Vorlesung Algorithmische Geometrie

Geradenarrangements und Dualität von Punkten und Geraden

INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK · FAKULTÄT FÜR INFORMATIK

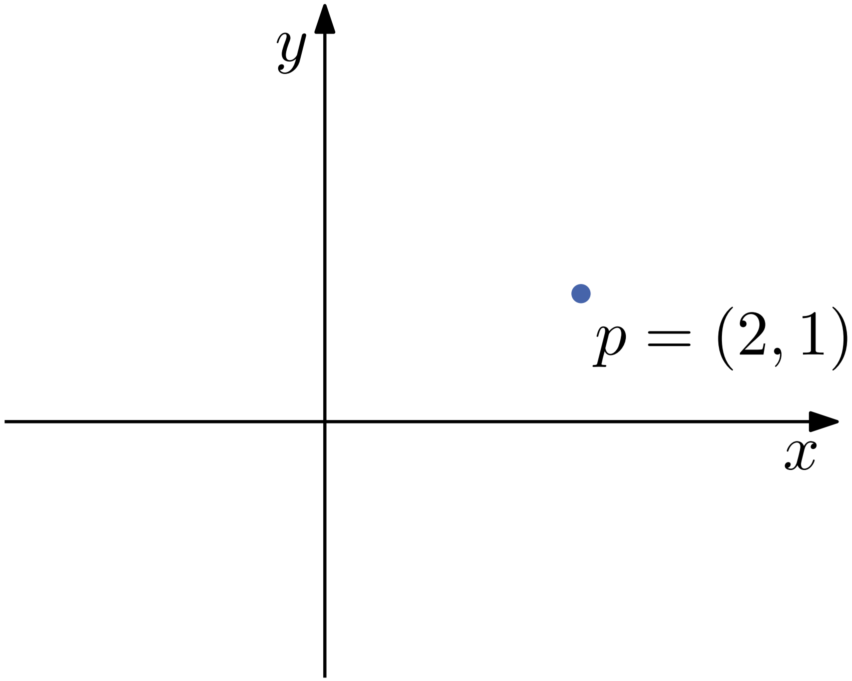
Karlsruhe Institute of Technology

Martin Nöllenburg

12.06.2012

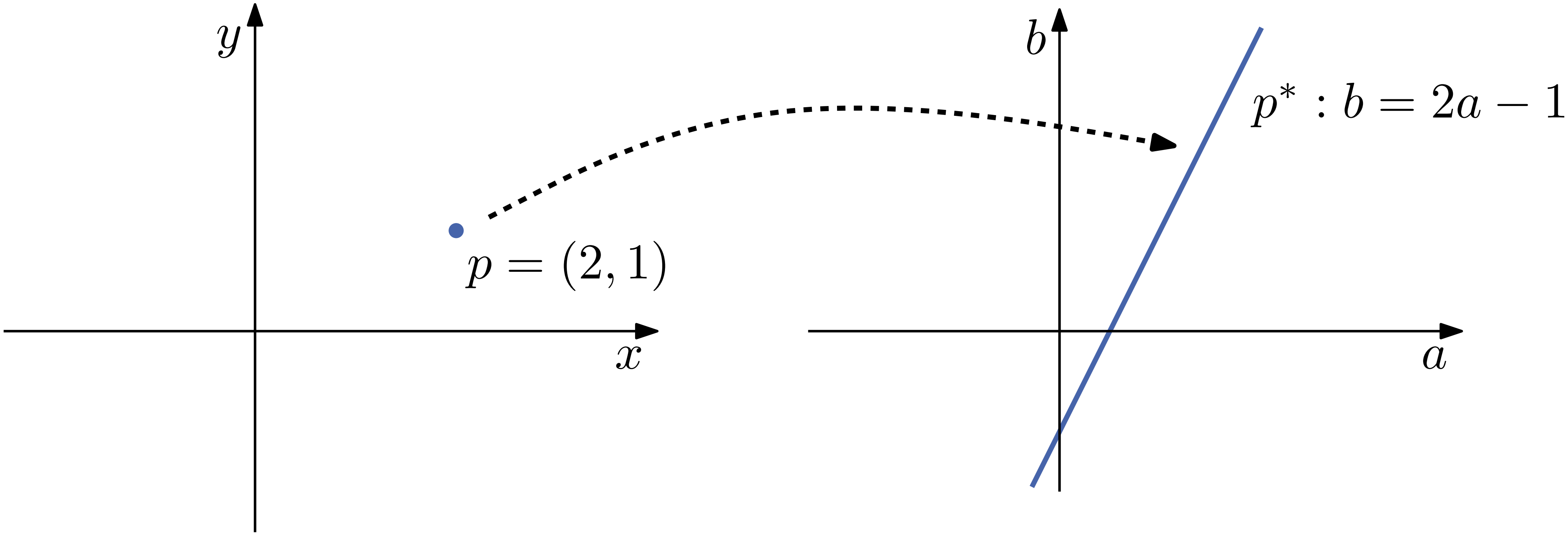
Dualitätsabbildung

Bisher haben wir Dualität für planare Graphen bzw. Voronoi-Diagramme und Delaunay-Triangulierungen gesehen. Auch Punkte und Geraden können **dual** zueinander sein.



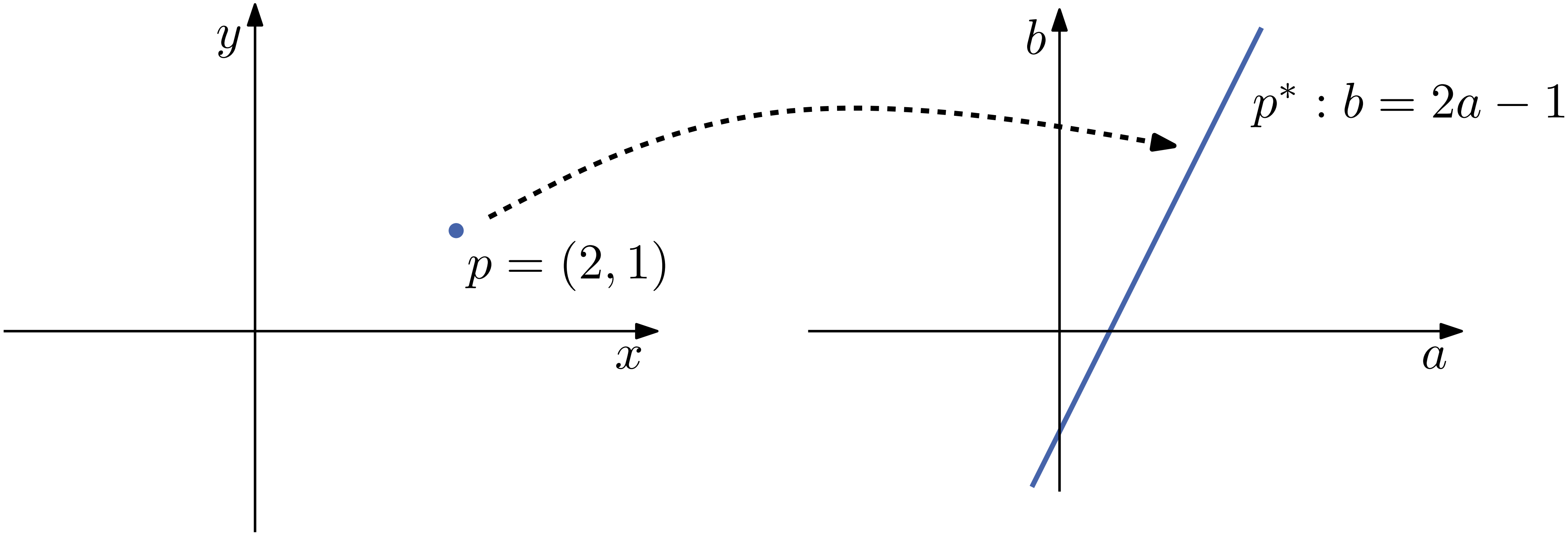
Dualitätsabbildung

Bisher haben wir Dualität für planare Graphen bzw. Voronoi-Diagramme und Delaunay-Triangulierungen gesehen. Auch Punkte und Geraden können **dual** zueinander sein.



Dualitätsabbildung

Bisher haben wir Dualität für planare Graphen bzw. Voronoi-Diagramme und Delaunay-Triangulierungen gesehen. Auch Punkte und Geraden können **dual** zueinander sein.

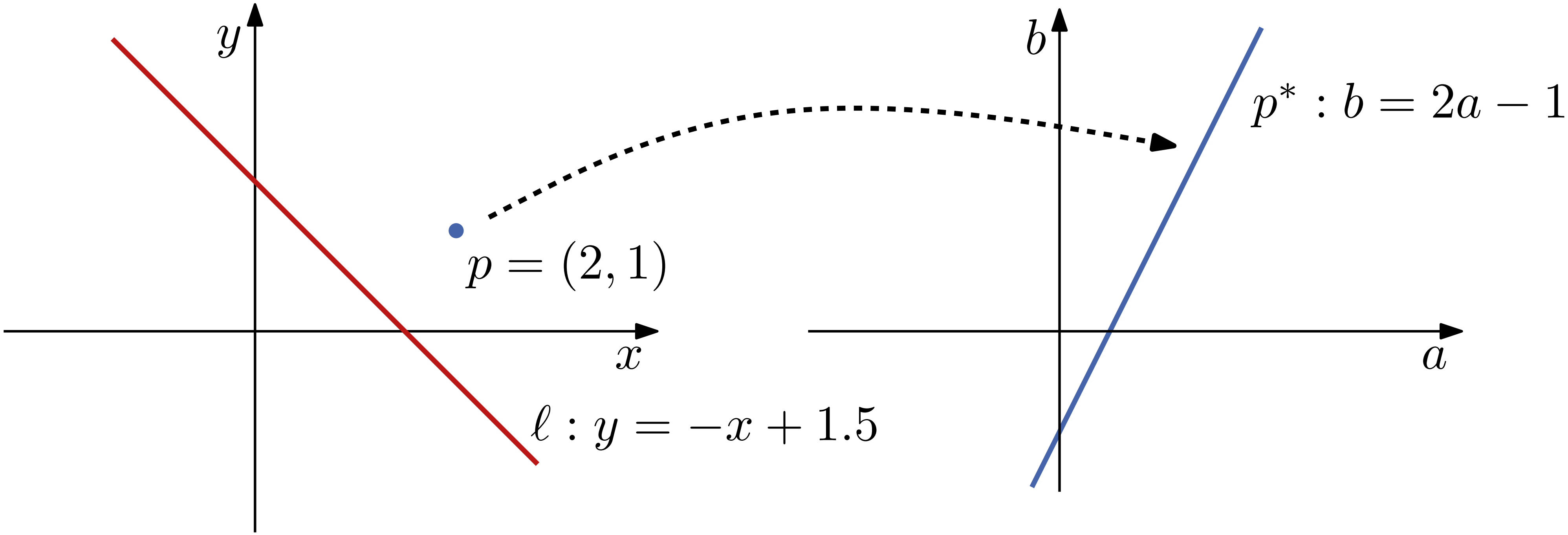


Def.: Die Dualitätsabbildung $(\cdot)^*$ ist definiert durch

$$p = (p_x, p_y) \quad \mapsto \quad p^* : b = p_x a - p_y$$

Dualitätsabbildung

Bisher haben wir Dualität für planare Graphen bzw. Voronoi-Diagramme und Delaunay-Triangulierungen gesehen. Auch Punkte und Geraden können **dual** zueinander sein.

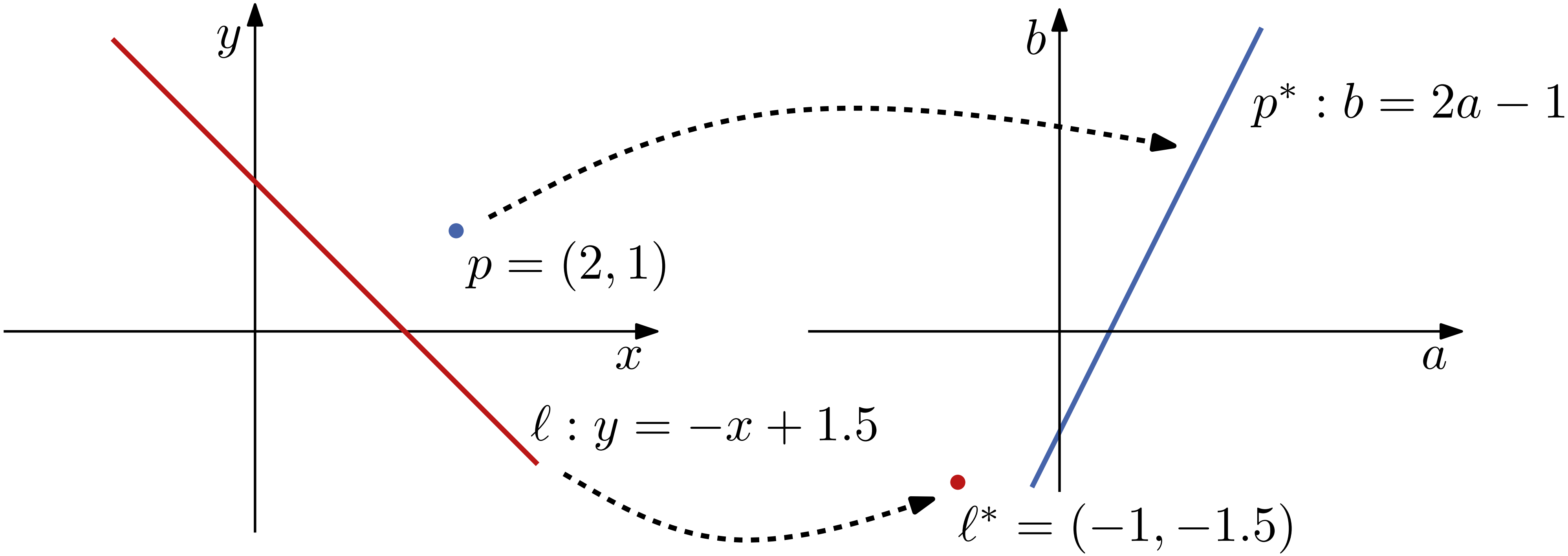


Def.: Die Dualitätsabbildung $(\cdot)^*$ ist definiert durch

$$p = (p_x, p_y) \qquad \mapsto \qquad p^* : b = p_x a - p_y$$

Dualitätsabbildung

Bisher haben wir Dualität für planare Graphen bzw. Voronoi-Diagramme und Delaunay-Triangulierungen gesehen. Auch Punkte und Geraden können **dual** zueinander sein.

