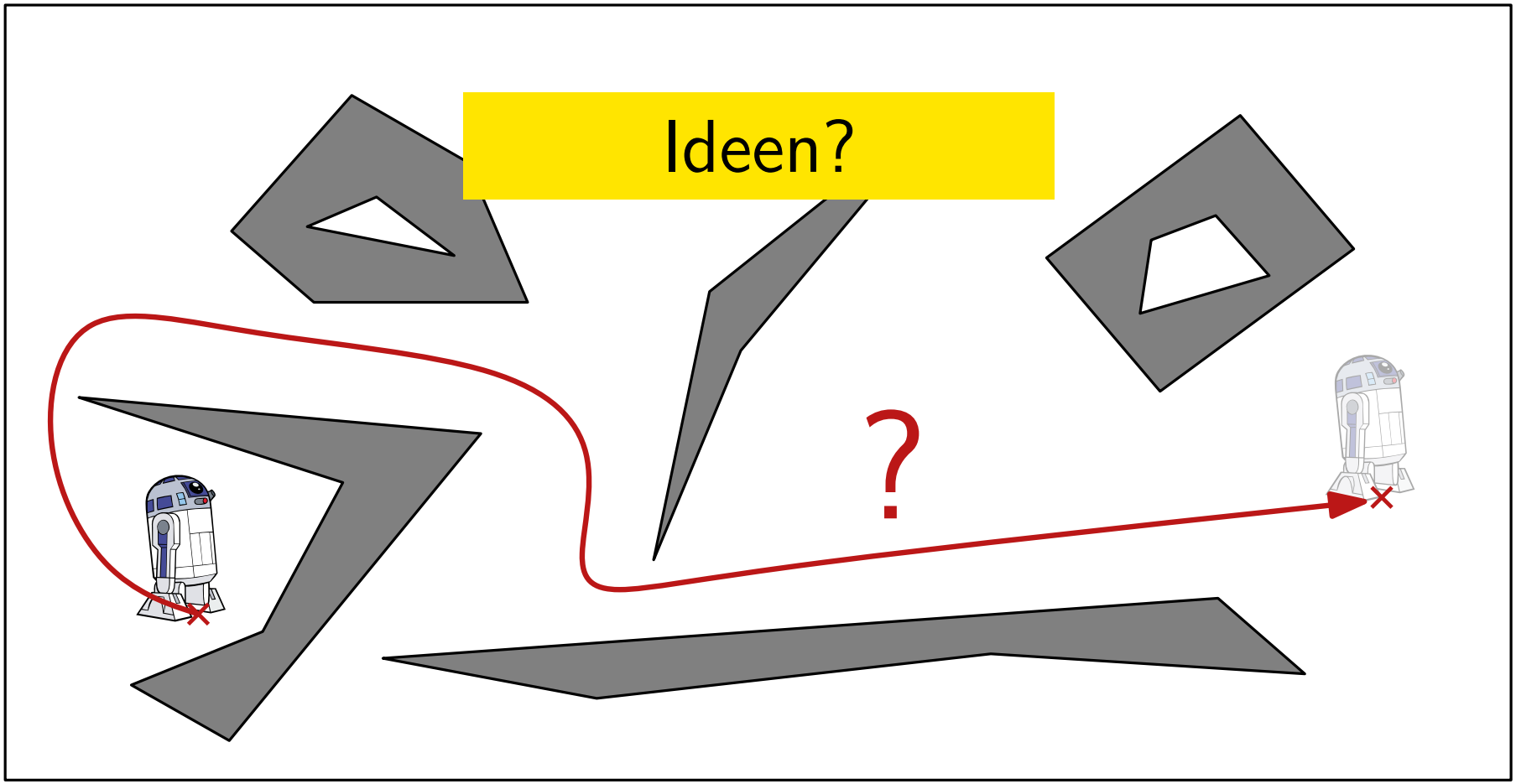
Problem: Gegeben ein (punktförmiger) Roboter an Position p_{start} in einem Gebiet mit polygonalen Hindernissen

Bewegungsplanung für Roboter



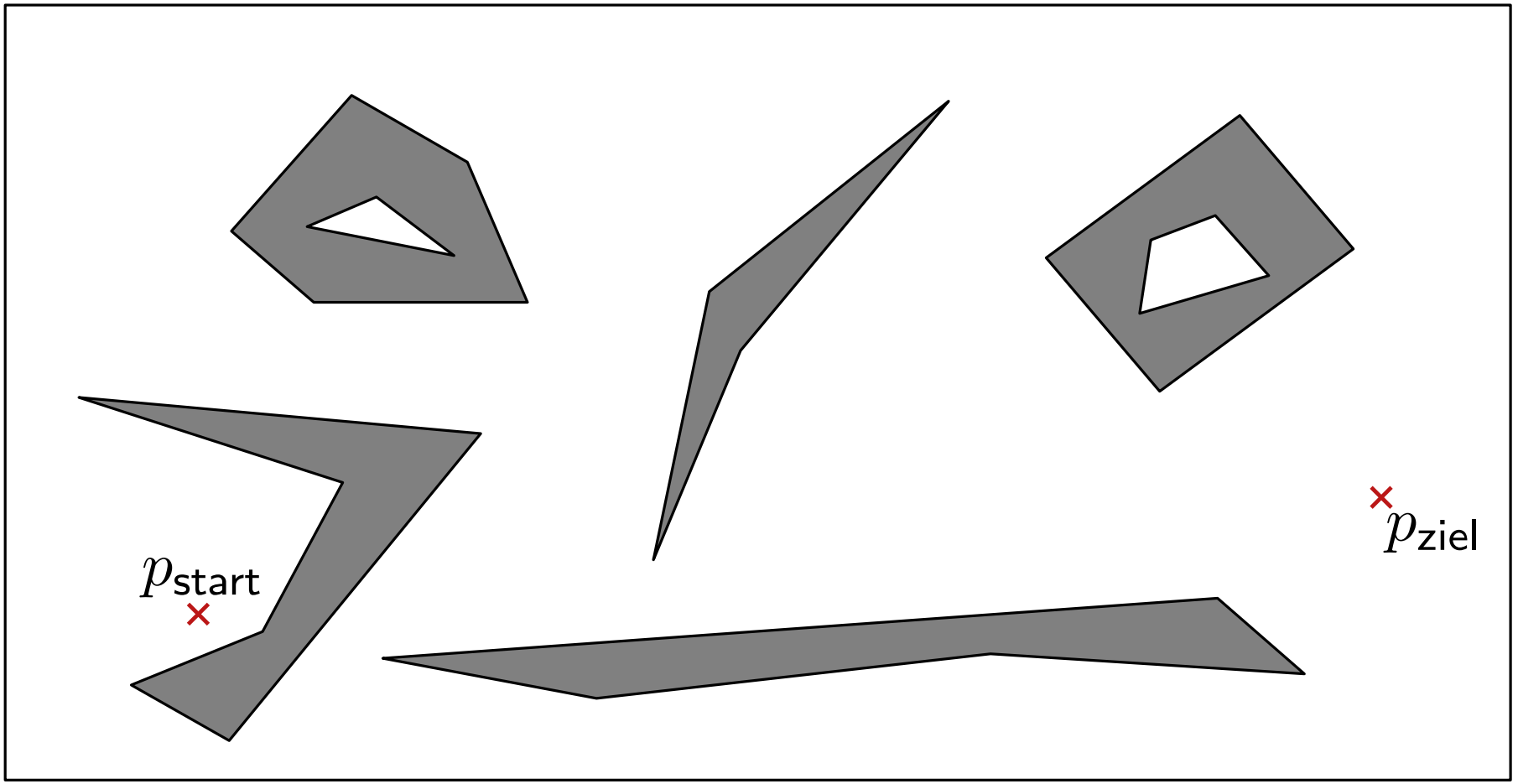
Problem: Gegeben ein (punktförmiger) Roboter an Position p_{start} in einem Gebiet mit polygonalen Hindernissen finde einen möglichst kurzen Weg zum Ziel p_{ziel} um die Hindernisse herum.

Bewegungsplanung für Roboter

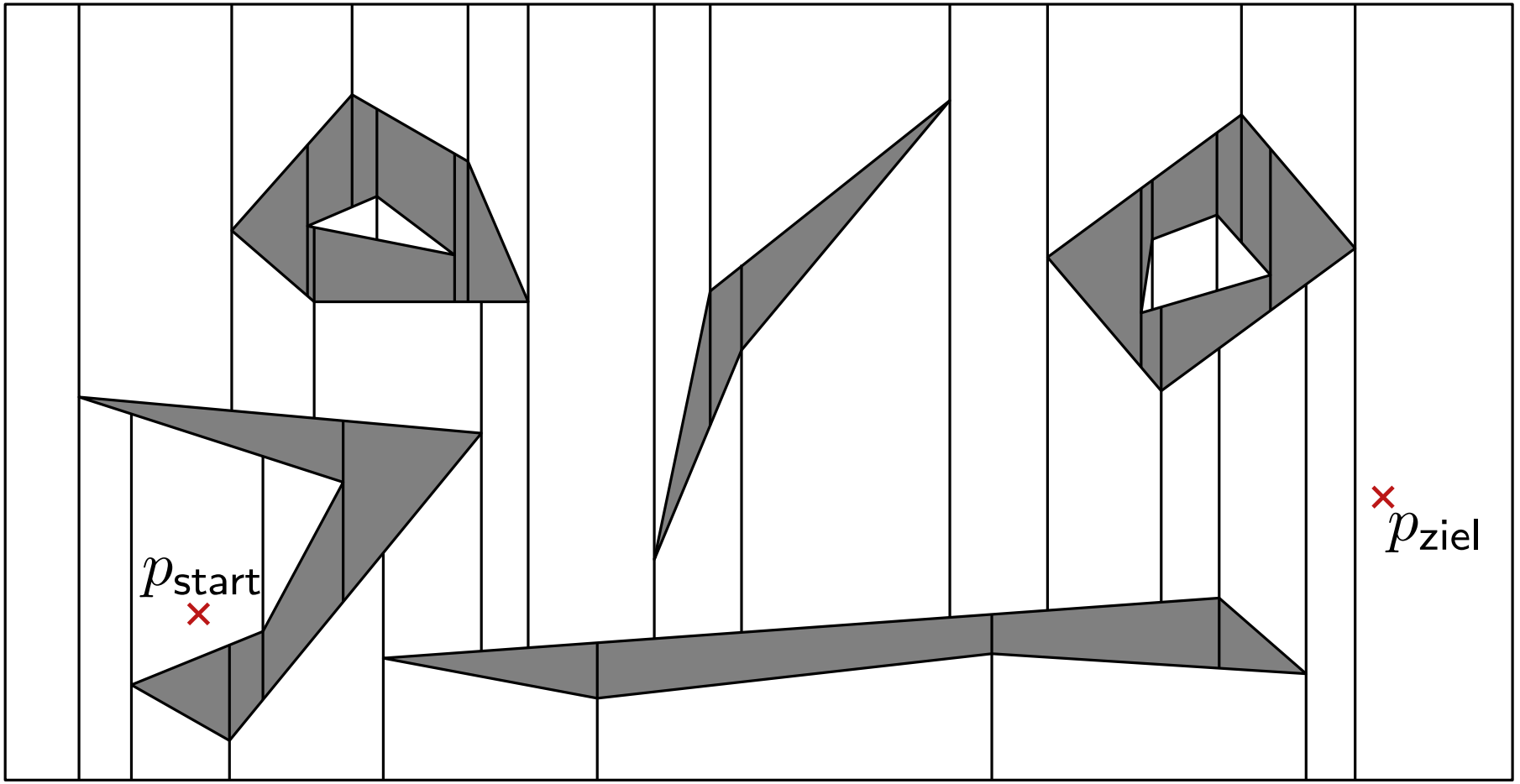


Problem: Gegeben ein (punktförmiger) Roboter an Position p_{start} in einem Gebiet mit polygonalen Hindernissen finde einen möglichst kurzen Weg zum Ziel p_{ziel} um die Hindernisse herum.

Erste Idee: Kürzeste Wege in Graphen

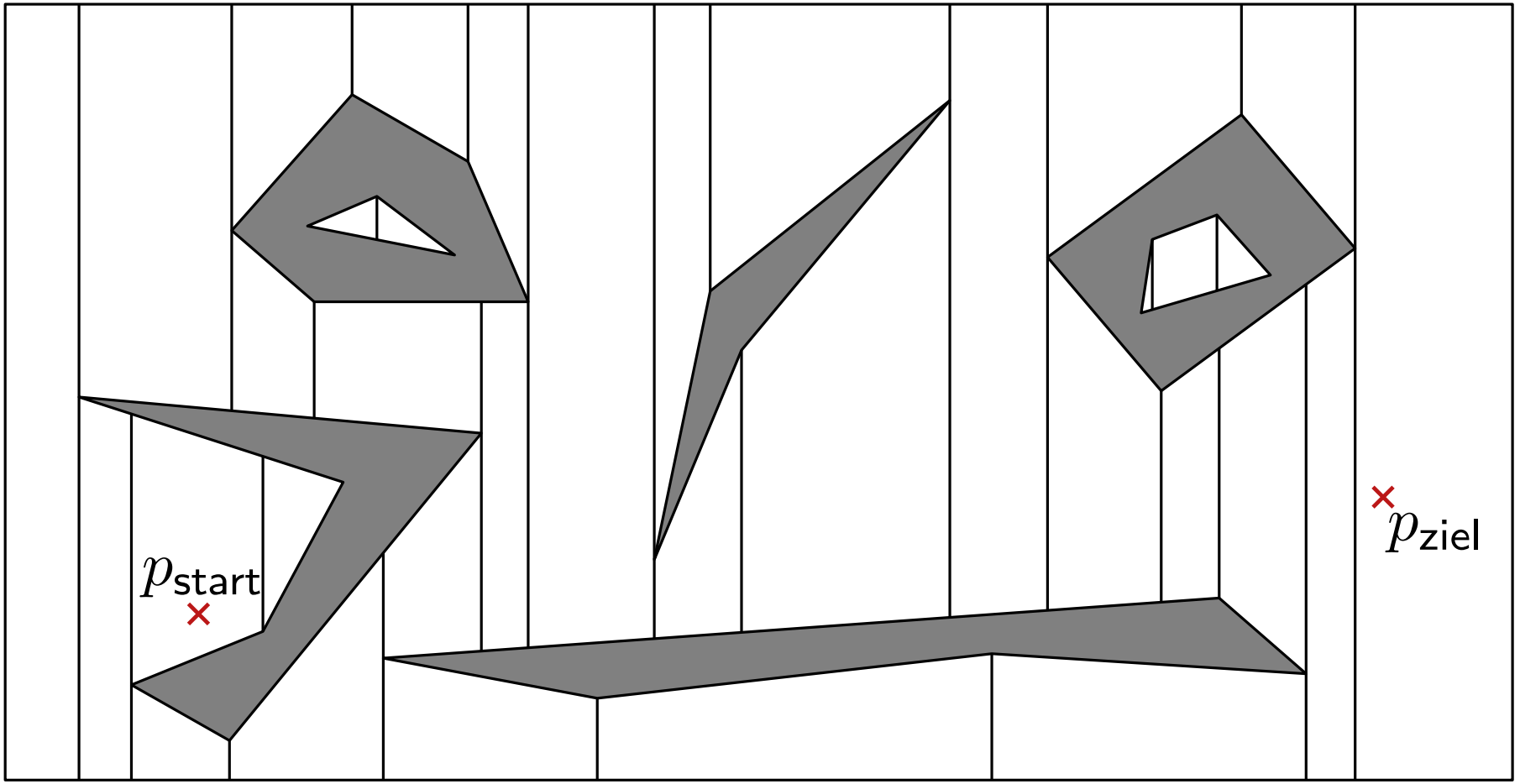


Erste Idee: Kürzeste Wege in Graphen



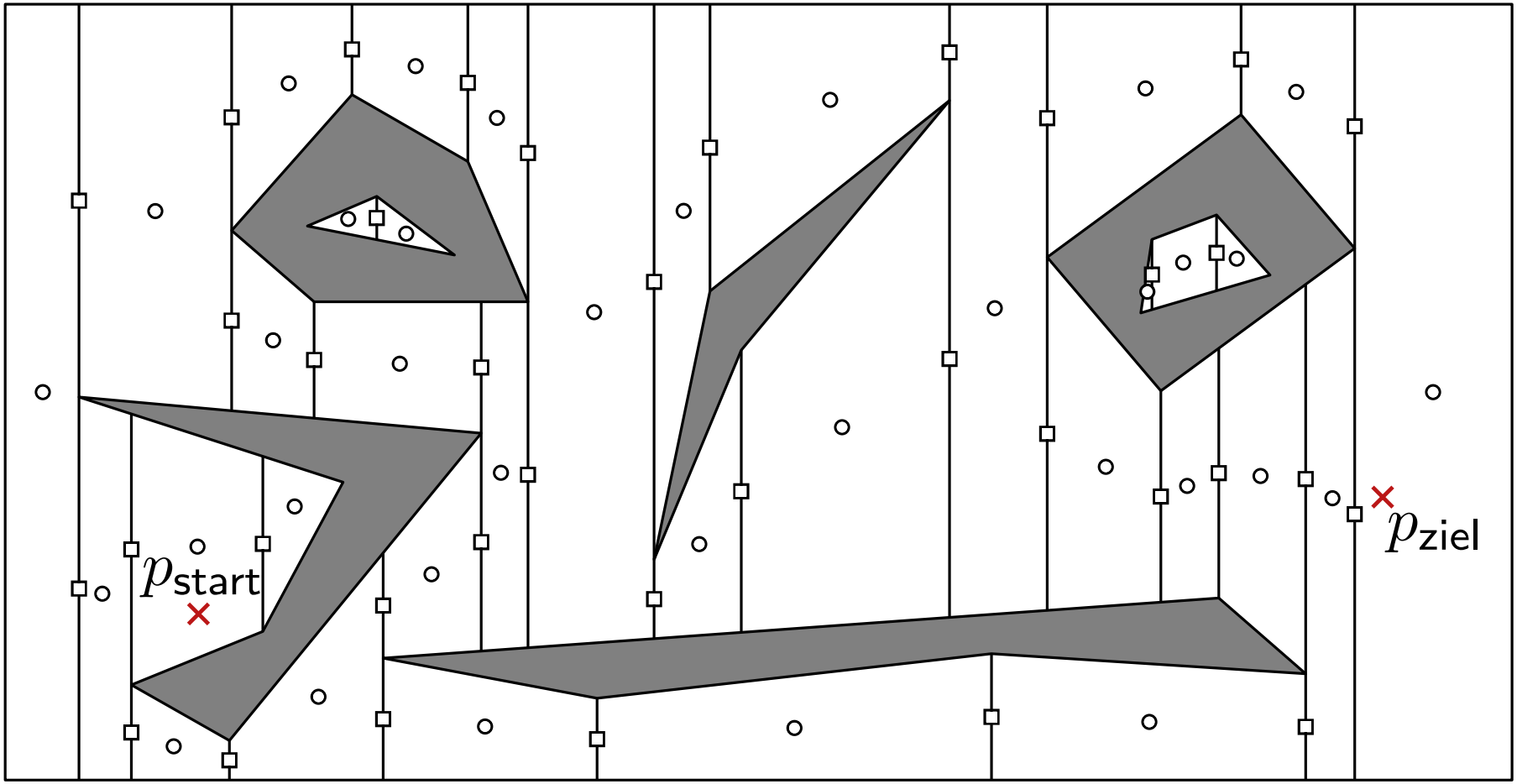
- erstelle Trapezzerlegung

Erste Idee: Kürzeste Wege in Graphen



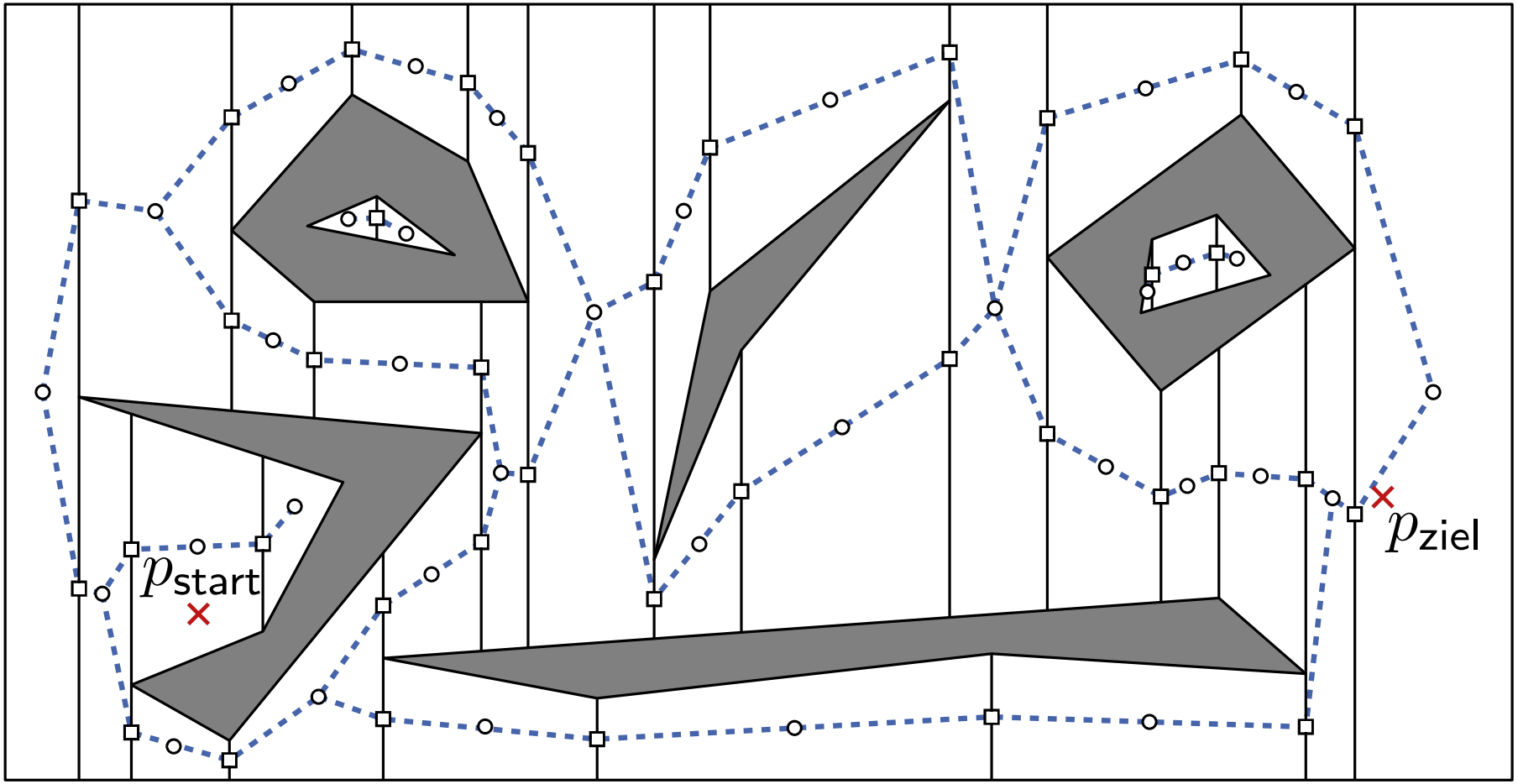
- erstelle Trapezzerlegung
- entferne Segmente in Hindernissen

