Vorlesung Algorithmische Geometrie

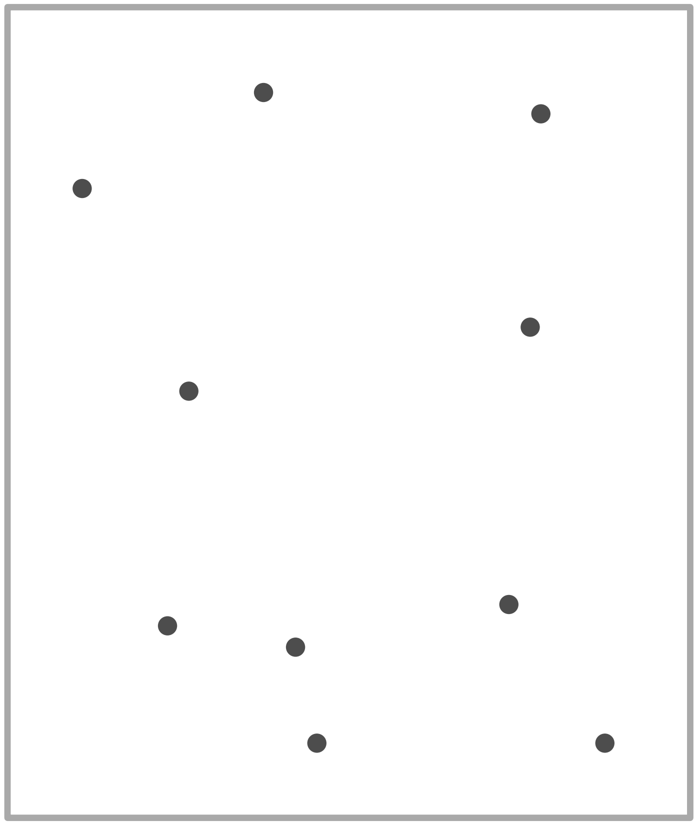
Well-Separated Pair Decomposition

INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK · FAKULTÄT FÜR INFORMATIK

Martin Nöllenburg

03.07.2012

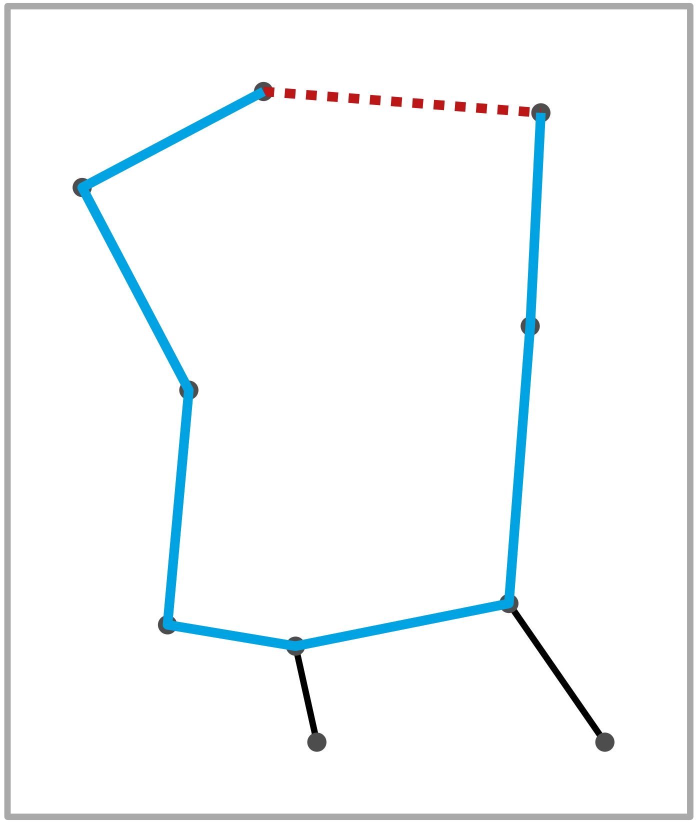
Motivation: Spanner



Aufgabe:

Eine Menge von Städten soll über ein neues Straßennetz miteinander verbunden werden.

Motivation: Spanner



Aufgabe:

Eine Menge von Städten soll über ein neues Straßennetz miteinander verbunden werden.

Allerdings soll für kein Paar (x, y) der Weg im Straßennetz viel länger als die Distanz $||xy||$ sein.

1. Idee: Euklid. min. Spannbaum

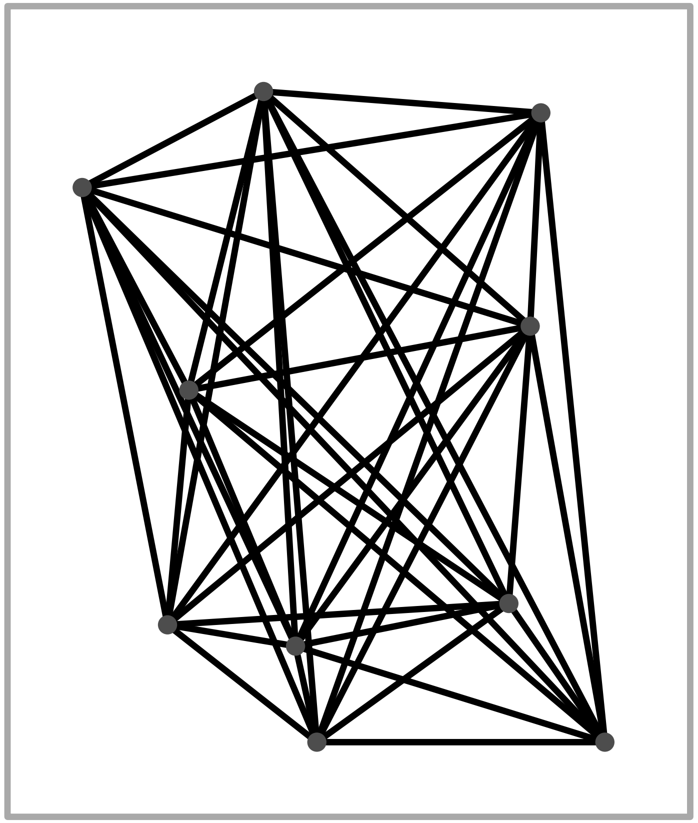
Motivation: Spanner

Aufgabe:

Eine Menge von Städten soll über ein neues Straßennetz miteinander verbunden werden.

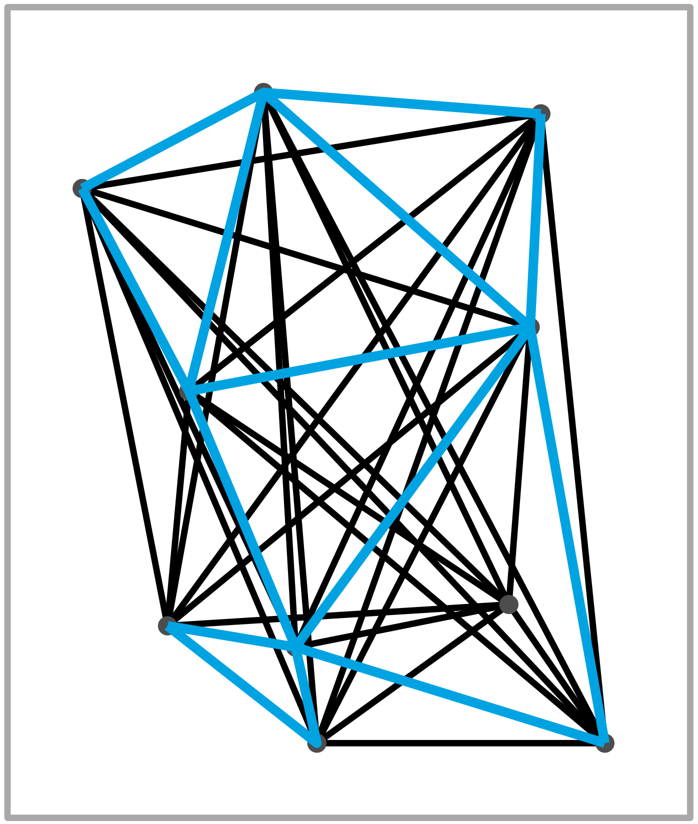
Allerdings soll für kein Paar (x, y) der Weg im Straßennetz viel länger als die Distanz $||xy||$ sein.

Die Baukosten sollen im Rahmen bleiben, also z.B. nur $O(n)$ Kanten.



1. Idee: Euklid. min. Spannbaum
2. Idee: vollständiger Graph

Motivation: Spanner



Aufgabe:

Eine Menge von Städten soll über ein neues Straßennetz miteinander verbunden werden.