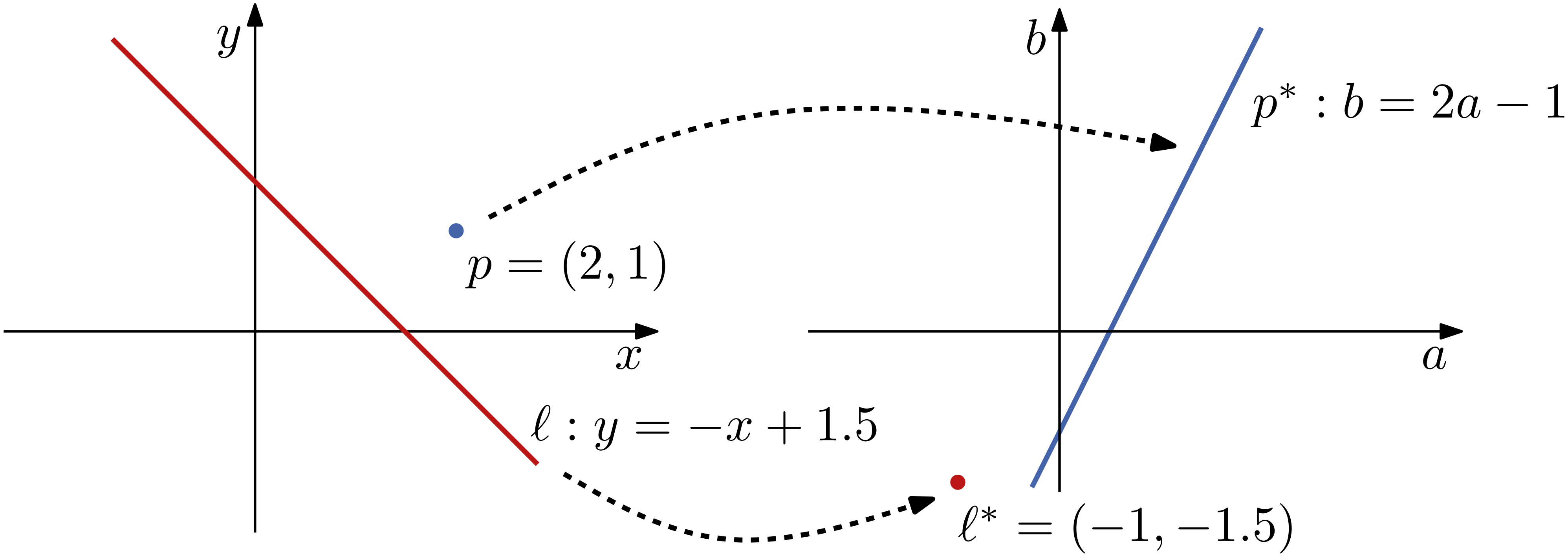


Def.: Die Dualitätsabbildung $(\cdot)^*$ ist definiert durch

$$p = (p_x, p_y) \quad \mapsto \quad p^* : b = p_x a - p_y$$

Dualitätsabbildung

Bisher haben wir Dualität für planare Graphen bzw. Voronoi-Diagramme und Delaunay-Triangulierungen gesehen. Auch Punkte und Geraden können **dual** zueinander sein.



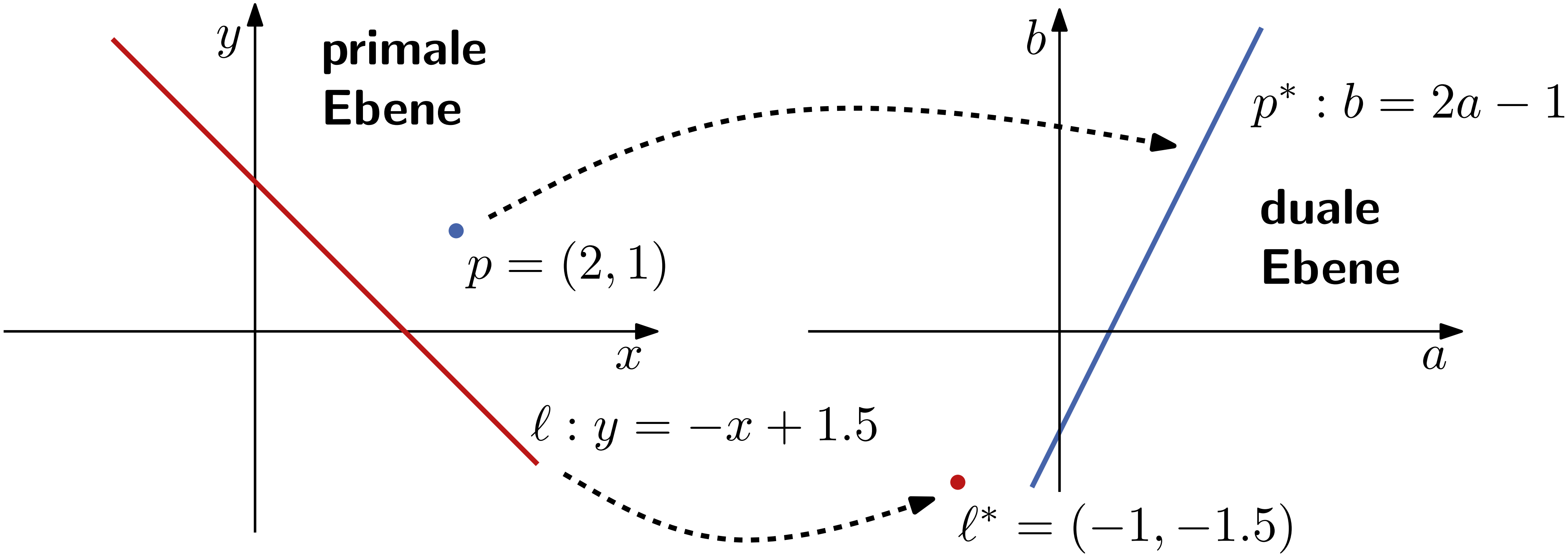
Def.: Die Dualitätsabbildung $(\cdot)^*$ ist definiert durch

$$p = (p_x, p_y) \quad \mapsto \quad p^* : b = p_x a - p_y$$

$$\ell : y = mx + c \quad \mapsto \quad \ell^* = (m, -c)$$

Dualitätsabbildung

Bisher haben wir Dualität für planare Graphen bzw. Voronoi-Diagramme und Delaunay-Triangulierungen gesehen. Auch Punkte und Geraden können **dual** zueinander sein.



Def.: Die Dualitätsabbildung $(\cdot)^*$ ist definiert durch

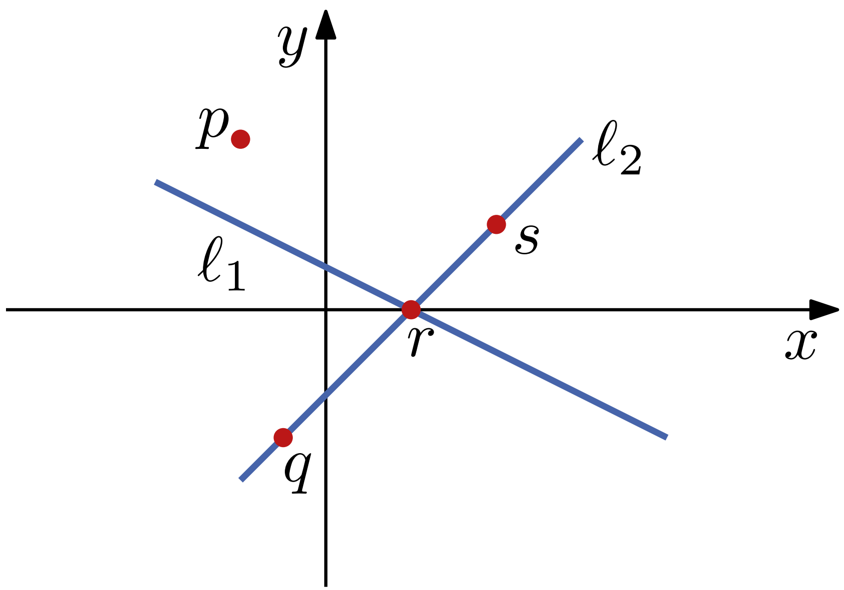
$$p = (p_x, p_y) \quad \mapsto \quad p^* : b = p_x a - p_y$$

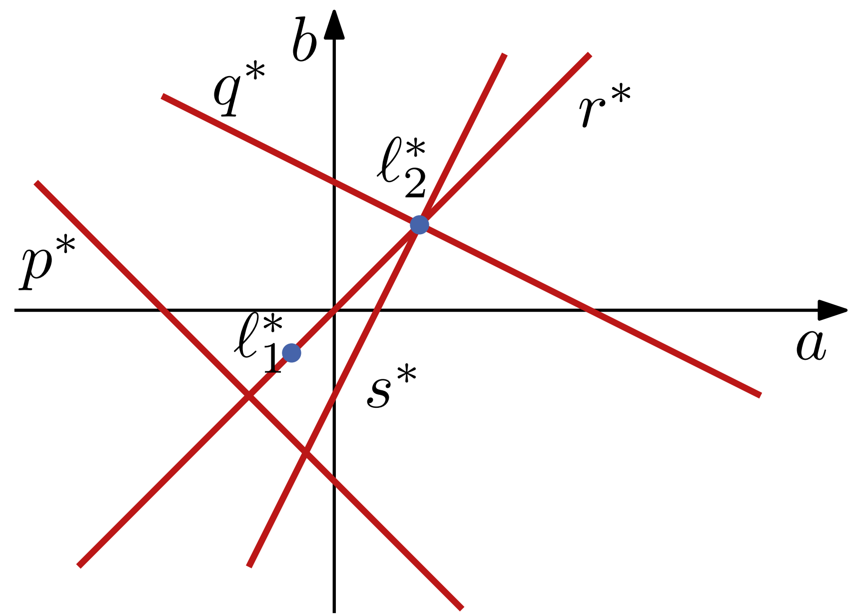
$$\ell : y = mx + c \quad \mapsto \quad \ell^* = (m, -c)$$

Eigenschaften

Lemma 1: Es gelten die folgenden Eigenschaften

- $(p^*)^* = p$ und $(\ell^*)^* = \ell$
- p liegt unter/auf/über $\ell \Leftrightarrow p^*$ läuft über/auf/unter ℓ^*
- ℓ_1 und ℓ_2 schneiden sich in r
  $\Leftrightarrow r^*$ geht durch ℓ_1^* und ℓ_2^*
- q, r, s kollinear
  $\Leftrightarrow q^*, r^*, s^*$ schneiden sich in gemeinsamem Punkt





Eigenschaften

Lemma 1: Es gelten die folgenden Eigenschaften

- $(p^*)^* = p$ und $(\ell^*)^* = \ell$
- p liegt unter/auf/über $\ell \Leftrightarrow p^*$ läuft über/auf/unter ℓ^*
- ℓ_1 und ℓ_2 schneiden sich in r
  $\Leftrightarrow r^*$ geht durch ℓ_1^* und ℓ_2^*
- q, r, s kollinear
  $\Leftrightarrow q^*, r^*, s^*$ schneiden sich in gemeinsamem Punkt

Wie sieht das duale Objekt zu einer Strecke $s = \overline{pq}$ aus?

Welche duale Beziehung gilt für eine Gerade ℓ, die s schneidet?