Erste Idee: Kürzeste Wege in Graphen



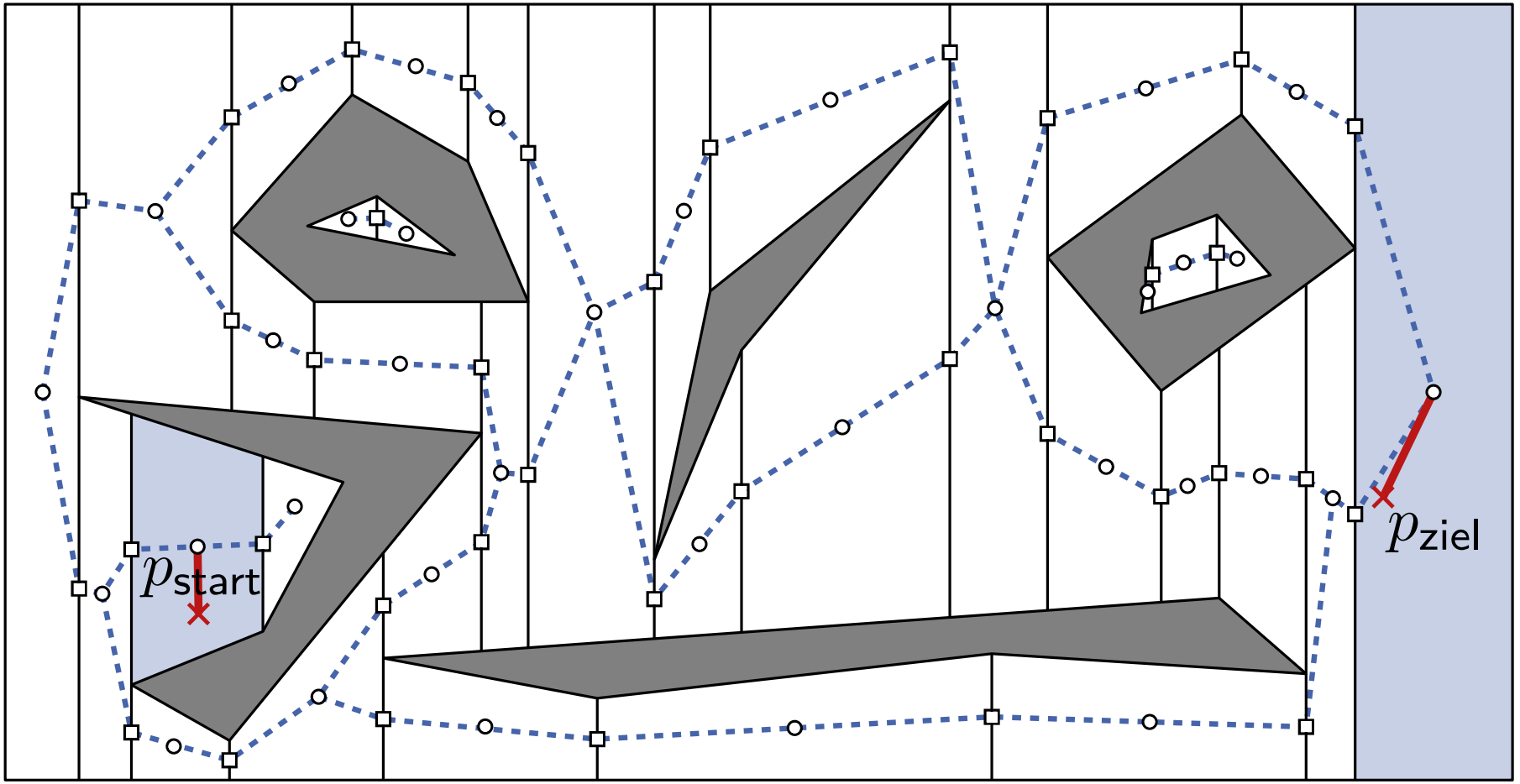
- erstelle Trapezzerlegung
- entferne Segmente in Hindernissen
- Knoten in Trapezen und Vertikalen

Erste Idee: Kürzeste Wege in Graphen



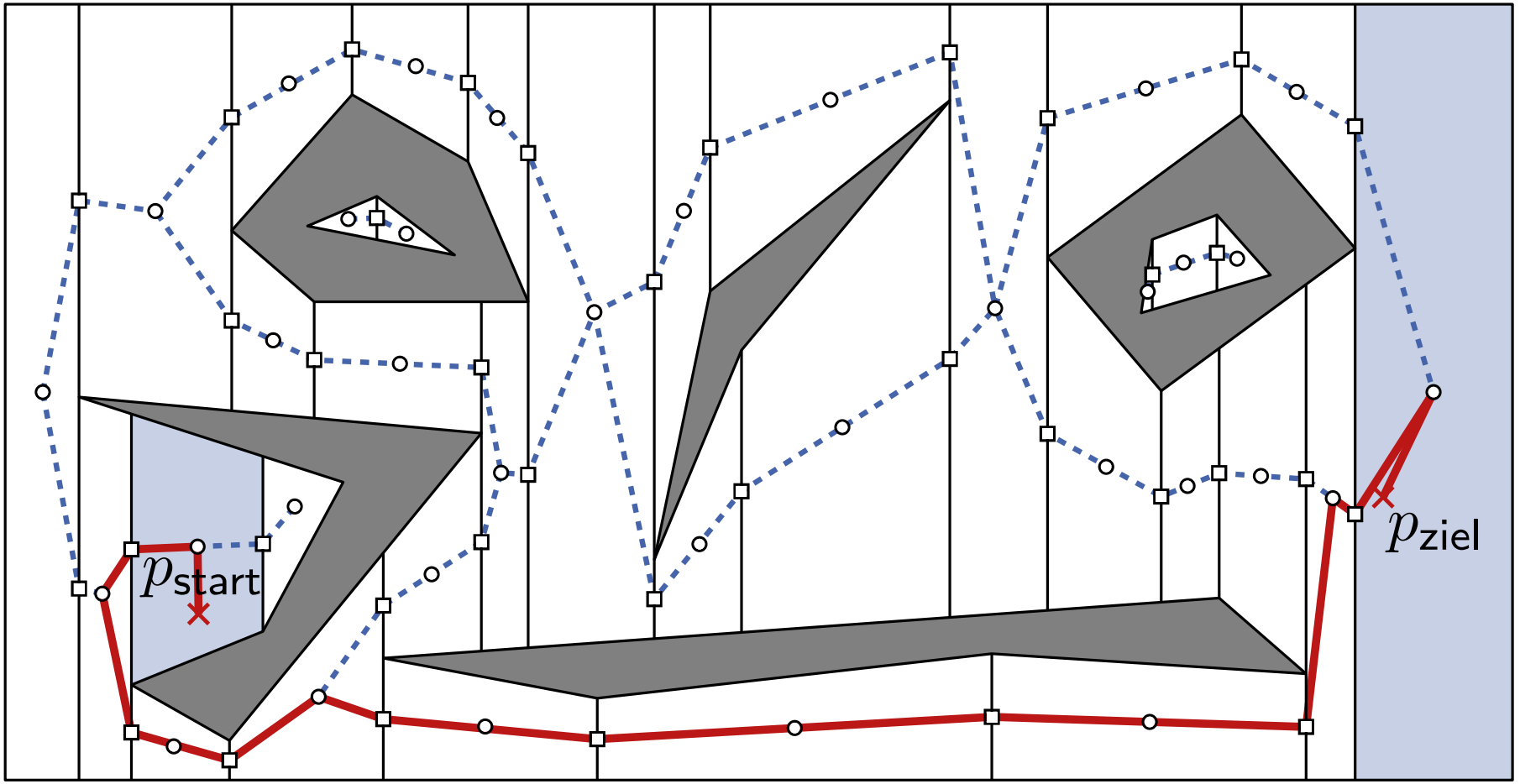
- erstelle Trapezzerlegung
- entferne Segmente in Hindernissen
- Knoten in Trapezen und Vertikalen
- euklidisch gewichteter „Dualgraph“ G mit Viaknoten auf Vertikalen

Erste Idee: Kürzeste Wege in Graphen



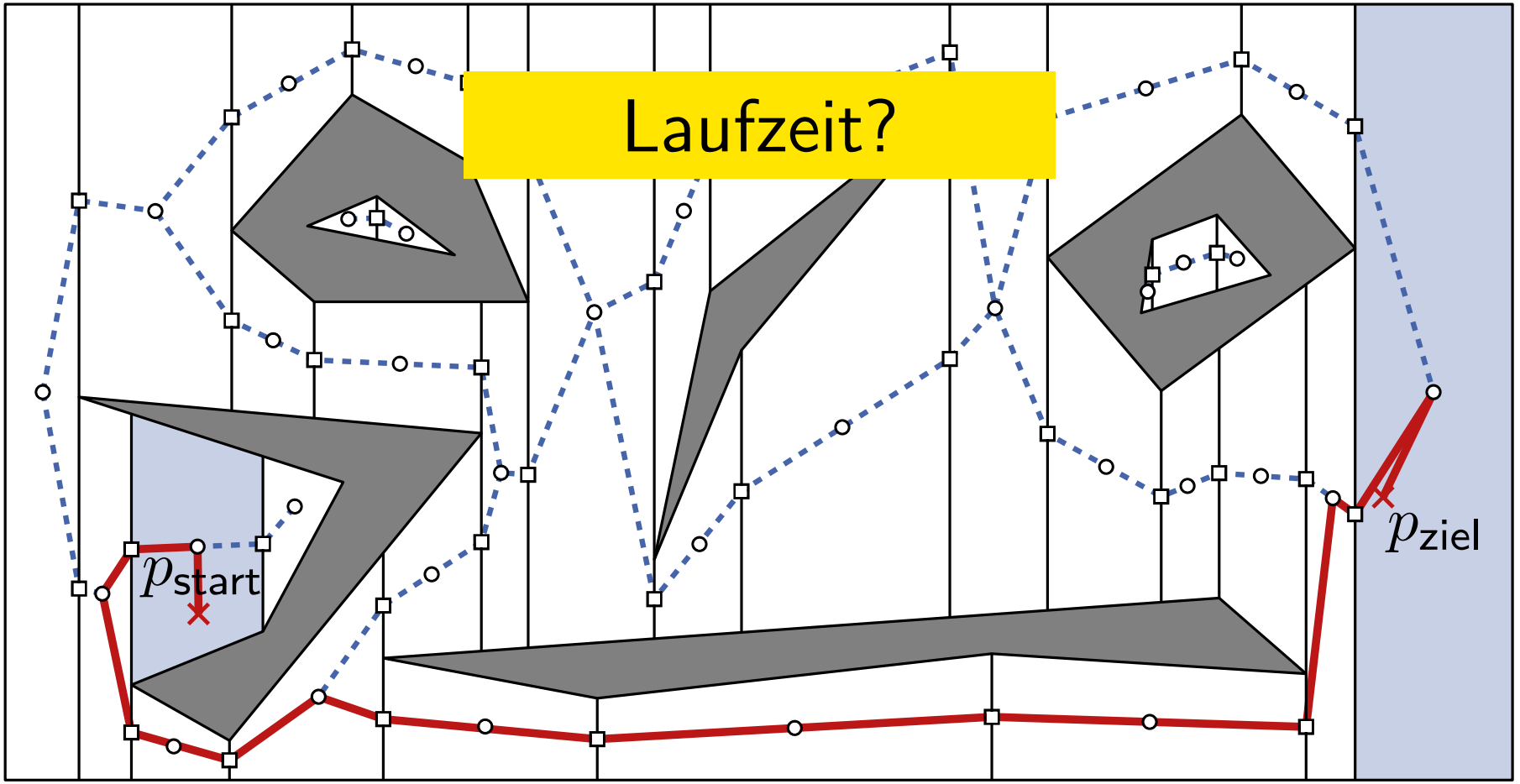
- erstelle Trapezzerlegung
- entferne Segmente in Hindernissen
- Knoten in Trapezen und Vertikalen
- euklidisch gewichteter „Dualgraph“ G mit Viaknoten auf Vertikalen
- Lokalisiere Start und Ziel

Erste Idee: Kürzeste Wege in Graphen



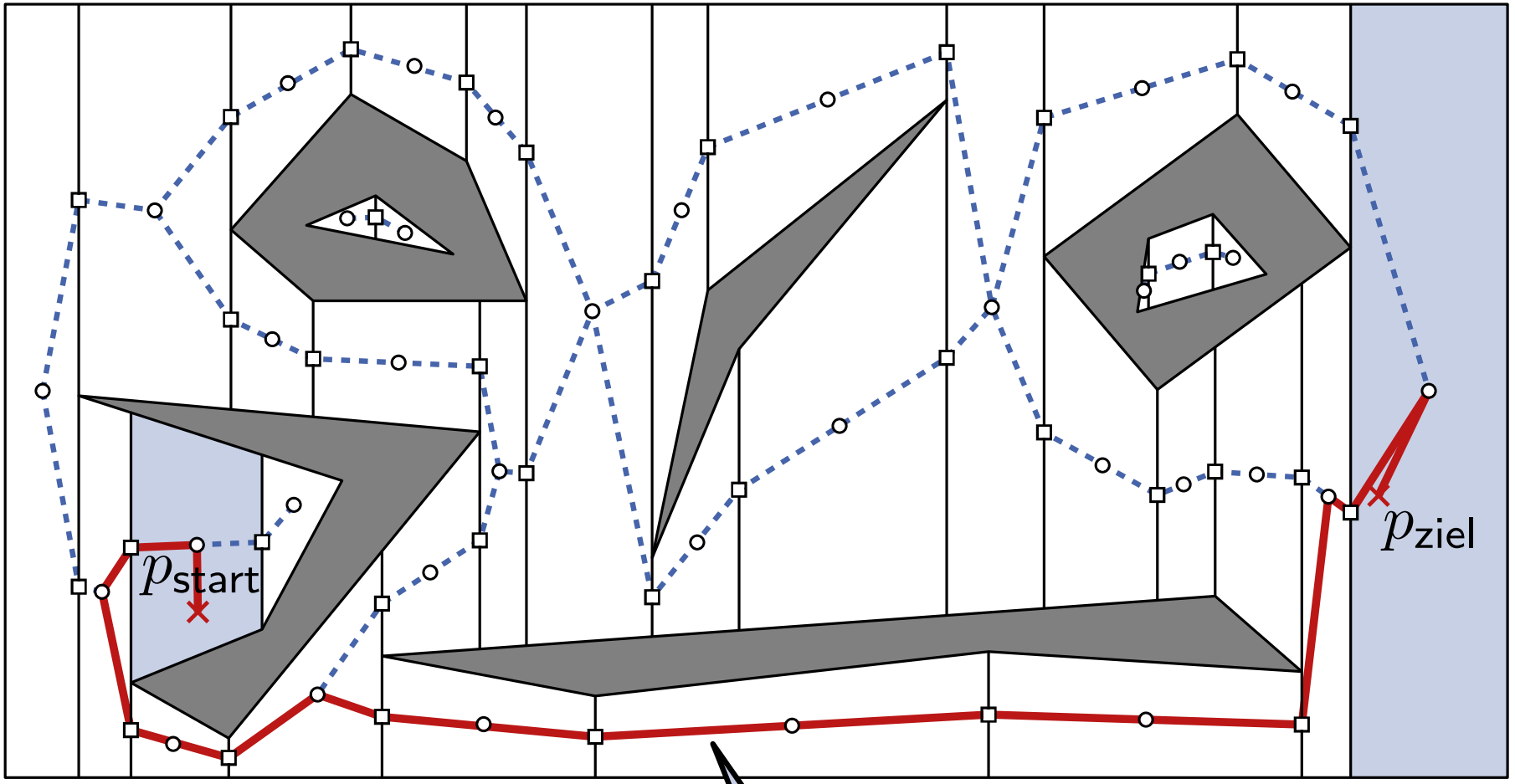
- erstelle Trapezzerlegung
- entferne Segmente in Hindernissen
- Knoten in Trapezen und Vertikalen
- euklidisch gewichteter „Dualgraph“ G mit Viaknoten auf Vertikalen
- Lokalisiere Start und Ziel
- kürzester Weg mit Dijkstra in G

Erste Idee: Kürzeste Wege in Graphen



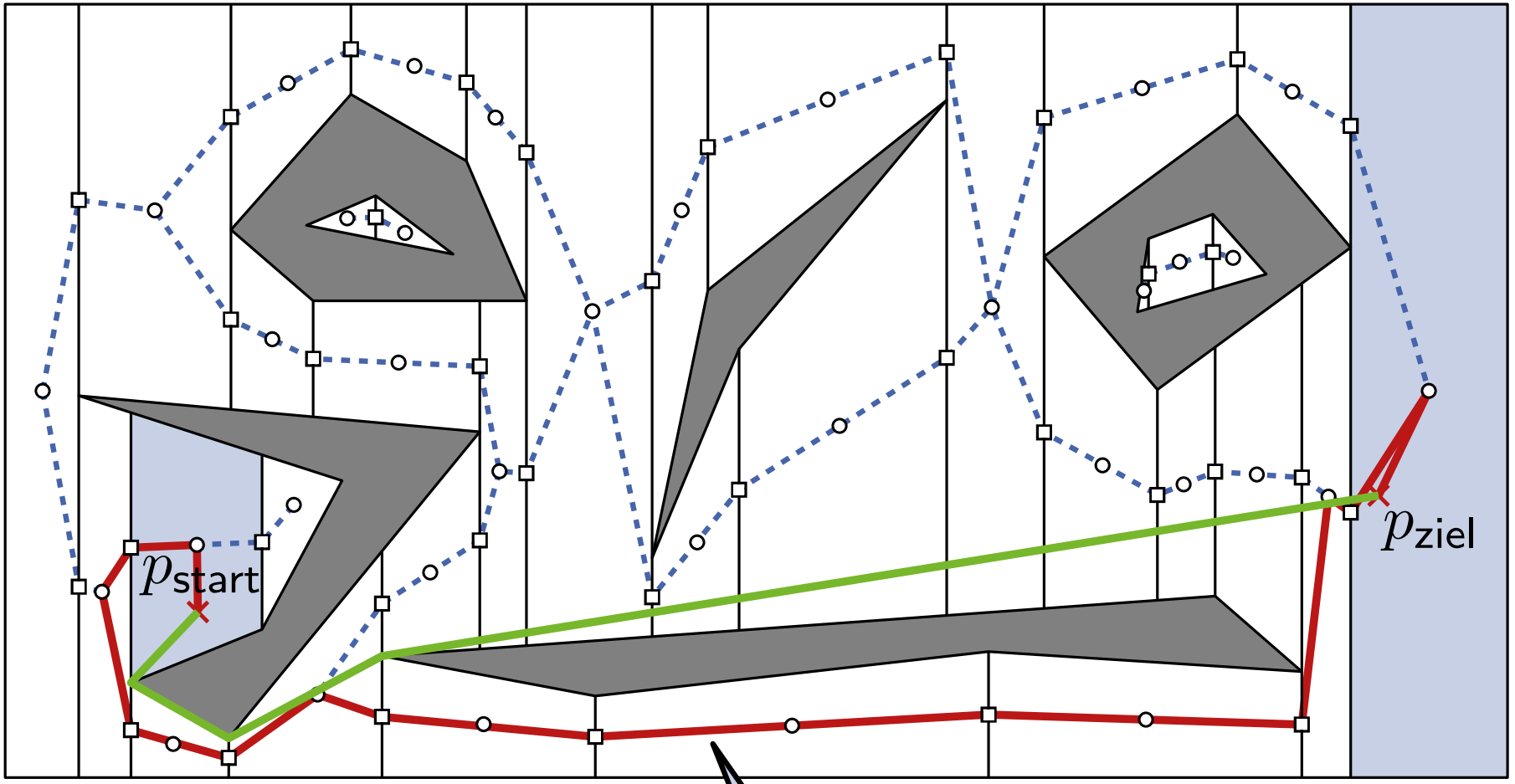
- erstelle Trapezzerlegung
- entferne Segmente in Hindernissen
- Knoten in Trapezen und Vertikalen
- euklidisch gewichteter „Dualgraph“ G mit Viaknoten auf Vertikalen
- Lokalisiere Start und Ziel
- kürzester Weg mit Dijkstra in G

Erste Idee: Kürzeste Wege in Graphen



- erstelle Trapezzerlegung
- entferne Segmente in Hindernissen
- Knoten in Trapezen und Vertikalen
- euklidisch gewichteter „Dualgraph“ G mit Viaknoten auf Vertikalen
- Lokalisiere Start und Ziel
- kürzester Weg mit Dijkstra in G

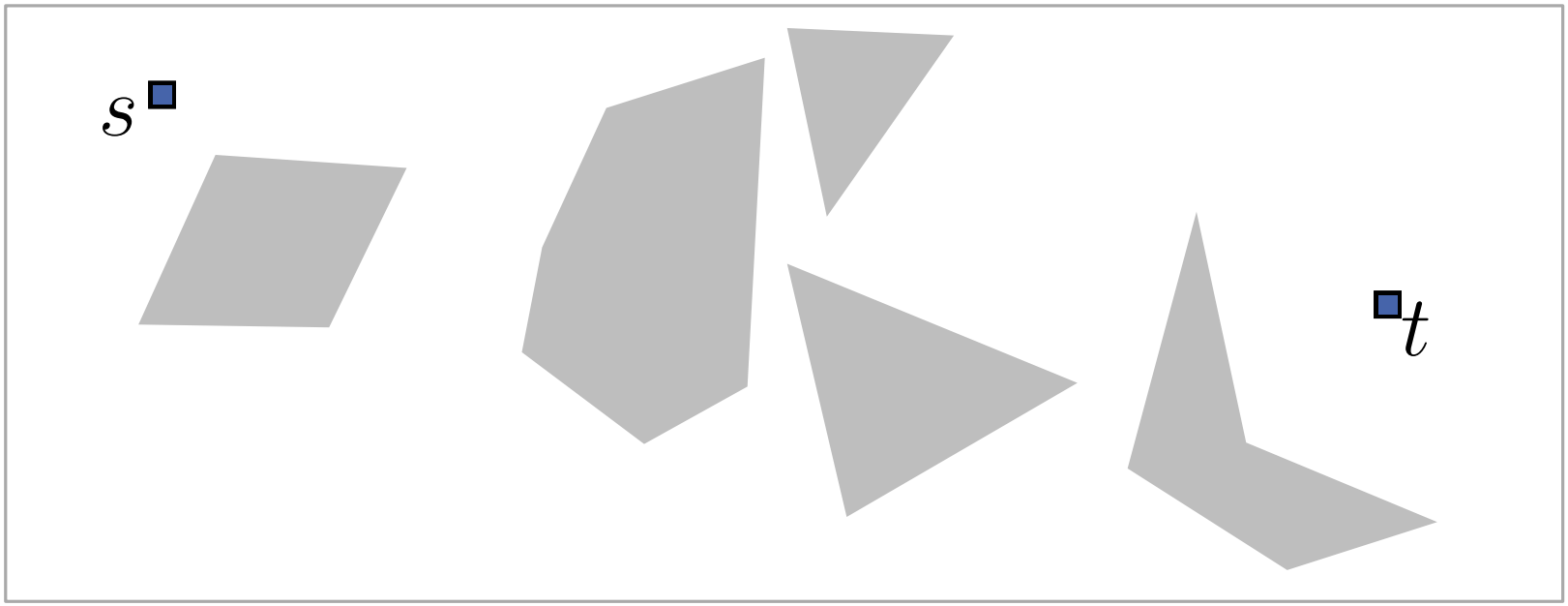
Erste Idee: Kürzeste Wege in Graphen



- erstelle Trapezzerlegung
- entferne Segmente in Hindernissen
- Knoten in Trapezen und Vertikalen
- euklidisch gewichteter „Dualgraph“ G mit Viaknoten auf Vertikalen
- Lokalisiere Start und Ziel
- kürzester Weg mit Dijkstra in G