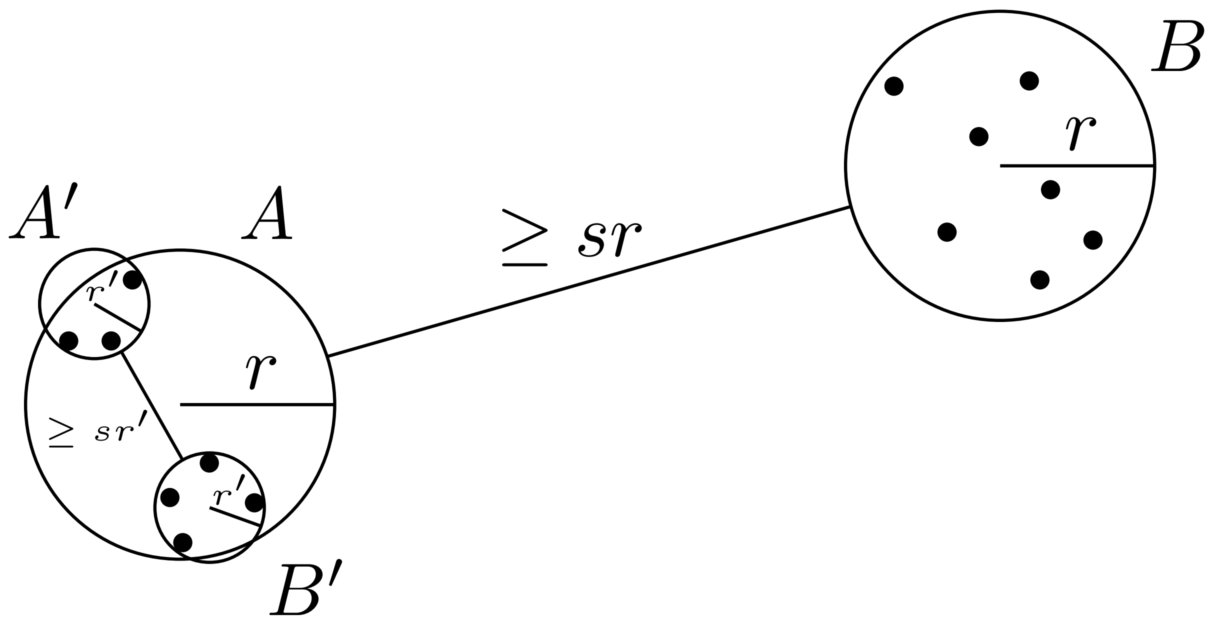
Allerdings soll für kein Paar (x, y) der Weg im Straßennetz viel länger als die Distanz $||xy||$ sein.

Die Baukosten sollen im Rahmen bleiben, also z.B. nur $O(n)$ Kanten.

1. Idee: Euklid. min. Spannbaum
2. Idee: vollständiger Graph
3. Idee: **sparse** t**-Spanner**

Well-Separated Pairs

Def.: Ein Paar disjunkter Punktmengen A und B im $\mathbb{R}^d$ heißt s-**well separated** für ein $s > 0$, falls A und B jeweils von einer Kugel mit Radius r überdeckt werden und der Abstand der beiden Kugeln mindestens sr ist.



Beob.:
- s-well separated $\Rightarrow$ s'-well separated für alle $s' \leq s$
- Singletons $\{a\}$ und $\{b\}$ sind s-well separated für alle $s > 0$

Well-Separated Pair Decomposition (WSPD)

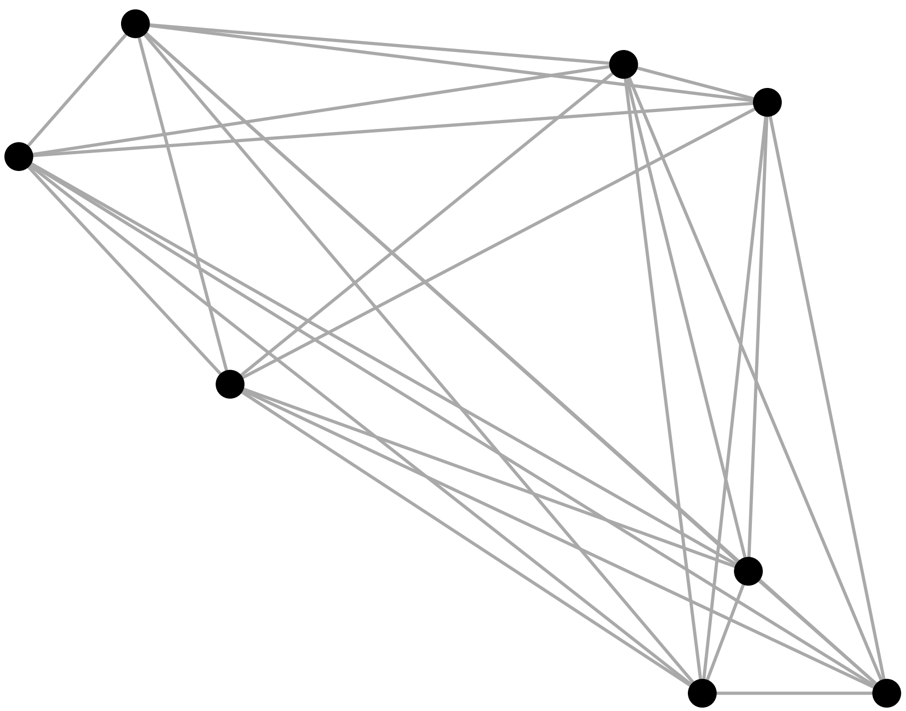
Für wohlsepariertes Paar $\{A, B\}$ gilt, dass der Abstand für alle Punktpaare in $A \otimes B = \{\{a, b\} \mid a \in A, b \in B, a \neq b\}$ ähnlich ist.

Ziel: $o(n^2)$-Datenstruktur, die den Abstand aller $\binom{n}{2}$ Paare von Punkten einer Menge $P = \{p_1, \dots, p_n\}$ approximiert.

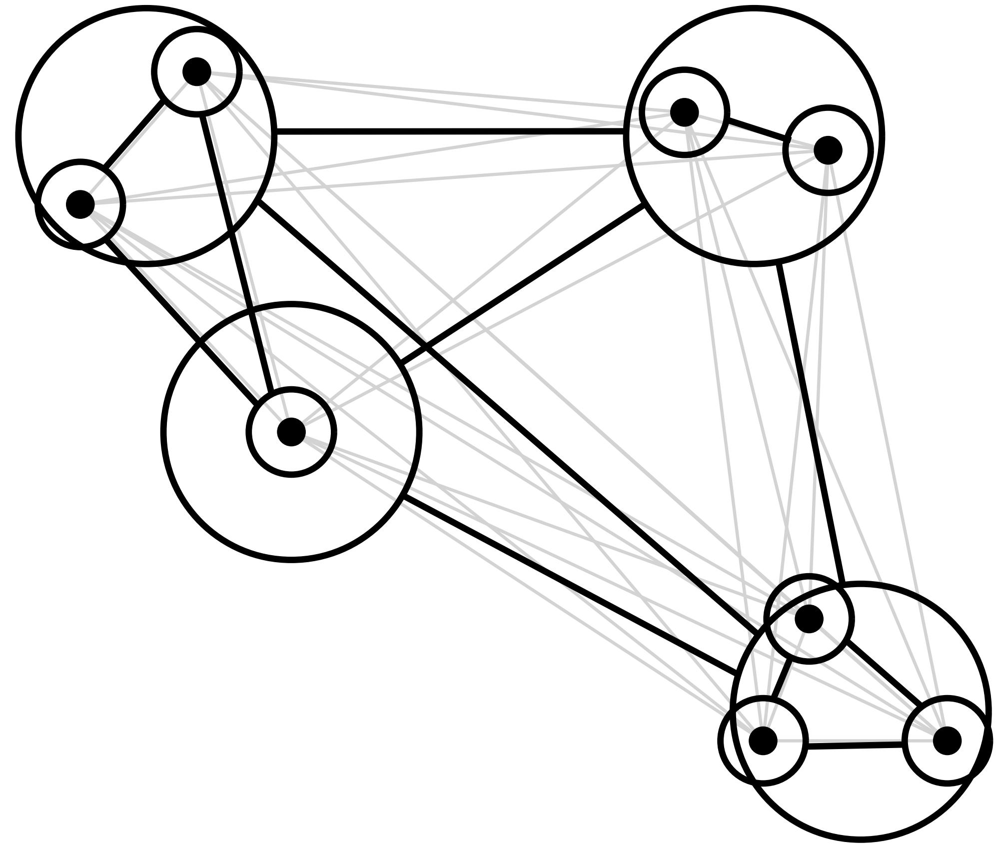
Def.: Für eine Punktmenge P und ein $s > 0$ ist eine s-**well separated pair decomposition** (s-WSPD) eine Menge von Paaren $\{\{A_1, B_1\}, \dots, \{A_m, B_m\}\}$ mit