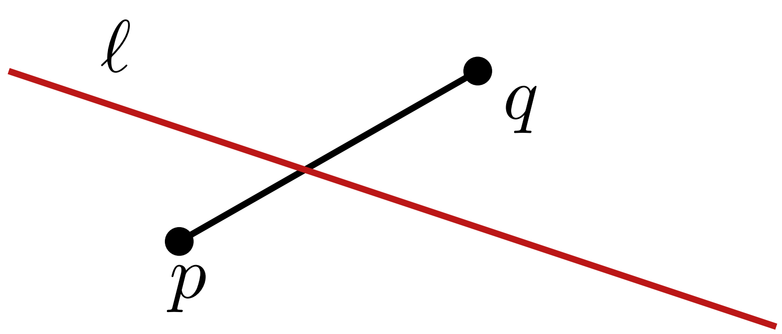
Eigenschaften

Lemma 1: Es gelten die folgenden Eigenschaften

- $(p^*)^* = p$ und $(\ell^*)^* = \ell$
- p liegt unter/auf/über $\ell \Leftrightarrow p^*$ läuft über/auf/unter ℓ^*
- ℓ_1 und ℓ_2 schneiden sich in r
  $\Leftrightarrow r^*$ geht durch ℓ_1^* und ℓ_2^*
- q, r, s kollinear
  $\Leftrightarrow q^*, r^*, s^*$ schneiden sich in gemeinsamem Punkt

Wie sieht das duale Objekt zu einer Strecke $s = \overline{pq}$ aus?

Welche duale Beziehung gilt für eine Gerade ℓ, die s schneidet?



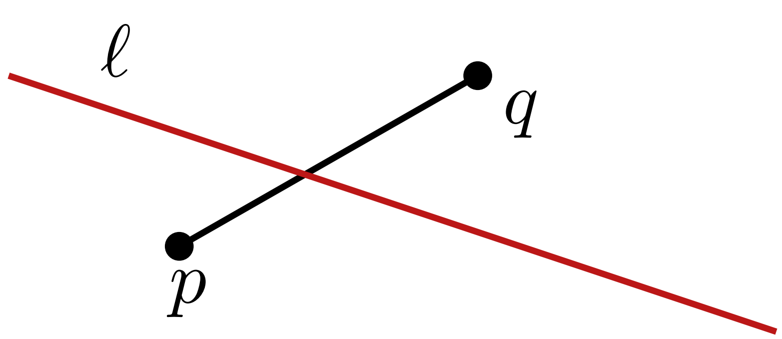
Eigenschaften

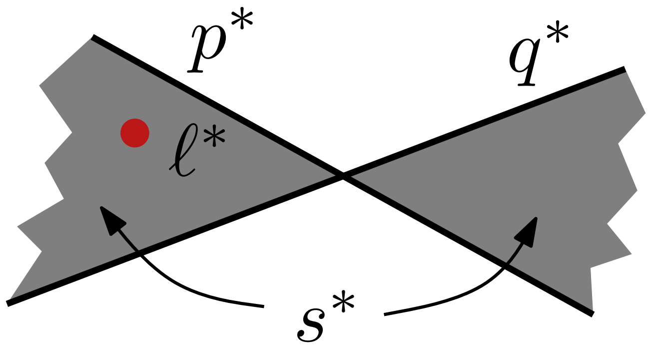
Lemma 1: Es gelten die folgenden Eigenschaften

- $(p^*)^* = p$ und $(\ell^*)^* = \ell$
- p liegt unter/auf/über $\ell \Leftrightarrow p^*$ läuft über/auf/unter ℓ^*
- ℓ_1 und ℓ_2 schneiden sich in r
  $\Leftrightarrow r^*$ geht durch ℓ_1^* und ℓ_2^*
- q, r, s kollinear
  $\Leftrightarrow q^*, r^*, s^*$ schneiden sich in gemeinsamem Punkt

Wie sieht das duale Objekt zu einer Strecke $s = \overline{pq}$ aus?

Welche duale Beziehung gilt für eine Gerade ℓ, die s schneidet?





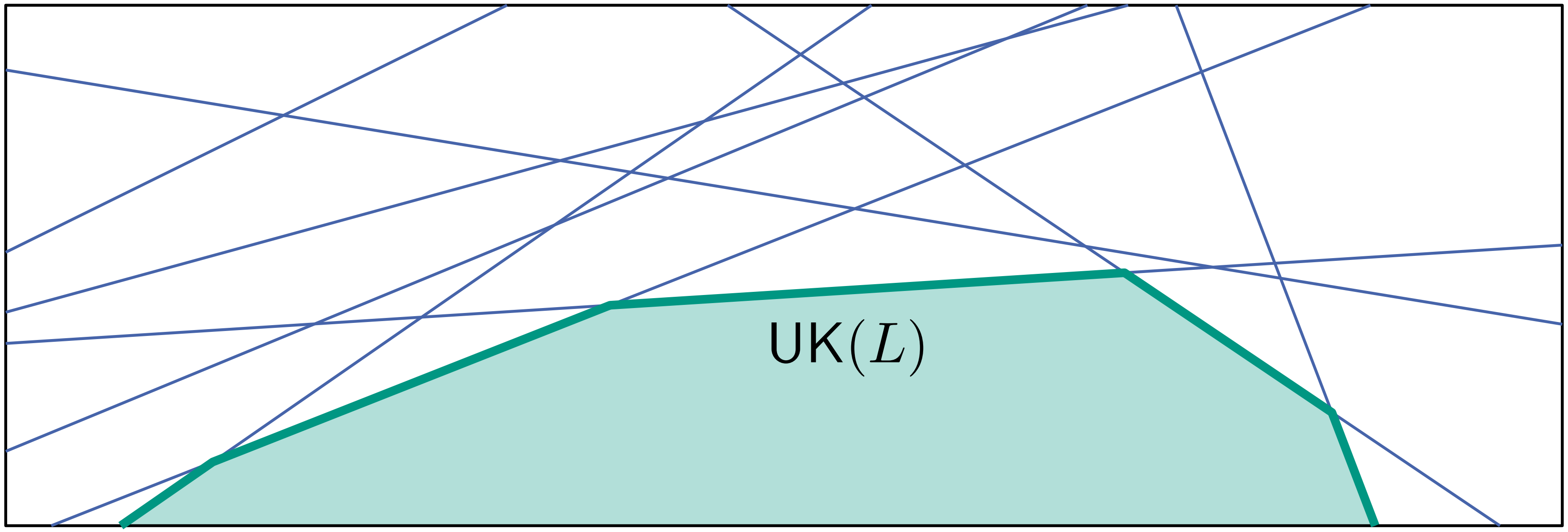
Anwendungen der Dualität

Dualität macht geometrische Probleme weder leichter noch schwerer; sie bietet einen anderen (oft hilfreichen) Blickwinkel!

Wir werden zwei Beispiele genauer betrachten:

- untere/obere Konturen von Geradenarrangements
- kleinstes Dreieck in einer Punktmenge

Untere Kontur

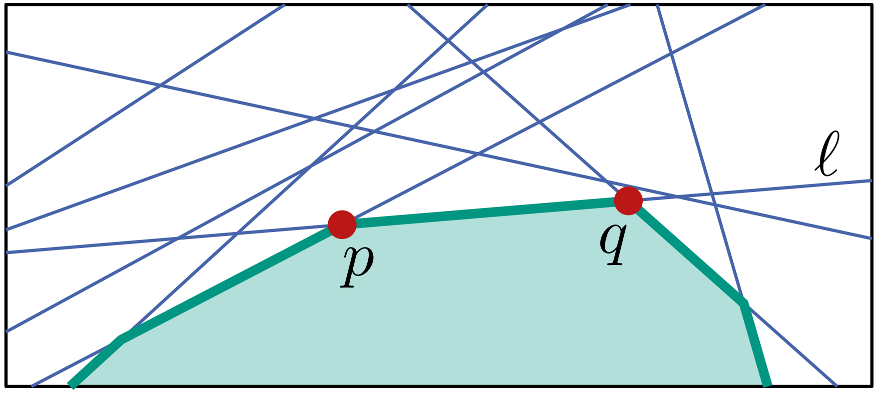


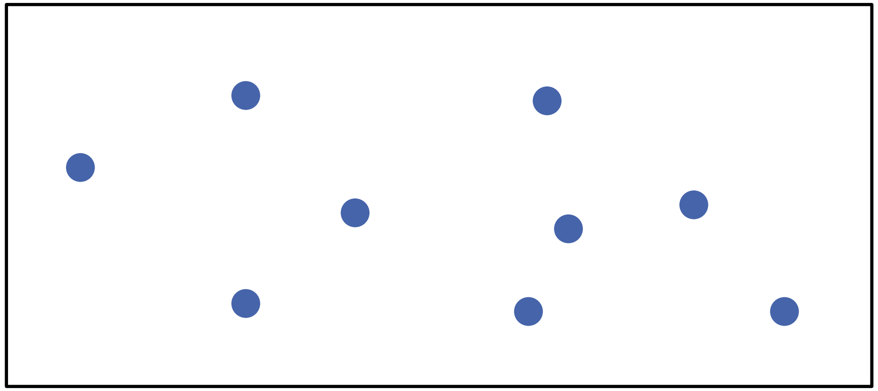
Def.: Für eine Menge L von Geraden ist die untere Kontur UK(L) von L die Menge aller Punkte aus $\cup_{\ell \in L} \ell$, die unterhalb aller Geraden aus L liegen.

Möglichkeiten zur Berechnung der unteren Kontur:

- Algorithmus `IntersectHalfplanes` aus 4. VL
- Betrachte das duale Problem für $L^* = \{\ell^* \mid \ell \in L\}$

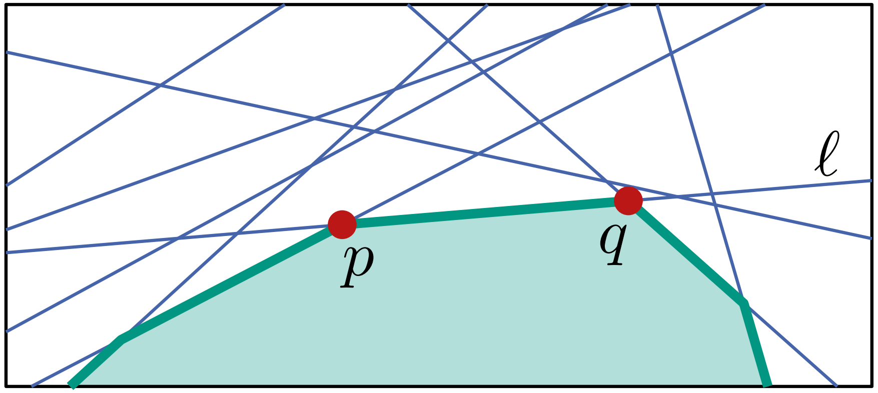
Kontur und Dualität

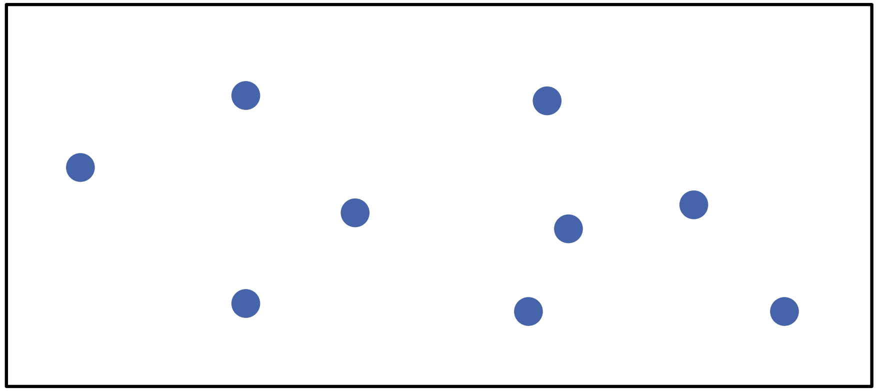




Wann erscheint ℓ als Strecke $\overline{pq}$ auf $\mathrm{UK}(L)$?

Kontur und Dualität

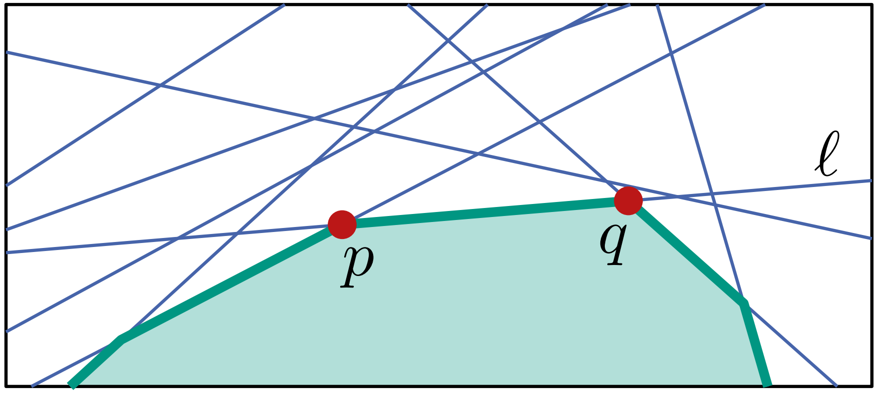


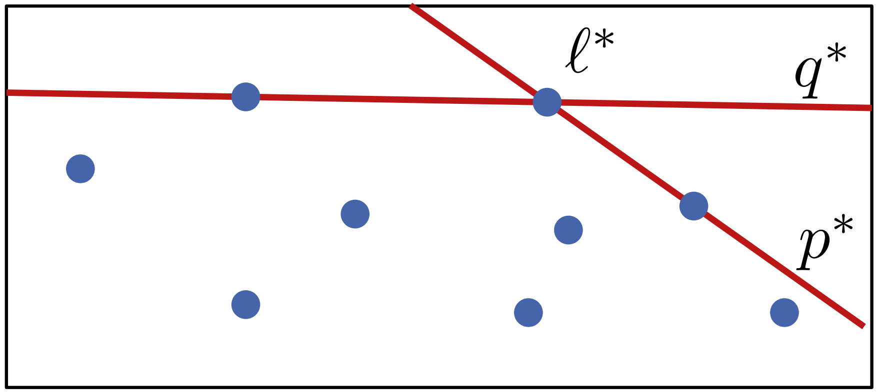


Wann erscheint ℓ als Strecke $\overline{pq}$ auf UK(L)?