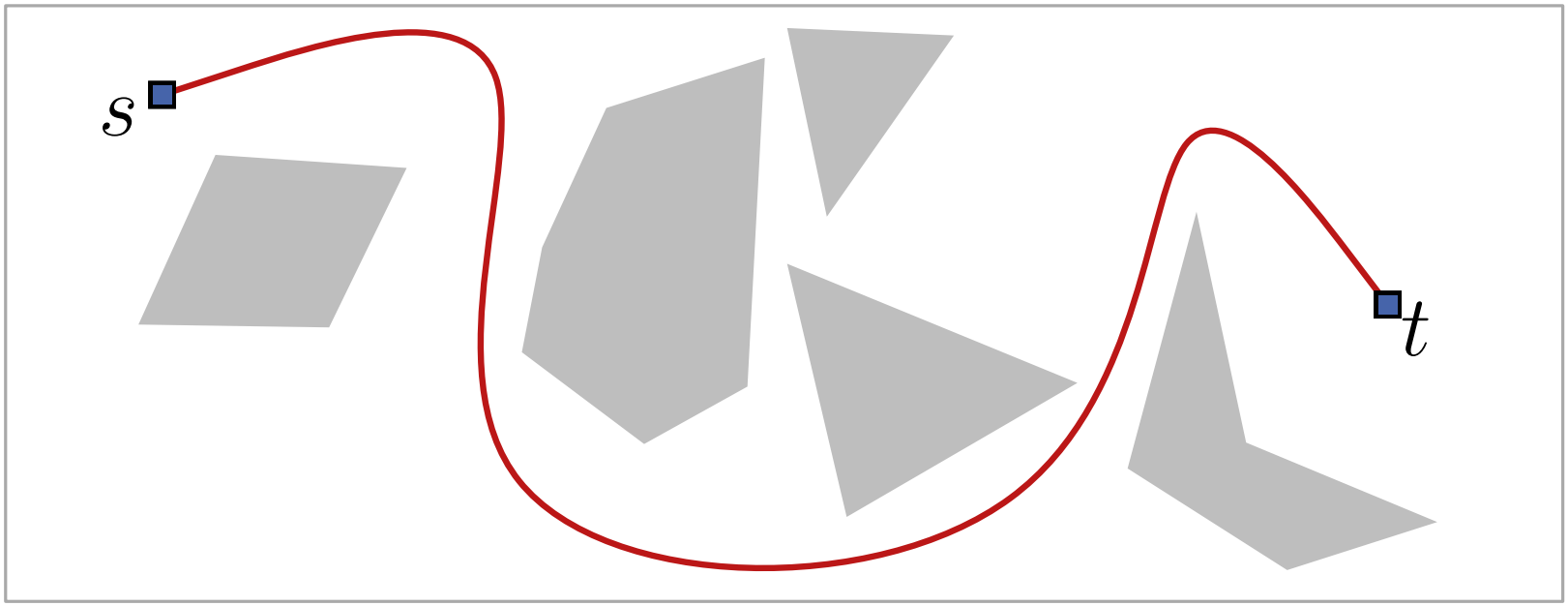
Kürzeste Wege in Polygongebieten

Lemma 1: Für eine Menge S von disjunkten Polygonen in $\mathbb{R}^2$ und zwei Punkte s und t außerhalb S



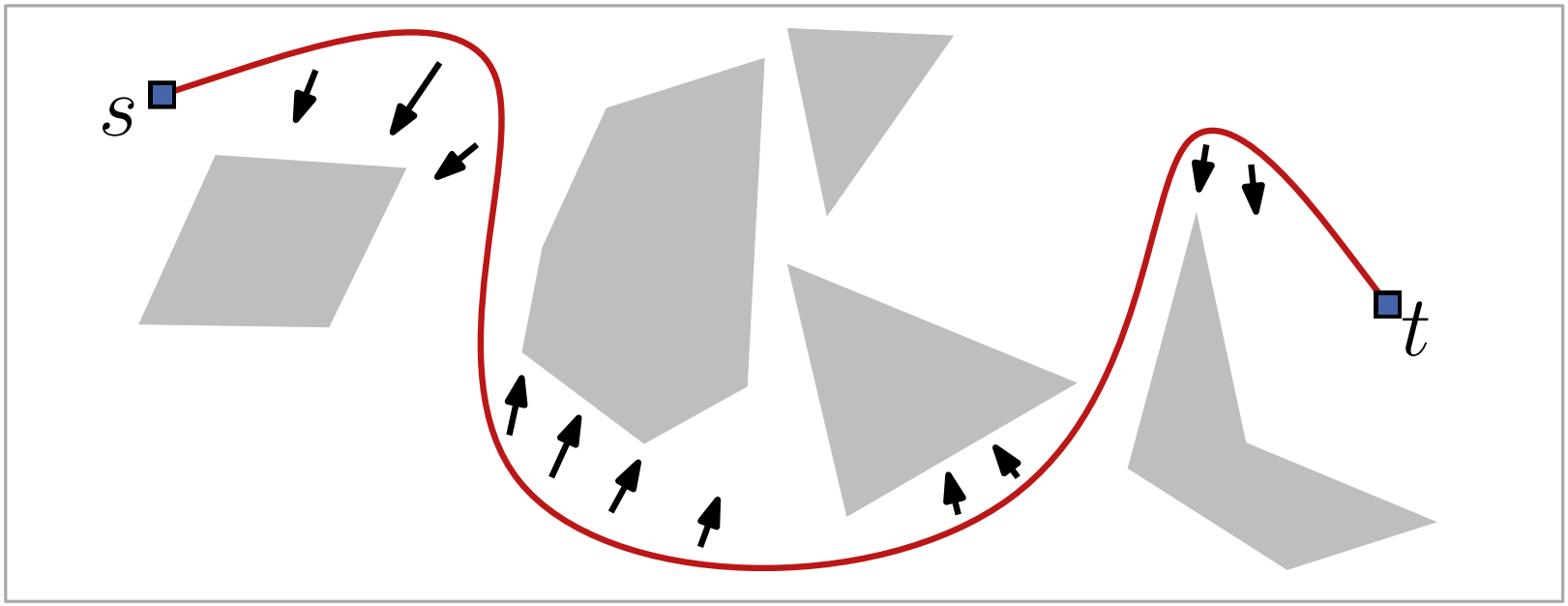
Kürzeste Wege in Polygongebieten

Lemma 1: Für eine Menge S von disjunkten Polygonen in $\mathbb{R}^2$ und zwei Punkte s und t außerhalb S ist jeder kürzeste st-Weg in $\mathbb{R}^2 \setminus \bigcup S$ ein Polygonzug dessen innere Knoten Knoten von S sind.



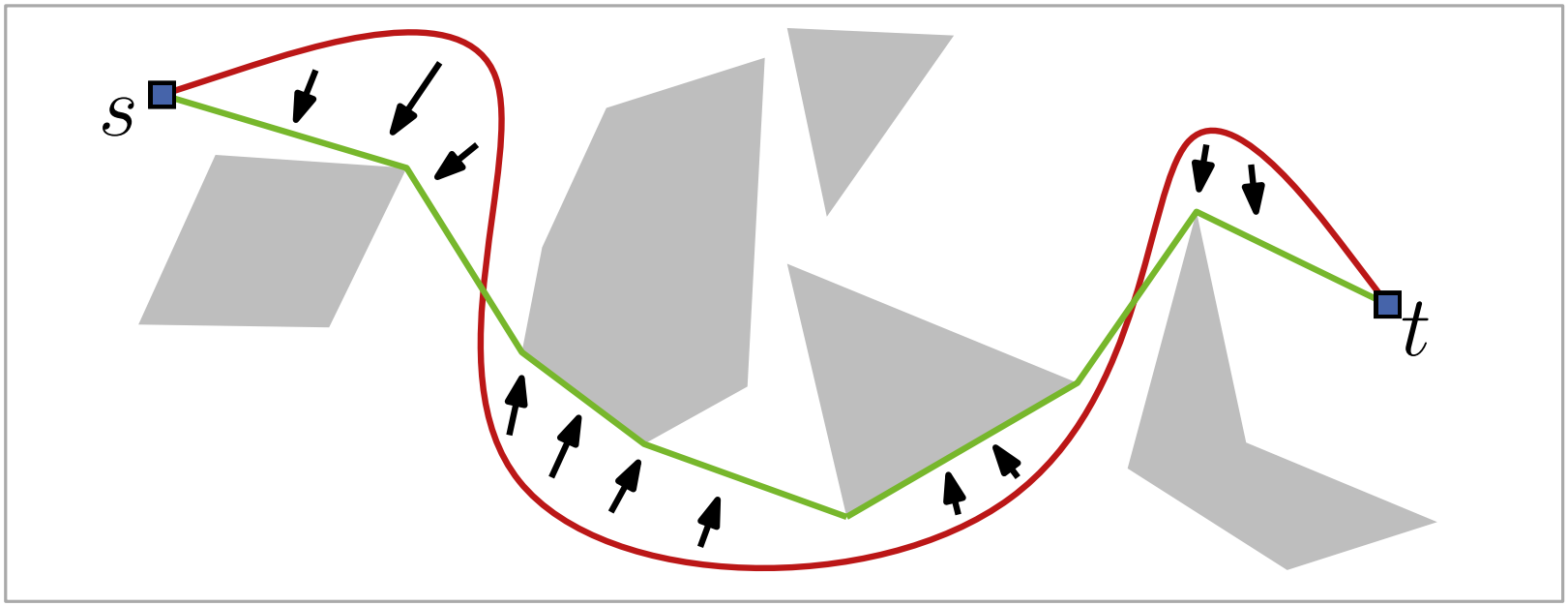
Kürzeste Wege in Polygongebieten

Lemma 1: Für eine Menge S von disjunkten Polygonen in $\mathbb{R}^2$ und zwei Punkte s und t außerhalb S ist jeder kürzeste st-Weg in $\mathbb{R}^2 \setminus \bigcup S$ ein Polygonzug dessen innere Knoten Knoten von S sind.



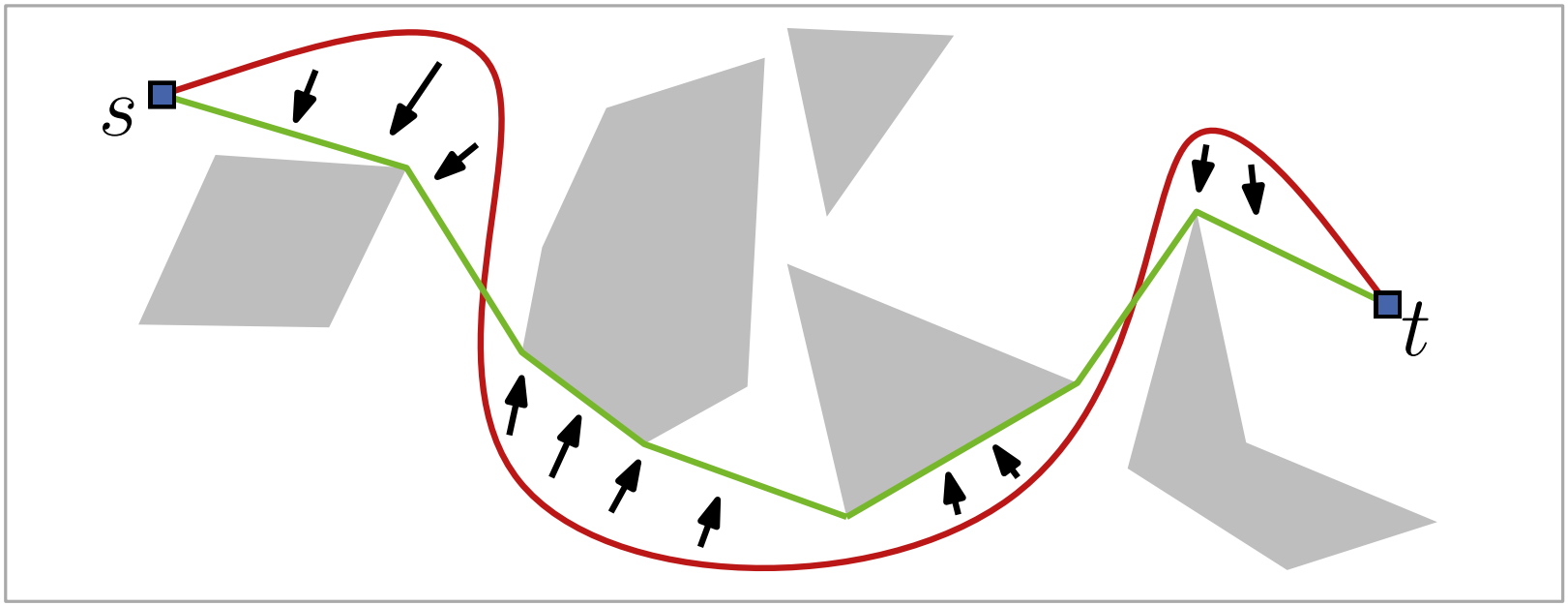
Kürzeste Wege in Polygongebieten

Lemma 1: Für eine Menge S von disjunkten Polygonen in $\mathbb{R}^2$ und zwei Punkte s und t außerhalb S ist jeder kürzeste st-Weg in $\mathbb{R}^2 \setminus \bigcup S$ ein Polygonzug dessen innere Knoten Knoten von S sind.



Kürzeste Wege in Polygongebieten

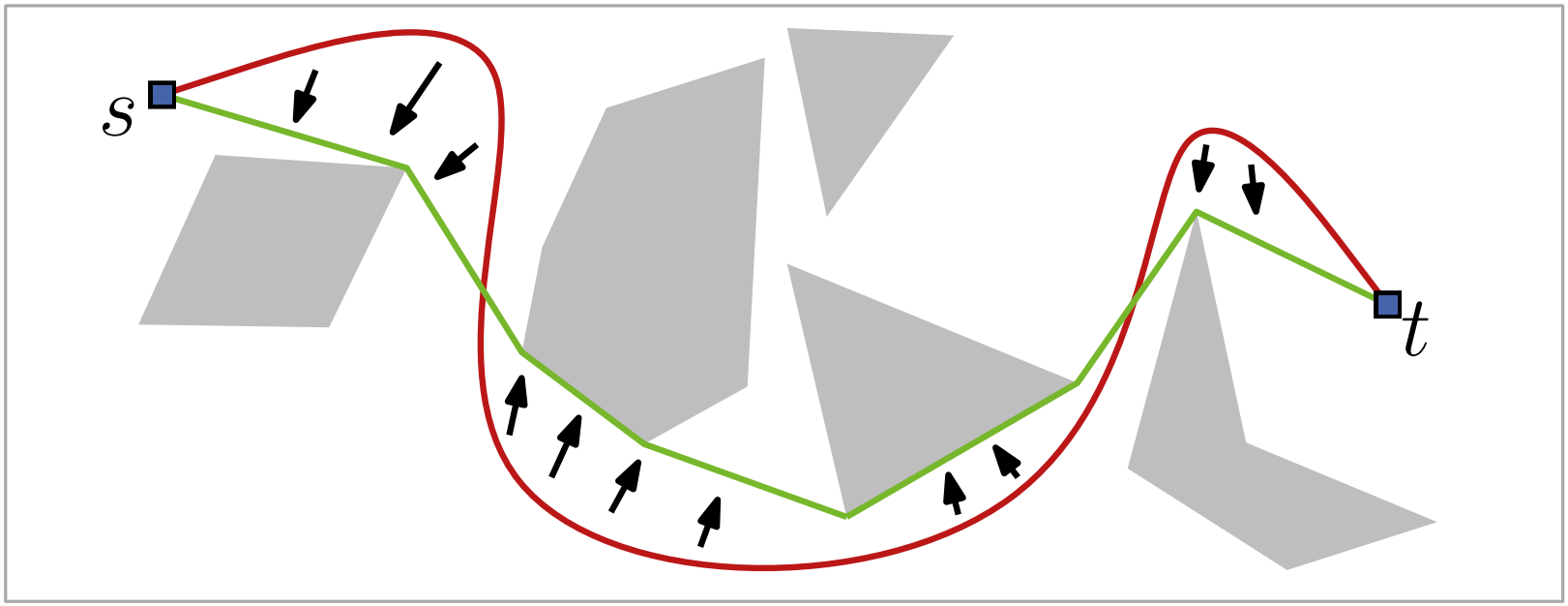
Lemma 1: Für eine Menge S von disjunkten Polygonen in $\mathbb{R}^2$ und zwei Punkte s und t außerhalb S ist jeder kürzeste st-Weg in $\mathbb{R}^2 \setminus \bigcup S$ ein Polygonzug dessen innere Knoten Knoten von S sind.



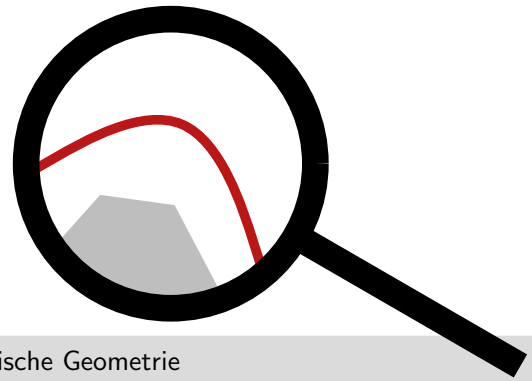
Beweisskizze:

Kürzeste Wege in Polygongebieten

Lemma 1: Für eine Menge S von disjunkten Polygonen in $\mathbb{R}^2$ und zwei Punkte s und t außerhalb S ist jeder kürzeste st-Weg in $\mathbb{R}^2 \setminus \bigcup S$ ein Polygonzug dessen innere Knoten Knoten von S sind.

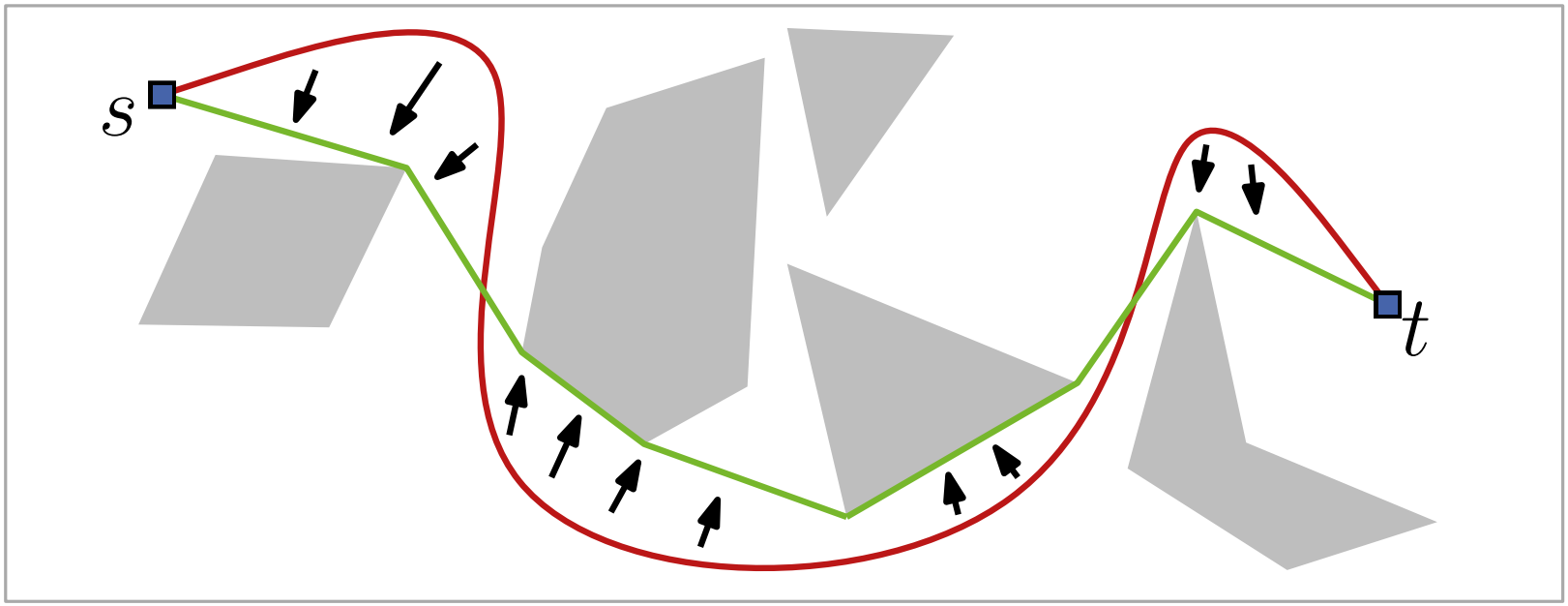


Beweisskizze:

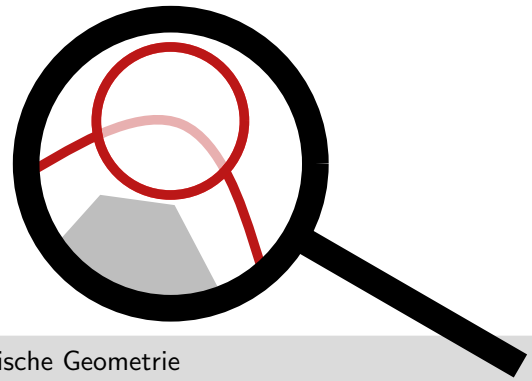


Kürzeste Wege in Polygongebieten

Lemma 1: Für eine Menge S von disjunkten Polygonen in $\mathbb{R}^2$ und zwei Punkte s und t außerhalb S ist jeder kürzeste st-Weg in $\mathbb{R}^2 \setminus \bigcup S$ ein Polygonzug dessen innere Knoten Knoten von S sind.