- $A_i, B_i \subset P$ für alle i
- $A_i \cap B_i = \emptyset$ für alle i
- $\bigcup_{i=1}^{m} A_i \otimes B_i = P \otimes P$
- $\{A_i, B_i\}$ s-well separated für alle i

Beispiel



28 Punktpaare

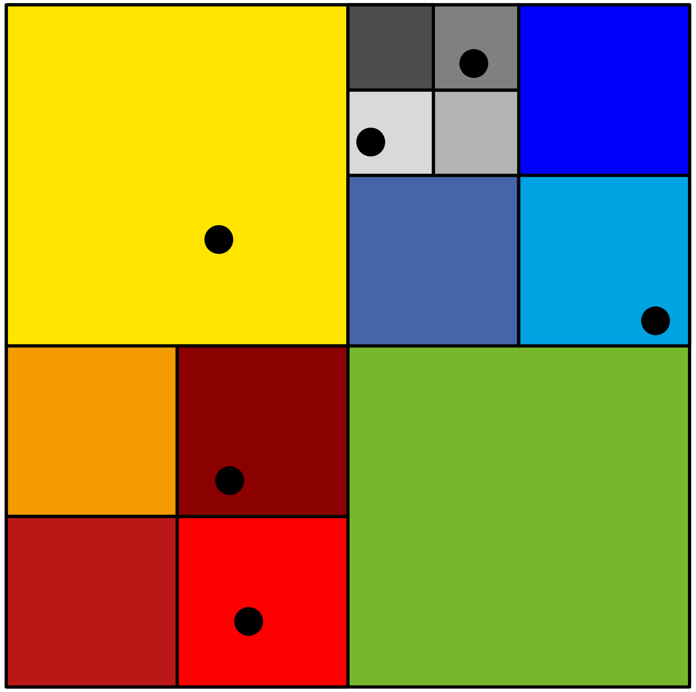


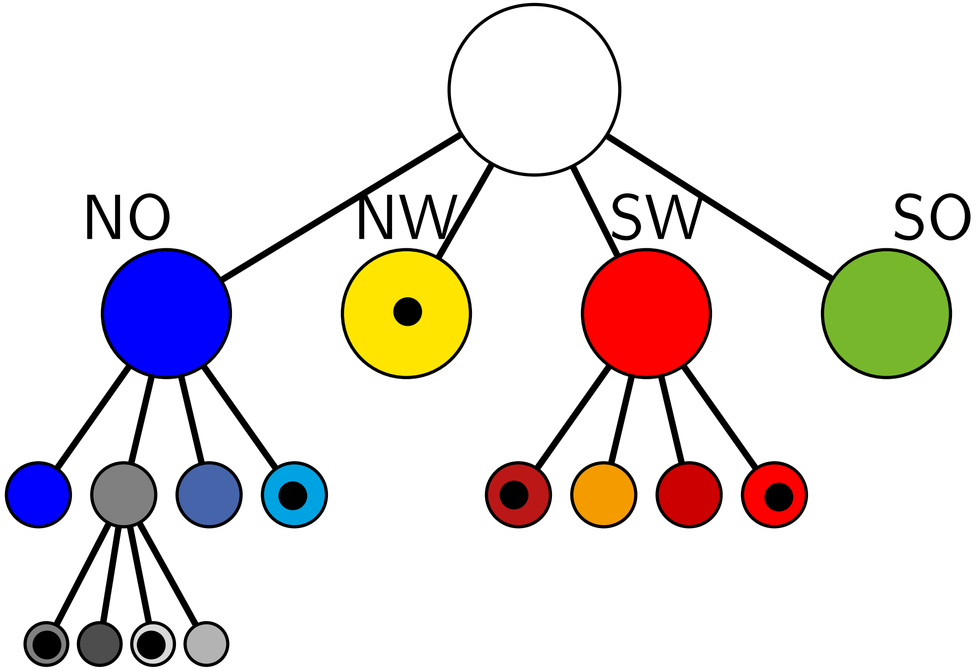
12 s-well separated pairs

WSPD der Größe $O(n^2)$ ist trivial. Geht es auch in $O(n)$?

Wiederholung: Quadtrees

Def.: Ein **Quadtree** $\mathcal{T}(P)$ für eine Punktmenge P ist ein Wurzelbaum, in dem jeder innere Knoten vier Kinder hat. Jeder Knoten entspricht einem Quadrat und die Quadrate der Blätter bilden eine Unterteilung des Wurzelquadrats.





Wiederholung: Quadtrees

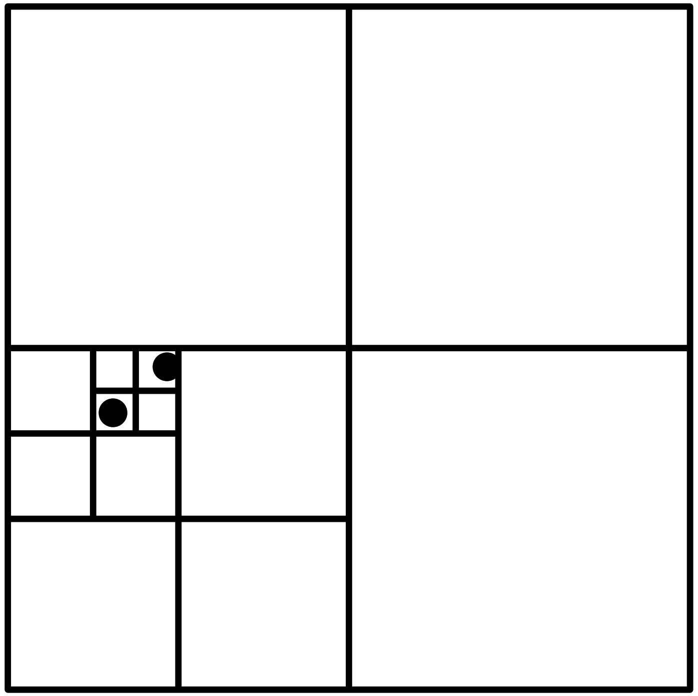
Def.: Ein **Quadtree** $\mathcal{T}(P)$ für eine Punktmenge P ist ein Wurzelbaum, in dem jeder innere Knoten vier Kinder hat. Jeder Knoten entspricht einem Quadrat und die Quadrate der Blätter bilden eine Unterteilung des Wurzelquadrats.

Lemma 1: Die Tiefe d von $\mathcal{T}(P)$ ist höchstens $\log(s/c) + 3/2$, wobei c der kleinste Abstand in P ist und s die Seitenlänge des Wurzelquadrats Q.

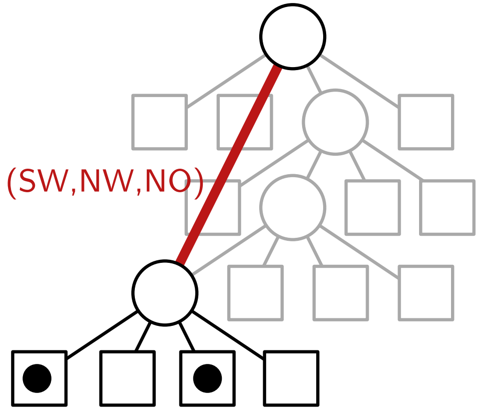
Satz 1: Ein Quadtree $\mathcal{T}(P)$ für n Punkte und mit Tiefe d hat $O((d+1)n)$ Knoten und kann in $O((d+1)n)$ Zeit konstruiert werden.

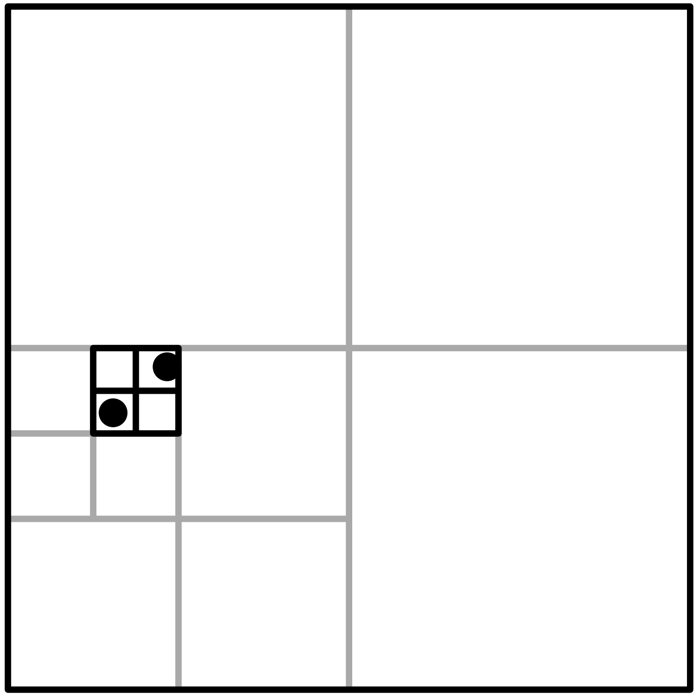
Komprimierte Quadtrees

Def.: Ein **komprimierter** Quadtree ist ein Quadtree, bei dem Pfade nicht-separierender innerer Knoten zu einer Kante komprimiert sind. Die Kante trägt ein Label zur Rekonstruktion der Pfadstruktur.



