Übung Algorithmische Geometrie
Dualität

LEHRSTUHL FÜR ALGORITHMIK I · INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK · FAKULTÄT FÜR INFORMATIK

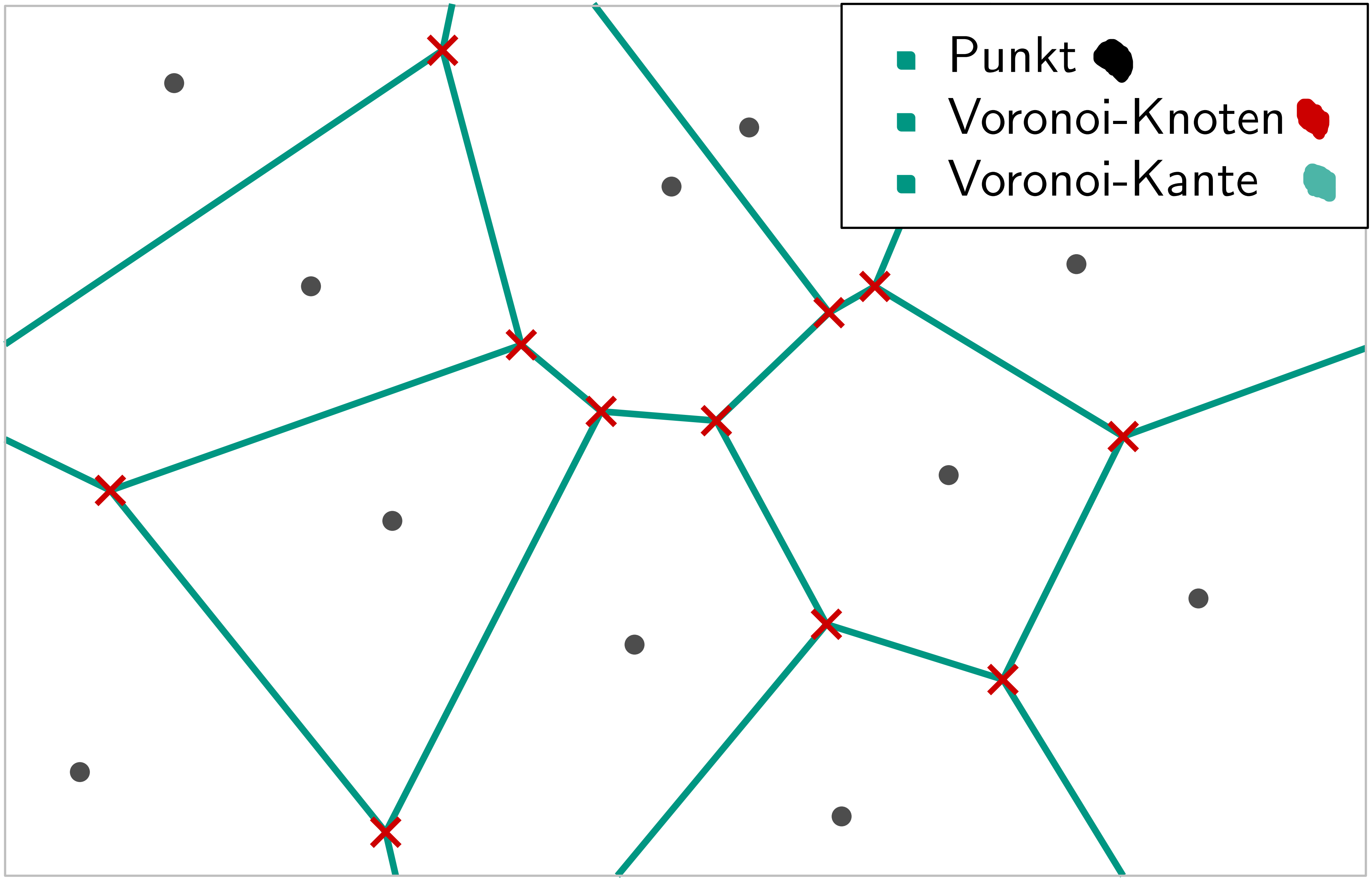
Andreas Gemsa
21.06.2012

Übersicht

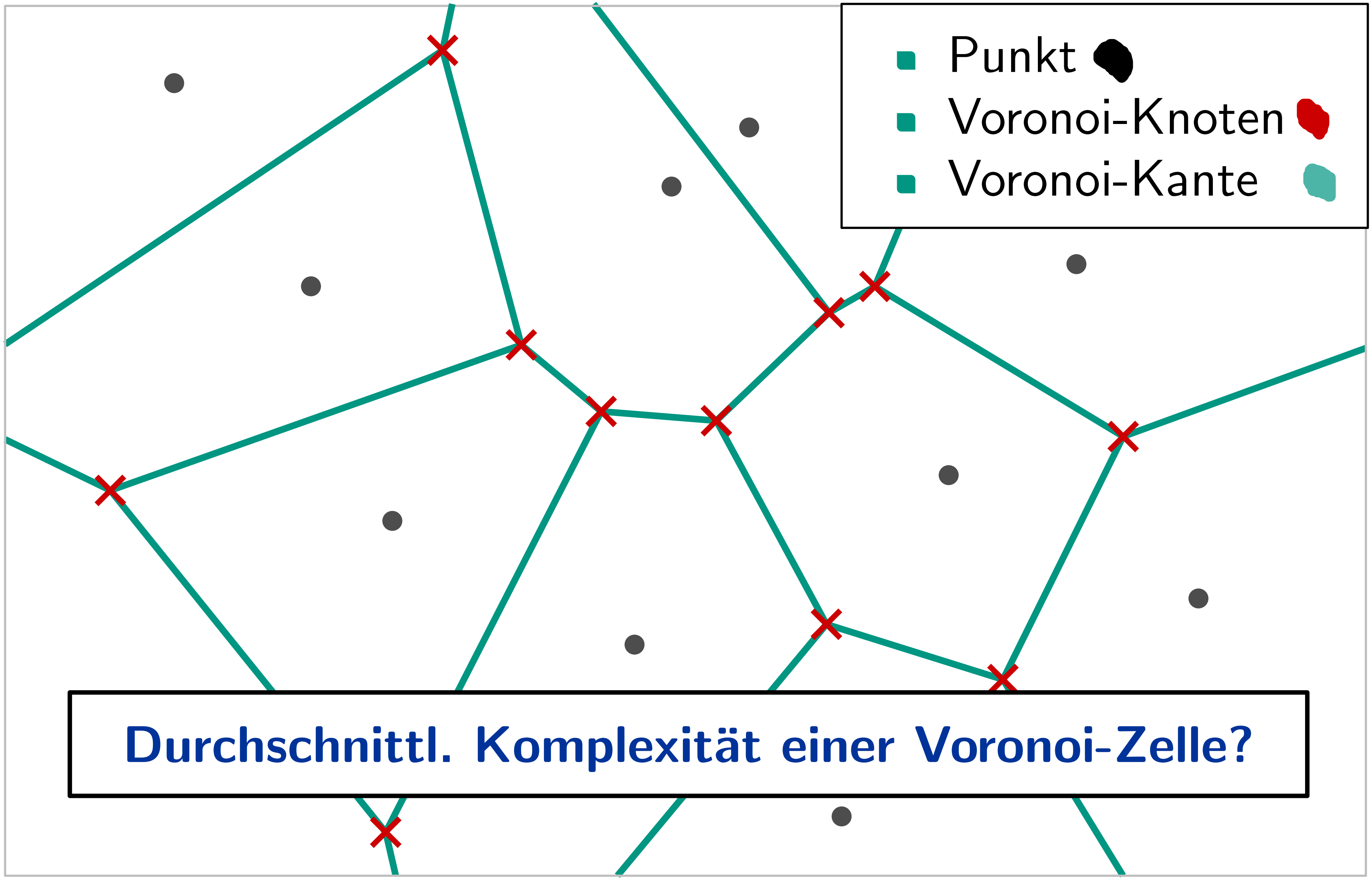
Nachtrag

Übungsblatt 09 - Dualität

Aufgabe 1



Aufgabe 1


Punkt
Voronoi-Knoten
Voronoi-Kante
Durchschnittl. Komplexität einer Voronoi-Zelle?

Eigenschaften

VL

Satz 1: Sei $P \subset \mathbb{R}^2$ eine Menge von n Punkten. Sind alle Punkte kollinear, besteht $\mathrm{Vor}(P)$ aus $n-1$ parallelen Geraden. Sonst ist $\mathrm{Vor}(P)$ zusammenhängend und die Kanten sind Strecken oder Halbgeraden.

Finde eine Menge P, so dass $\mathrm{Vor}(P)$ eine Zelle linearer Komplexität hat.

Kann das für (fast) jede Zelle passieren?

Satz 2: Sei $P \subset \mathbb{R}^2$ Menge von n Punkten. $\mathrm{Vor}(P)$ besteht aus höchstens $2n-5$ Knoten und $3n-6$ Kanten.

Aufgabe 1

Zeige:
Durschnittliche #Kanten pro Voronoi-Zelle ist kleiner als 6.

Satz 2: Sei $P \subset \mathbb{R}^2$ Menge von n Punkten. $\mathrm{Vor}(P)$ besteht aus höchstens $2n-5$ Knoten und $3n-6$ Kanten.

Aufgabe 1

Zeige:
Durschnittliche $\#$Kanten pro Voronoi-Zelle ist kleiner als 6.

$$3n - 6$$

Satz 2: Sei $P \subset \mathbb{R}^2$ Menge von n Punkten. $\mathrm{Vor}(P)$ besteht aus höchstens $2n - 5$ Knoten und $3n - 6$ Kanten.

Aufgabe 1

Zeige:
Durchschnittliche $\#$Kanten pro Voronoi-Zelle ist kleiner als 6.

$$2(3n-6)$$

Satz 2: Sei $P \subset \mathbb{R}^2$ Menge von n Punkten. $\mathrm{Vor}(P)$ besteht aus höchstens $2n-5$ Knoten und $3n-6$ Kanten.

Aufgabe 1

Zeige:
Durschnittliche #Kanten pro Voronoi-Zelle ist kleiner als 6.

$$2(3n-6)/n$$

Satz 2: Sei $P \subset \mathbb{R}^2$ Menge von n Punkten. $\mathrm{Vor}(P)$ besteht aus höchstens $2n-5$ Knoten und $3n-6$ Kanten.

Aufgabe 1

Zeige:
Durschnittliche #Kanten pro Voronoi-Zelle ist kleiner als 6.

$$2(3n-6)/n = 6 - 12/n$$

Satz 2: Sei $P \subset \mathbb{R}^2$ Menge von n Punkten. $\mathrm{Vor}(P)$ besteht aus höchstens $2n-5$ Knoten und $3n-6$ Kanten.