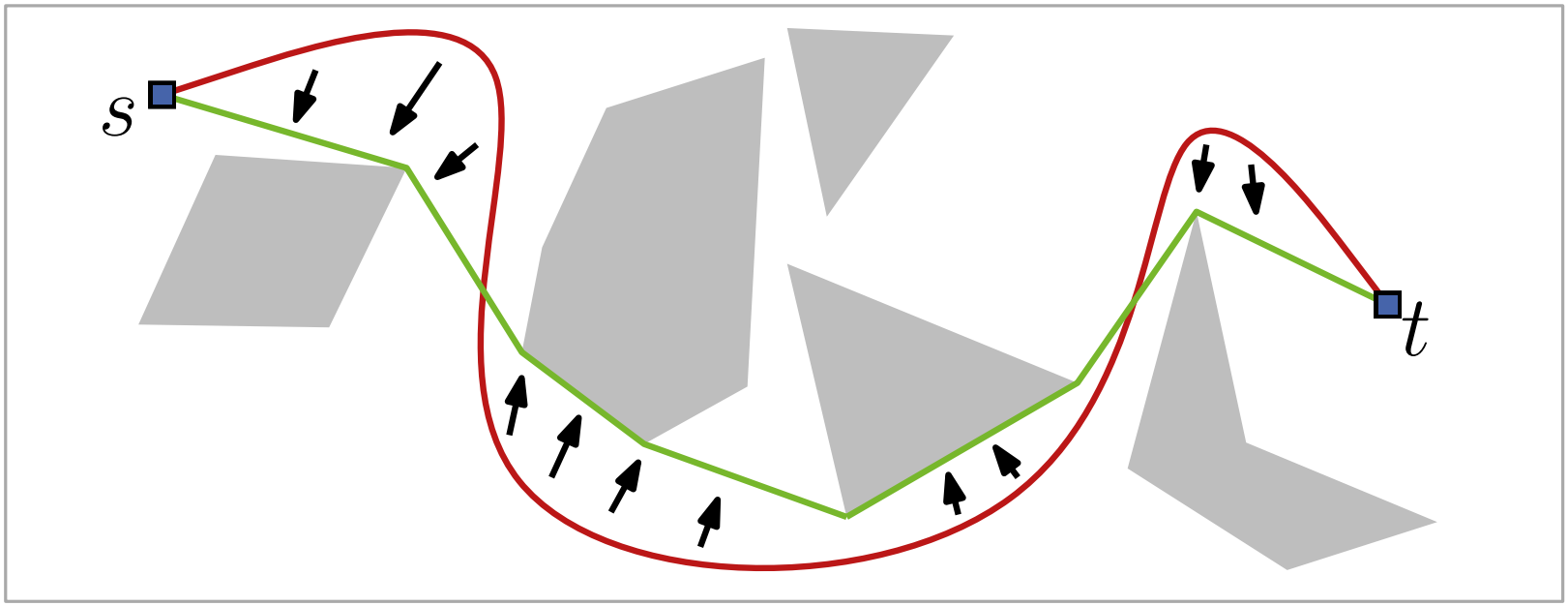


Beweisskizze:

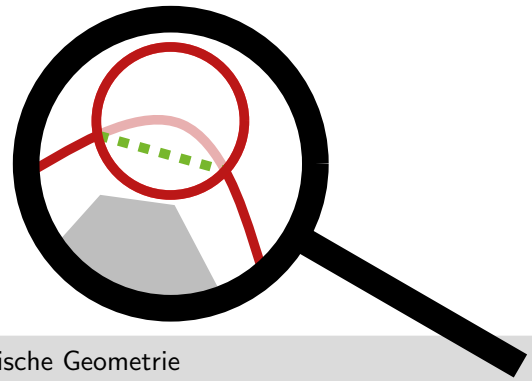


Kürzeste Wege in Polygongebieten

Lemma 1: Für eine Menge S von disjunkten Polygonen in $\mathbb{R}^2$ und zwei Punkte s und t außerhalb S ist jeder kürzeste st-Weg in $\mathbb{R}^2 \setminus \bigcup S$ ein Polygonzug dessen innere Knoten Knoten von S sind.

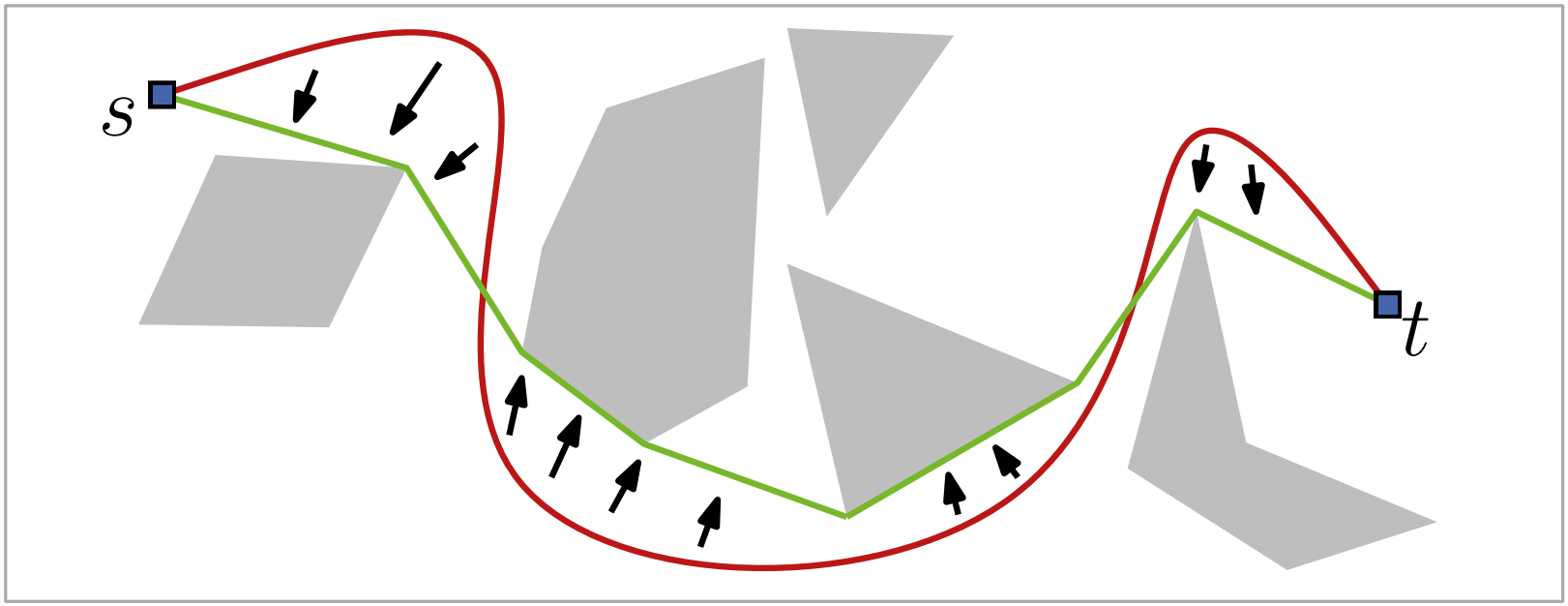


Beweisskizze:

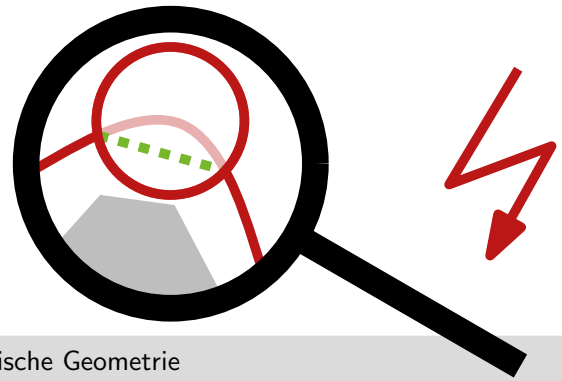


Kürzeste Wege in Polygongebieten

Lemma 1: Für eine Menge S von disjunkten Polygonen in $\mathbb{R}^2$ und zwei Punkte s und t außerhalb S ist jeder kürzeste st-Weg in $\mathbb{R}^2 \setminus \bigcup S$ ein Polygonzug dessen innere Knoten Knoten von S sind.

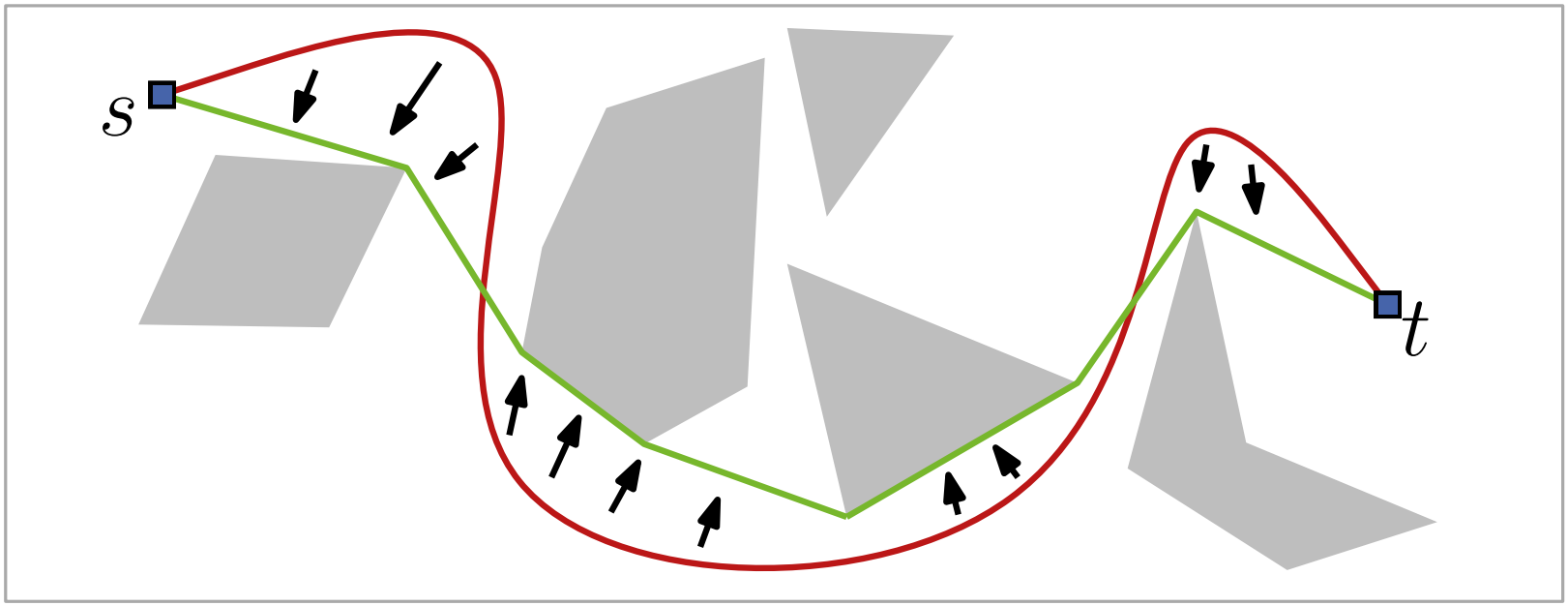


Beweisskizze:

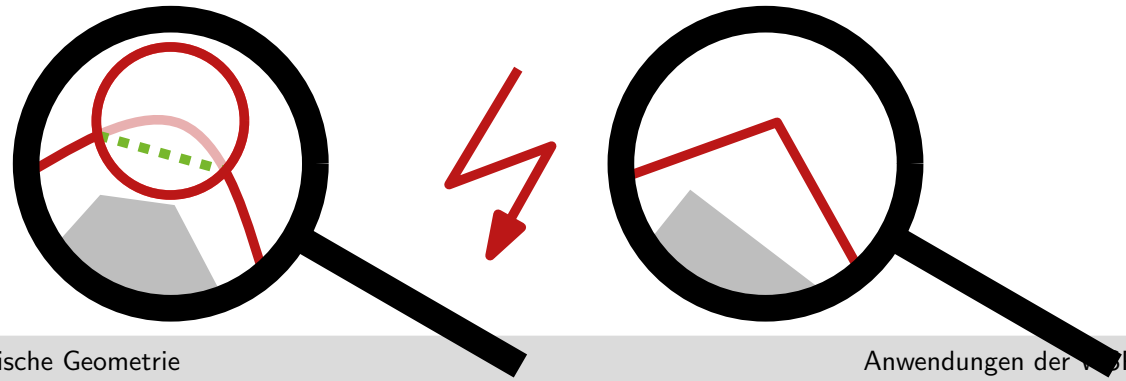


Kürzeste Wege in Polygongebieten

Lemma 1: Für eine Menge S von disjunkten Polygonen in $\mathbb{R}^2$ und zwei Punkte s und t außerhalb S ist jeder kürzeste st-Weg in $\mathbb{R}^2 \setminus \bigcup S$ ein Polygonzug dessen innere Knoten Knoten von S sind.

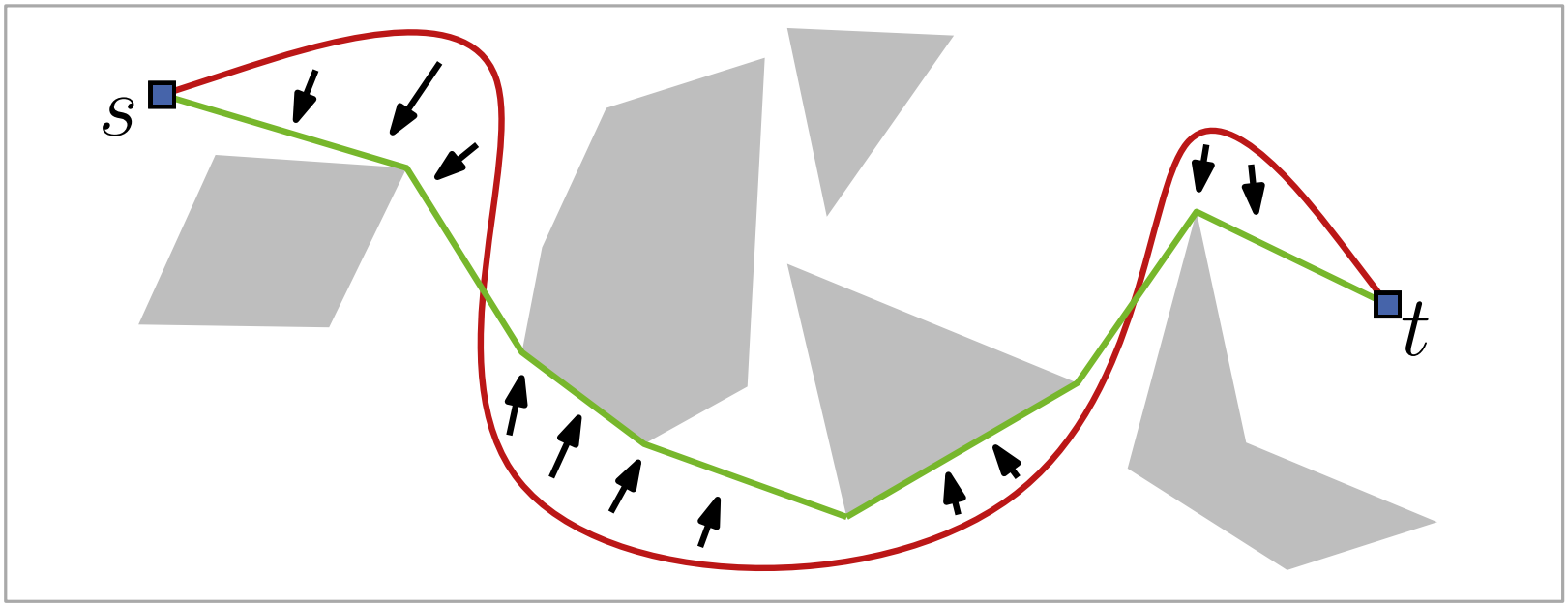


Beweisskizze:

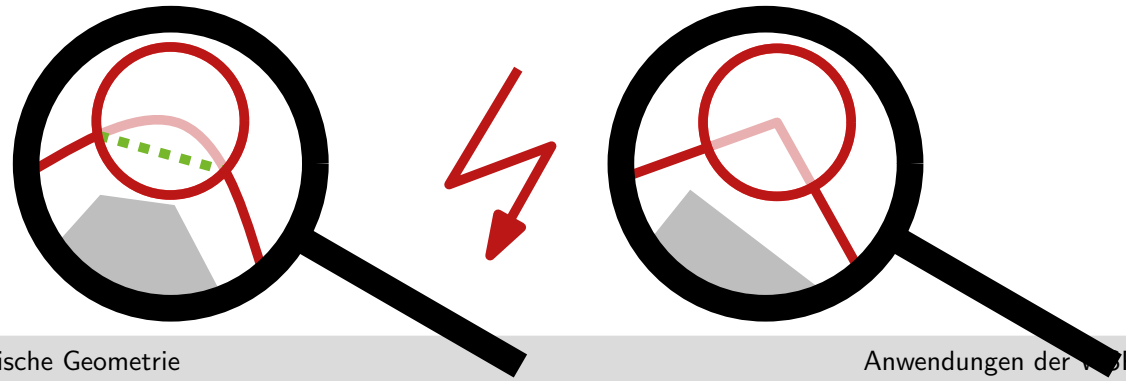


Kürzeste Wege in Polygongebieten

Lemma 1: Für eine Menge S von disjunkten Polygonen in $\mathbb{R}^2$ und zwei Punkte s und t außerhalb S ist jeder kürzeste st-Weg in $\mathbb{R}^2 \setminus \bigcup S$ ein Polygonzug dessen innere Knoten Knoten von S sind.

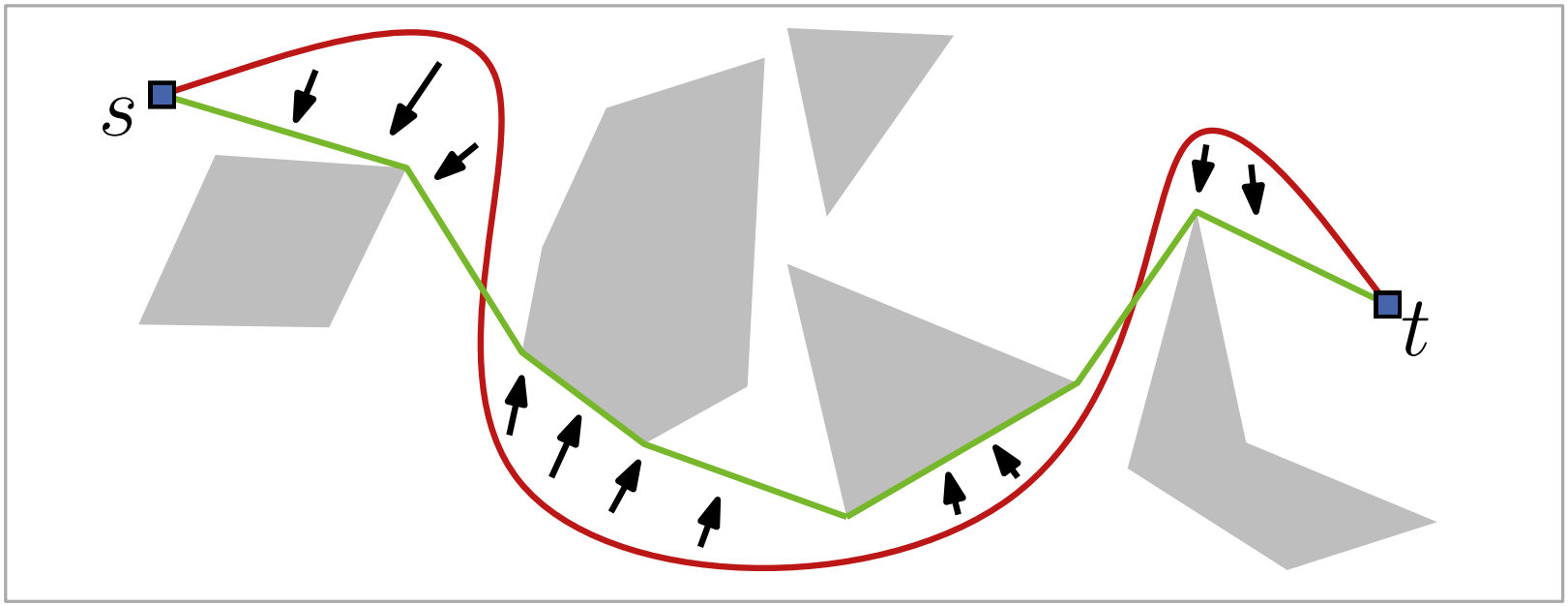


Beweisskizze:

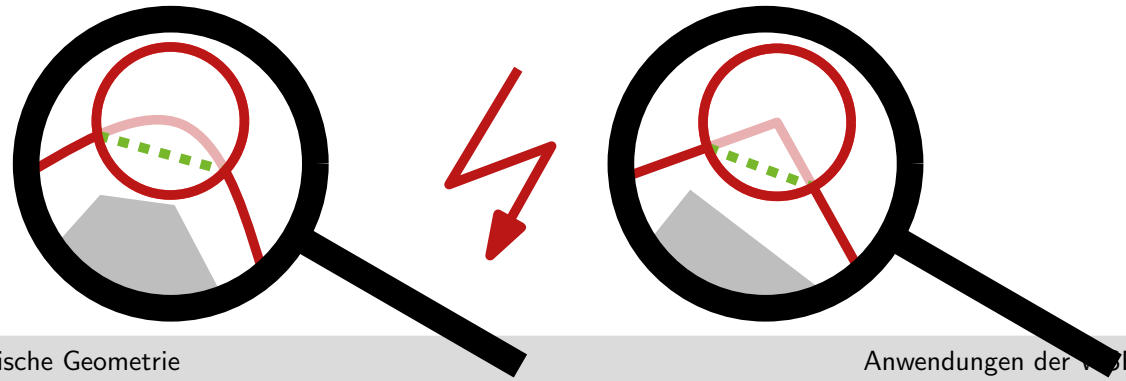


Kürzeste Wege in Polygongebieten

Lemma 1: Für eine Menge S von disjunkten Polygonen in $\mathbb{R}^2$ und zwei Punkte s und t außerhalb S ist jeder kürzeste st-Weg in $\mathbb{R}^2 \setminus \bigcup S$ ein Polygonzug dessen innere Knoten Knoten von S sind.