Quadtree





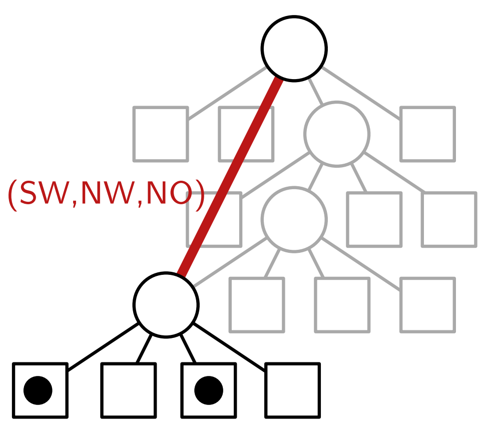
komprimierter Quadtree

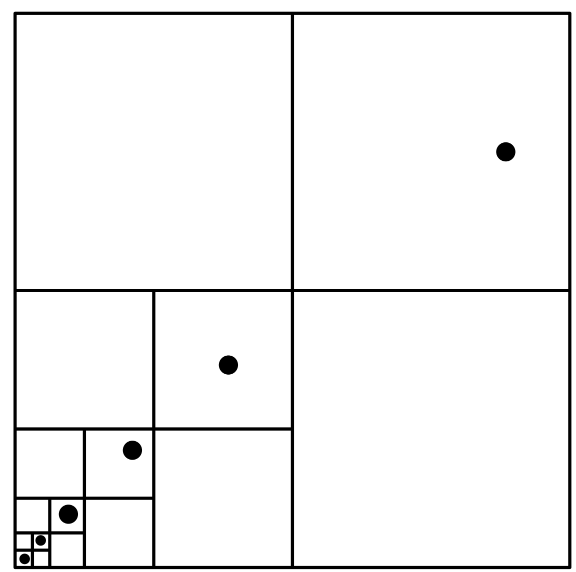
Eigenschaften komprimierter Quadtrees

Beob.:
- innere Knoten teilen ihre Punktmenge in ≥ 2 nichtleere Teile $\Rightarrow$ max. $n-1$ innere Knoten
- Tiefe kann $d = n$ sein, so dass der Algorithmus aus VL10 $O(n^2)$ Zeit zur Konstruktion braucht

Satz 2: Ein komprimierter Quadtree für n Punkte im $\mathbb{R}^d$ für festes d kann in $O(n \log n)$ Zeit konstruiert werden.

(hier ohne Beweis)



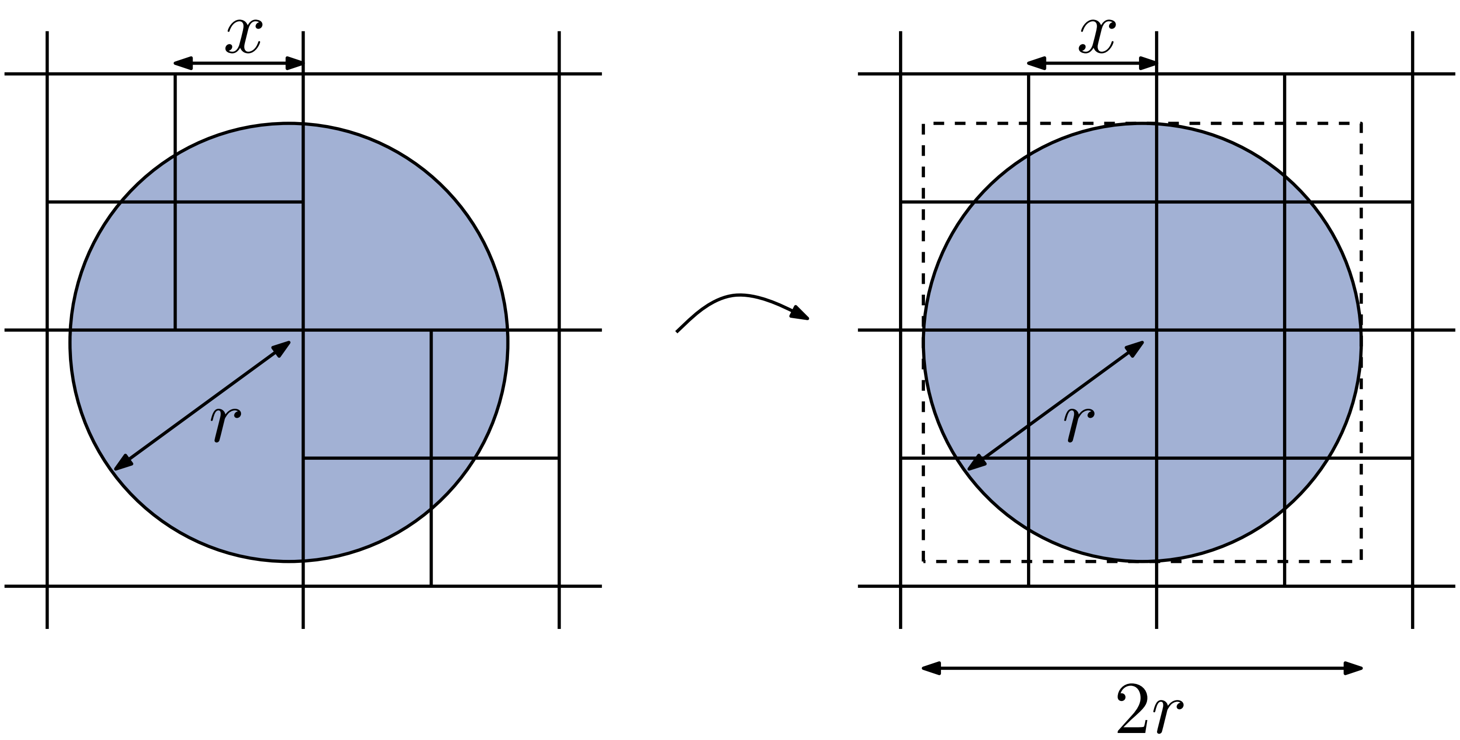


Packungslemma

Lemma 2: Gegeben sei eine Kugel K mit Radius r im $\mathbb{R}^d$ und eine Menge X paarweise disjunkter Quadtree-Zellen mit Seitenlänge $\geq x$, die K schneiden. Dann gilt

$$|X| \leq (1 + \lceil 2r/x \rceil)^d.$$

Beweis:



Repräsentanten und Level

Def.: Für jeden Knoten u eines Quadtrees $\mathcal{T}(P)$ der Punktmenge P sei $P_u = Q_u \cap P$ die Menge der Punkte im zugehörigen Quadrat Q_u. In jedem Blatt u definiere den Repräsentanten

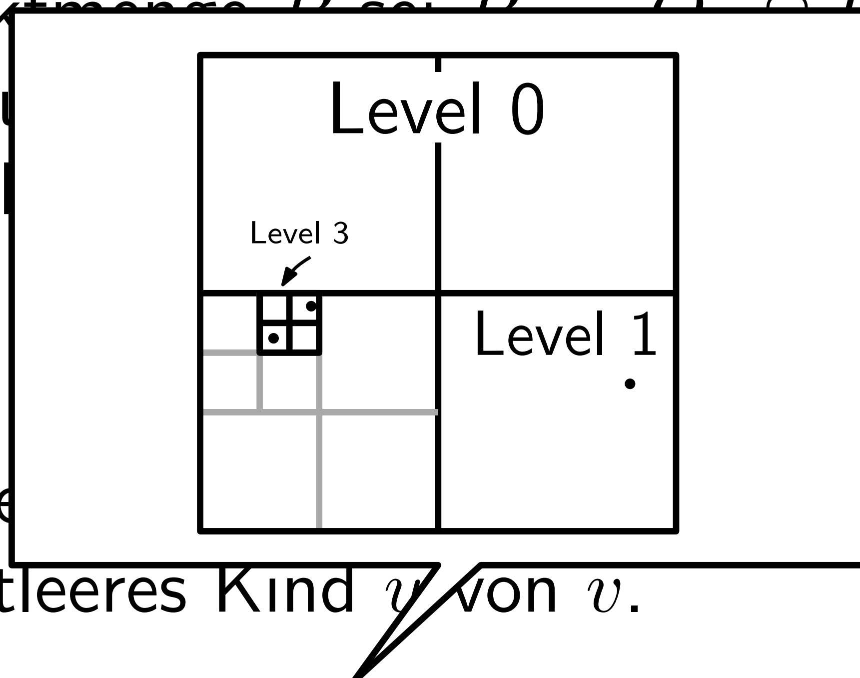
$$\text{rep}(u) = \begin{cases} p & \text{falls } P_u = \{p\} \ (u \text{ ist Blatt}) \\ \emptyset & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für einen inneren Knoten v setze $\text{rep}(v) = \text{rep}(u)$ für ein nichtleeres Kind u von v.