Aufgabe 1

Zeige:
Durchschnittliche #Kanten pro Voronoi-Zelle ist kleiner als 6.

$$2(3n-6)/n = 6 - 12/n < 6$$

$\square$

Satz 2: Sei $P \subset \mathbb{R}^2$ Menge von n Punkten. $\mathrm{Vor}(P)$ besteht aus höchstens $2n-5$ Knoten und $3n-6$ Kanten.

Übersicht

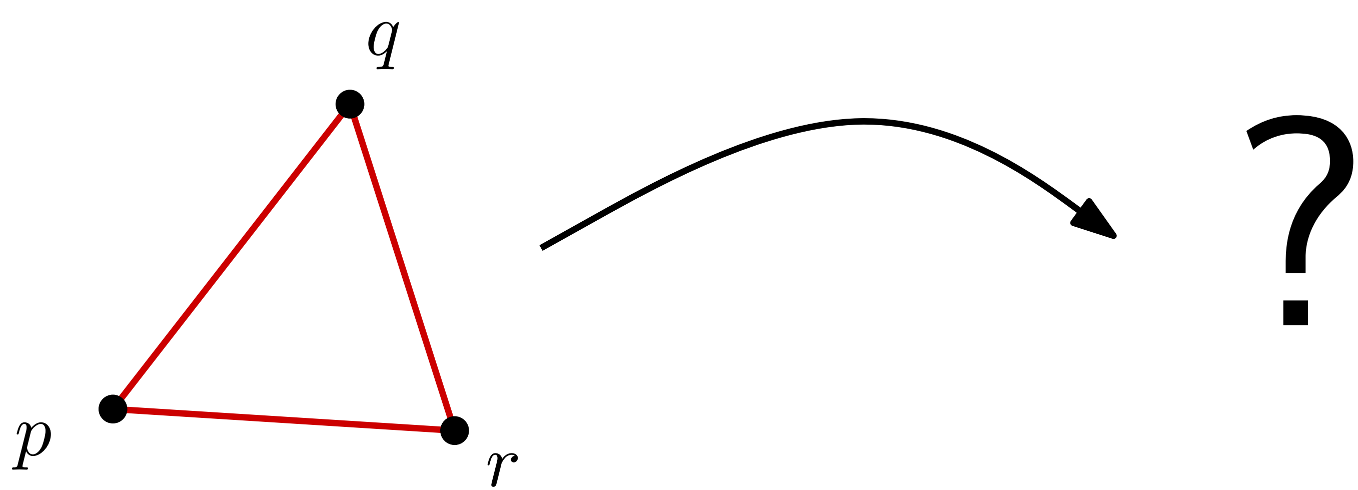
Nachtrag

Übungsblatt 09 - Dualität

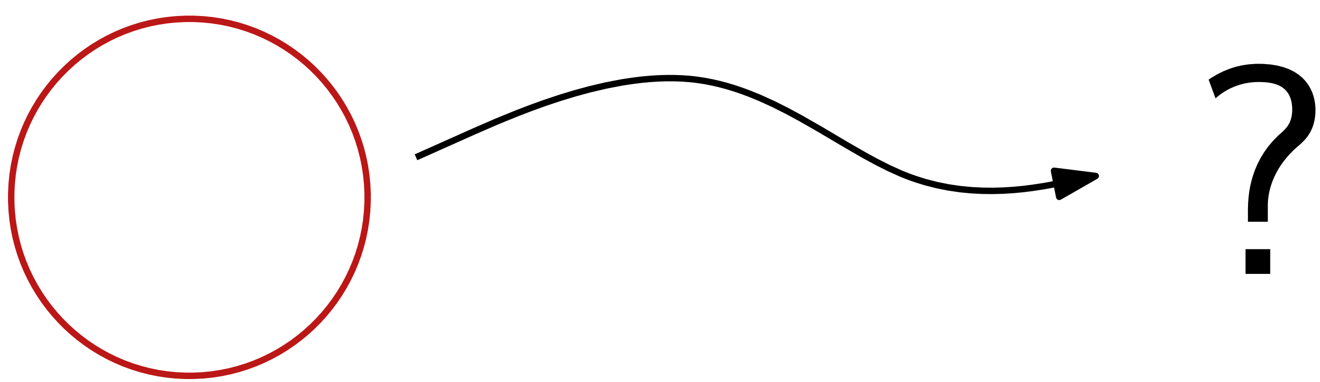
Aufgabe 1

Problem:
Was ist dual zu:

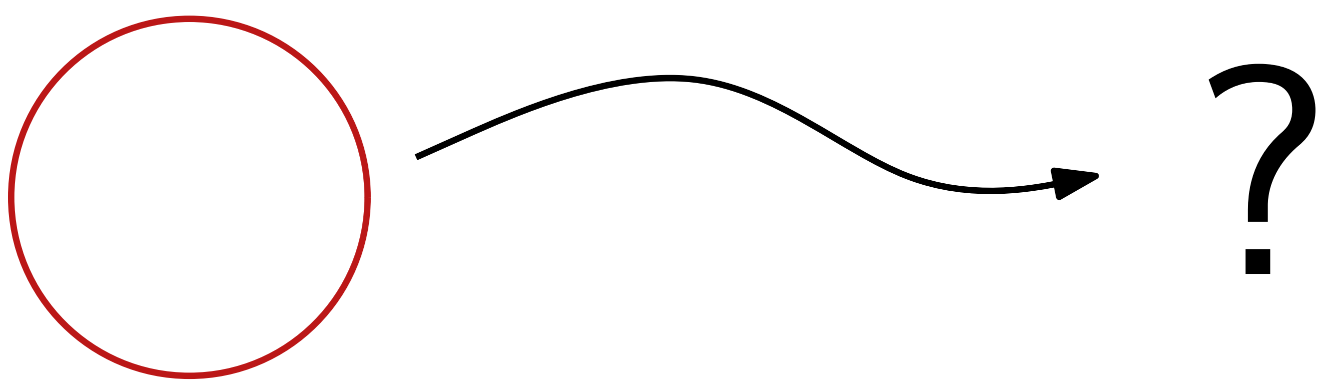
- Dreieck



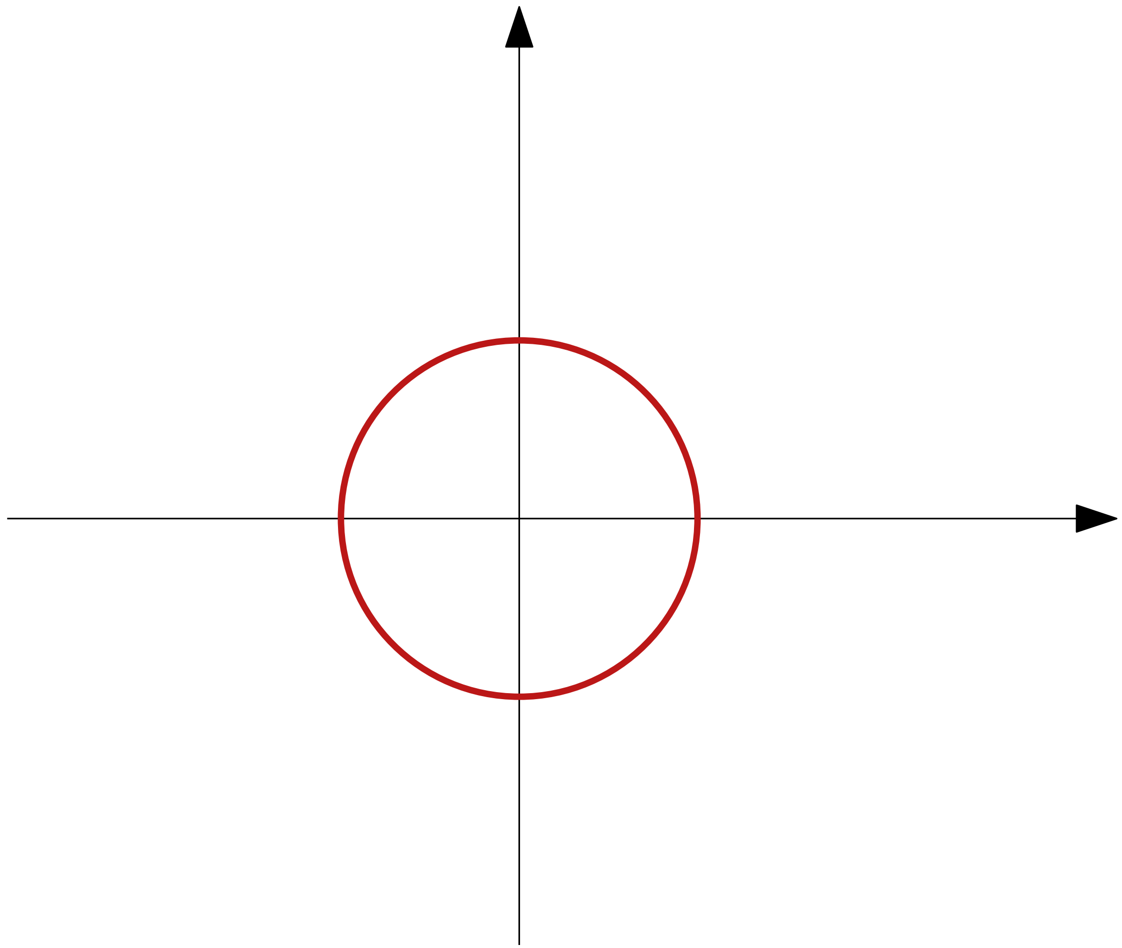
- Kreis



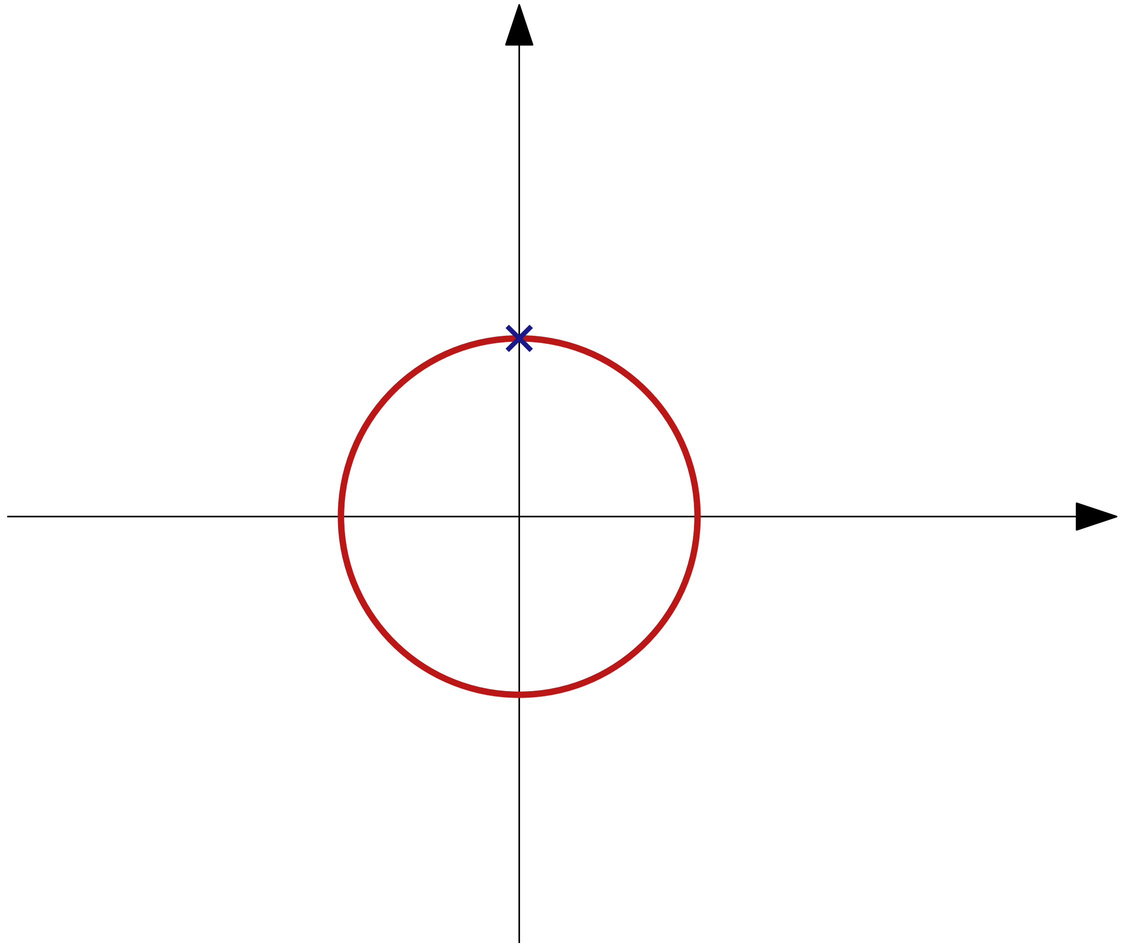
Aufgabe 1



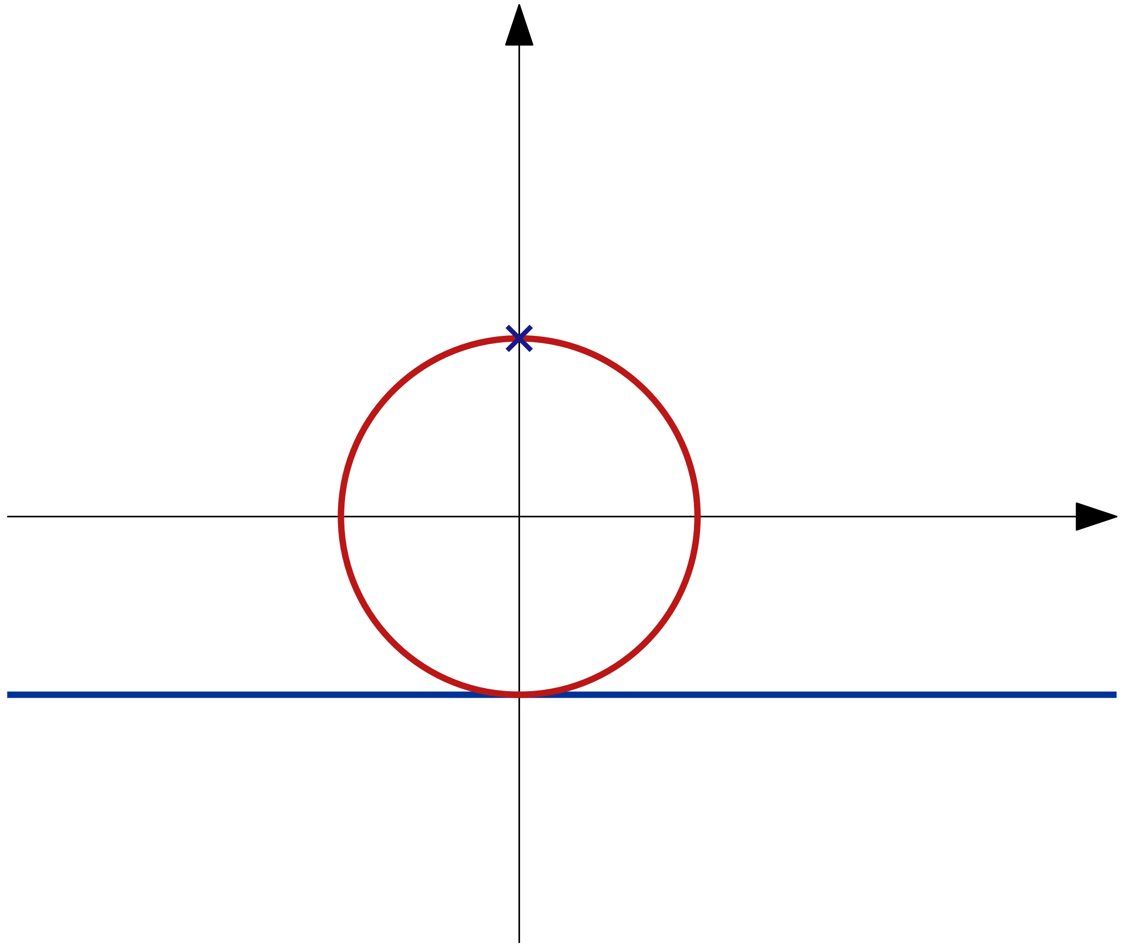
Aufgabe 1



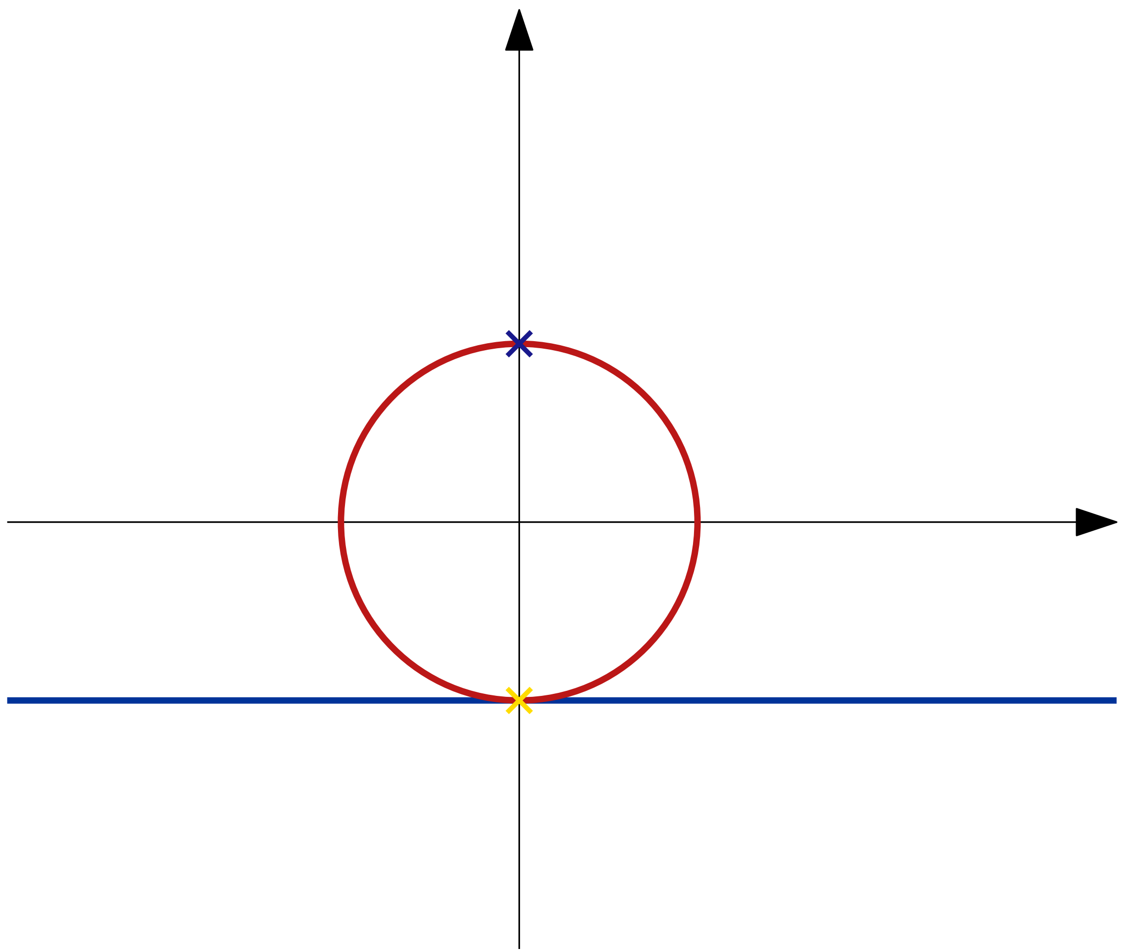
Aufgabe 1



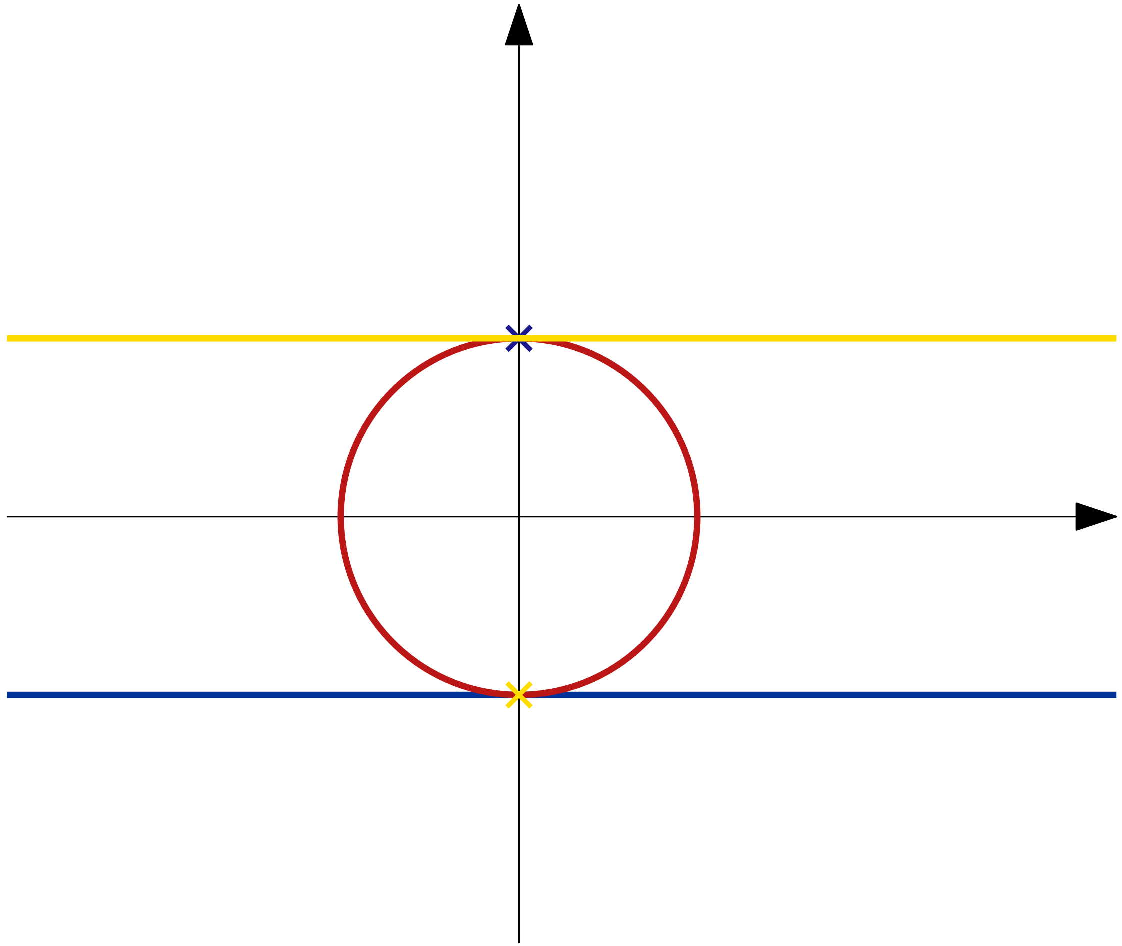
Aufgabe 1



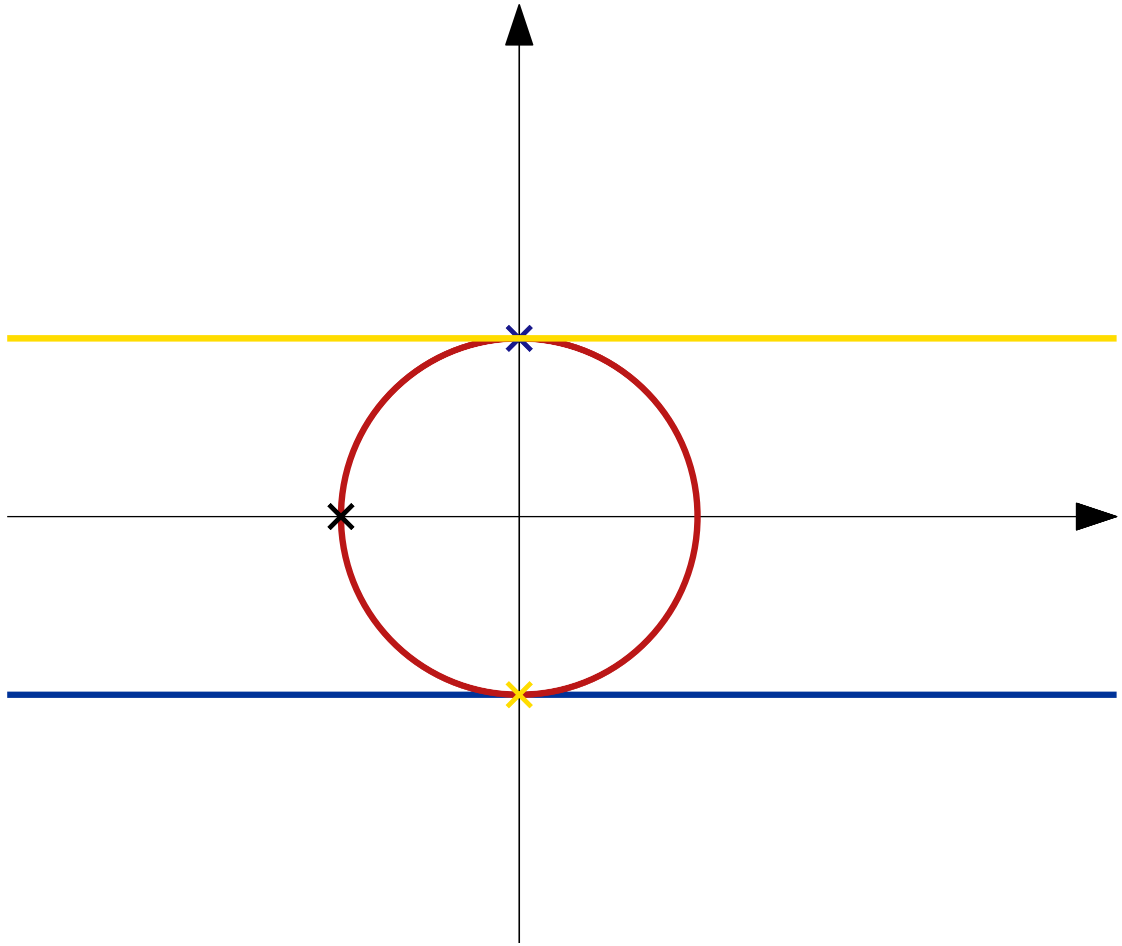
Aufgabe 1



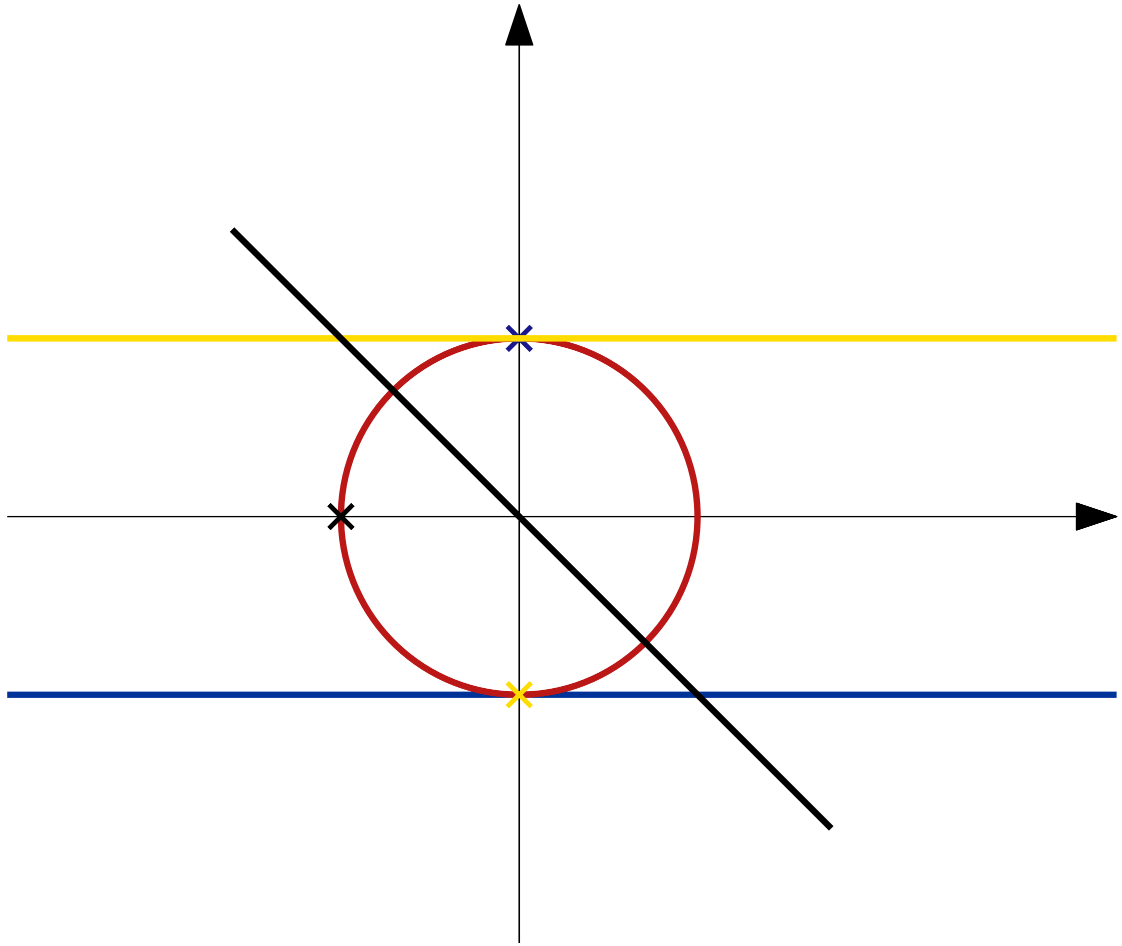
Aufgabe 1