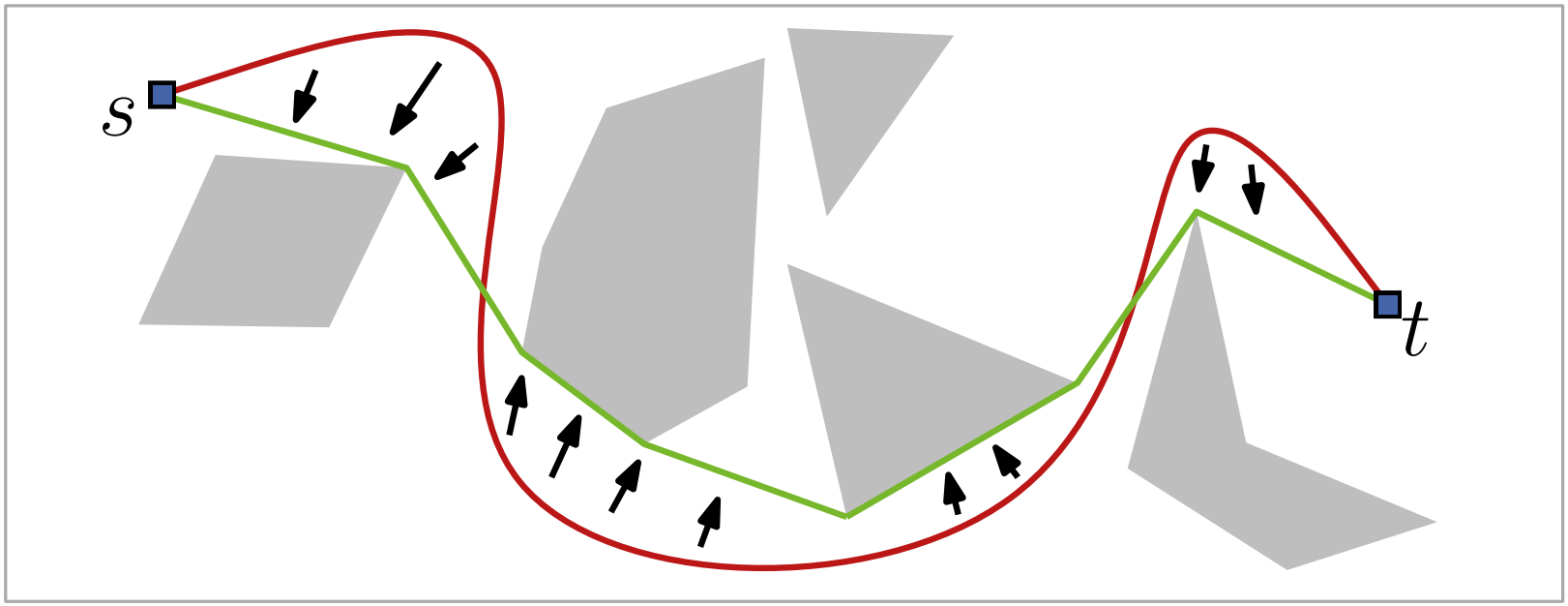


Beweisskizze:

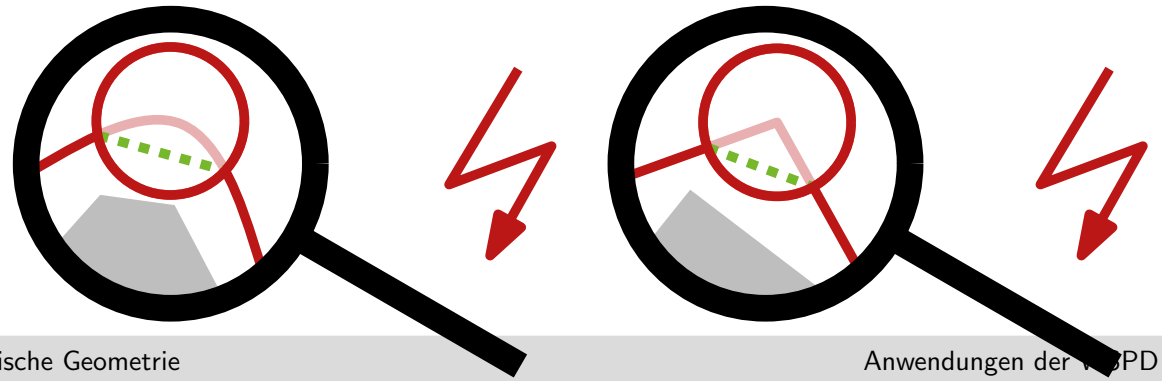


Kürzeste Wege in Polygongebieten

Lemma 1: Für eine Menge S von disjunkten Polygonen in $\mathbb{R}^2$ und zwei Punkte s und t außerhalb S ist jeder kürzeste st-Weg in $\mathbb{R}^2 \setminus \bigcup S$ ein Polygonzug dessen innere Knoten Knoten von S sind.



Beweisskizze:

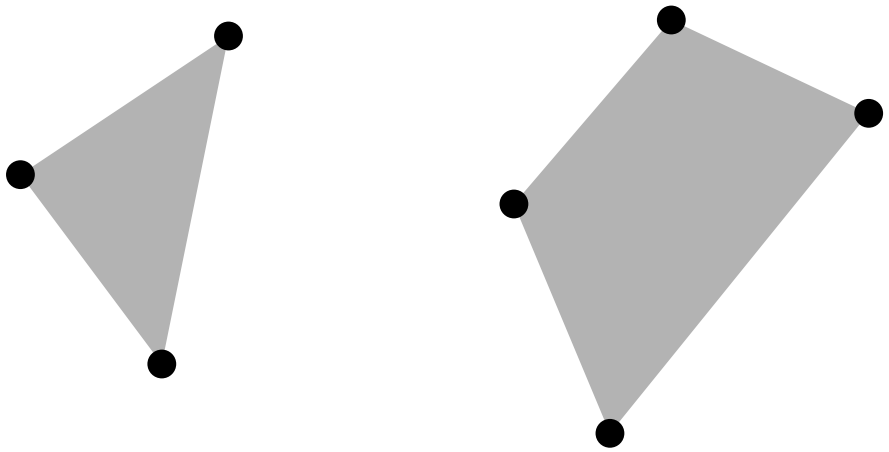


Sichtbarkeitsgraph

Gegeben sei eine Menge S disjunkter offener Polygone...

Sichtbarkeitsgraph

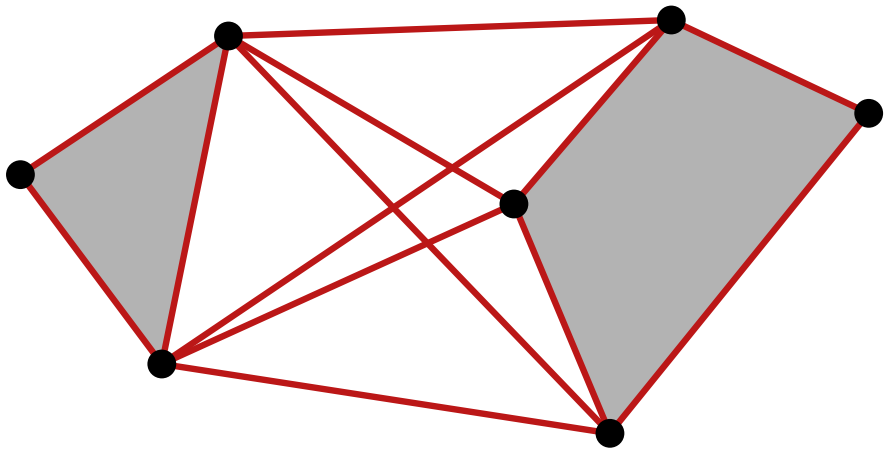
Gegeben sei eine Menge S disjunkter offener Polygone...



...mit Knotenmenge $V(S)$.

Sichtbarkeitsgraph

Gegeben sei eine Menge S disjunkter offener Polygone...

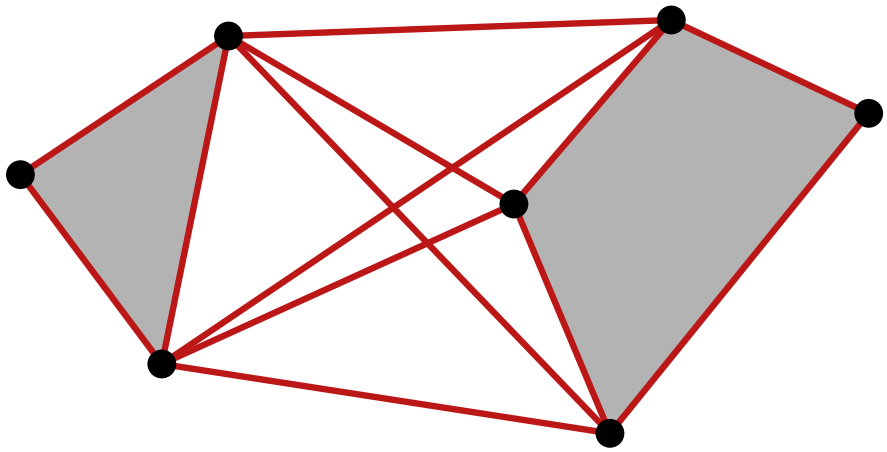


...mit Knotenmenge $V(S)$.

Def.: Dann ist $G_{\text{vis}}(S) = (V(S), E_{\text{vis}}(S))$ der **Sichtbarkeitsgraph** von S mit $E_{\text{vis}}(S) = \{uv \mid u, v \in V(S) \text{ und } u \textit{ sieht } v\}$ und $w(uv) = |uv|$.

Sichtbarkeitsgraph

Gegeben sei eine Menge S disjunkter offener Polygone...

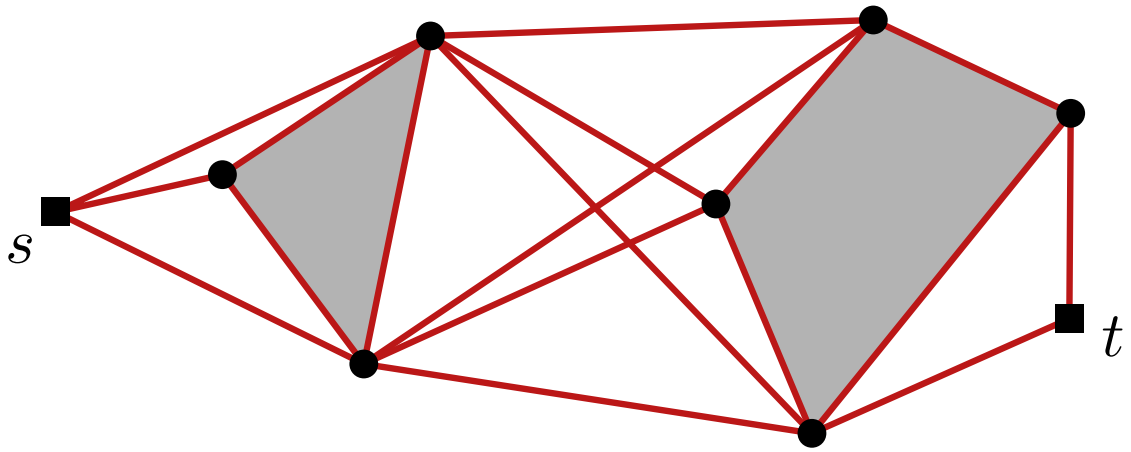


...mit Knotenmenge $V(S)$.

Def.: Dann ist $G_{\text{vis}}(S) = (V(S), E_{\text{vis}}(S))$ der **Sichtbarkeitsgraph** von S mit $E_{\text{vis}}(S) = \{uv \mid u, v \in V(S) \text{ und } u \textit{ sieht } v\}$ und $w(uv) = |uv|$.
Dabei gilt u **sieht** $v :\Leftrightarrow \overline{uv} \cap \bigcup S = \emptyset$

Sichtbarkeitsgraph

Gegeben sei eine Menge S disjunkter offener Polygone...



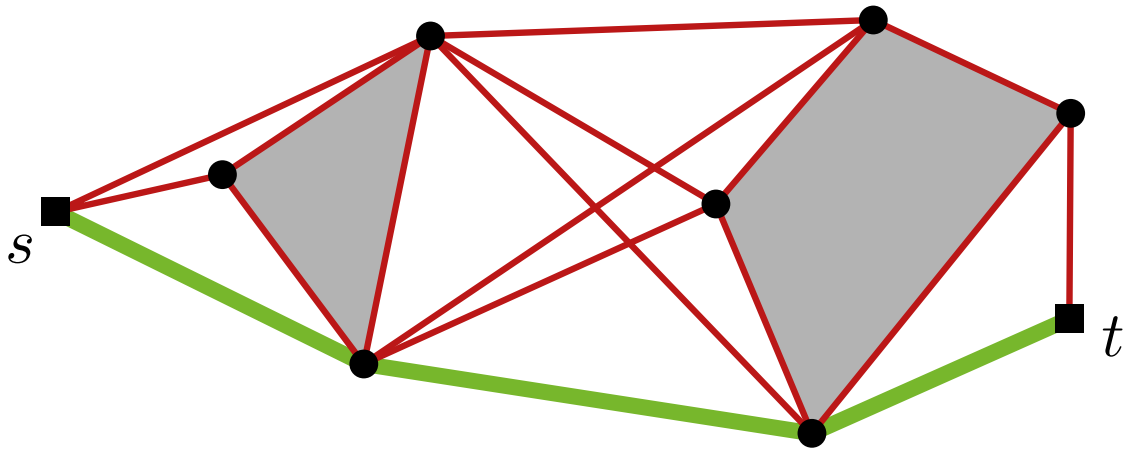
...mit Knotenmenge $V(S)$.

Def.: Dann ist $G_{\text{vis}}(S) = (V(S), E_{\text{vis}}(S))$ der **Sichtbarkeitsgraph** von S mit $E_{\text{vis}}(S) = \{uv \mid u, v \in V(S) \text{ und } u \textit{ sieht } v\}$ und $w(uv) = |uv|$.
Dabei gilt u **sieht** $v :\Leftrightarrow \overline{uv} \cap \bigcup S = \emptyset$

Definiere $S^\star = S \cup \{s, t\}$ und $G_{\text{vis}}(S^\star)$ analog.

Sichtbarkeitsgraph

Gegeben sei eine Menge S disjunkter offener Polygone...



...mit Knotenmenge $V(S)$.

Def.: Dann ist $G_{\text{vis}}(S) = (V(S), E_{\text{vis}}(S))$ der **Sichtbarkeitsgraph** von S mit $E_{\text{vis}}(S) = \{uv \mid u, v \in V(S) \text{ und } u \textit{ sieht } v\}$ und $w(uv) = |uv|$.
Dabei gilt u **sieht** $v :\Leftrightarrow \overline{uv} \cap \bigcup S = \emptyset$

Definiere $S^\star = S \cup \{s, t\}$ und $G_{\text{vis}}(S^\star)$ analog.

Lemma 1 $\Rightarrow$ Der kürzeste st-Weg, der die Hindernisse in S vermeidet, entspricht einem kürzesten Weg in $G_{\text{vis}}(S^\star)$.

Algorithmus

$\textsc{ShortestPath}(S, s, t)$

Input: Hindernismenge S, Punkte $s, t \in \mathbb{R}^2 \setminus \bigcup S$
Output: kürzester kollisionsfreier st-Weg in S

1 $G_{\mathsf{vis}} \leftarrow \textsc{VisibilityGraph}(S \cup \{s, t\})$
2 **foreach** $uv \in E_{\mathsf{vis}}$ **do** $w(uv) \leftarrow |uv|$
3 **return** $\textsc{Dijkstra}(G_{\mathsf{vis}}, w, s, t)$

Algorithmus

$\textsc{ShortestPath}(S, s, t)$

$n = |V(S)|, m = |E_{\mathsf{vis}}(S)|$

Input: Hindernismenge S, Punkte $s, t \in \mathbb{R}^2 \setminus \bigcup S$

Output: kürzester kollisionsfreier st-Weg in S

1 $G_{\mathsf{vis}} \leftarrow \textsc{VisibilityGraph}(S \cup \{s, t\})$?

2 **foreach** $uv \in E_{\mathsf{vis}}$ **do** $w(uv) \leftarrow |uv|$ $O(m)$

3 **return** $\textsc{Dijkstra}(G_{\mathsf{vis}}, w, s, t)$ $O(n \log n + m)$

Algorithmus

$\textsc{ShortestPath}(S, s, t)$

$n = |V(S)|, m = |E_{\text{vis}}(S)|$

Input: Hindernismenge S, Punkte $s, t \in \mathbb{R}^2 \setminus \bigcup S$

Output: kürzester kollisionsfreier st-Weg in S

1 $G_{\text{vis}} \leftarrow \textsc{VisibilityGraph}(S \cup \{s, t\})$ $\quad O(n^2 \log n)$

2 **foreach** $uv \in E_{\text{vis}}$ **do** $w(uv) \leftarrow |uv|$ $\quad O(m)$

3 **return** $\textsc{Dijkstra}(G_{\text{vis}}, w, s, t)$ $\quad O(n \log n + m)$

$O(n^2 \log n)$

Satz 1: Ein kürzester st-Weg in einem Gebiet mit Polygon-Hindernissen mit n Kanten kann in $O(n^2 \log n)$ Zeit berechnet werden.

Sichtbarkeitsgraph berechnen

Karlsruhe Institute of Technology

$\textsc{VisibilityGraph}(S)$

Input: Menge disjunkter Polygone S

Output: Sichtbarkeitsgraph $G_{\mathsf{vis}}(S)$

1 $E \leftarrow \emptyset$

2 **foreach** $v \in V(S)$ **do**

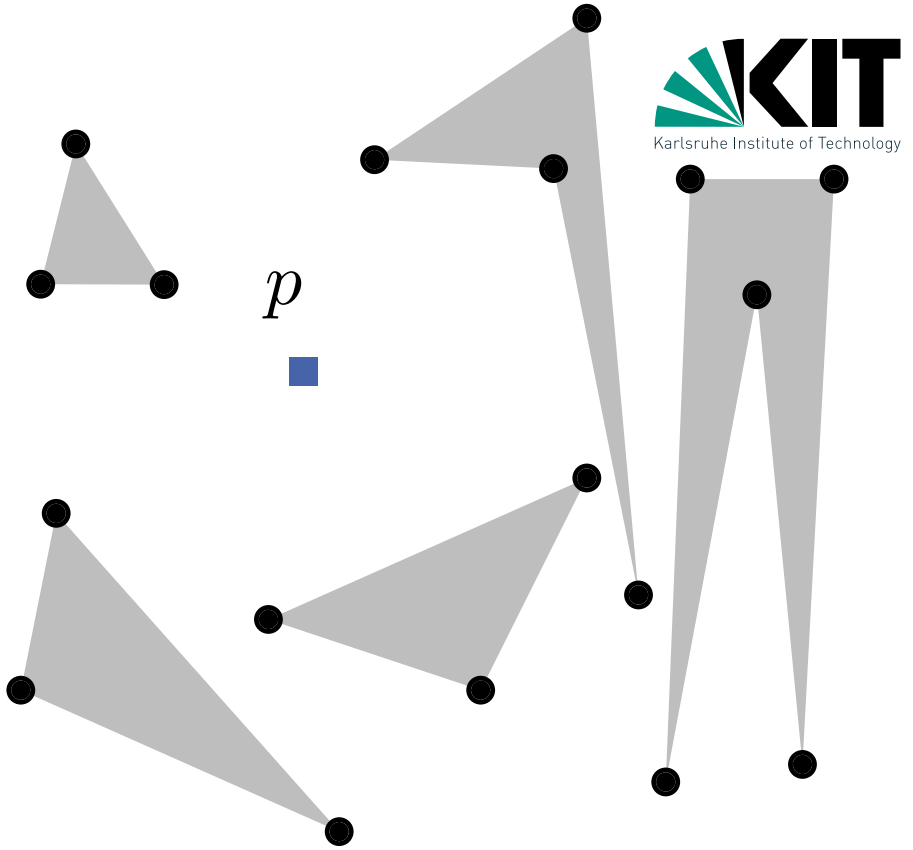
3 $\quad W \leftarrow \textsc{VisibleVertices}(v, S)$