Def.: Für jeden Knoten u eines Quadtrees $\mathcal{T}(P)$ sei $\text{level}(u)$ das Level von u im zugeh. *unkomprimierten* Quadtree. Es gilt $\text{level}(u) \leq \text{level}(v)$ gdw. $\text{Fläche}(Q_u) \geq \text{Fläche}(Q_v)$.

Repräsentanten und Level

Def.: Für jeden Knoten u eines Quadtrees $\mathcal{T}(P)$ der Punk … die Menge der Punkte im zu … jedem Blatt u definiere den …



… $\}$ (u ist Blatt)

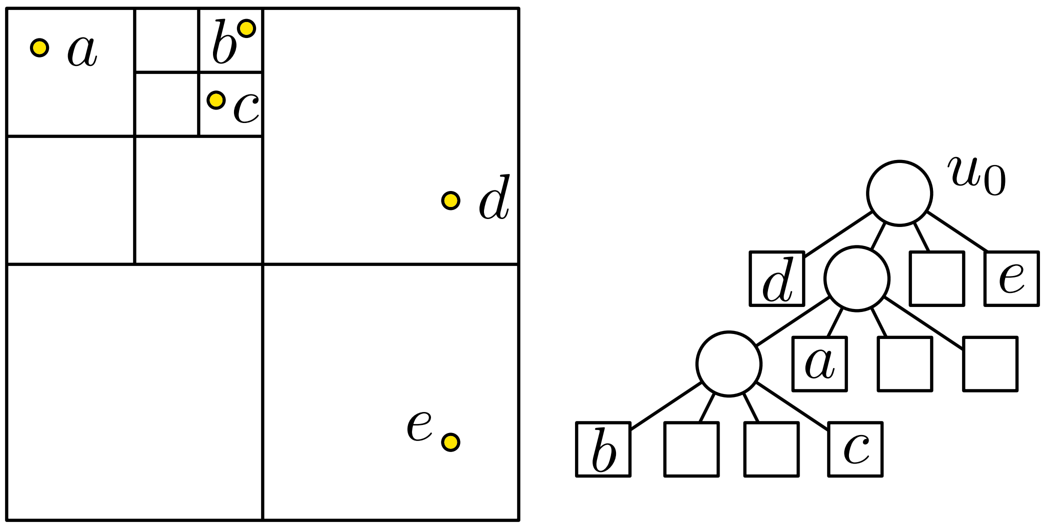
Für e … e $\mathrm{rep}(v) = \mathrm{rep}(u)$ für ein nichtleeres Kind u von v.

Def.: Für jeden Knoten u eines Quadtrees $\mathcal{T}(P)$ sei $\mathrm{level}(u)$ das Level von u im zugeh. *unkomprimierten* Quadtree. Es gilt $\mathrm{level}(u) \leq \mathrm{level}(v)$ gdw. $\text{Fläche}(Q_u) \geq \text{Fläche}(Q_v)$.

Konstruktion einer WSPD

wsPairs$(u, v, \mathcal{T}, s)$

Input: Quadtree-Knoten u, v, Quadtree $\mathcal{T}$, $s > 0$
Output: WSPD für $P_u \otimes P_v$
if rep$(u) = \emptyset$ oder rep$(v) = \emptyset$ oder Blätter $u = v$ **then return** $\emptyset$
else if P_u und P_v s-well separated **then return** $\{\{u, v\}\}$
else
  if level$(u) >$ level(v) **then** tausche u und v
  $(u_1, \ldots, u_m) \leftarrow$ Kinder von u in $\mathcal{T}$
  return $\bigcup_{i=1}^{m}$ wsPairs$(u_i, v, \mathcal{T}, s)$



Konstruktion einer WSPD

wsPairs$(u, v, \mathcal{T}, s)$

Input: Quadt

Output: WS

Kreise um Q_u und Q_v (bzw. Radius 0 für Punkt in Blatt)

vergrößere kleineren Kreis und prüfe Abstand $\geq sr$

if rep$(u) = \emptyset$ oder rep$(v) = \emptyset$ oder Blätter $u = v$ **then return** $\emptyset$

else if P_u und P_v s-well separated **then return** $\{\{u, v\}\}$

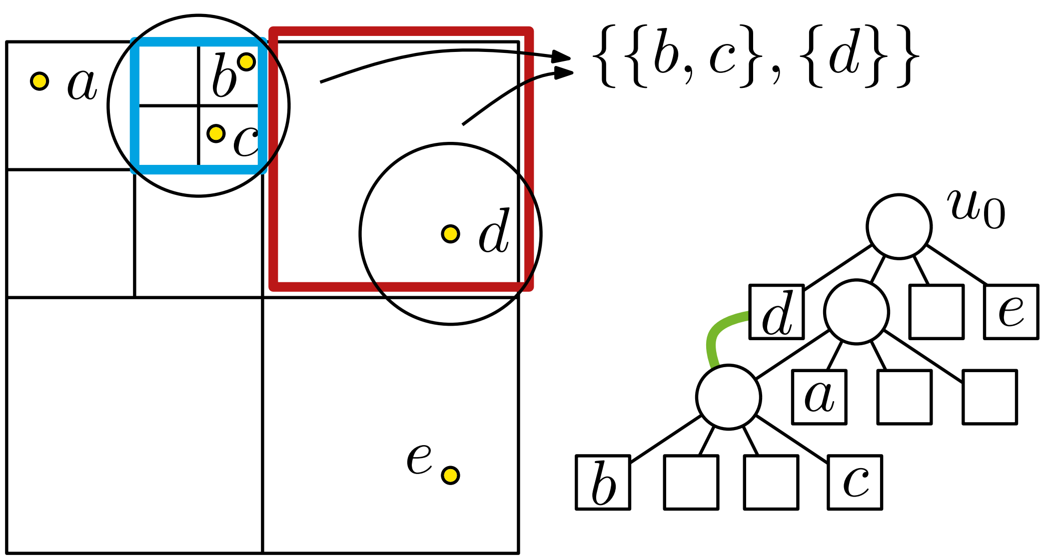
else

  if level$(u) >$ level(v) **then** tausche u und v

  $(u_1, \dots, u_m) \leftarrow$ Kinder von u in $\mathcal{T}$

  return $\bigcup_{i=1}^{m}$ wsPairs$(u_i, v, \mathcal{T}, s)$

$\{\{b, c\}, \{d\}\}$



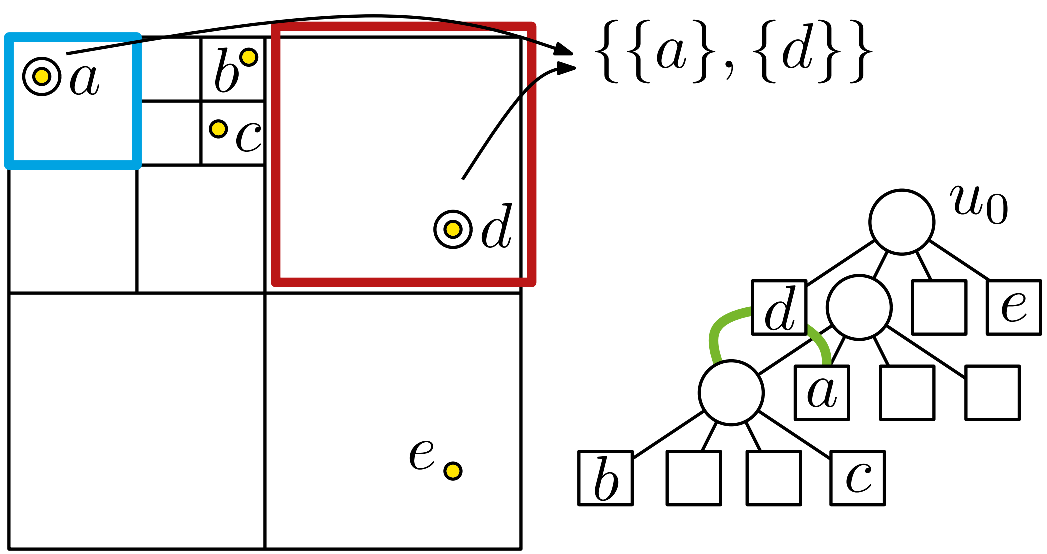
Konstruktion einer WSPD

wsPairs$(u, v, \mathcal{T}, s)$

Input: Quadtree-Knoten u, v, Quadtree $\mathcal{T}$, $s > 0$
Output: WSPD für $P_u \otimes P_v$
if rep$(u) = \emptyset$ oder rep$(v) = \emptyset$ oder Blätter $u = v$ **then return** $\emptyset$
else if P_u und P_v s-well separated **then return** $\{\{u, v\}\}$
else
  if level$(u) >$ level(v) **then** tausche u und v
  $(u_1, \ldots, u_m) \leftarrow$ Kinder von u in $\mathcal{T}$
  return $\bigcup_{i=1}^{m}$ wsPairs$(u_i, v, \mathcal{T}, s)$