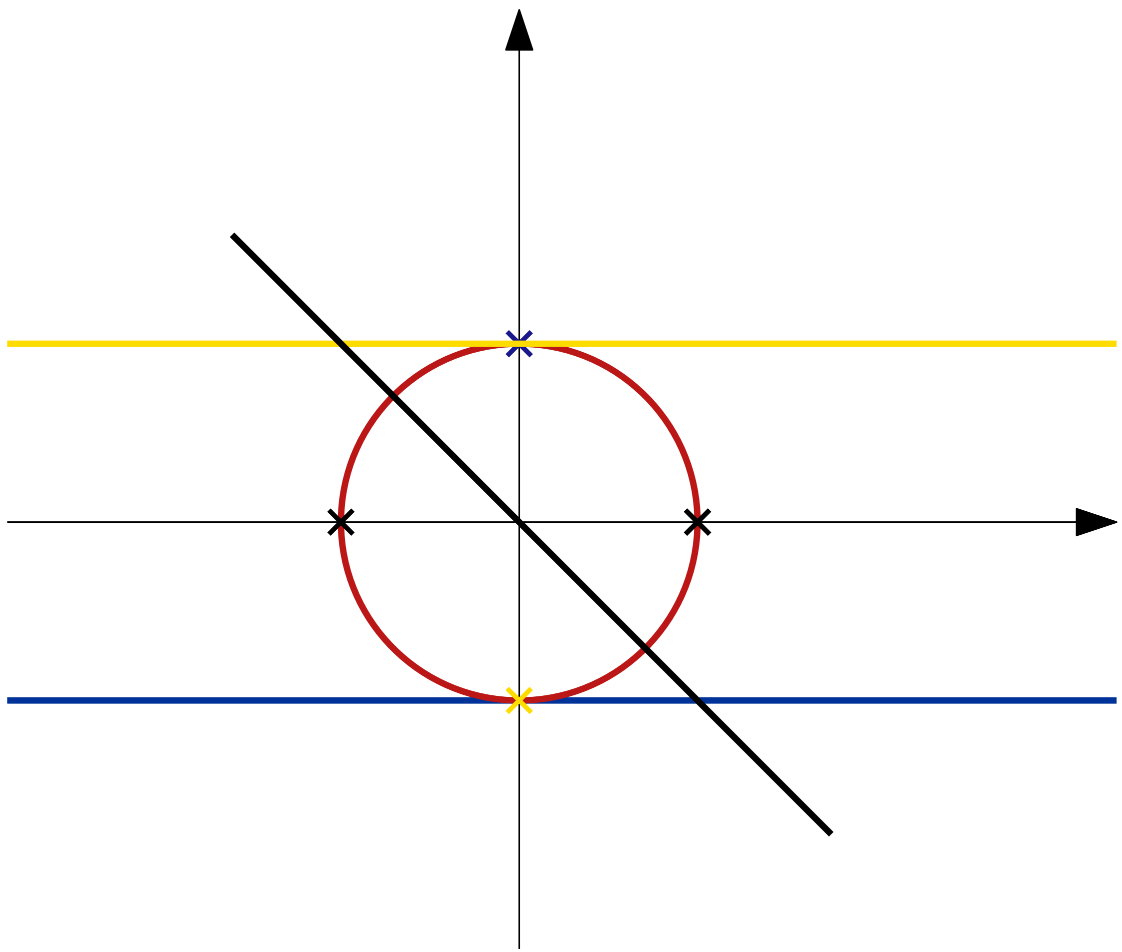
Aufgabe 1



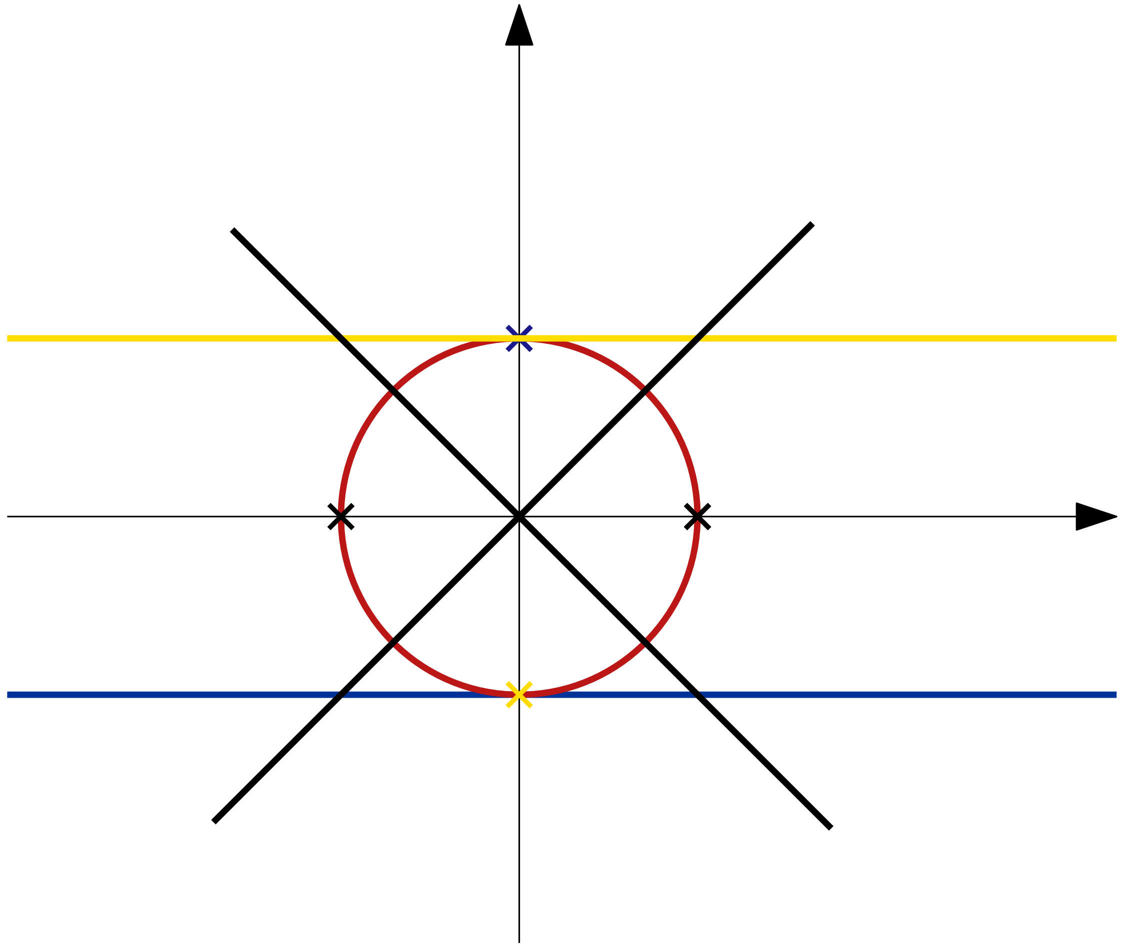
Aufgabe 1



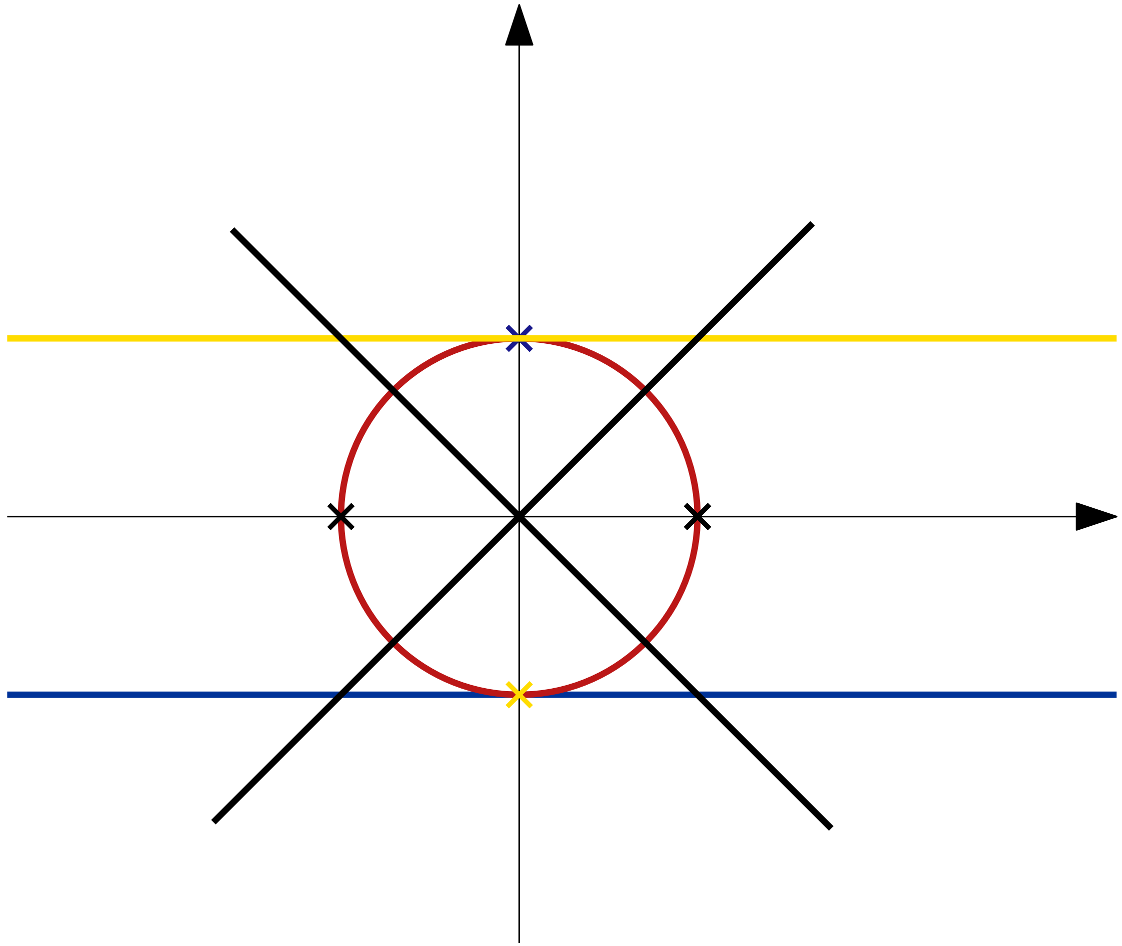
Aufgabe 1



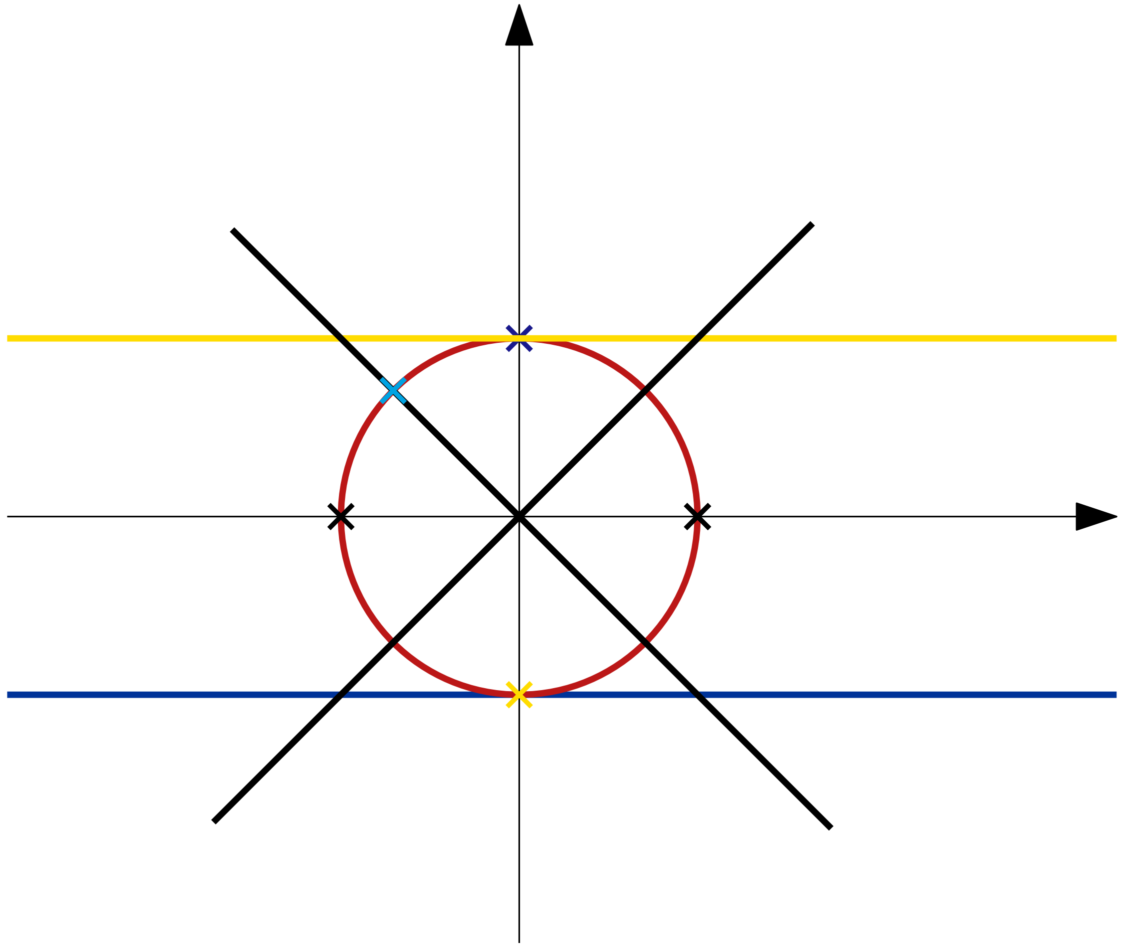
Aufgabe 1



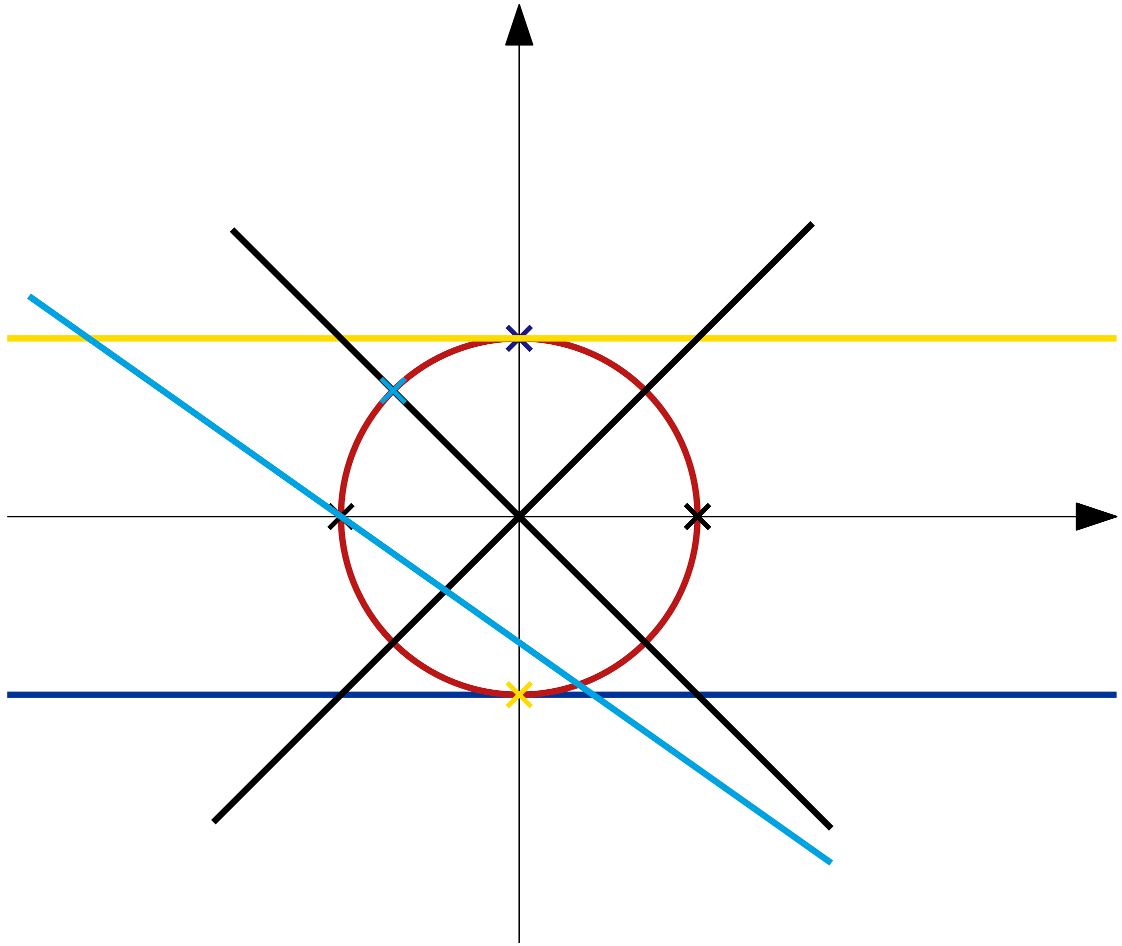
Aufgabe 1



Aufgabe 1



Aufgabe 1



Eigenschaften

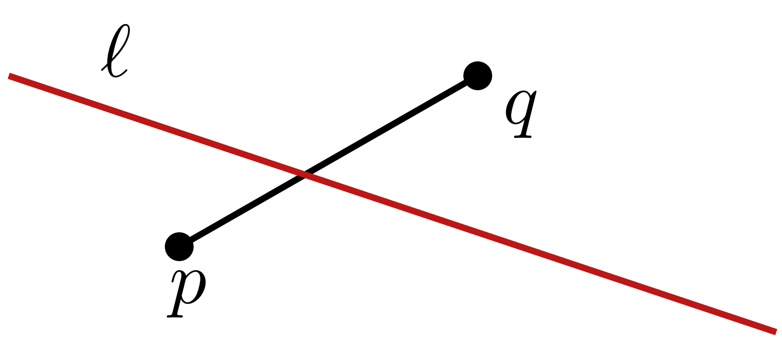
Lemma 1: Es gelten die folgenden Eigenschaften

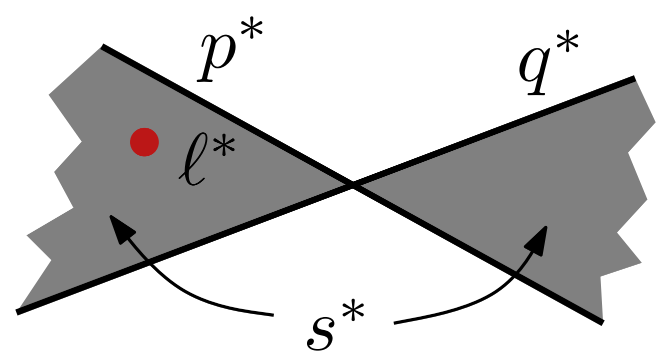