- p und q liegen unterhalb aller Geraden in L

Kontur und Dualität

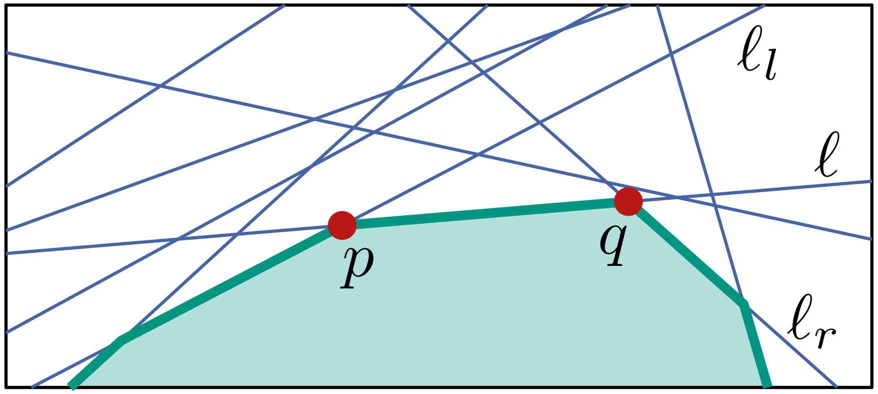


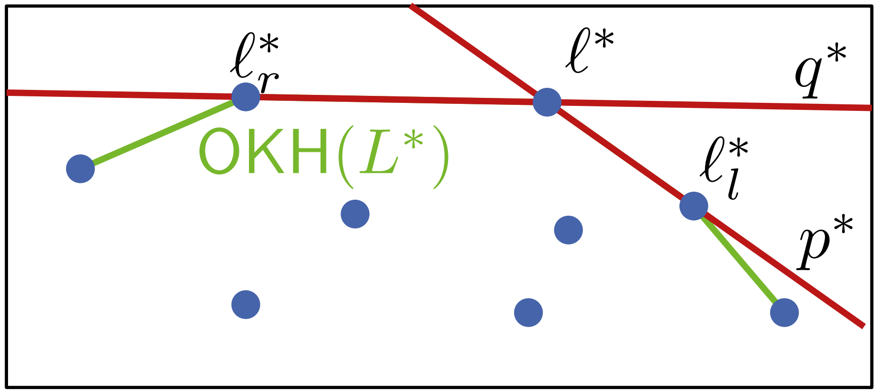


Wann erscheint ℓ als Strecke $\overline{pq}$ auf $\mathrm{UK}(L)$?

- p und q liegen unterhalb aller Geraden in L
- p^* und q^* liegen oberhalb aller Punkte aus L^*

Kontur und Dualität

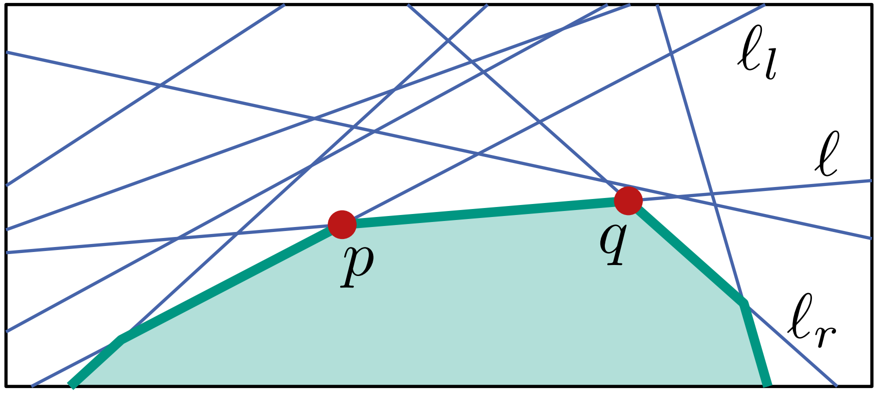


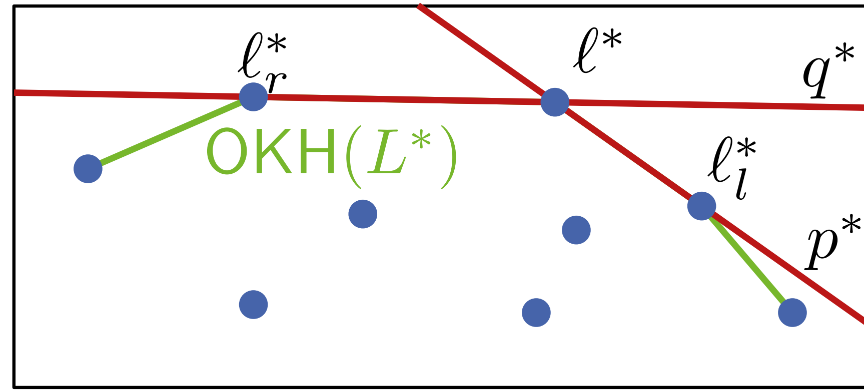


Wann erscheint ℓ als Strecke $\overline{pq}$ auf UK(L)?

- p und q liegen unterhalb aller Geraden in L
- p^* und q^* liegen oberhalb aller Punkte aus L^*
  $\Rightarrow$ liegen benachbart auf oberer konvexer Hülle OKH(L^*)
- Schnittpunkt von p^* und q^* ist ℓ^*, Knoten von OKH(L^*)

Kontur und Dualität





Wann erscheint ℓ als Strecke $\overline{pq}$ auf UK(L)?

- p und q liegen unterhalb aller Geraden in L
- p^* und q^* liegen oberhalb aller Punkte aus L^*
  $\Rightarrow$ liegen benachbart auf oberer konvexer Hülle OKH(L^*)
- Schnittpunkt von p^* und q^* ist ℓ^*, Knoten von OKH(L^*)

Lemma 2: Die Geraden auf UK(L) von rechts nach links entsprechen den Knoten auf OKH(L^*) von links nach rechts.

Berechnung der Kontur

- Algorithmus zur Berechnung der oberen konvexen Hülle mit Laufzeit $O(n \log n)$ (s. erste VL zu konvexer Hülle)

Berechnung der Kontur

- Algorithmus zur Berechnung der oberen konvexen Hülle mit Laufzeit $O(n \log n)$ (s. erste VL zu konvexer Hülle)
- Primale Geraden zu Punkten auf OKH(L^*) in umgekehrter Reihenfolge bilden UK(L)

Berechnung der Kontur

- Algorithmus zur Berechnung der oberen konvexen Hülle mit Laufzeit $O(n \log n)$ (s. erste VL zu konvexer Hülle)
- Primale Geraden zu Punkten auf OKH(L^*) in umgekehrter Reihenfolge bilden UK(L)
- Analog: obere Kontur von $L \mathrel{\hat{=}}$ untere konvexe Hülle von L^*

Berechnung der Kontur

- Algorithmus zur Berechnung der oberen konvexen Hülle mit Laufzeit $O(n \log n)$ (s. erste VL zu konvexer Hülle)
- Primale Geraden zu Punkten auf OKH(L^*) in umgekehrter Reihenfolge bilden UK(L)
- Analog: obere Kontur von $L \hat{=}$ untere konvexe Hülle von L^*

Wie lässt sich das nutzen um den Schnitt von n Halbebenen zu berechnen?

Berechnung der Kontur

- Algorithmus zur Berechnung der oberen konvexen Hülle mit Laufzeit $O(n \log n)$ (s. erste VL zu konvexer Hülle)
- Primale Geraden zu Punkten auf OKH(L^*) in umgekehrter Reihenfolge bilden UK(L)
- Analog: obere Kontur von $L \,\hat{=}\,$ untere konvexe Hülle von L^*

Wie lässt sich das nutzen um den Schnitt von n Halbebenen zu berechnen?

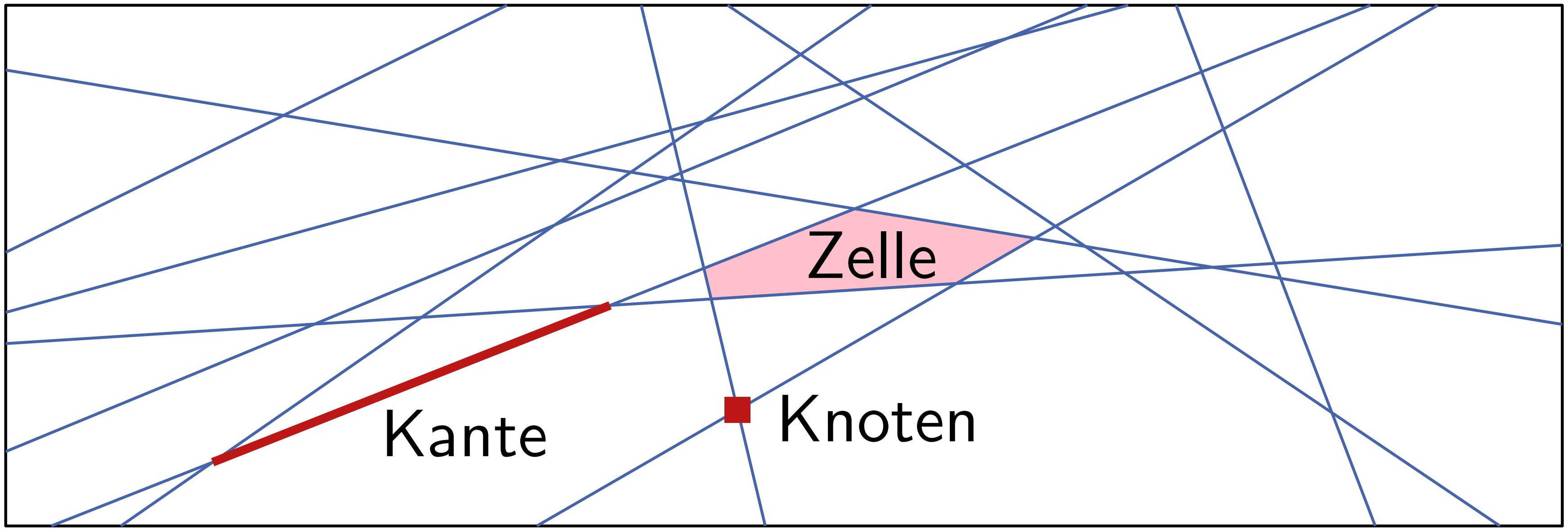
- untere Kontur der von oben begrenzenden Geraden
- obere Kontur der von unten begrenzenden Geraden
- Schnitt der beiden konvexen Regionen (s. 4. VL)
- insgesamt $O(n \log n)$ Laufzeit

Zwischenfrage:

Wie testet man ob n Punkte in allgemeiner Lage sind?

Wie findet man eine maximal große Menge kollinearer Punkte?

Geradenarrangements



Def.: Eine Menge L von Geraden definiert eine Unterteilung $\mathcal{A}(L)$ der Ebene (das **Geradenarrangement**) in Knoten, Kanten und Zellen (tlws. unbeschränkt).
$\mathcal{A}(L)$ heißt **einfach**, wenn keine drei Geraden durch einen Punkt gehen und keine zwei Geraden parallel sind.

Komplexität von $\mathcal{A}(L)$

Die kombinatorische Komplexität von $\mathcal{A}(L)$ ist die Zahl der Knoten, Kanten und Zellen. Es gilt:

Satz 1: Sei $\mathcal{A}(L)$ ein einfaches Arrangement von n Geraden. Dann hat $\mathcal{A}(L)$ $\binom{n}{2}$ Knoten, n^2 Kanten und $\binom{n}{2} + n + 1$ Zellen.