$\{\{b, c\}, \{d\}\}$

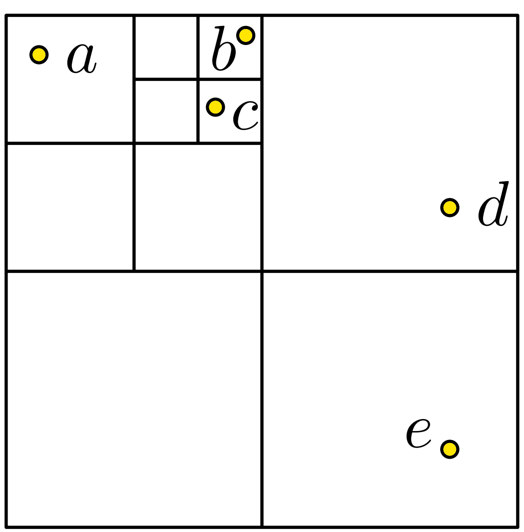
$\{\{a\}, \{d\}\}$

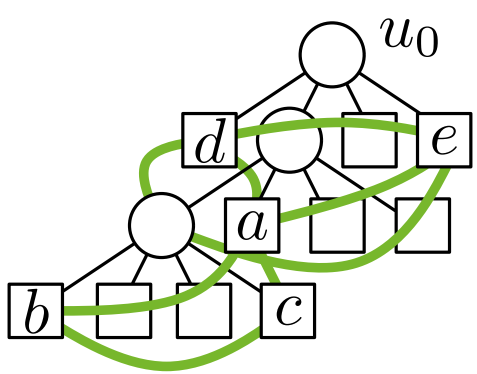


Konstruktion einer WSPD

wsPairs($u, v, \mathcal{T}, s$)

Input: Quadtree-Knoten u, v, Quadtree $\mathcal{T}$, $s > 0$
Output: WSPD für $P_u \otimes P_v$
if rep(u) $= \emptyset$ oder rep(v) $= \emptyset$ oder Blätter $u = v$ **then return** $\emptyset$
else if P_u und P_v s-well separated **then return** $\{\{u, v\}\}$
else
  if level(u) $>$ level(v) **then** tausche u und v
  $(u_1, \ldots, u_m) \leftarrow$ Kinder von u in $\mathcal{T}$
  return $\bigcup_{i=1}^{m}$ wsPairs($u_i, v, \mathcal{T}, s$)





$\{\{b, c\}, \{d\}\}$
$\{\{a\}, \{d\}\}$
$\{\{b, c\}, \{e\}\}$
$\{\{d\}, \{e\}\}$
$\{\{a\}, \{b\}\}$
$\{\{a\}, \{c\}\}$
$\{\{b\}, \{c\}\}$
$\{\{a\}, \{e\}\}$

Konstruktion einer WSPD

wsPairs$(u, v, \mathcal{T}, s)$

Input: Quadtree-Knoten u, v, Quadtree $\mathcal{T}$, $s > 0$
Output: WSPD für $P_u \otimes P_v$
if rep$(u) = \emptyset$ oder rep$(v) = \emptyset$ oder Blätter $u = v$ **then return** $\emptyset$
else if P_u und P_v s-well separated **then return** $\{\{u, v\}\}$
else
  if level$(u) >$ level(v) **then** tausche u und v
  $(u_1, \ldots, u_m) \leftarrow$ Kinder von u in $\mathcal{T}$
  return $\bigcup_{i=1}^{m}$ wsPairs$(u_i, v, \mathcal{T}, s)$

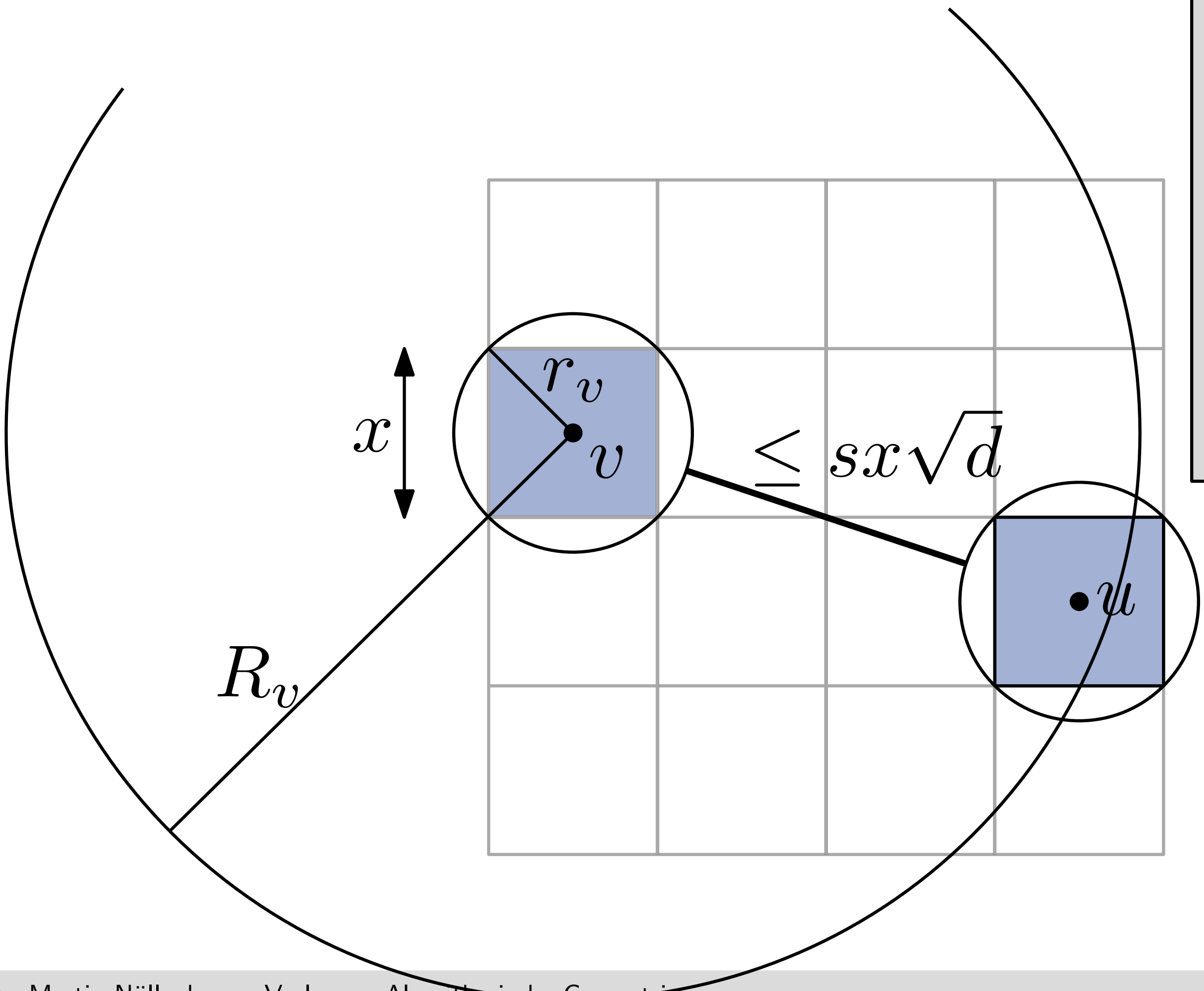
- initialer Aufruf wsPairs$(u_0, u_0, \mathcal{T}, s)$ Wie?
- Duplikate wsPairs$(u_i, u_j, \mathcal{T}, s)$ und wsPairs$(u_j, u_i, \mathcal{T}, s)$ vermeiden
- Blattpaare sind immer s-well separated, Algorithmus terminiert also
- Ausgabe sind Paare von Quadtree-Knoten Speicherplatz?

Frage: Wie viele Paare erzeugt der Algorithmus?

Analyse WSPD-Konstruktion

Satz 3: Gegeben eine Punktmenge P im $\mathbb{R}^d$ und $s \geq 1$ so lässt sich eine s-WSPD mit $O(s^d n)$ Paaren in Zeit $O(n \log n + s^d n)$ konstruieren.