- $(p^*)^* = p$ und $(\ell^*)^* = \ell$
- p liegt unter/auf/über $\ell \Leftrightarrow p^*$ läuft über/auf/unter ℓ^*
- ℓ_1 und ℓ_2 schneiden sich in p
  $\Leftrightarrow p^*$ geht durch ℓ_1^* und ℓ_2^*
- p_1, p_2, p_3 kollinear
  $\Leftrightarrow p_1^*, p_2^*, p_3^*$ schneiden sich in gemeinsamem Punkt

VL

Wie sieht das duale Objekt zu einer Strecke $s = \overline{pq}$ aus?

Welche duale Beziehung gilt für eine Gerade ℓ, die s schneidet?





Aufgabe 2

Problem:

Gegeben: Menge L bestehend aus n Geraden

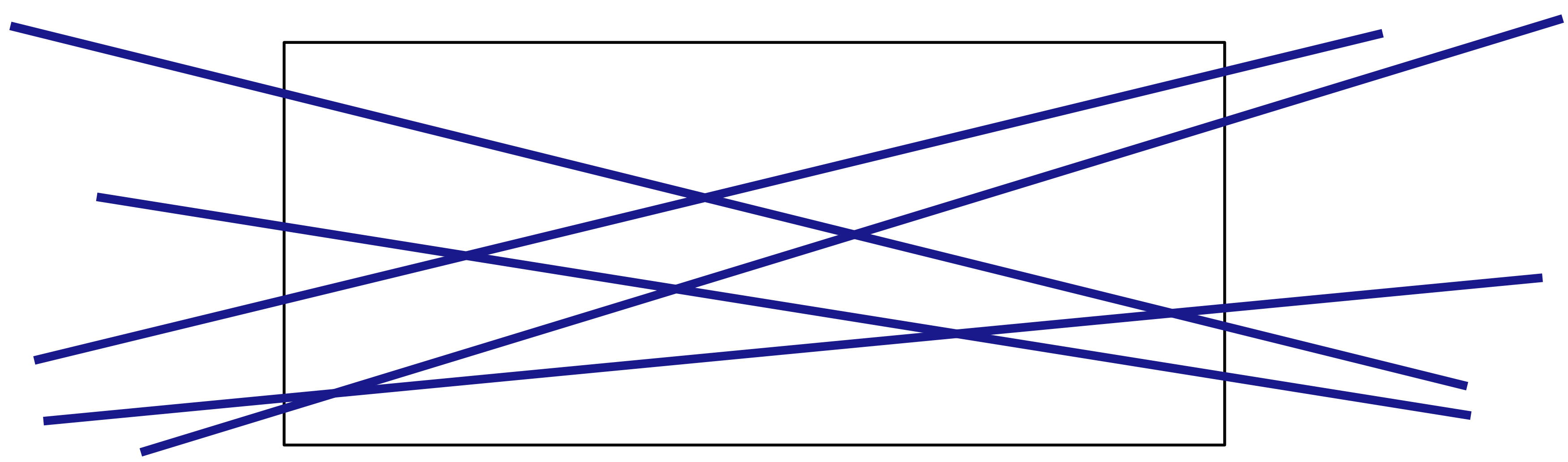
Gesucht: Achsenparallels Rechteck welches alle Knoten des Arrangements $\mathcal{A}(L)$ enthält.

Aufgabe 2

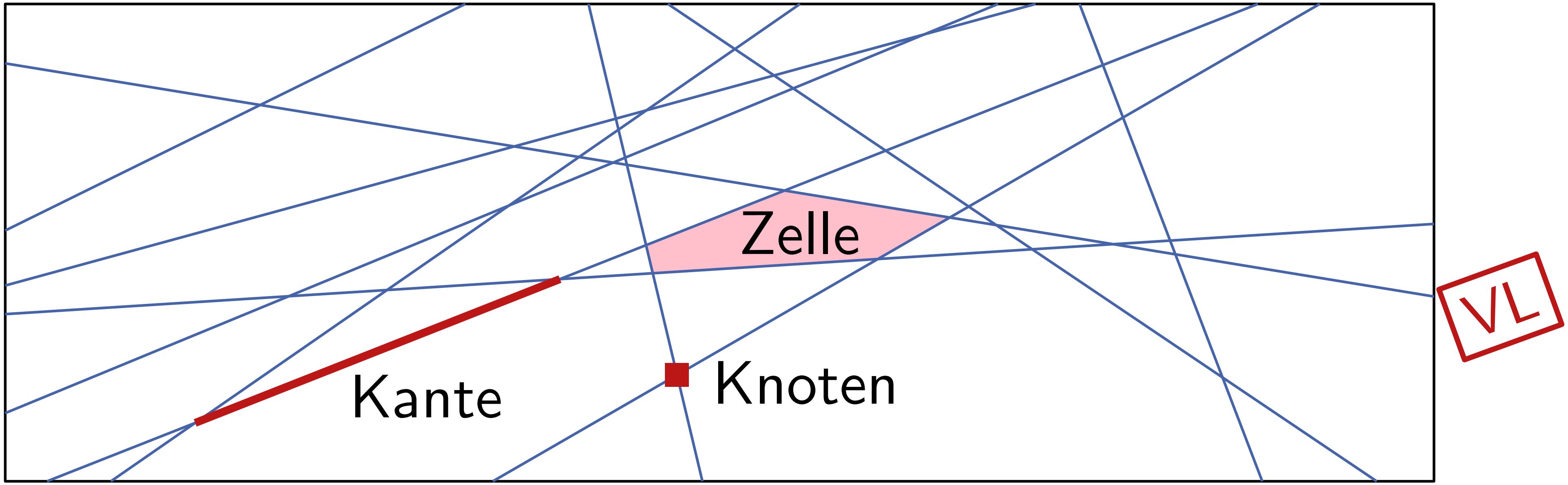
Problem:

Gegeben: Menge L bestehend aus n Geraden

Gesucht: Achsenparallels Rechteck welches alle Knoten des Arrangements $\mathcal{A}(L)$ enthält.