Komplexität von $\mathcal{A}(L)$

Die kombinatorische Komplexität von $\mathcal{A}(L)$ ist die Zahl der Knoten, Kanten und Zellen. Es gilt:

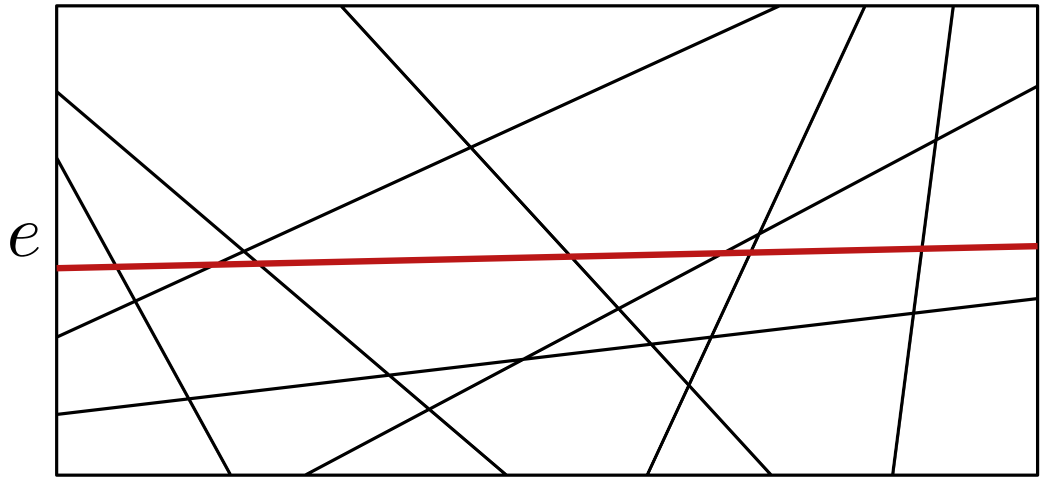
Satz 1: Sei $\mathcal{A}(L)$ ein einfaches Arrangement von n Geraden. Dann hat $\mathcal{A}(L)$ $\binom{n}{2}$ Knoten, n^2 Kanten und $\binom{n}{2} + n + 1$ Zellen.

Datenstruktur für $\mathcal{A}(L)$:

- füge bounding box aller Knoten hinzu (s. Übung) $\rightarrow$ planar eingebetteter Graph G
- doppelt-verkettete Kantenliste für G

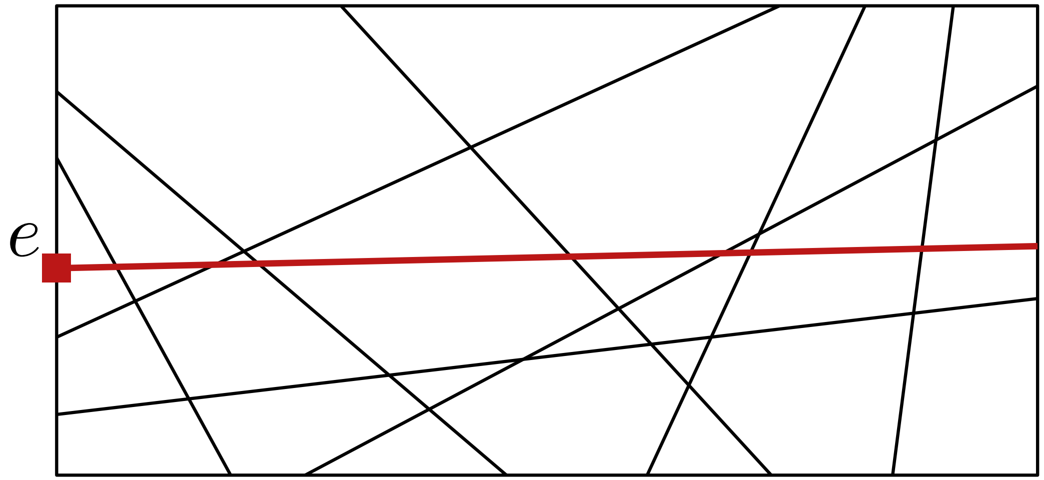
Konstruktion von $\mathcal{A}(L)$

Input: Geraden $L = \{\ell_1, \ldots, \ell_n\}$
Output: DCEL $\mathcal{D}$ für $\mathcal{A}(L)$
initialisiere $\mathcal{D}$ für bounding box B der Knoten von $\mathcal{A}(L)$
for $i \leftarrow 1$ **to** n **do**
    finde linkesten Schnittpunkt von ℓ_i mit Kante e von B
    $f \leftarrow$ innere Zelle inzident zu e
    while $f \neq$ äußere Zelle **do**
        zerteile f, update $\mathcal{D}$ und setze f auf nächste Zelle



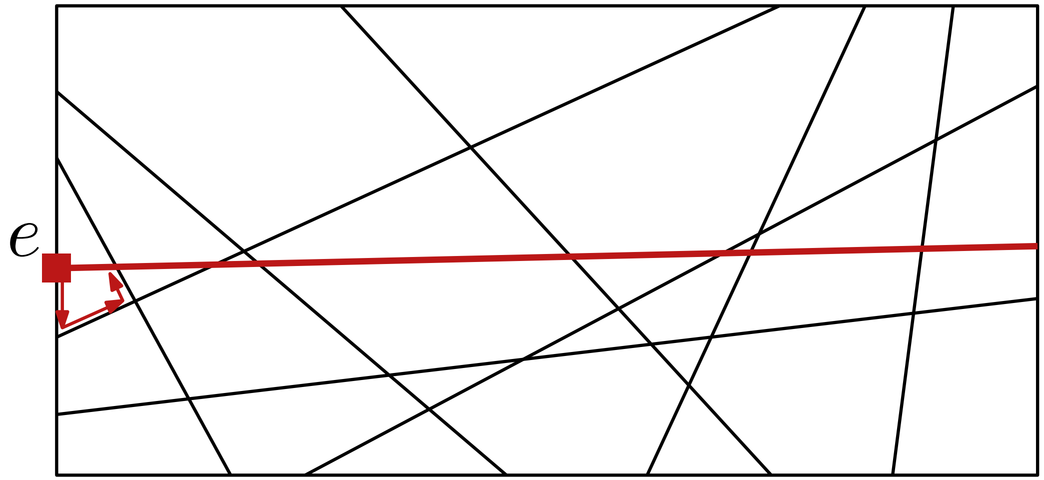
Konstruktion von $\mathcal{A}(L)$

Input: Geraden $L = \{\ell_1, \ldots, \ell_n\}$
Output: DCEL $\mathcal{D}$ für $\mathcal{A}(L)$
initialisiere $\mathcal{D}$ für bounding box B der Knoten von $\mathcal{A}(L)$
for $i \leftarrow 1$ **to** n **do**
  finde linkesten Schnittpunkt von ℓ_i mit Kante e von B
  $f \leftarrow$ innere Zelle inzident zu e
  while $f \neq$ äußere Zelle **do**
    zerteile f, update $\mathcal{D}$ und setze f auf nächste Zelle



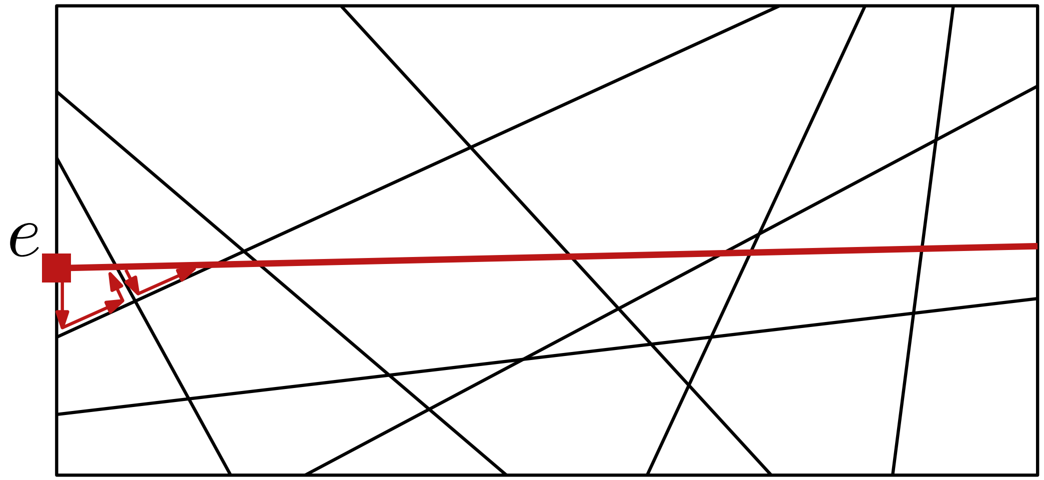
Konstruktion von $\mathcal{A}(L)$

Input: Geraden $L = \{\ell_1, \ldots, \ell_n\}$
Output: DCEL $\mathcal{D}$ für $\mathcal{A}(L)$
initialisiere $\mathcal{D}$ für bounding box B der Knoten von $\mathcal{A}(L)$
for $i \leftarrow 1$ **to** n **do**
  finde linkesten Schnittpunkt von ℓ_i mit Kante e von B
  $f \leftarrow$ innere Zelle inzident zu e
  while $f \neq$ äußere Zelle **do**
    zerteile f, update $\mathcal{D}$ und setze f auf nächste Zelle



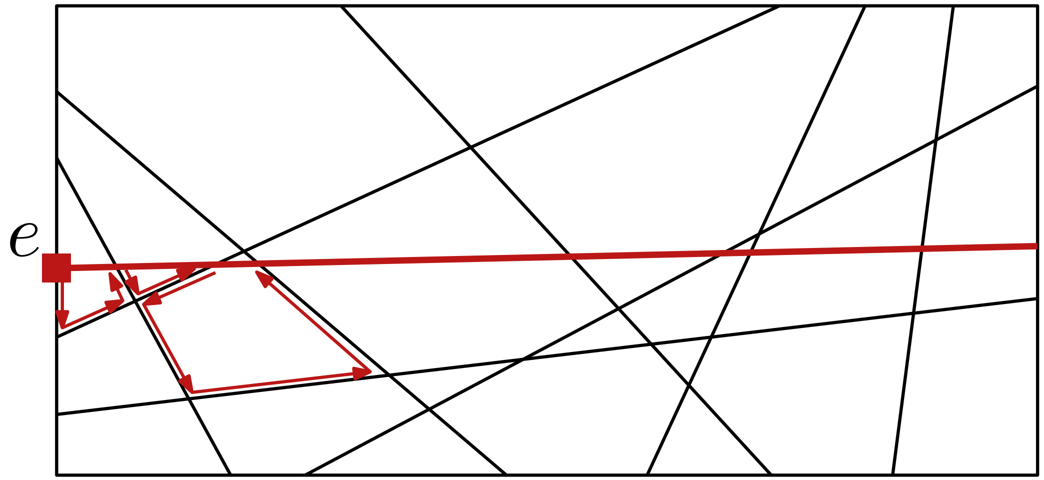
Konstruktion von $\mathcal{A}(L)$

Input: Geraden $L = \{\ell_1, \ldots, \ell_n\}$
Output: DCEL $\mathcal{D}$ für $\mathcal{A}(L)$
initialisiere $\mathcal{D}$ für bounding box B der Knoten von $\mathcal{A}(L)$
for $i \leftarrow 1$ **to** n **do**
    finde linkesten Schnittpunkt von ℓ_i mit Kante e von B
    $f \leftarrow$ innere Zelle inzident zu e
    while $f \neq$ äußere Zelle **do**
        zerteile f, update $\mathcal{D}$ und setze f auf nächste Zelle



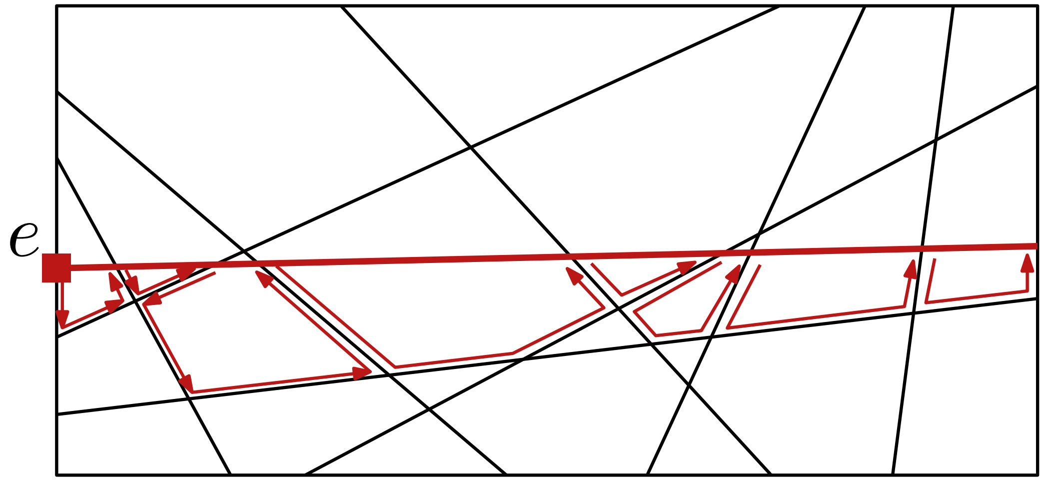
Konstruktion von $\mathcal{A}(L)$

Input: Geraden $L = \{\ell_1, \ldots, \ell_n\}$
Output: DCEL $\mathcal{D}$ für $\mathcal{A}(L)$
initialisiere $\mathcal{D}$ für bounding box B der Knoten von $\mathcal{A}(L)$
for $i \leftarrow 1$ **to** n **do**
  finde linkesten Schnittpunkt von ℓ_i mit Kante e von B
  $f \leftarrow$ innere Zelle inzident zu e
  while $f \neq$ äußere Zelle **do**
    zerteile f, update $\mathcal{D}$ und setze f auf nächste Zelle