Beweisskizze:



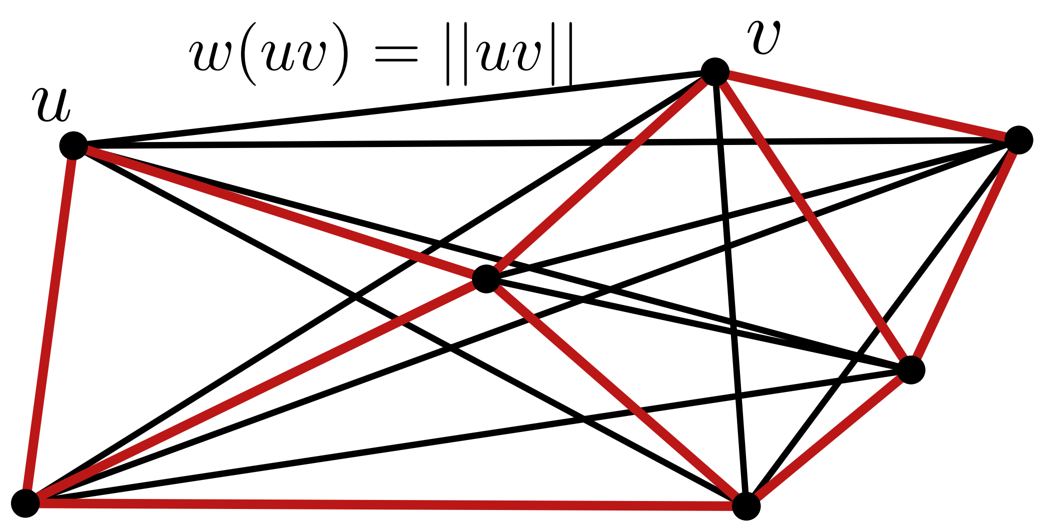
Wdh. Lemma 2:
Geg. Kugel K mit Radius r im $\mathbb{R}^d$ und Menge X paarw. disjunkter Quadtree-Zellen mit Seitenlänge $\geq x$, die K schneiden. Dann gilt

$$|X| \leq (1 + \lceil 2r/x \rceil)^d.$$

t-Spanner

Für eine Menge P von n Punkten in $\mathbb{R}^d$ ist der **Euklidische Graph** $\mathcal{EG}(P) = (P, \binom{P}{2})$ der vollständige gewichtete Graph, dessen Kantengewichte dem Euklidischen Abstand der Kantenendpunkte entsprechen.

Da $\mathcal{EG}(P)$ $\Theta(n^2)$ Kanten hat, wird oft ein dünner Graph mit $O(n)$ Kanten gesucht, dessen kürzeste Wege die Kantengewichte in $\mathcal{EG}(P)$ approximieren.



t-Spanner

Für eine Menge P von n Punkten in $\mathbb{R}^d$ ist der **Euklidische Graph** $\mathcal{EG}(P) = (P, \binom{P}{2})$ der vollständige gewichtete Graph, dessen Kantengewichte dem Euklidischen Abstand der Kantenendpunkte entsprechen.

Da $\mathcal{EG}(P)$ $\Theta(n^2)$ Kanten hat, wird oft ein dünner Graph mit $O(n)$ Kanten gesucht, dessen kürzeste Wege die Kantengewichte in $\mathcal{EG}(P)$ approximieren.

Def.: Ein gewichteter Graph G mit Knotenmenge P heißt t-**Spanner** für P und einen Dehnungsfaktor $t \geq 1$, falls für alle Paare $x, y \in P$ gilt

$$||xy|| \leq \delta_G(x, y) \leq t \cdot ||xy||,$$

wobei $\delta_G(x, y) =$ Länge kürzester x-y-Weg in G.

WSPD und t-Spanner

Def.: Für n Punkte P in $\mathbb{R}^d$ und eine WSPD W von P definiere den Graphen $G = (P, E)$ mit
$E = \{\{x, y\} \mid \{u, v\} \in W$ und $\mathrm{rep}(u) = x, \mathrm{rep}(v) = y\}$.

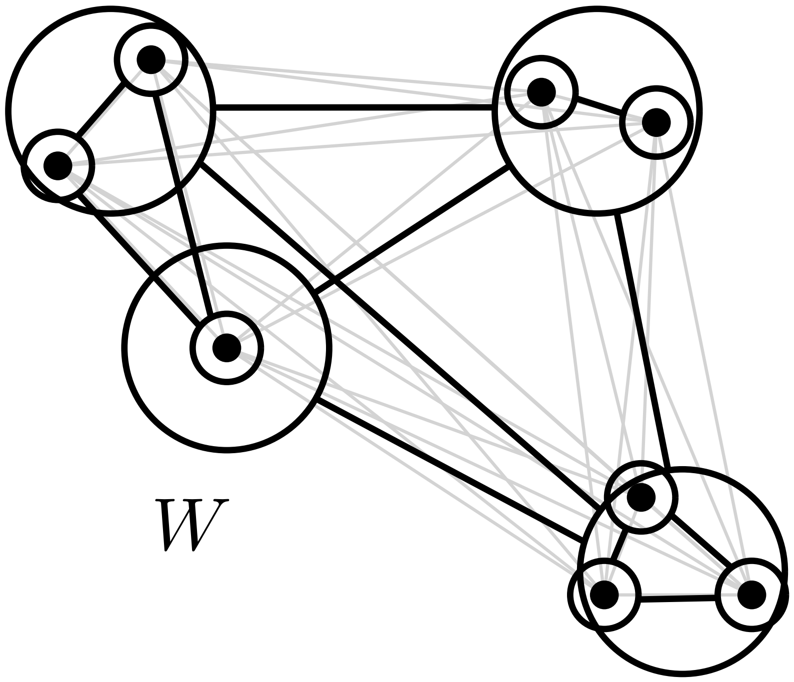
Wdh.: Jedes Paar $\{u, v\} \in W$ entspricht zwei Quadtreeknoten u und v. Aus jedem Quadtreeknoten wird wie folgt ein Repräsentant gewählt. Für Blatt u definiere den Repräsentanten

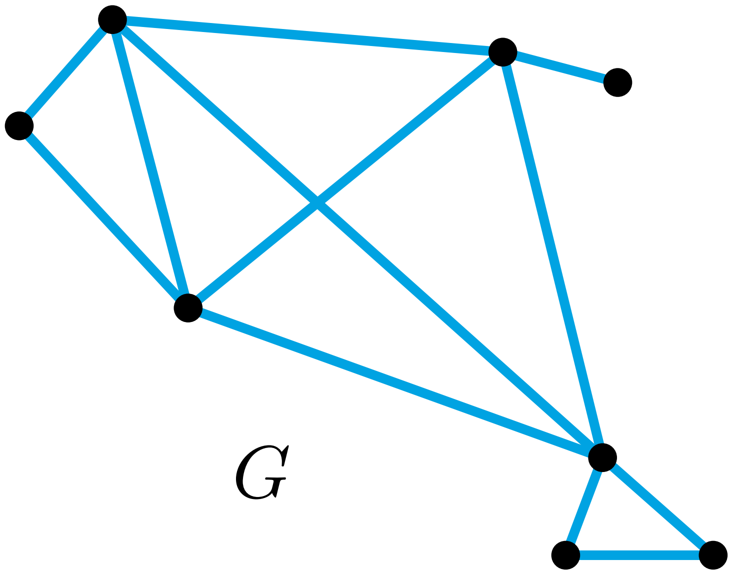
$$\mathrm{rep}(u) = \begin{cases} p & \text{falls } P_u = \{p\} \ (u \text{ ist Blatt}) \\ \emptyset & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für einen inneren Knoten v setze $\mathrm{rep}(v) = \mathrm{rep}(u)$ für ein nichtleeres Kind u von v.

WSPD und t-Spanner

Def.: Für n Punkte P in $\mathbb{R}^d$ und eine WSPD W von P definiere den Graphen $G = (P, E)$ mit $E = \{\{x, y\} \mid \{u, v\} \in W \text{ und } \mathrm{rep}(u) = x, \mathrm{rep}(v) = y\}$.