4 $\quad E \leftarrow E \cup \{vw \mid w \in W\}$

5 **return** E

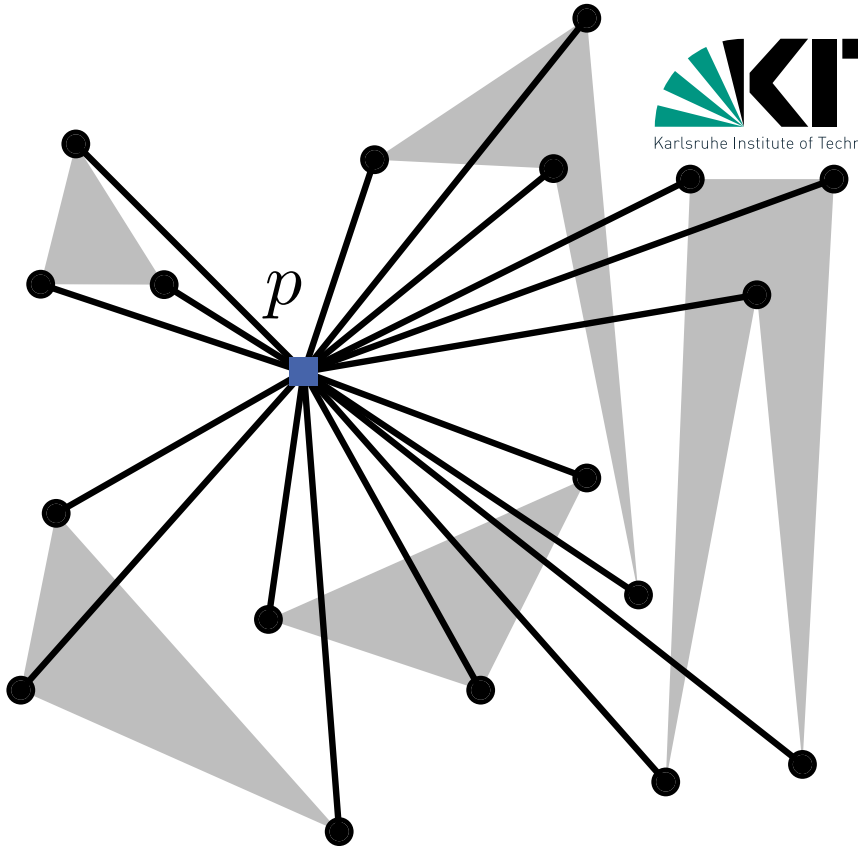
Sichtbare Knoten berechnen

$\textsc{VisibleVertices}(p, S)$



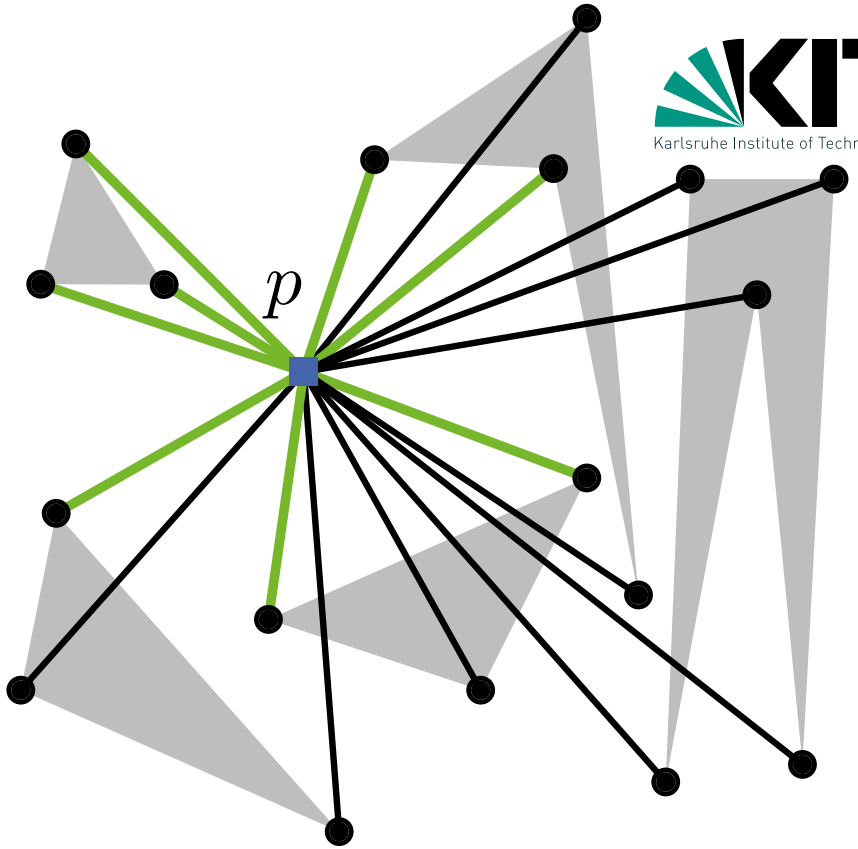
Sichtbare Knoten berechnen

$\textsc{VisibleVertices}(p, S)$



Sichtbare Knoten berechnen

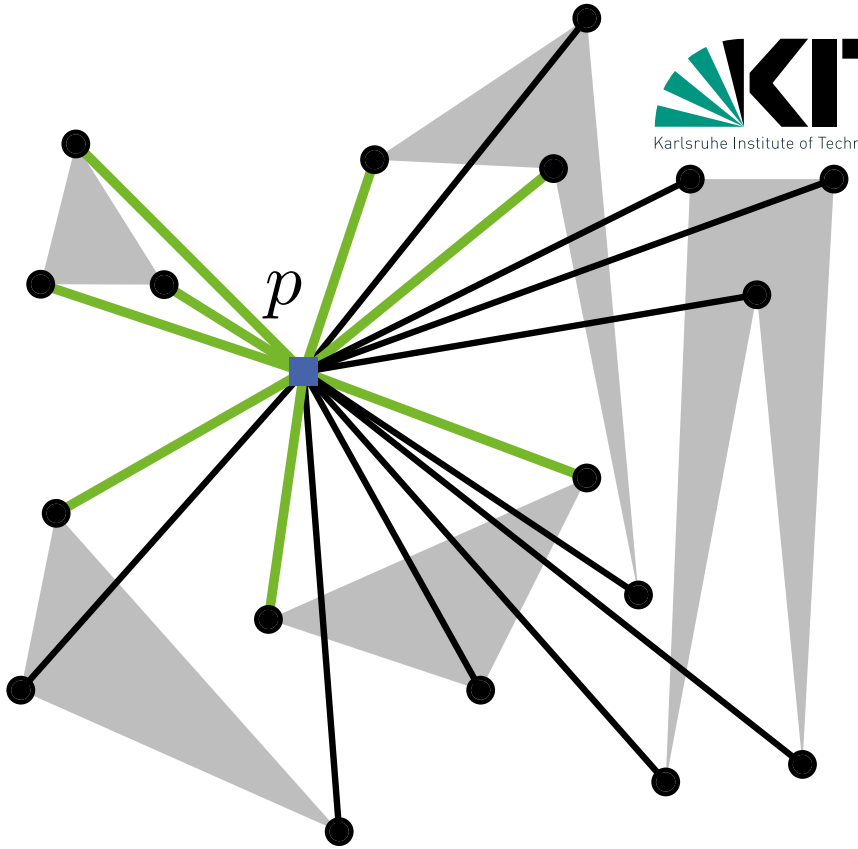
$\textsc{VisibleVertices}(p, S)$



Sichtbare Knoten berechnen

$\textsc{VisibleVertices}(p, S)$

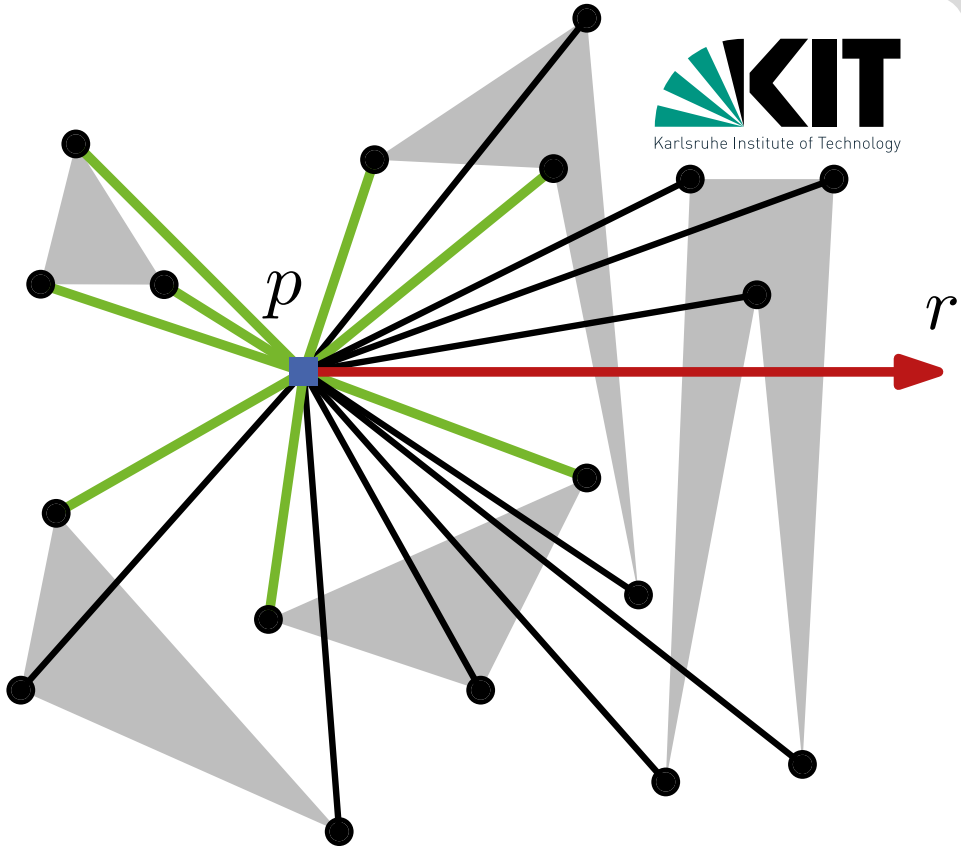
Aufgabe: Gegeben p und S finde in $O(n \log n)$ Zeit alle von p aus sichtbaren Knoten in $V(S)$!



Sichtbare Knoten berechnen

$\textsc{VisibleVertices}(p, S)$

$r \leftarrow \{p + k\binom{1}{0} \mid k \in \mathbb{R}_0^+\}$

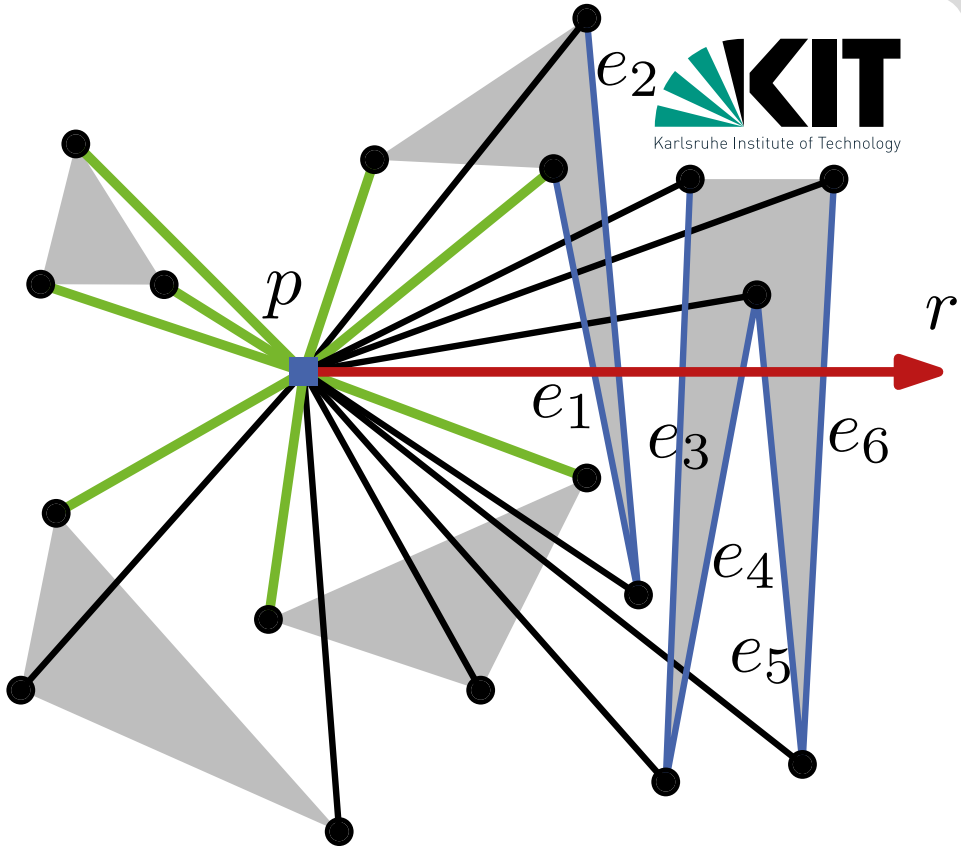


Sichtbare Knoten berechnen

$\textsc{VisibleVertices}(p, S)$

$r \leftarrow \{p + k\binom{1}{0} \mid k \in \mathbb{R}_0^+\}$

$I \leftarrow \{e \in E(S) \mid e \cap r \neq \emptyset\}$



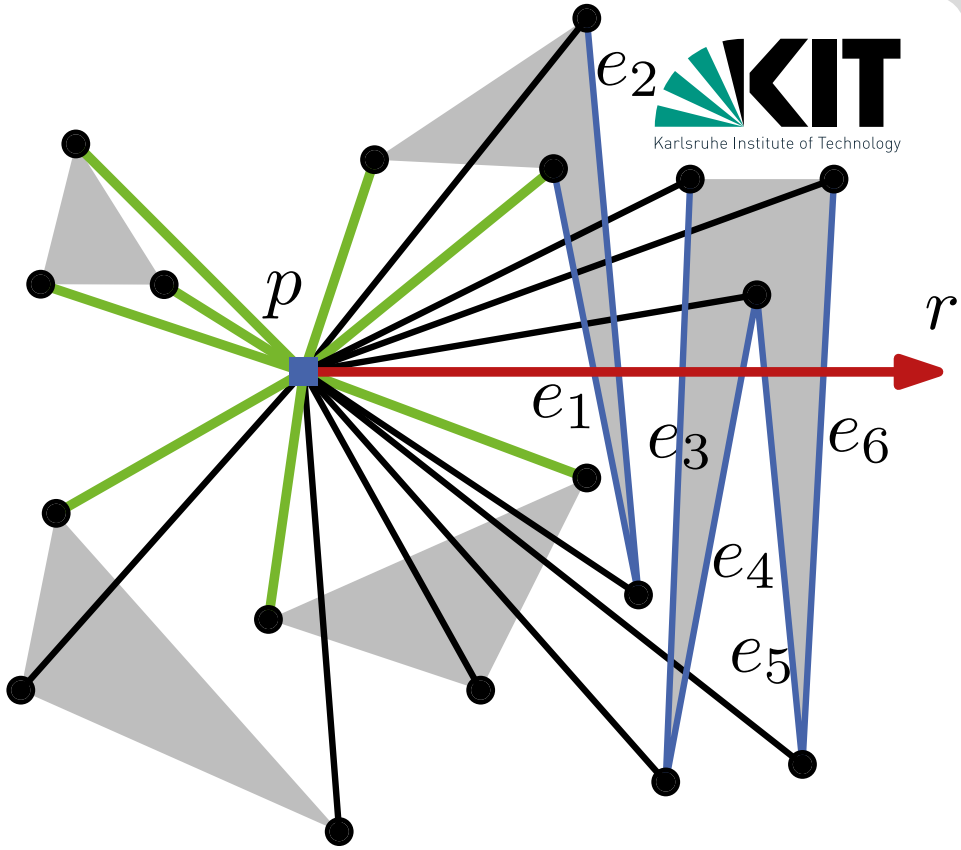
Sichtbare Knoten berechnen

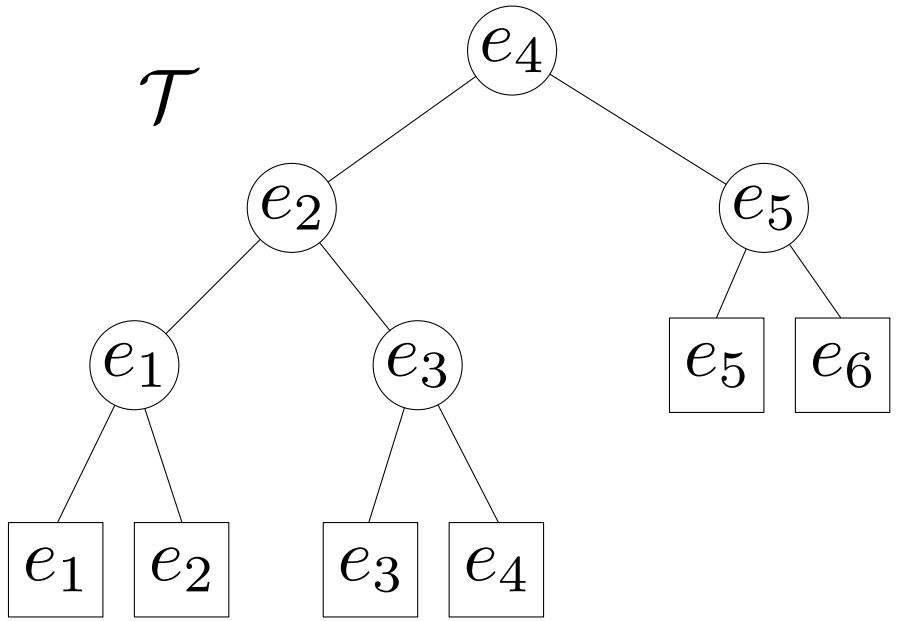
$\textsc{VisibleVertices}(p, S)$

$r \leftarrow \{p + k\binom{1}{0} \mid k \in \mathbb{R}_0^+\}$

$I \leftarrow \{e \in E(S) \mid e \cap r \neq \emptyset\}$

$\mathcal{T} \leftarrow \text{balancedBinaryTree}(I)$





Sichtbare Knoten berechnen

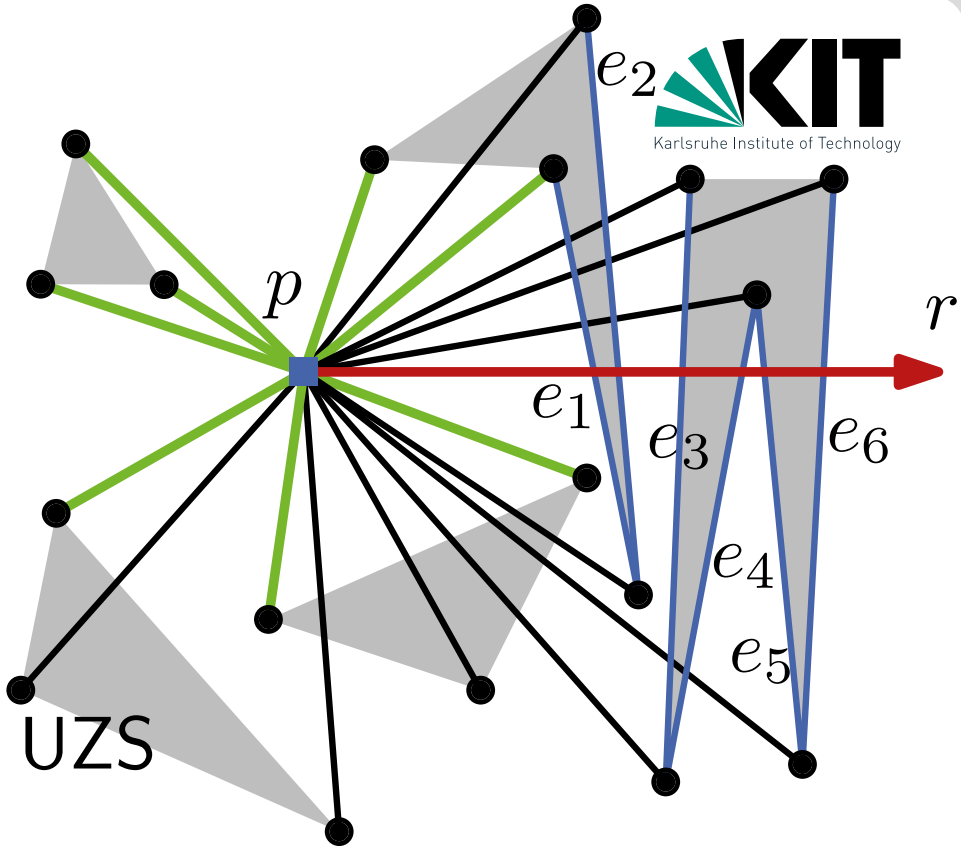
$\textsc{VisibleVertices}(p, S)$

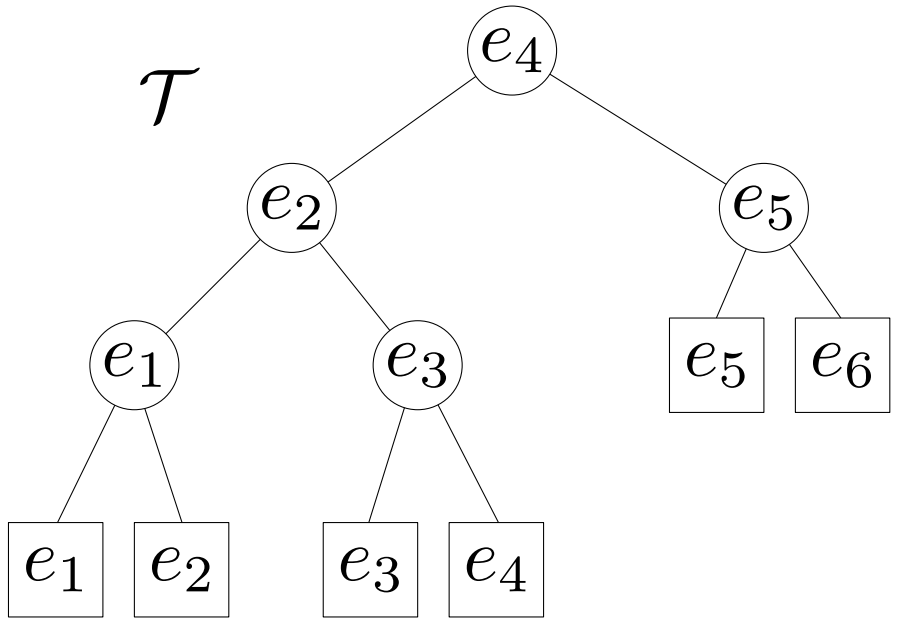
$r \leftarrow \{p + k\binom{1}{0} \mid k \in \mathbb{R}_0^+\}$

$I \leftarrow \{e \in E(S) \mid e \cap r \neq \emptyset\}$

$\mathcal{T} \leftarrow \text{balancedBinaryTree}(I)$

$w_1, \ldots, w_n \leftarrow$ sortiere $V(S)$ im UZS





Sichtbare Knoten berechnen

$\textsc{VisibleVertices}(p, S)$

$r \leftarrow \{p + k\binom{1}{0} \mid k \in \mathbb{R}_0^+\}$

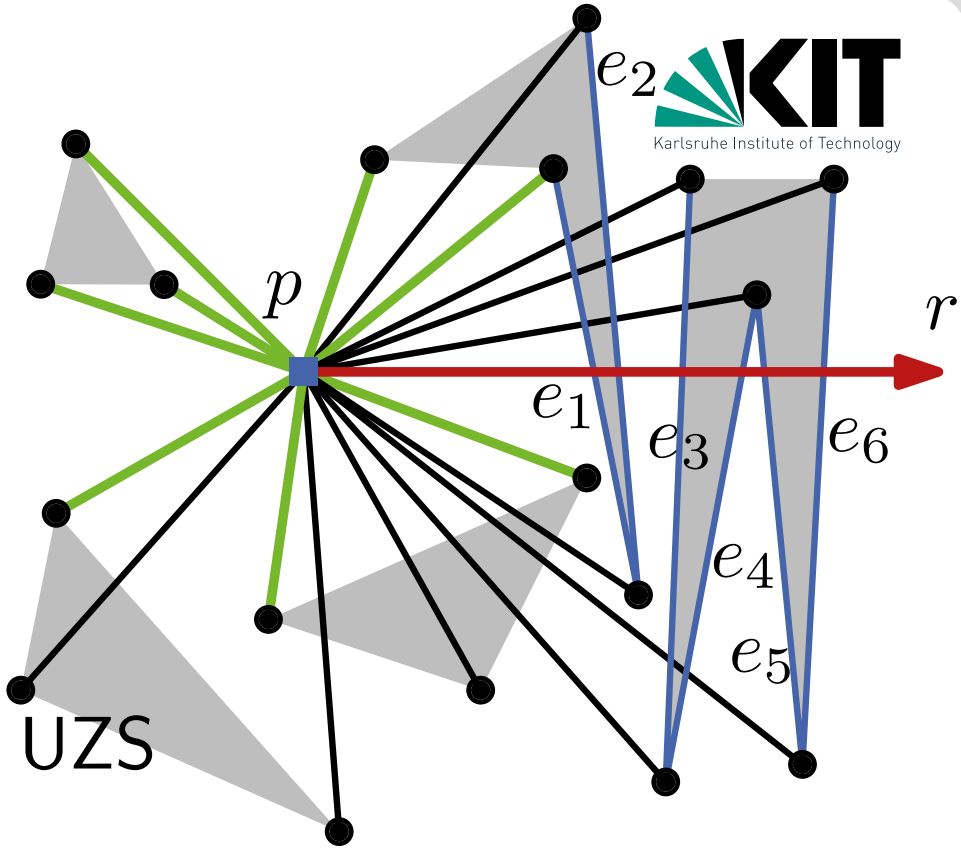
$I \leftarrow \{e \in E(S) \mid e \cap r \neq \emptyset\}$