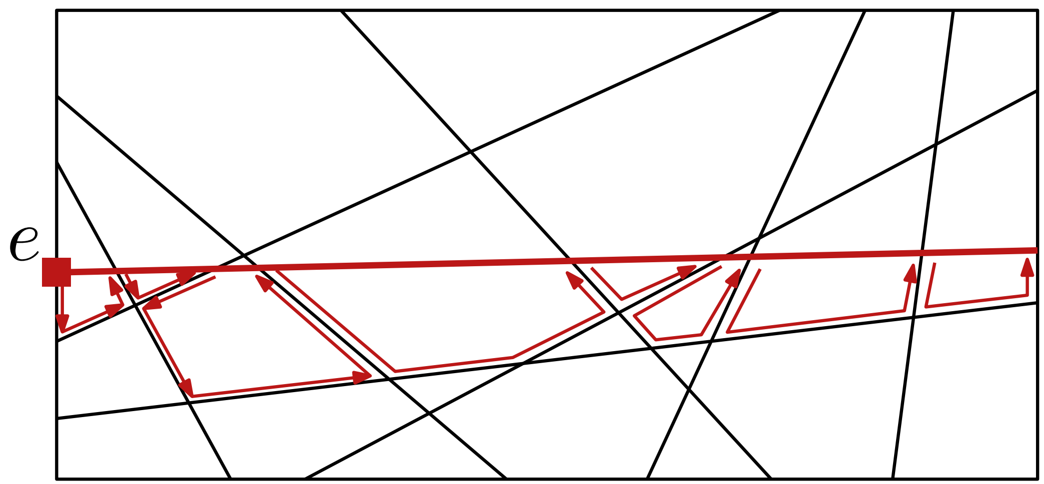
Konstruktion von $\mathcal{A}(L)$

Input: Geraden $L = \{\ell_1, \ldots, \ell_n\}$
Output: DCEL $\mathcal{D}$ für $\mathcal{A}(L)$
initialisiere $\mathcal{D}$ für bounding box B der Knoten von $\mathcal{A}(L)$
for $i \leftarrow 1$ **to** n **do**
  finde linkesten Schnittpunkt von ℓ_i mit Kante e von B
  $f \leftarrow$ innere Zelle inzident zu e
  while $f \neq$ äußere Zelle **do**
    zerteile f, update $\mathcal{D}$ und setze f auf nächste Zelle



Konstruktion von $\mathcal{A}(L)$

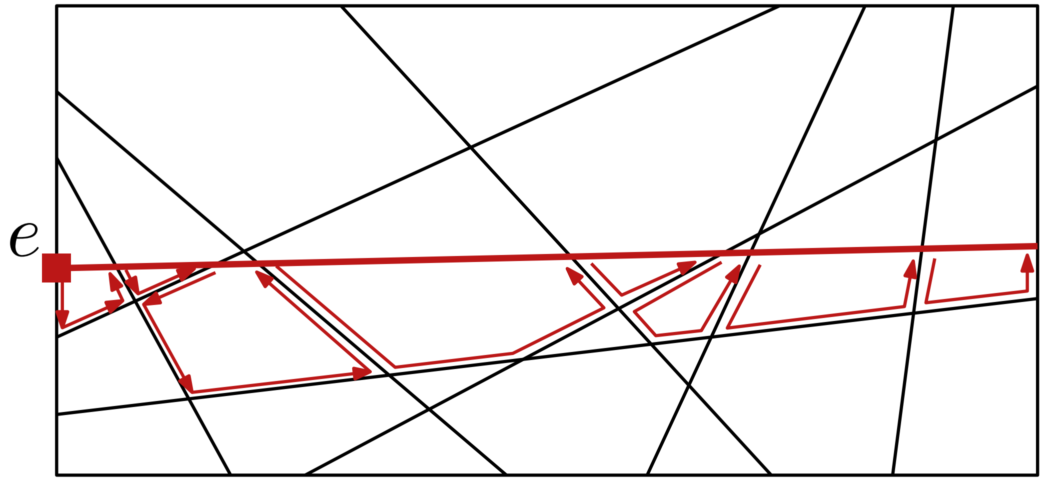
Input: Geraden $L = \{\ell_1, \ldots, \ell_n\}$
Output: DCEL $\mathcal{D}$ für $\mathcal{A}(L)$
initialisiere $\mathcal{D}$ für bounding box B der Knoten von $\mathcal{A}(L)$
for $i \leftarrow 1$ **to** n **do**
  finde linkesten Schnittpunkt von ℓ_i mit Kante e von B
  $f \leftarrow$ innere Zelle inzident zu e
  while $f \neq$ äußere Zelle **do**
    zerteile f, update $\mathcal{D}$ und setze f auf nächste Zelle



Laufzeit?

Konstruktion von $\mathcal{A}(L)$

Input: Geraden $L = \{\ell_1, \dots, \ell_n\}$
Output: DCEL $\mathcal{D}$ für $\mathcal{A}(L)$
initialisiere $\mathcal{D}$ für bounding box B der Knoten von $\mathcal{A}(L)$
for $i \leftarrow 1$ **to** n **do**
    finde linkesten Schnittpunkt von ℓ_i mit Kante e von B
    $f \leftarrow$ innere Zelle inzident zu e
    while $f \neq$ äußere Zelle **do**
        zerteile f, update $\mathcal{D}$ und setze f auf nächste Zelle



Laufzeit?

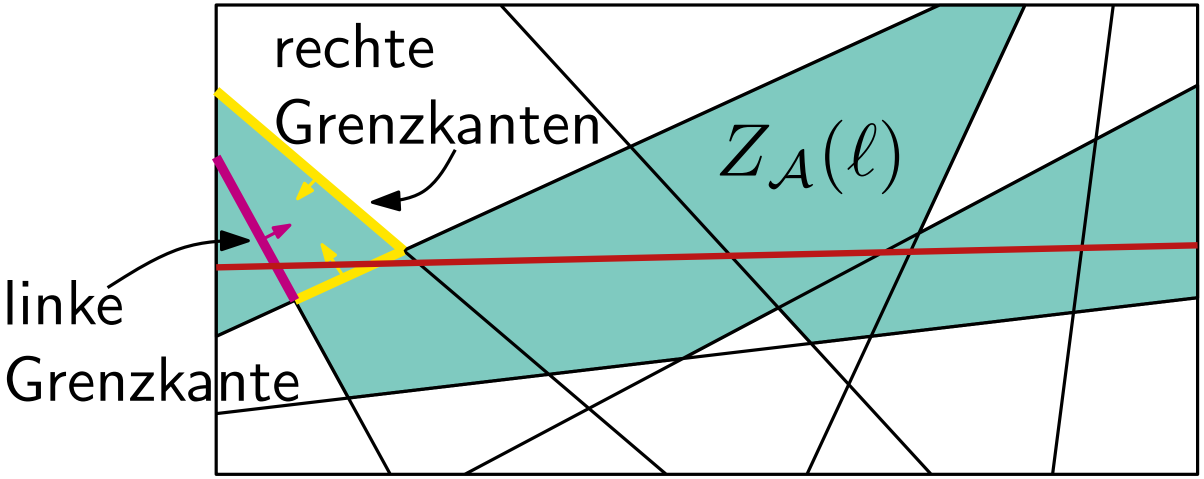
- bounding box: $O(n^2)$
- Startpunkt ℓ_i: $O(i)$
- **while**-Schleife: $O(|\text{roter Pfad}|)$

Zonensatz

Def.: Für ein Arrangement $\mathcal{A}(L)$ und eine Gerade $\ell \notin L$ ist die **Zone** $Z_{\mathcal{A}}(\ell)$ die Menge aller Zellen von $\mathcal{A}(L)$, deren Abschluss ℓ schneidet.

Zonensatz

Def.: Für ein Arrangement $\mathcal{A}(L)$ und eine Gerade $\ell \notin L$ ist die **Zone** $Z_{\mathcal{A}}(\ell)$ die Menge aller Zellen von $\mathcal{A}(L)$, deren Abschluss ℓ schneidet.

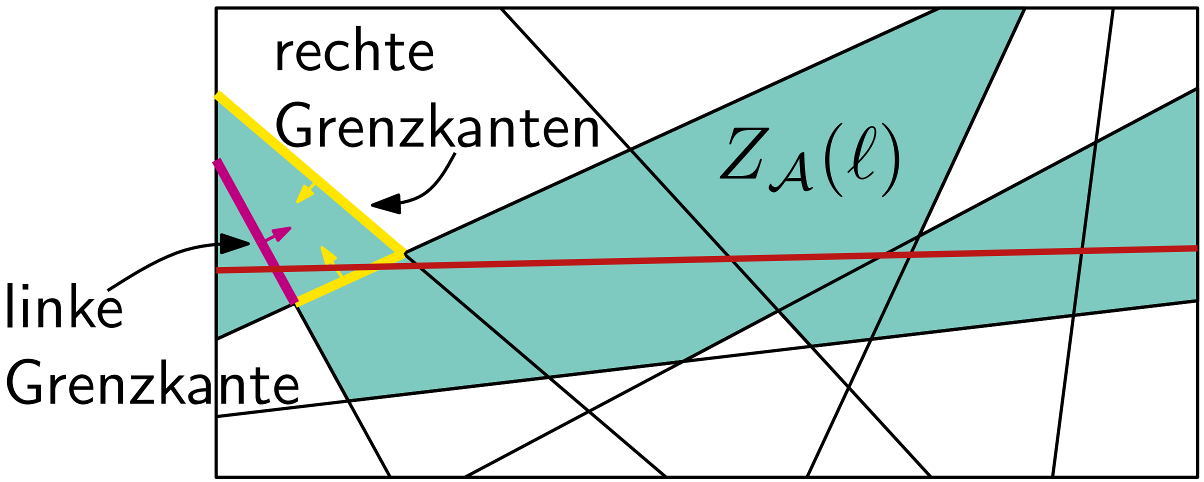


Wie viele Zellen enthält $Z_{\mathcal{A}}(\ell)$?

Wie viele Kanten enthält $Z_{\mathcal{A}}(\ell)$?

Zonensatz

Def.: Für ein Arrangement $\mathcal{A}(L)$ und eine Gerade $\ell \notin L$ ist die **Zone** $Z_{\mathcal{A}}(\ell)$ die Menge aller Zellen von $\mathcal{A}(L)$, deren Abschluss ℓ schneidet.



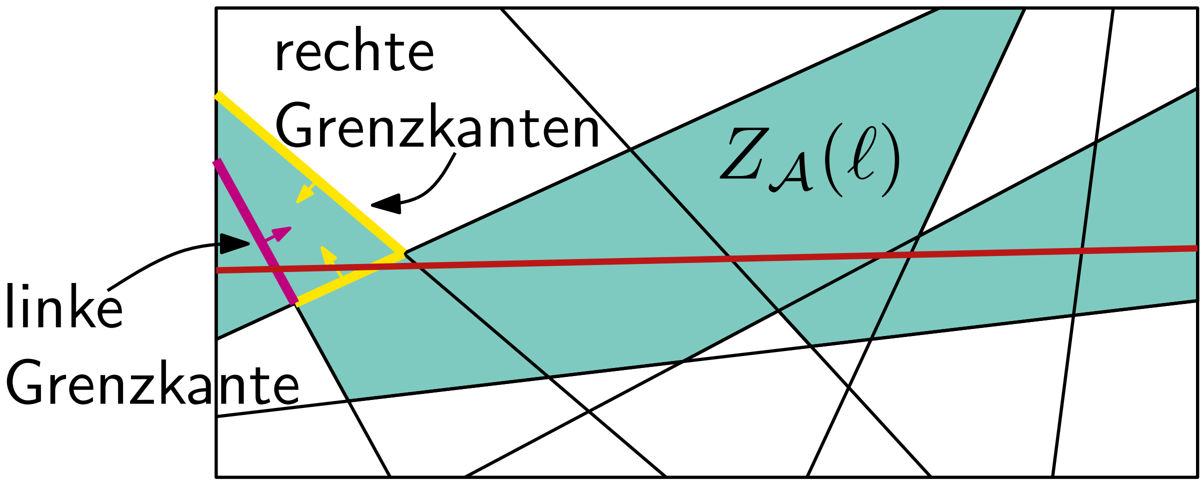
Wie viele Zellen enthält $Z_{\mathcal{A}}(\ell)$?

Wie viele Kanten enthält $Z_{\mathcal{A}}(\ell)$?

Satz 2: Für ein Arrangement $\mathcal{A}(L)$ von n Geraden in der Ebene und eine Gerade $\ell \notin L$ besteht $Z_{\mathcal{A}}(\ell)$ aus höchstens $10n$ Kanten.