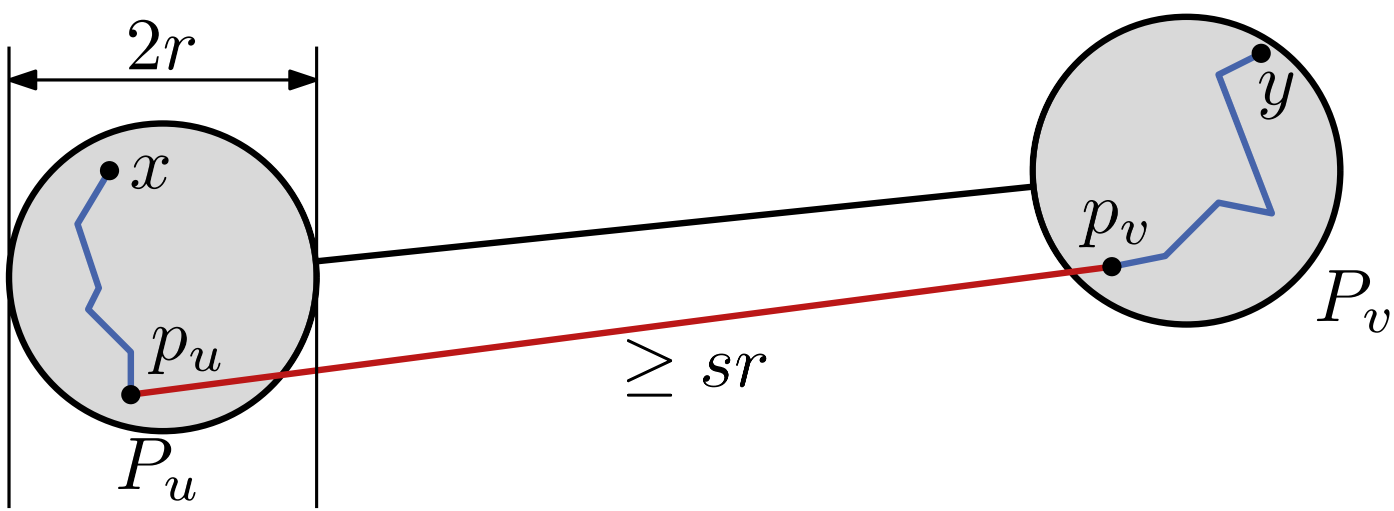


WSPD und t-Spanner

Def.: Für n Punkte P in $\mathbb{R}^d$ und eine WSPD W von P definiere den Graphen $G = (P, E)$ mit
$E = \{\{x, y\} \mid \{u, v\} \in W$ und $\text{rep}(u) = x, \text{rep}(v) = y\}$.

Lemma 3: Ist W eine s-WSPD für ein geeignetes $s = s(t)$, so ist G ein t-Spanner für P mit $O(s^d n)$ Kanten.

Beweis: (Tafel)



Zusammenfassung

Satz 4: Für eine Menge P von n Punkten in $\mathbb{R}^d$ und ein $\varepsilon \in (0, 1]$ kann ein $(1 + \varepsilon)$-Spanner für P mit $O(n/\varepsilon^d)$ Kanten in $O(n \log n + n/\varepsilon^d)$ Zeit berechnet werden.

Beweis: Für $t = (1 + \varepsilon)$ gilt mit $s = 4 \cdot \frac{t+1}{t-1}$

$$O(s^d n) = O\left(\left(4 \cdot \frac{2+\varepsilon}{\varepsilon}\right)^d n\right) \subseteq O\left(\left(\frac{12}{\varepsilon}\right)^d n\right) = O\left(\frac{n}{\varepsilon^d}\right)$$

P

$\downarrow$ $O(n \log n)$

komprimierter Quadtree

$\downarrow$ $O(n/\varepsilon^d)$

WSPD

$\downarrow$ $O(n/\varepsilon^d)$

$(1 + \varepsilon)$-Spanner

$\square$

Weitere Anwendungen der WSPD

Euklidischer MST

Problem: Finde für eine Punktmenge P einen minimalen Spannbaum (MST) im Euklidischen Graphen $\mathcal{EG}(P)$.

Prim: MST in einem Graph $G = (V, E)$ kann in $O(|E| + |V| \log |V|)$ Zeit berechnet werden.

- $\mathcal{EG}(P)$ hat $\Theta(n^2)$ Kanten $\Rightarrow$ Laufzeit $O(n^2)$:-(
- $(1 + \varepsilon)$-Spanner für P hat $O(n/\varepsilon^d)$ Kanten $\Rightarrow$ Laufzeit $O(n \log n + n/\varepsilon^d)$:-)

Wie gut ist der MST eines $(1 + \varepsilon)$-Spanners?

Satz 5: Der aus einem $(1 + \varepsilon)$-Spanner von P gewonnene MST ist eine $(1 + \varepsilon)$-Approximation des EMST von P.

Durchmesser von P

Problem: Finde den Durchmesser einer Punktmenge P, d.h. das Paar $\{x, y\} \subset P$ mit größtem Abstand.

- brute-force alle Punktpaare testen $\Rightarrow$ Laufzeit $O(n^2)$:-(
- teste Abstände $||\text{rep}(u)\ \text{rep}(v)||$ aller ws-Paare $\{P_u, P_v\}$ $\Rightarrow$ Laufzeit $O(n \log n + s^d n)$:-)

Wie gut ist der berechnete Durchmesser?

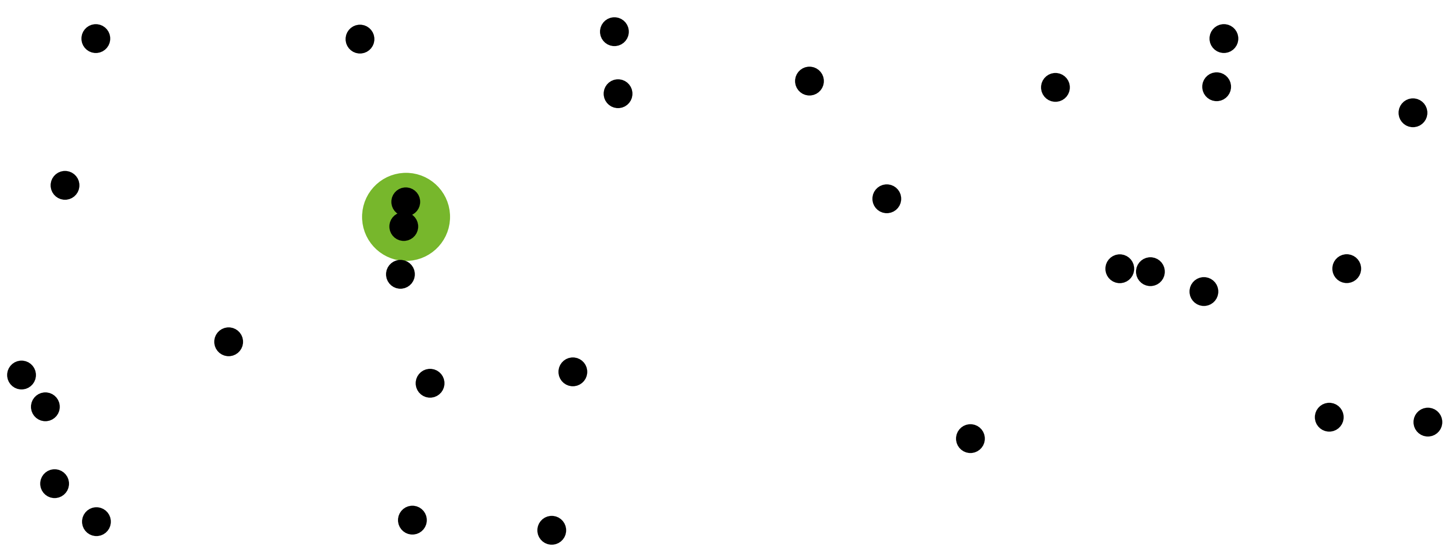
Satz 6: Der aus einer s-WSPD von P berechnete Durchmesser ist eine $(1 + \varepsilon)$-Approximation des Durchmessers von P.

Nähestes Punktepaar

Problem: Finde das Paar $\{x, y\} \subset P$ mit geringstem Abstand.

- brute-force alle Punktpaare testen $\Rightarrow$ Laufzeit $O(n^2)$:-(
- teste Abstände $||\text{rep}(u)\ \text{rep}(v)||$ aller ws-Paare $\{P_u, P_v\}$ $\Rightarrow$ Laufzeit $O(n \log n + s^d n)$:-)

Übungsblatt: Für $s > 2$ liefert dieser Ansatz sogar exakt das näheste Paar.



Diskussion

Welche weiteren Anwendungen hat die WSPD?

WSPD bietet sich immer dann an, wenn man auf die $\Theta(n^2)$ exakten Distanzen in einer Punktmenge verzichten kann und diese stattdessen approximiert. Ein Beispiel sind kräftebasierte Layoutalgorithmen im Graphenzeichnen, wo paarweise Abstoßungskräfte von n Objekten berechnet werden müssen.

Wozu geometrisch approximieren?

Einerseits ersetzt man dadurch langsame Berechnungen durch schnellere (aber ungenauere), andererseits sind oft auch die Eingabedaten schon mit einer gewissen Ungenauigkeit behaftet, so dass approximative Lösungen je nach Anwendung ausreichend sind.

Geht es nicht auch genauso schnell exakt?

Oft im $\mathbb{R}^2$ ja, aber nicht mehr im $\mathbb{R}^d$ für $d > 2$. (EMST, Durchmesser)