$\mathcal{T} \leftarrow$ balancedBinaryTree(I)

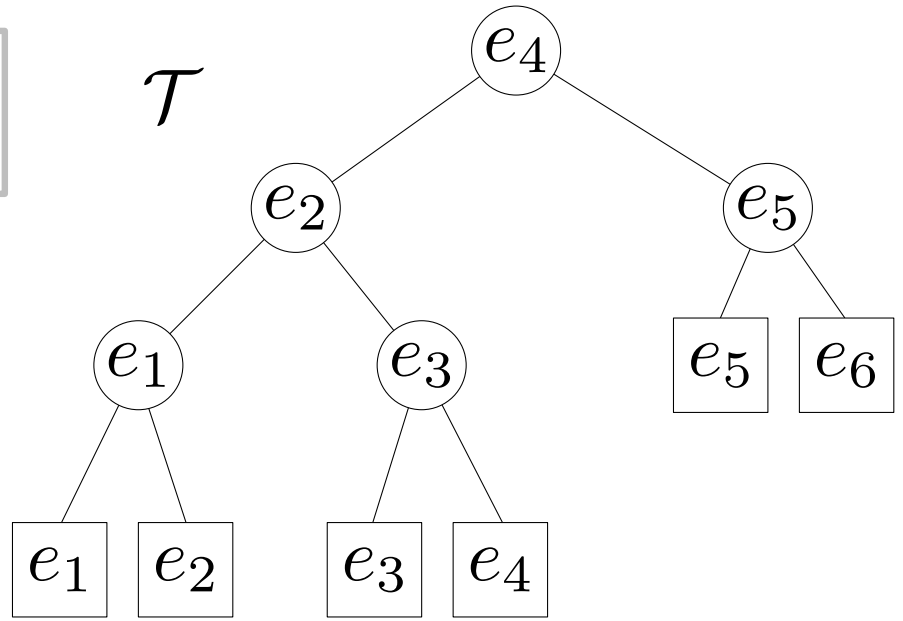
$w_1, \ldots, w_n \leftarrow$ sortiere $V(S)$ im UZS

$v \prec v' :\Leftrightarrow$

$\angle v < \angle v'$ or
$(\angle v = \angle v'$ and $|pv| < |pv'|)$



$\mathcal{T}$



Sichtbare Knoten berechnen

$\textsc{VisibleVertices}(p, S)$

$r \leftarrow \{p + k\binom{1}{0} \mid k \in \mathbb{R}_0^+\}$

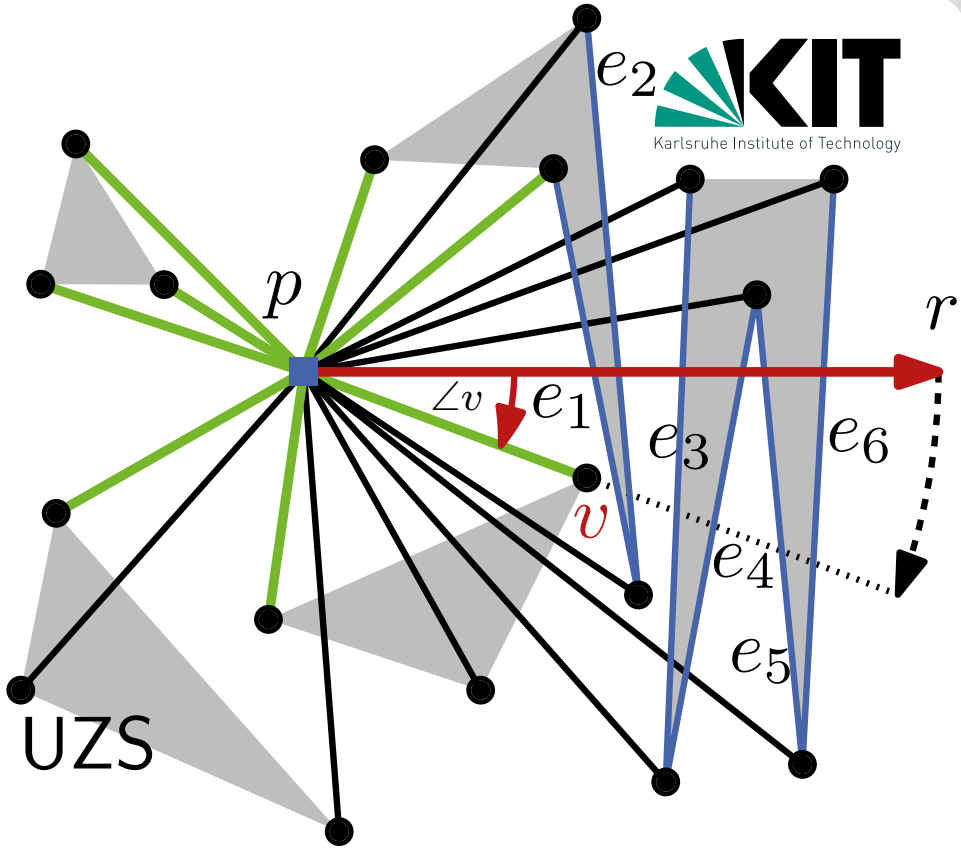
$I \leftarrow \{e \in E(S) \mid e \cap r \neq \emptyset\}$

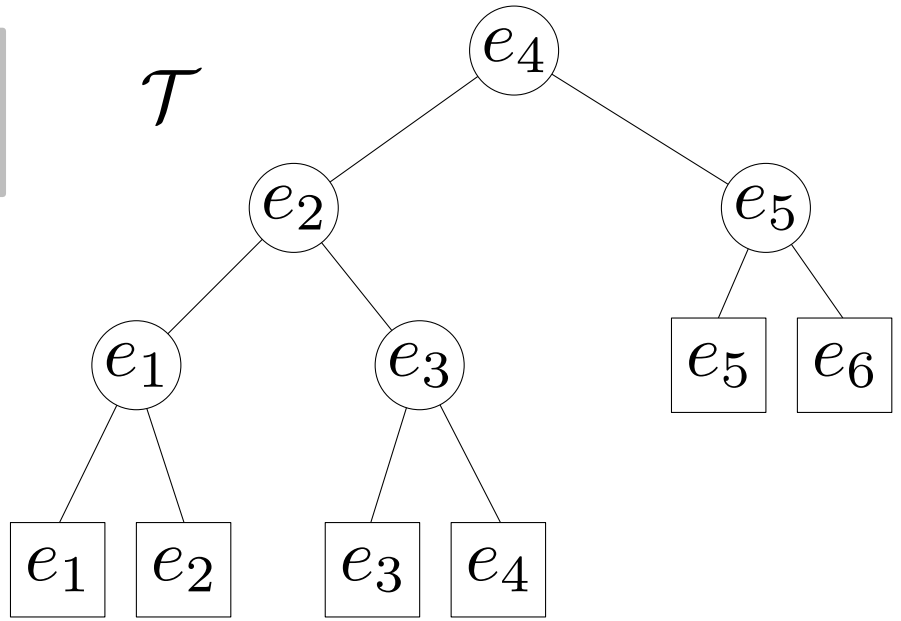
$\mathcal{T} \leftarrow$ balancedBinaryTree(I)

$w_1, \ldots, w_n \leftarrow$ sortiere $V(S)$ im UZS

$v \prec v' :\Leftrightarrow$

$\angle v < \angle v'$ or
$(\angle v = \angle v'$ and $|pv| < |pv'|)$





Sichtbare Knoten berechnen

$\textsc{VisibleVertices}(p, S)$

$r \leftarrow \{p + k\binom{1}{0} \mid k \in \mathbb{R}_0^+\}$

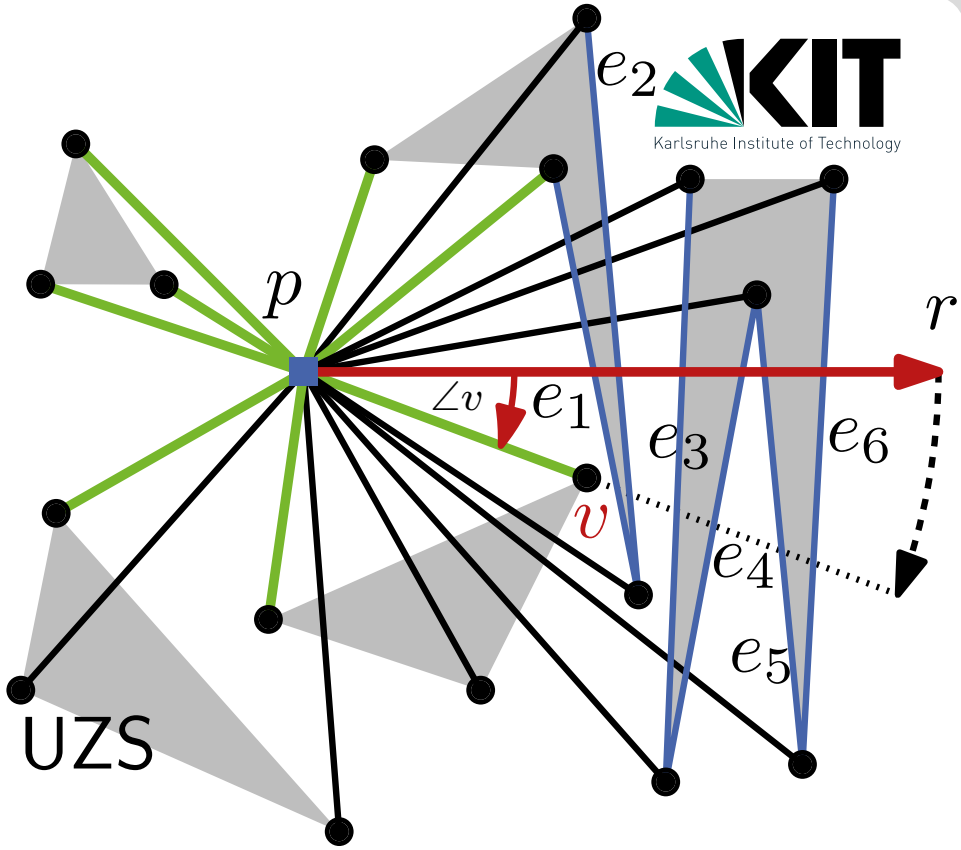
$I \leftarrow \{e \in E(S) \mid e \cap r \neq \emptyset\}$

$\mathcal{T} \leftarrow$ balancedBinaryTree(I)

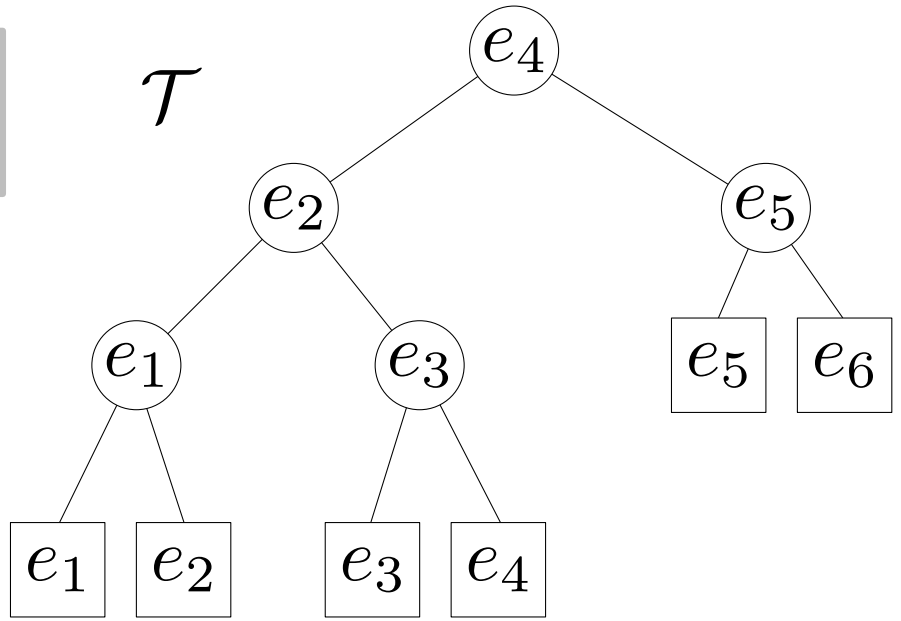
$w_1, \ldots, w_n \leftarrow$ sortiere $V(S)$ im UZS

$v \prec v' :\Leftrightarrow$

$\angle v < \angle v'$ or
$(\angle v = \angle v'$ and $|pv| < |pv'|)$



$\mathcal{T}$



Sweep-Verfahren mit Rotation

Sichtbare Knoten berechnen

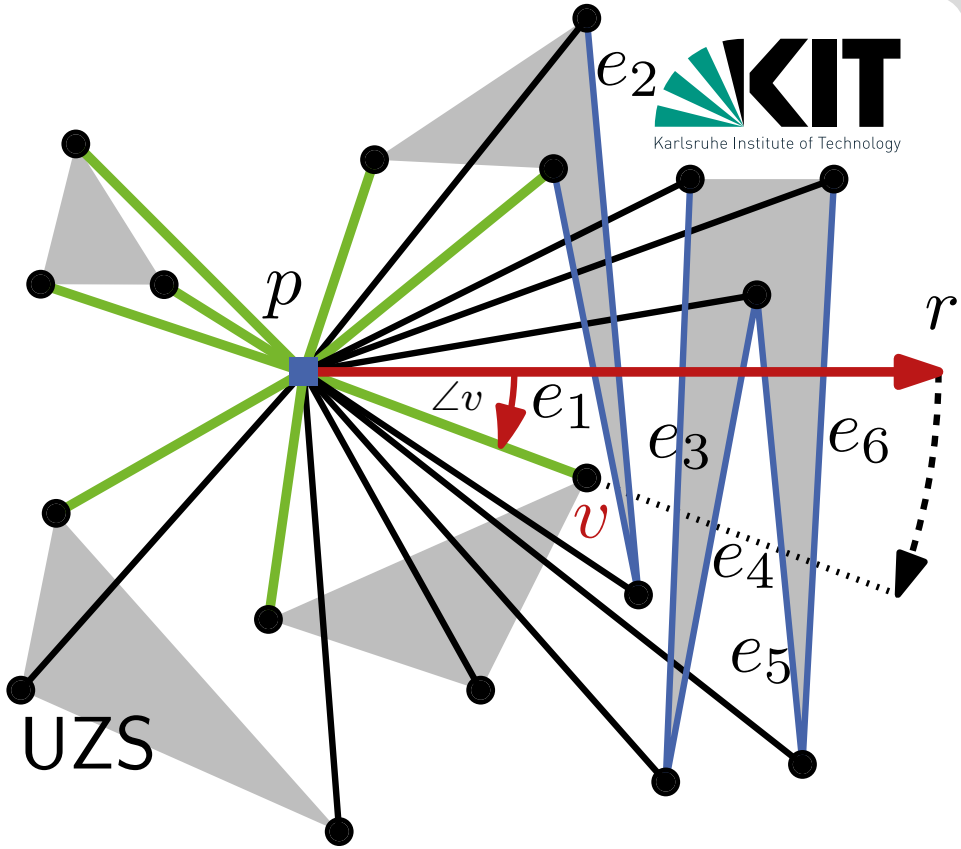
$\textsc{VisibleVertices}(p, S)$

$r \leftarrow \{p + k\binom{1}{0} \mid k \in \mathbb{R}_0^+\}$

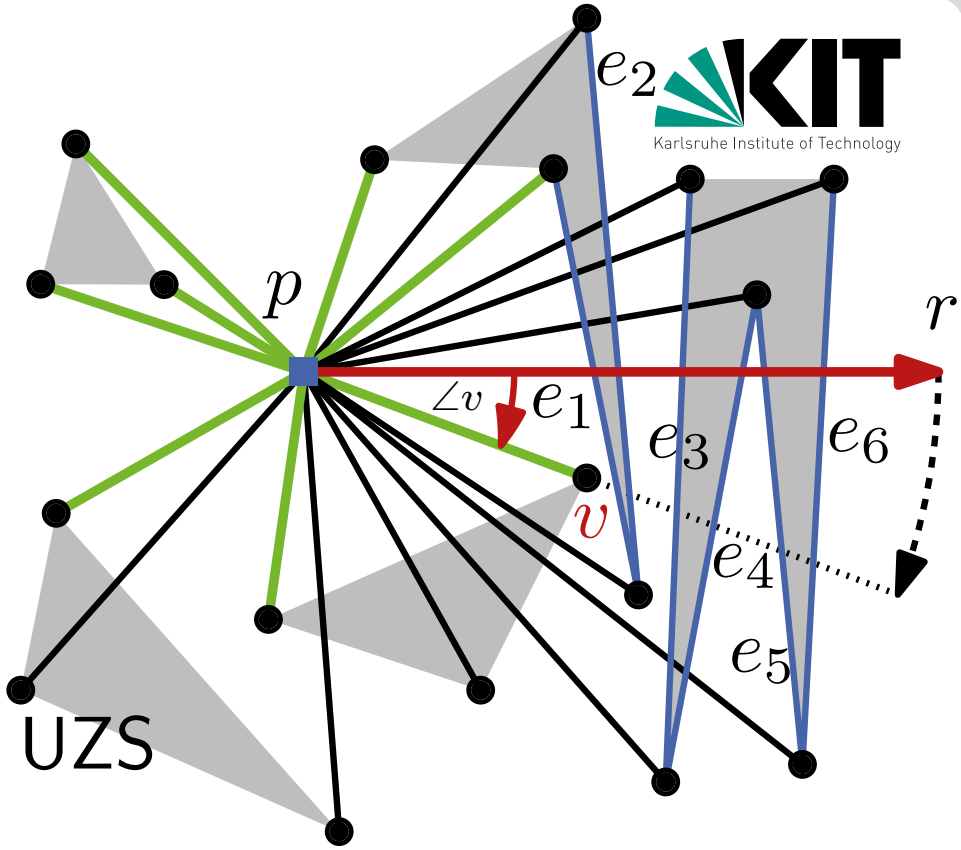
$I \leftarrow \{e \in E(S) \mid e \cap r \neq \emptyset\}$

$\mathcal{T} \leftarrow \text{balancedBinaryTree}(I)$

$w_1, \ldots, w_n \leftarrow$ sortiere $V(S)$ im UZS



Sichtbare Knoten berechnen



$\textsc{VisibleVertices}(p, S)$

$r \leftarrow \{p + k\binom{1}{0} \mid k \in \mathbb{R}_0^+\}$

$I \leftarrow \{e \in E(S) \mid e \cap r \neq \emptyset\}$

$\mathcal{T} \leftarrow$ balancedBinaryTree(I)

$w_1, \ldots, w_n \leftarrow$ sortiere $V(S)$ im UZS

$W \leftarrow \emptyset$

for $i = 1$ **to** n **do**

  if $\textsc{Visible}(p, w_i)$ **then**

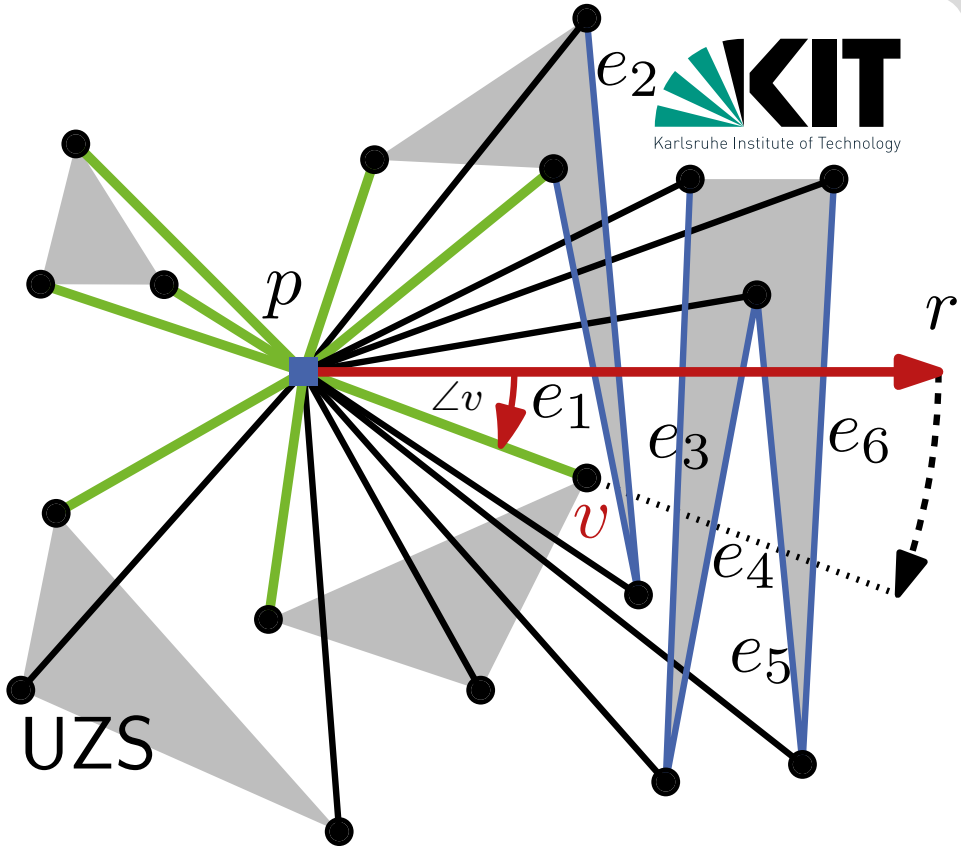
    $W \leftarrow W \cup \{w_i\}$

  füge in $\mathcal{T}$ zu w_i inzidente Kante aus $\overrightarrow{pw_i}^+$ ein

  lösche aus $\mathcal{T}$ zu w_i inzidente Kanten aus $\overrightarrow{pw_i}^-$

return W

Sichtbare Knoten berechnen



$\textsc{VisibleVertices}(p, S)$

$r \leftarrow \{p + k\binom{1}{0} \mid k \in \mathbb{R}_0^+\}$

$I \leftarrow \{e \in E(S) \mid e \cap r \neq \emptyset\}$

$\mathcal{T} \leftarrow$ balancedBinaryTree(I)