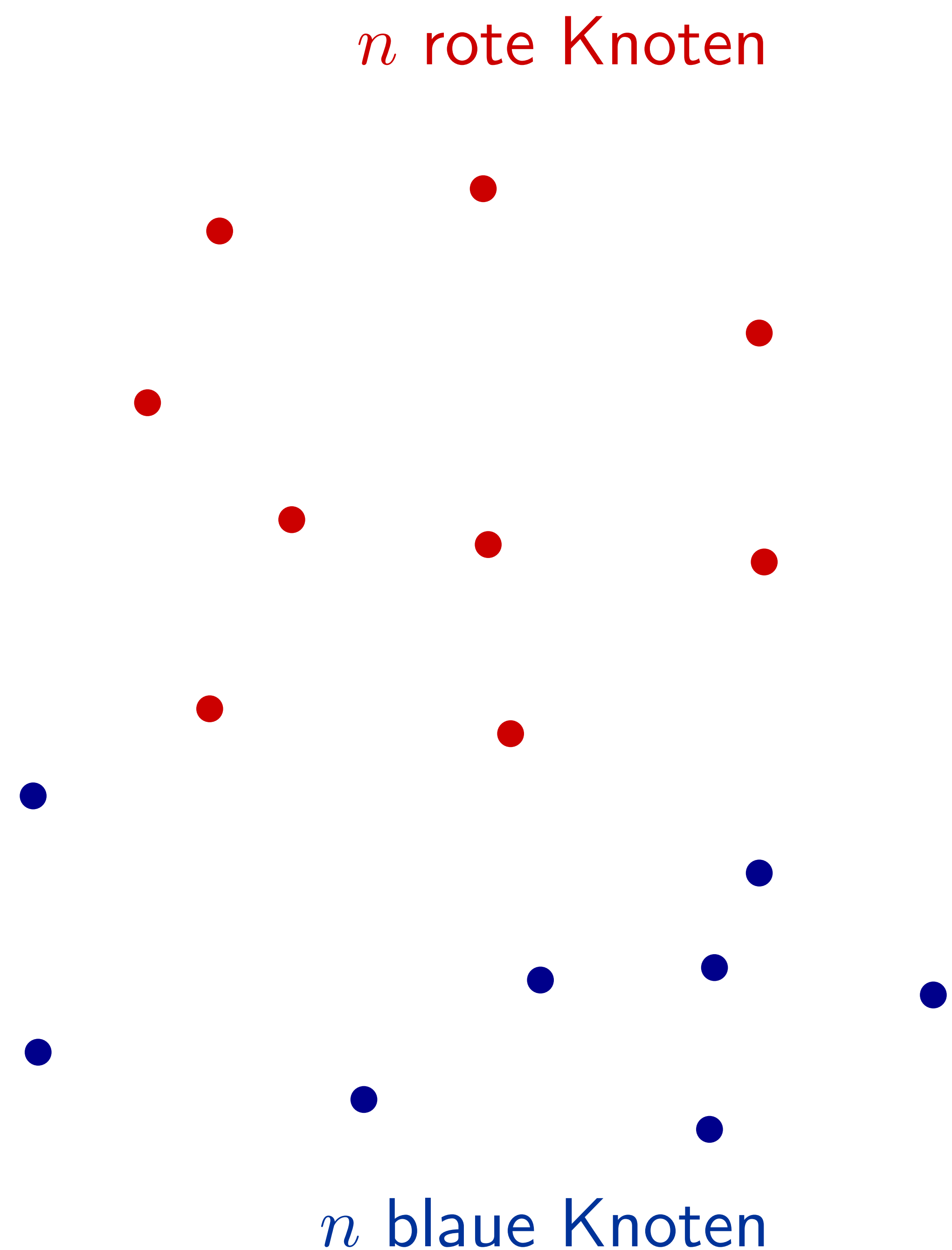


Geradenarrangements

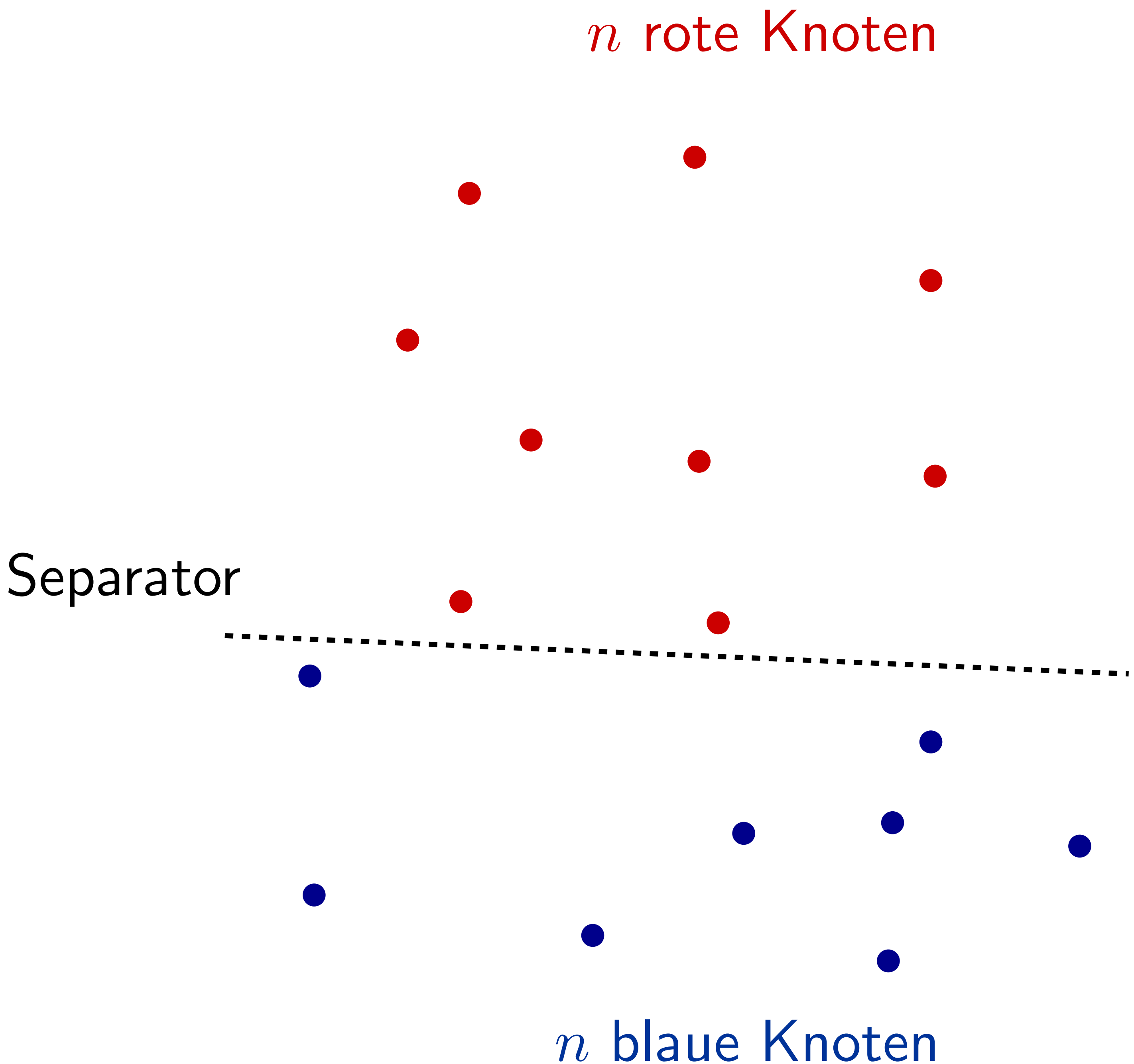


Def.: Eine Menge L von Geraden definiert eine Unterteilung $\mathcal{A}(L)$ der Ebene (das **Geradenarrangement**) in Knoten, Kanten und Zellen (tlws. unbeschränkt).
$\mathcal{A}(L)$ heißt **einfach**, wenn keine drei Geraden durch einen Punkt gehen und keine zwei Geraden parallel sind.