Zonensatz

Def.: Für ein Arrangement $\mathcal{A}(L)$ und eine Gerade $\ell \notin L$ ist die **Zone** $Z_{\mathcal{A}}(\ell)$ die Menge aller Zellen von $\mathcal{A}(L)$, deren Abschluss ℓ schneidet.



Wie viele Zellen enthält $Z_{\mathcal{A}}(\ell)$?

Wie viele Kanten enthält $Z_{\mathcal{A}}(\ell)$?

Satz 2: Für ein Arrangement $\mathcal{A}(L)$ von n Geraden in der Ebene und eine Gerade $\ell \notin L$ besteht $Z_{\mathcal{A}}(\ell)$ aus höchstens $10n$ Kanten.

Satz 3: Das Arrangement $\mathcal{A}(L)$ einer Menge von n Geraden kann in $O(n^2)$ Zeit und Platz konstruiert werden.

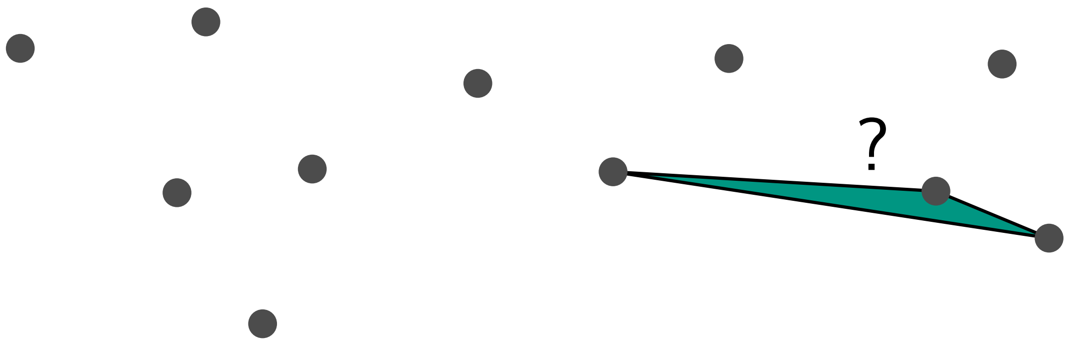
Zwischenfrage:

Wie testet man ob n Punkte in allgemeiner Lage sind?

Wie findet man eine maximal große Menge kollinearer Punkte?

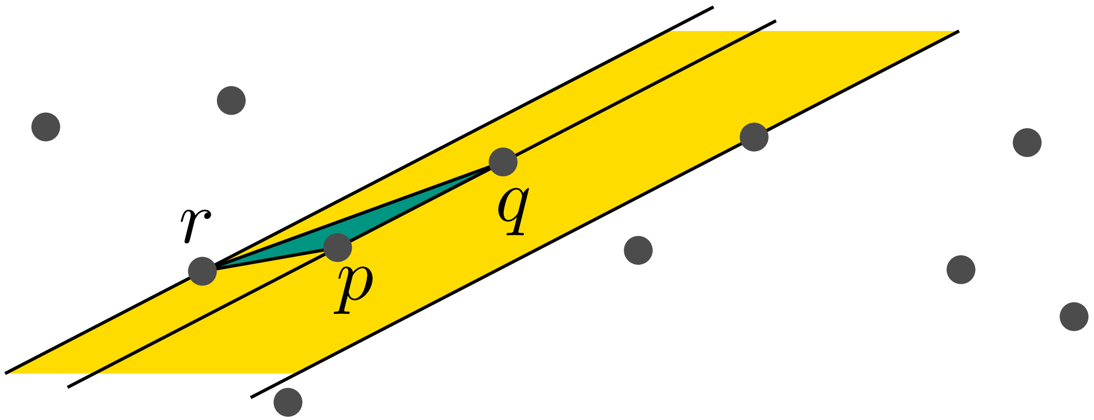
Kleinstes Dreieck

Gegeben eine Menge P von n Punkten in $\mathbb{R}^2$, finde ein flächenminimales Dreieck Δpqr mit $p, q, r \in P$.



Kleinstes Dreieck

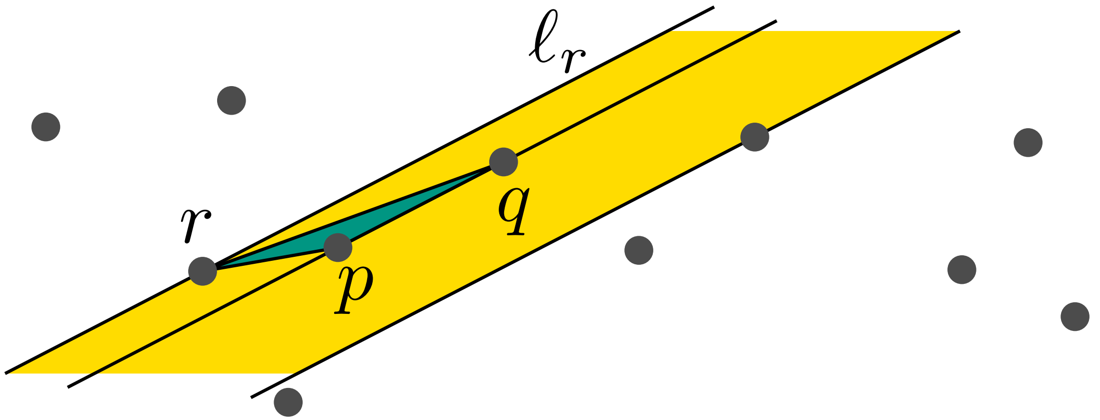
Gegeben eine Menge P von n Punkten in $\mathbb{R}^2$, finde ein flächenminimales Dreieck Δpqr mit $p, q, r \in P$.



Seien $p, q \in P$. Der Punkt $r \in P \setminus \{p, q\}$, der Δpqr minimiert, liegt auf dem Rand des größten leeren Korridors entlang pq.

Kleinstes Dreieck

Gegeben eine Menge P von n Punkten in $\mathbb{R}^2$, finde ein flächenminimales Dreieck Δpqr mit $p, q, r \in P$.

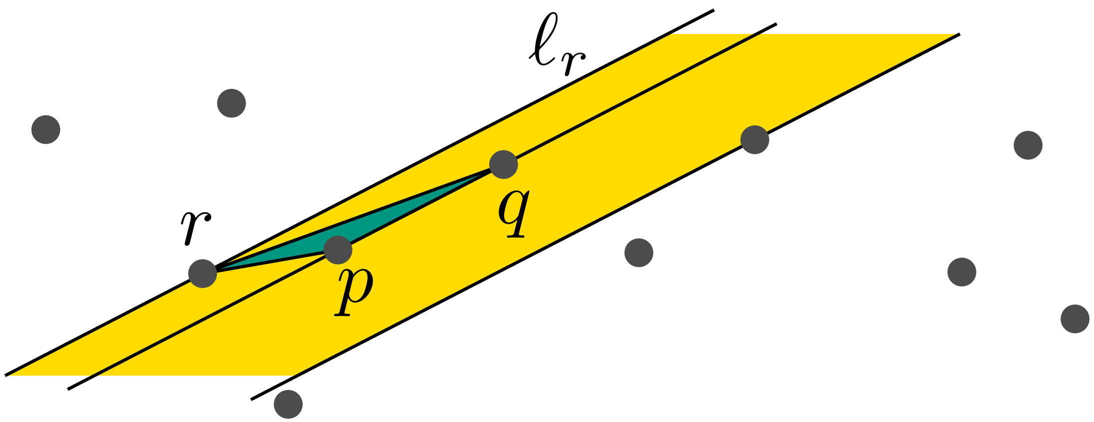


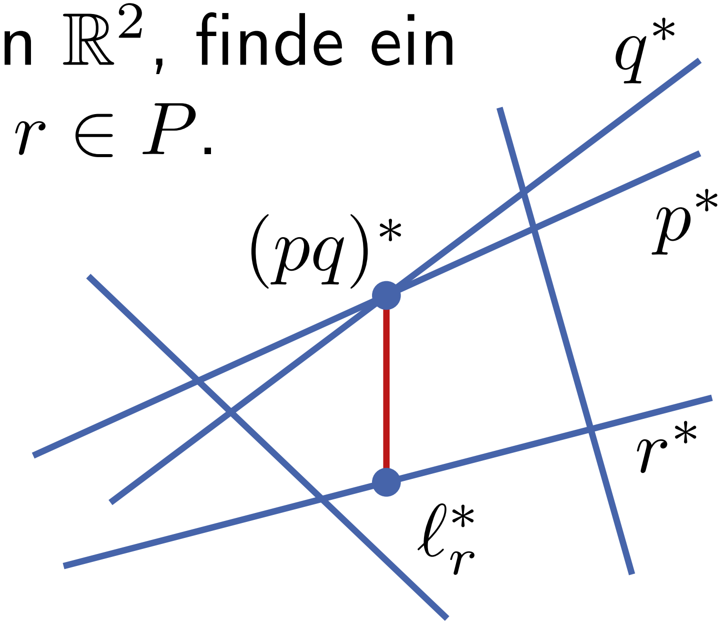
Seien $p, q \in P$. Der Punkt $r \in P \setminus \{p, q\}$, der Δpqr minimiert, liegt auf dem Rand des größten leeren Korridors entlang pq.

Zwischen pq und der Geraden ℓ_r durch r parallel zu pq liegt kein weiterer Punkt aus P.

Kleinstes Dreieck

Gegeben eine Menge P von n Punkten in $\mathbb{R}^2$, finde ein flächenminimales Dreieck Δpqr mit $p, q, r \in P$.





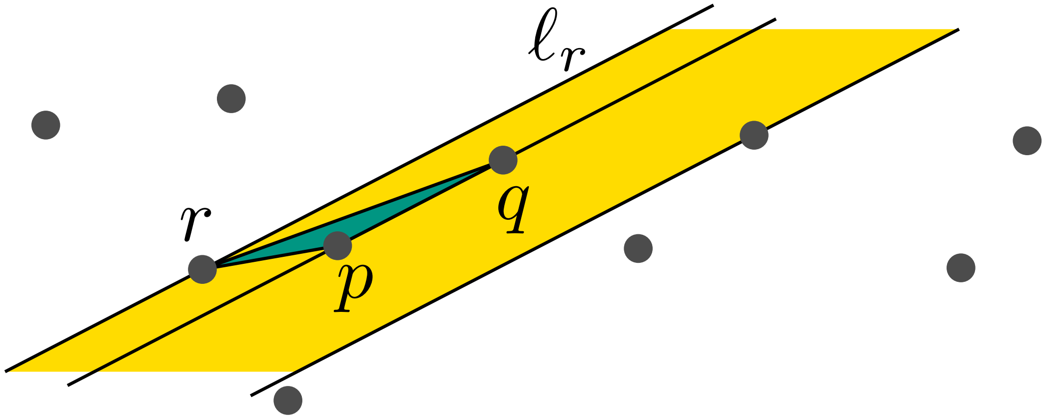
Seien $p, q \in P$. Der Punkt $r \in P \setminus \{p, q\}$, der Δpqr minimiert, liegt auf dem Rand des größten leeren Korridors entlang pq.

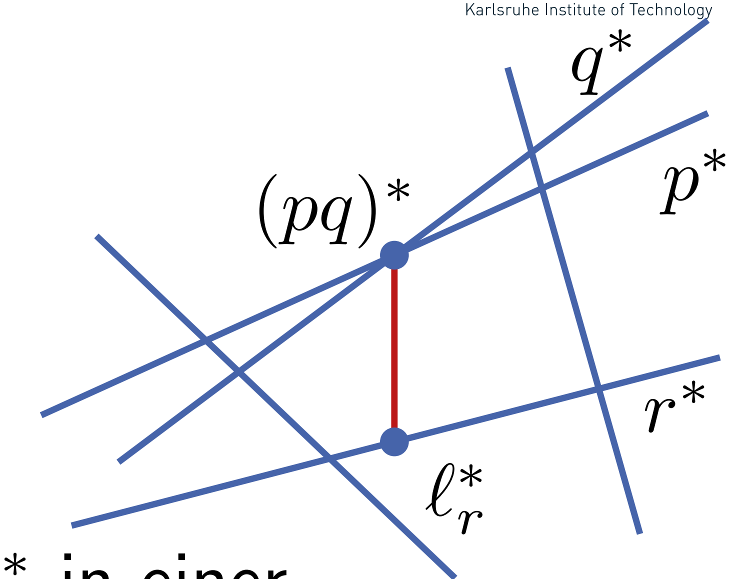
Zwischen pq und der Geraden ℓ_r durch r parallel zu pq liegt kein weiterer Punkt aus P.