$w_1, \ldots, w_n \leftarrow$ sortiere $V(S)$ im UZS

$W \leftarrow \emptyset$

for $i = 1$ **to** n **do**

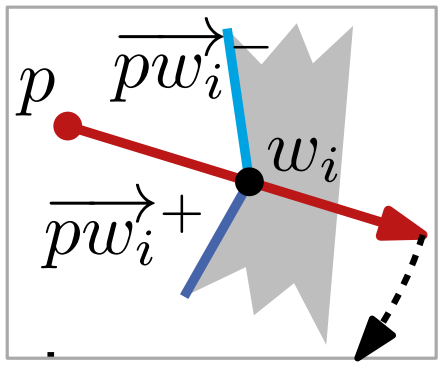
  if $\textsc{Visible}(p, w_i)$ **then**

    $W \leftarrow W \cup \{w_i\}$

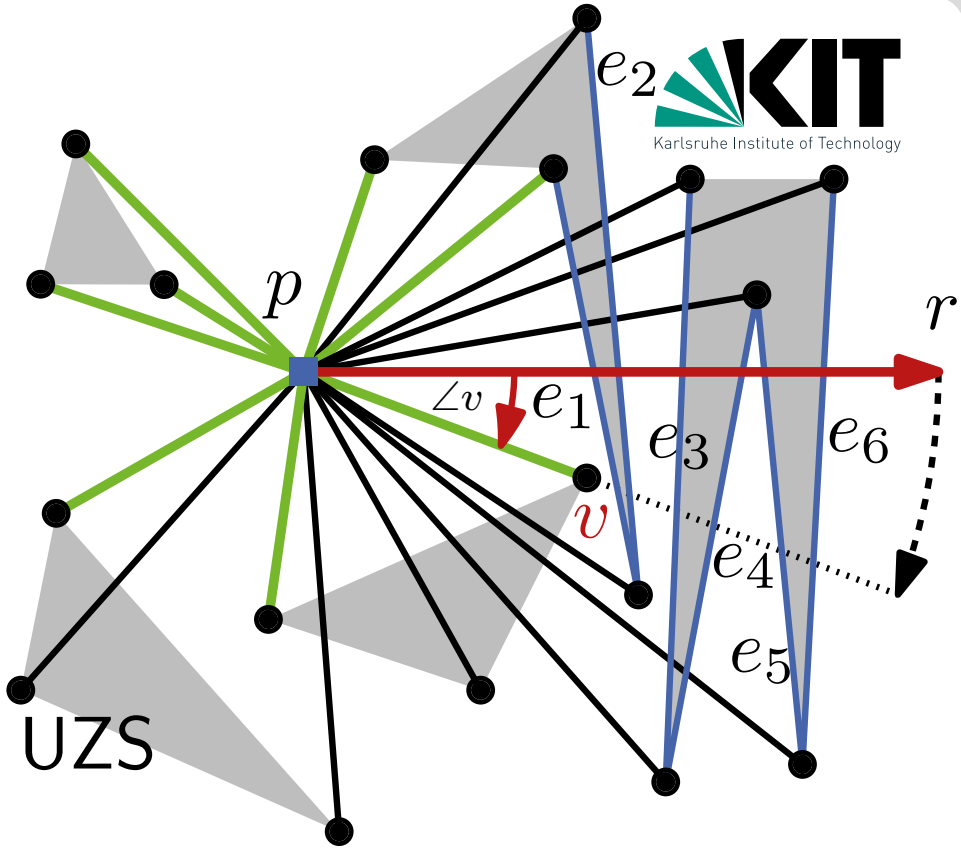
  füge in $\mathcal{T}$ zu w_i inzidente Kante aus $\overrightarrow{pw_i}^+$ ein

  lösche aus $\mathcal{T}$ zu w_i inzidente Kanten aus $\overrightarrow{pw_i}^-$

return W



Sichtbare Knoten berechnen



$\textsc{VisibleVertices}(p, S)$

$r \leftarrow \{p + k\binom{1}{0} \mid k \in \mathbb{R}_0^+\}$

$I \leftarrow \{e \in E(S) \mid e \cap r \neq \emptyset\}$

$\mathcal{T} \leftarrow$ balancedBinaryTree(I)

$w_1, \ldots, w_n \leftarrow$ sortiere $V(S)$ im UZS

$W \leftarrow \emptyset$

for $i = 1$ **to** n **do**

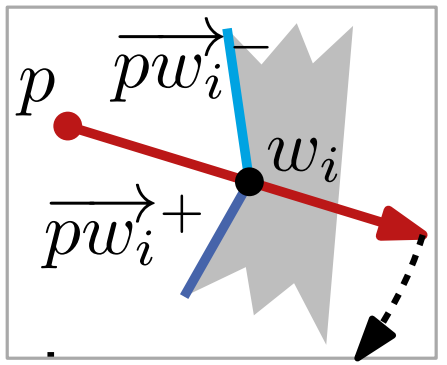
  if $\textsc{Visible}(p, w_i)$ **then**

    $W \leftarrow W \cup \{w_i\}$

  füge in $\mathcal{T}$ zu w_i inzidente Kante aus $\overrightarrow{pw_i}^+$ ein

  lösche aus $\mathcal{T}$ zu w_i inzidente Kanten aus $\overrightarrow{pw_i}^-$

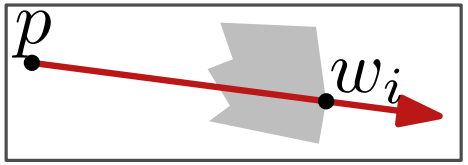
return W



Fallunterscheidung Sichtbarkeit

VISIBLE(p, w_i)

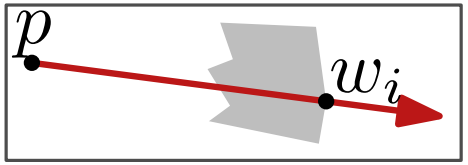
if $\overline{pw_i}$ schneidet Polygon von w_i **then**
  return false

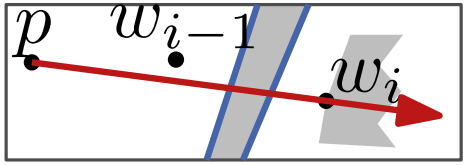


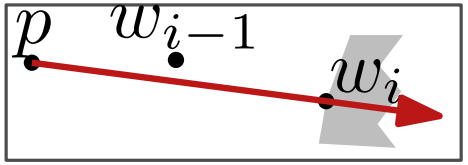
Fallunterscheidung Sichtbarkeit

VISIBLE(p, w_i)

if $\overline{pw_i}$ schneidet Polygon von w_i **then**
  return false
if $i = 1$ oder $w_{i-1} \notin \overline{pw_i}$ **then**
  $e \leftarrow$ Kante im linkesten Blatt von $\mathcal{T}$
  if $e \neq$ nil und $\overline{pw_i} \cap e \neq \emptyset$ **then**
    return false
  else return true



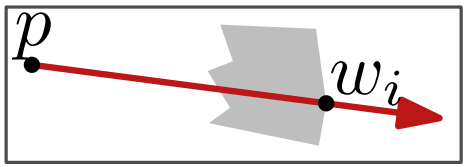


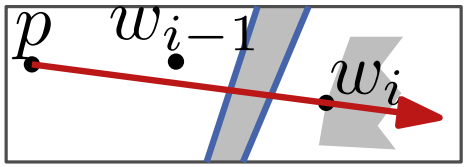


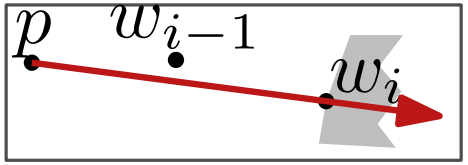
Fallunterscheidung Sichtbarkeit

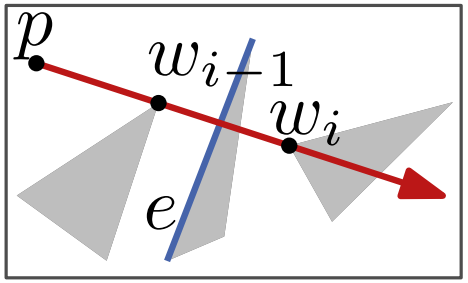
VISIBLE(p, w_i)

if $\overline{pw_i}$ schneidet Polygon von w_i **then**
  return false
if $i = 1$ oder $w_{i-1} \notin \overline{pw_i}$ **then**
  $e \leftarrow$ Kante im linkesten Blatt von $\mathcal{T}$
  if $e \neq$ nil und $\overline{pw_i} \cap e \neq \emptyset$ **then**
    return false
  else return true
else
  if w_{i-1} nicht sichtbar **then**
    return false
  else
    $e \leftarrow$ suche Kante in $\mathcal{T}$, die $\overline{w_{i-1}w_i}$ schneidet
    if $e \neq$ nil **then return** false
    else return true









Zusammenfassung

Satz 1: Ein kürzester st-Weg in einem Gebiet mit Polygon-Hindernissen mit n Kanten kann in $O(n^2 \log n)$ Zeit berechnet werden.

Zusammenfassung

Satz 1: Ein kürzester st-Weg in einem Gebiet mit Polygon-Hindernissen mit n Kanten kann in $O(n^2 \log n)$ Zeit berechnet werden.

Beweis:

- Korrektheit folgt direkt aus Lemma 1

Zusammenfassung

Satz 1: Ein kürzester st-Weg in einem Gebiet mit Polygon-Hindernissen mit n Kanten kann in $O(n^2 \log n)$ Zeit berechnet werden.

Beweis:

- Korrektheit folgt direkt aus Lemma 1
- Laufzeit:
  - VisibleVertices benötigt $O(n \log n)$ Zeit pro Knoten
  - n Aufrufe von VisibleVertices

Zusammenfassung

Satz 1: Ein kürzester st-Weg in einem Gebiet mit Polygon-Hindernissen mit n Kanten kann in $O(n^2 \log n)$ Zeit berechnet werden.

Beweis:

- Korrektheit folgt direkt aus Lemma 1
- Laufzeit:
  - VisibleVertices benötigt $O(n \log n)$ Zeit pro Knoten
  - n Aufrufe von VisibleVertices

□

$O(n^2)$ mit Dualität!
(s. Übung oder Skript D. Mount [M10] Lect. 30)

Diskussion

Roboter sind meistens nicht punktförmig...

Diskussion

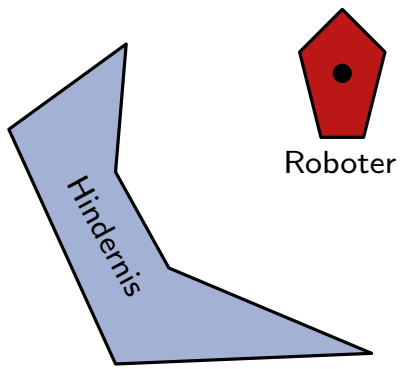
Roboter sind meistens nicht punktförmig...

Für den Fall von Robotern, deren Grundfläche ein konvexes Polygon ist und die nicht rotieren können, geht es trotzdem durch geeignete Vergrößerung der Hindernisse
($\rightarrow$ Minkowski-Summe, Kap. 13 in [BCKO08]).

Diskussion

Roboter sind meistens nicht punktförmig...

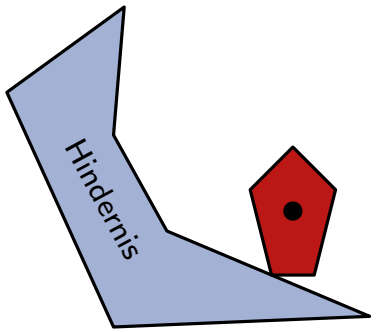
Für den Fall von Robotern, deren Grundfläche ein konvexes Polygon ist und die nicht rotieren können, geht es trotzdem durch geeignete Vergrößerung der Hindernisse
($\rightarrow$ Minkowski-Summe, Kap. 13 in [BCKO08]).



Diskussion

Roboter sind meistens nicht punktförmig...

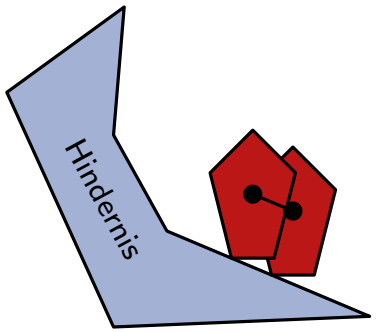
Für den Fall von Robotern, deren Grundfläche ein konvexes Polygon ist und die nicht rotieren können, geht es trotzdem durch geeignete Vergrößerung der Hindernisse
($\rightarrow$ Minkowski-Summe, Kap. 13 in [BCKO08]).



Diskussion

Roboter sind meistens nicht punktförmig...

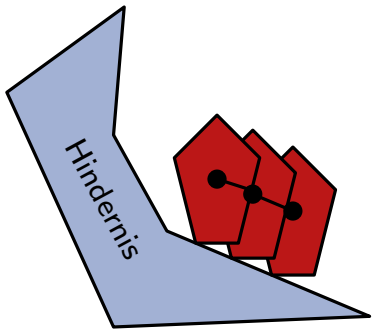
Für den Fall von Robotern, deren Grundfläche ein konvexes Polygon ist und die nicht rotieren können, geht es trotzdem durch geeignete Vergrößerung der Hindernisse
($\rightarrow$ Minkowski-Summe, Kap. 13 in [BCKO08]).



Diskussion

Roboter sind meistens nicht punktförmig...

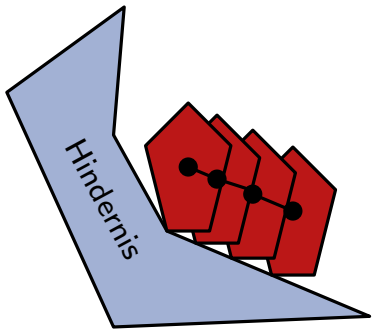
Für den Fall von Robotern, deren Grundfläche ein konvexes Polygon ist und die nicht rotieren können, geht es trotzdem durch geeignete Vergrößerung der Hindernisse
($\rightarrow$ Minkowski-Summe, Kap. 13 in [BCKO08]).



Diskussion

Roboter sind meistens nicht punktförmig...

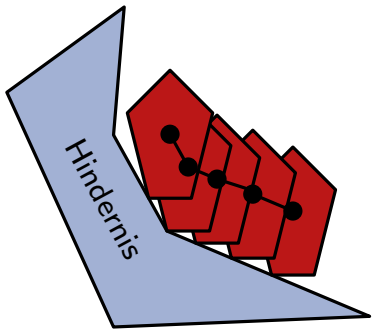
Für den Fall von Robotern, deren Grundfläche ein konvexes Polygon ist und die nicht rotieren können, geht es trotzdem durch geeignete Vergrößerung der Hindernisse
($\rightarrow$ Minkowski-Summe, Kap. 13 in [BCKO08]).



Diskussion

Roboter sind meistens nicht punktförmig...

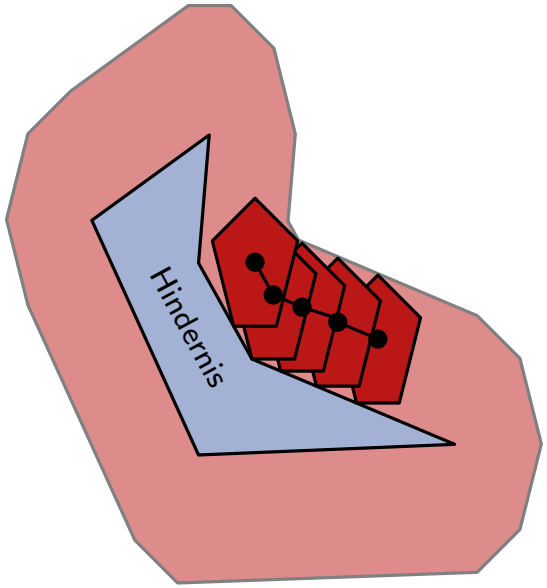
Für den Fall von Robotern, deren Grundfläche ein konvexes Polygon ist und die nicht rotieren können, geht es trotzdem durch geeignete Vergrößerung der Hindernisse
($\rightarrow$ Minkowski-Summe, Kap. 13 in [BCKO08]).



Diskussion

Roboter sind meistens nicht punktförmig...

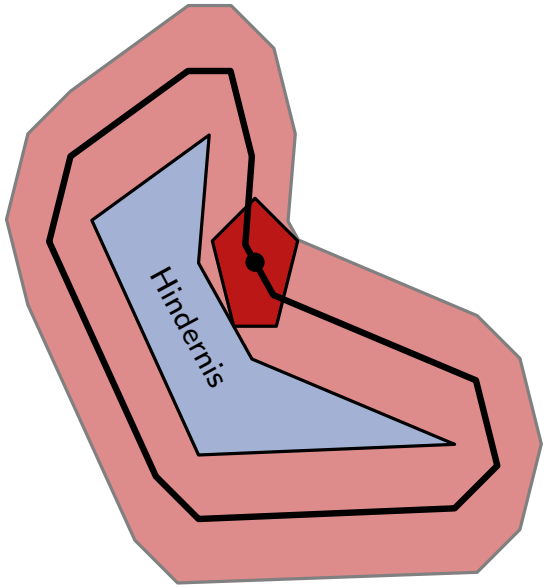
Für den Fall von Robotern, deren Grundfläche ein konvexes Polygon ist und die nicht rotieren können, geht es trotzdem durch geeignete Vergrößerung der Hindernisse
($\rightarrow$ Minkowski-Summe, Kap. 13 in [BCKO08]).



Diskussion

Roboter sind meistens nicht punktförmig...

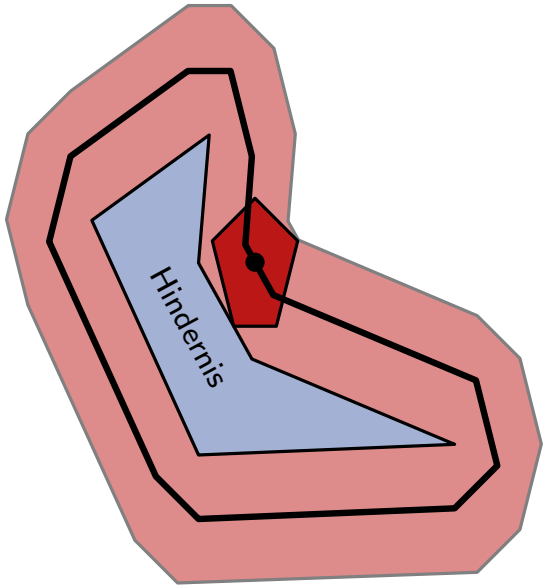
Für den Fall von Robotern, deren Grundfläche ein konvexes Polygon ist und die nicht rotieren können, geht es trotzdem durch geeignete Vergrößerung der Hindernisse
($\rightarrow$ Minkowski-Summe, Kap. 13 in [BCKO08]).



Diskussion

Roboter sind meistens nicht punktförmig...

Für den Fall von Robotern, deren Grundfläche ein konvexes Polygon ist und die nicht rotieren können, geht es trotzdem durch geeignete Vergrößerung der Hindernisse
($\rightarrow$ Minkowski-Summe, Kap. 13 in [BCKO08]).

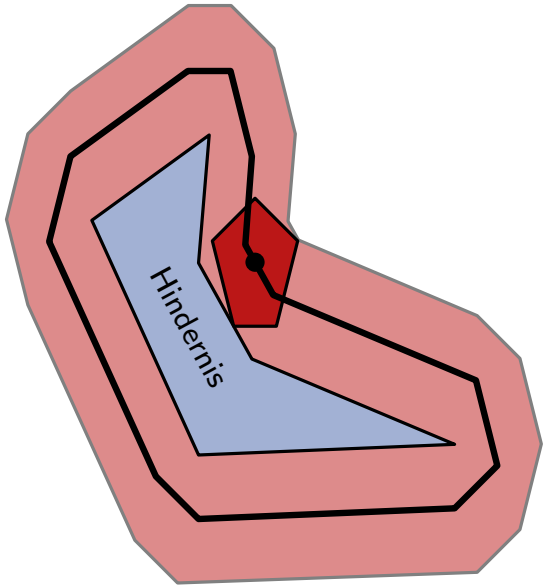


Geht es schneller als $O(n^2 \log n)$?

Diskussion

Roboter sind meistens nicht punktförmig...

Für den Fall von Robotern, deren Grundfläche ein konvexes Polygon ist und die nicht rotieren können, geht es trotzdem durch geeignete Vergrößerung der Hindernisse
($\rightarrow$ Minkowski-Summe, Kap. 13 in [BCKO08]).



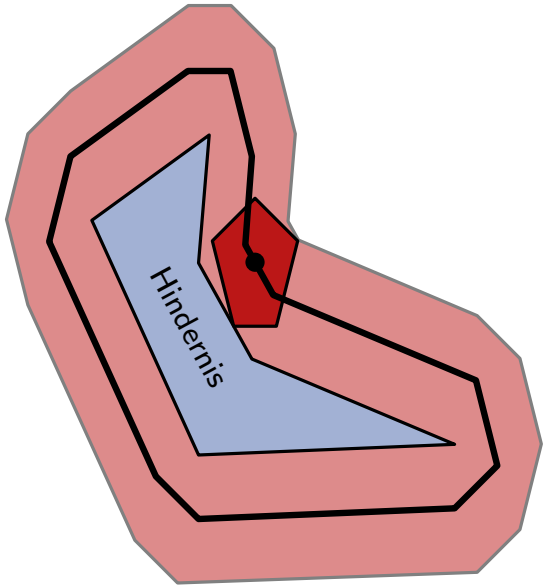
Geht es schneller als $O(n^2 \log n)$?

Ja, durch Ausnutzung der Dualität und einen simultanen Rotations-Sweep für alle Punkte im dualen Geradenarrangement geht es auch in $O(n^2)$. Da G_{vis} $\Omega(n^2)$ Kanten haben kann, lässt sich der Sichtbarkeitsgraph im Allgemeinen auch nicht schneller konstruieren.
Es gibt jedoch einen ausgabesensitiven $O(n \log n + m)$-Algorithmus.
[Ghosh, Mount 1987]

Diskussion

Roboter sind meistens nicht punktförmig...

Für den Fall von Robotern, deren Grundfläche ein konvexes Polygon ist und die nicht rotieren können, geht es trotzdem durch geeignete Vergrößerung der Hindernisse
($\rightarrow$ Minkowski-Summe, Kap. 13 in [BCKO08]).



Geht es schneller als $O(n^2 \log n)$?

Ja, durch Ausnutzung der Dualität und einen simultanen Rotations-Sweep für alle Punkte im dualen Geradenarrangement geht es auch in $O(n^2)$. Da G_{vis} $\Omega(n^2)$ Kanten haben kann, lässt sich der Sichtbarkeitsgraph im Allgemeinen auch nicht schneller konstruieren.
Es gibt jedoch einen ausgabesensitiven $O(n \log n + m)$-Algorithmus.
[Ghosh, Mount 1987]

Sucht man jedoch nur einen kürzesten Euklidischen st-Weg, gibt es einen Algorithmus mit optimaler Laufzeit $O(n \log n)$. [Hershberger, Suri 1999]