Im Dualen:

- ℓ_r^* liegt auf r^*
- ℓ_r^* und $(pq)^*$ haben gleiche x-Koordinate
- keine Gerade $p^* \in P^*$ schneidet $\overline{\ell_r^* (pq)^*}$

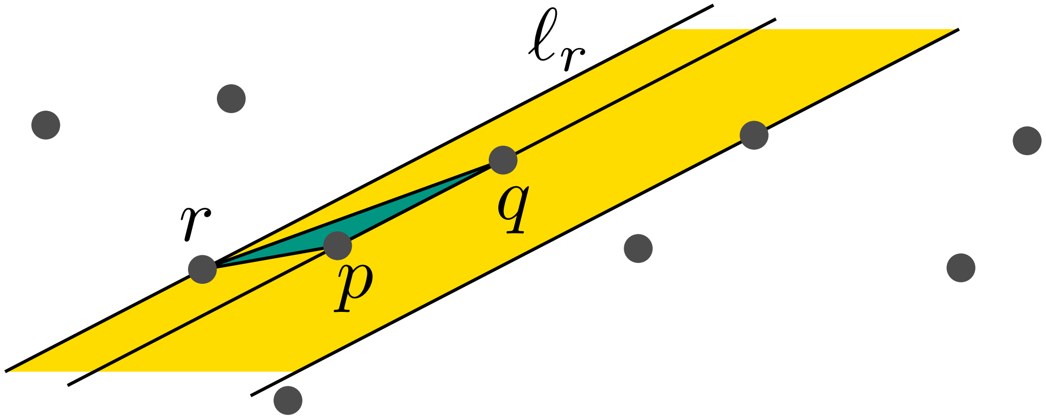
Berechnung im Dualen

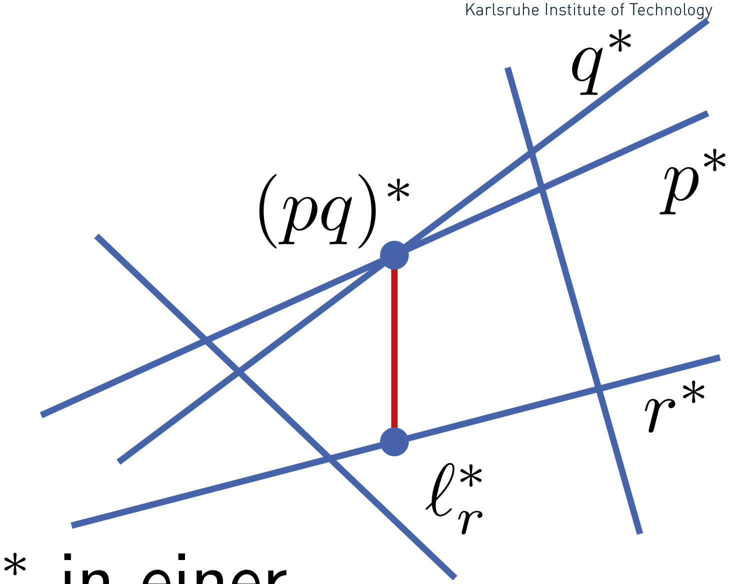




- ℓ_r^* liegt vertikal über oder unter $(pq)^*$ in einer gemeinsamen Zelle von $\mathcal{A}(P^*) \Rightarrow$ nur zwei Kandidaten

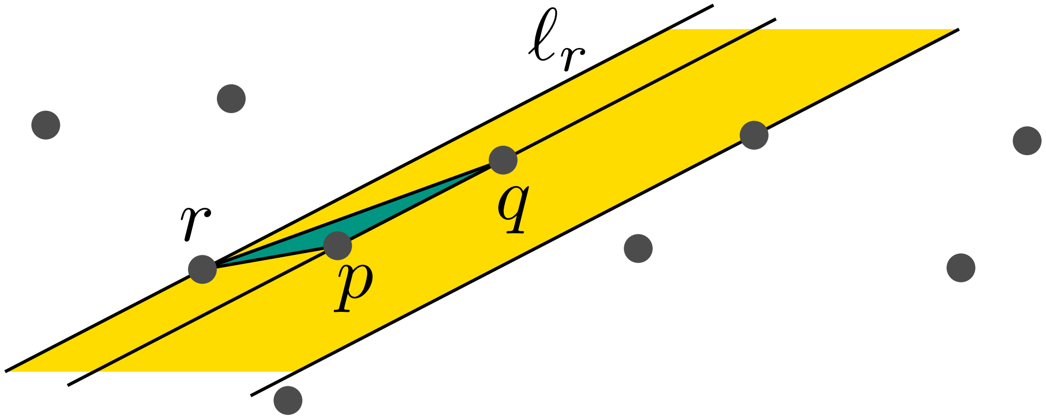
Berechnung im Dualen

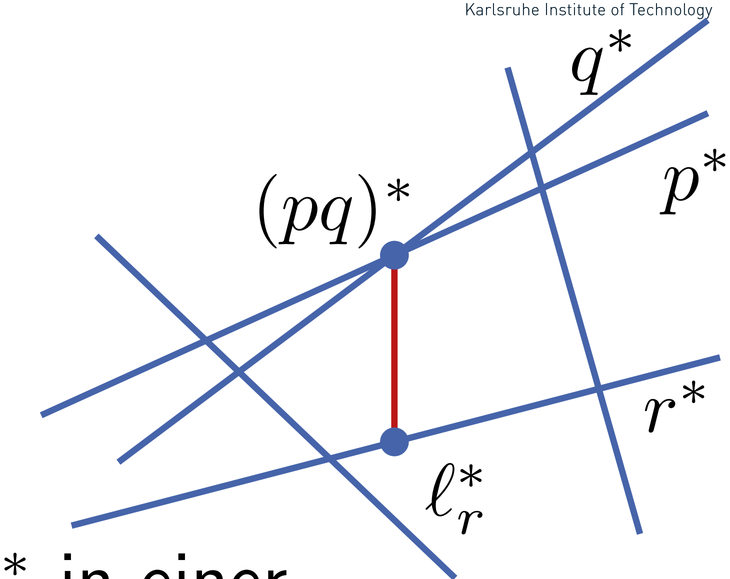




- ℓ_r^* liegt vertikal über oder unter $(pq)^*$ in einer gemeinsamen Zelle von $\mathcal{A}(P^*)$ $\Rightarrow$ nur zwei Kandidaten
- Berechne in $O(n^2)$ Zeit das Arrangement $\mathcal{A}(P^*)$

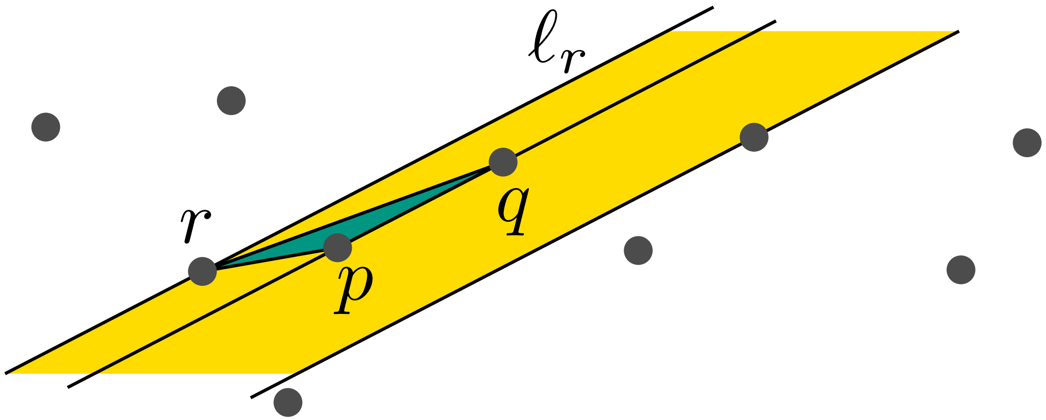
Berechnung im Dualen

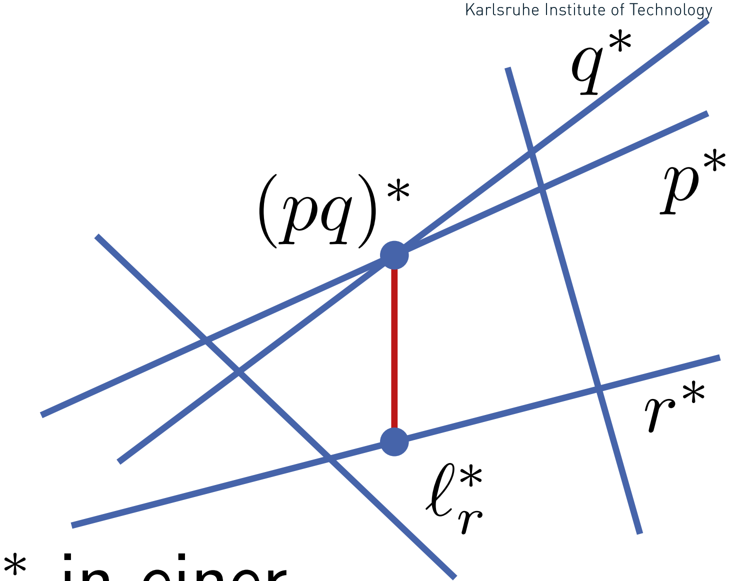




- ℓ_r^* liegt vertikal über oder unter $(pq)^*$ in einer gemeinsamen Zelle von $\mathcal{A}(P^*) \Rightarrow$ nur zwei Kandidaten
- Berechne in $O(n^2)$ Zeit das Arrangement $\mathcal{A}(P^*)$
- Berechne in jeder Zelle die vertikalen Nachbarn der Knoten $\rightarrow$ Zeit linear in Zellenkomplexität wie?

Berechnung im Dualen





- ℓ_r^* liegt vertikal über oder unter $(pq)^*$ in einer gemeinsamen Zelle von $\mathcal{A}(P^*)$ $\Rightarrow$ nur zwei Kandidaten
- Berechne in $O(n^2)$ Zeit das Arrangement $\mathcal{A}(P^*)$
- Berechne in jeder Zelle die vertikalen Nachbarn der Knoten $\rightarrow$ Zeit linear in Zellenkomplexität wie?
- für alle $O(n^2)$ Kandidaten-Tripel $(pq)^*r^*$ berechne in $O(1)$ Zeit Fläche Δpqr

Berechnung im Dualen

- ℓ_r^* liegt vertikal über oder unter $(pq)^*$ in einer gemeinsamen Zelle von $\mathcal{A}(P^*)$ $\Rightarrow$ nur zwei Kandidaten
- Berechne in $O(n^2)$ Zeit das Arrangement $\mathcal{A}(P^*)$
- Berechne in jeder Zelle die vertikalen Nachbarn der Knoten $\rightarrow$ Zeit linear in Zellenkomplexität wie?
- für alle $O(n^2)$ Kandidaten-Tripel $(pq)^*r^*$ berechne in $O(1)$ Zeit Fläche Δpqr
- findet Minimum in insgesamt $O(n^2)$ Zeit

Weitere Probleme

- Gegeben n Strecken in der Ebene, finde eine maximale stabbing-Gerade, d.h. eine Gerade, die möglichst viele Strecken schneidet.

Weitere Probleme

- Gegeben n Strecken in der Ebene, finde eine maximale stabbing-Gerade, d.h. eine Gerade, die möglichst viele Strecken schneidet.

- Zwei Diebe haben eine Kette aus Diamanten und Smaragden gestohlen und möchten Sie teilen, ohne sie zu sehr zu zerstören. Wieviele Schnitte sind nötig?

Weitere Probleme

- Gegeben n Strecken in der Ebene, finde eine maximale stabbing-Gerade, d.h. eine Gerade, die möglichst viele Strecken schneidet.

- Zwei Diebe haben eine Kette aus Diamanten und Smaragden gestohlen und möchten Sie teilen, ohne sie zu sehr zu zerstören. Wieviele Schnitte sind nötig?

Satz 4: Seien S, D zwei endliche Punktmengen in der Ebene. Dann gibt es eine Gerade ℓ, die gleichzeitig S und D halbiert.

Diskussion

Dualität ist ein sehr nützliches Werkzeug in der algorithmischen Geometrie!

Diskussion

Dualität ist ein sehr nützliches Werkzeug in der algorithmischen Geometrie!

Kann man die Dualität auch in höheren Dimensionen nutzen?

Diskussion

Dualität ist ein sehr nützliches Werkzeug in der algorithmischen Geometrie!

Kann man die Dualität auch in höheren Dimensionen nutzen?

Ja, auch zwischen d-dimensionalen Punkten und Hyperebenen gibt es eine entsprechende inzidenz- und ordnungserhaltende Dualitätsabbildung.

Diskussion

Dualität ist ein sehr nützliches Werkzeug in der algorithmischen Geometrie!

Kann man die Dualität auch in höheren Dimensionen nutzen?

Ja, auch zwischen d-dimensionalen Punkten und Hyperebenen gibt es eine entsprechende inzidenz- und ordnungserhaltende Dualitätsabbildung.

Wie steht es um höherdimensionale Arrangements?

Diskussion

Dualität ist ein sehr nützliches Werkzeug in der algorithmischen Geometrie!

Kann man die Dualität auch in höheren Dimensionen nutzen?

Ja, auch zwischen d-dimensionalen Punkten und Hyperebenen gibt es eine entsprechende inzidenz- und ordnungserhaltende Dualitätsabbildung.

Wie steht es um höherdimensionale Arrangements?

Das Arrangement von n Hyperebenen im $\mathbb{R}^d$ hat Komplexität $\Theta(n^d)$. Eine Verallgemeinerung des Zonensatzes führt zu einem $O(n^d)$-Zeit Algorithmus.