Aufgabe 3



Aufgabe 3



Eigenschaften

Lemma 1: Es gelten die folgenden Eigenschaften

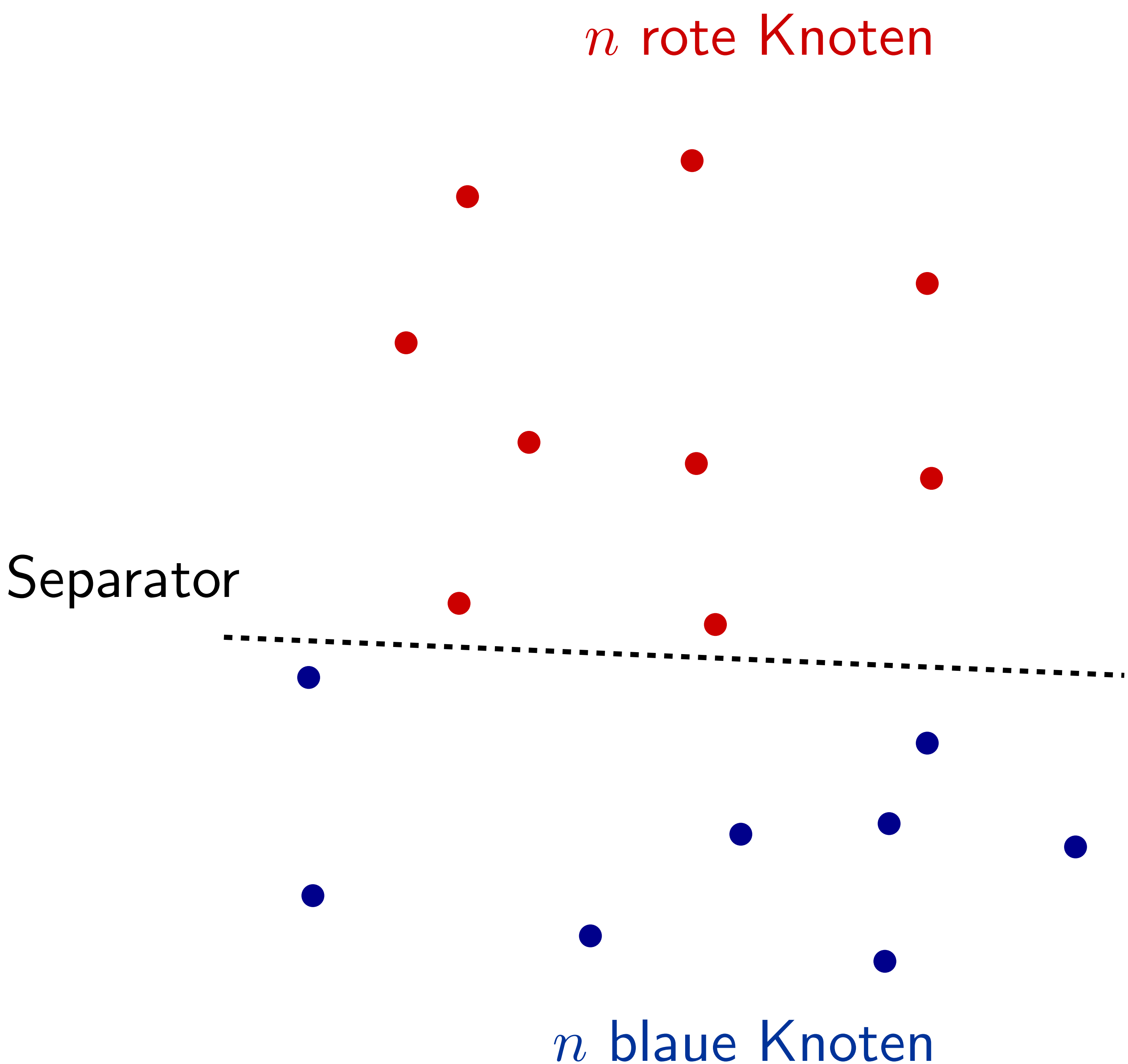
- $(p^*)^* = p$ und $(\ell^*)^* = \ell$
- p liegt unter/auf/über $\ell \Leftrightarrow p^*$ läuft über/auf/unter ℓ^*
- ℓ_1 und ℓ_2 schneiden sich in p
  $\Leftrightarrow p^*$ geht durch ℓ_1^* und ℓ_2^*
- p_1, p_2, p_3 kollinear
  $\Leftrightarrow p_1^*, p_2^*, p_3^*$ schneiden sich in gemeinsamem Punkt

VL

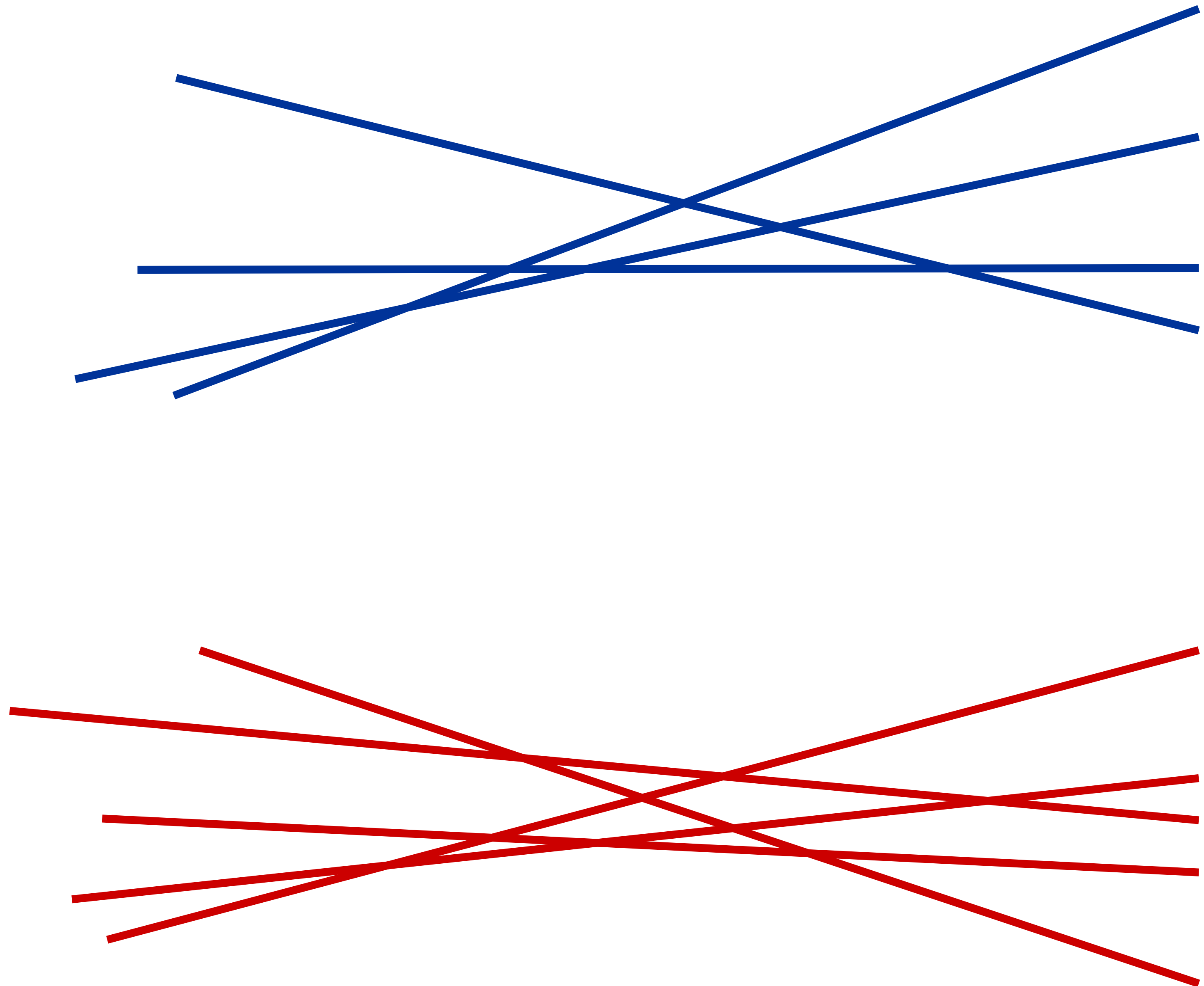
Wie sieht das duale Objekt zu einer Strecke $s = \overline{pq}$ aus?

Welche duale Beziehung gilt für eine Gerade ℓ, die s schneidet?

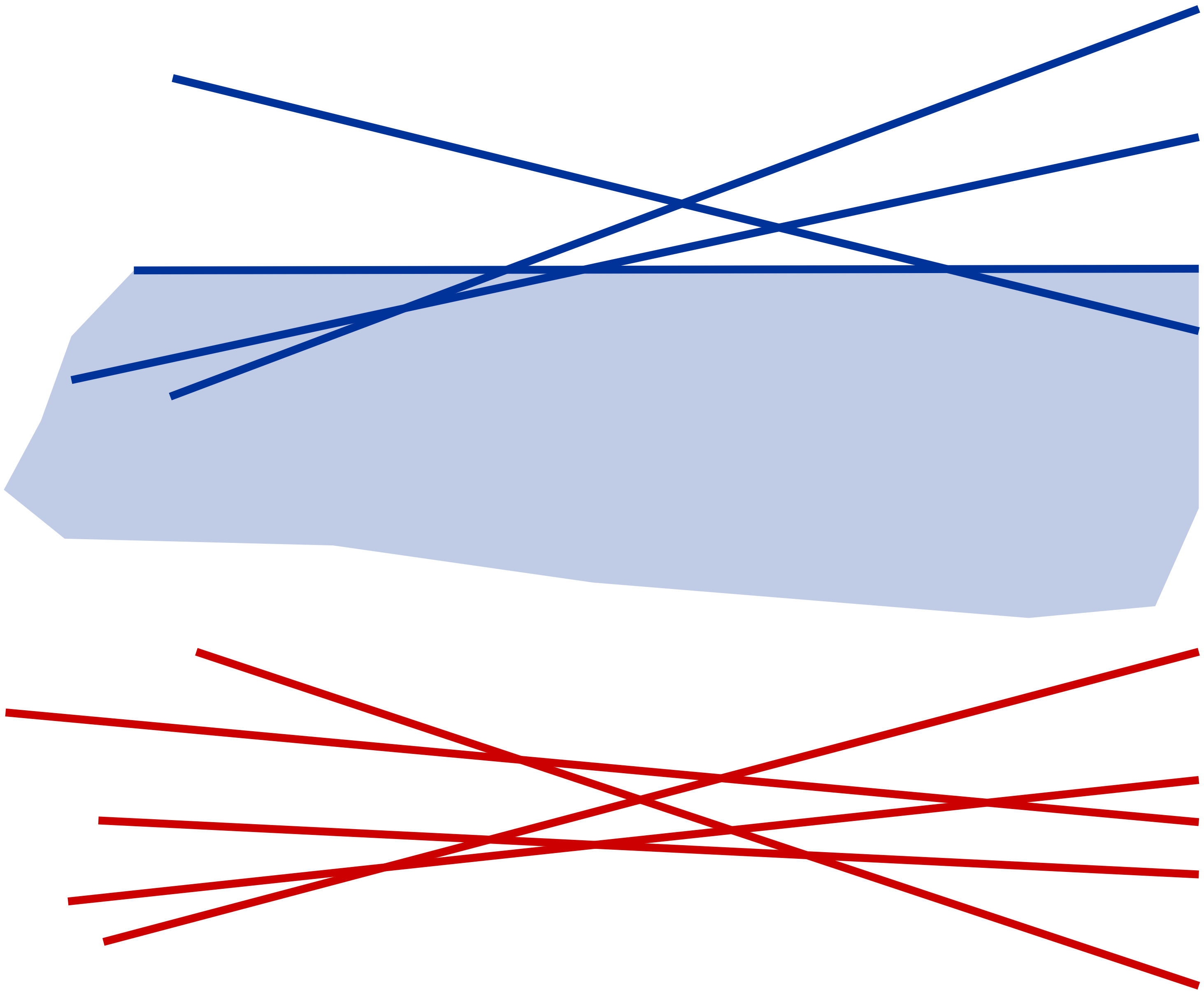
Aufgabe 3



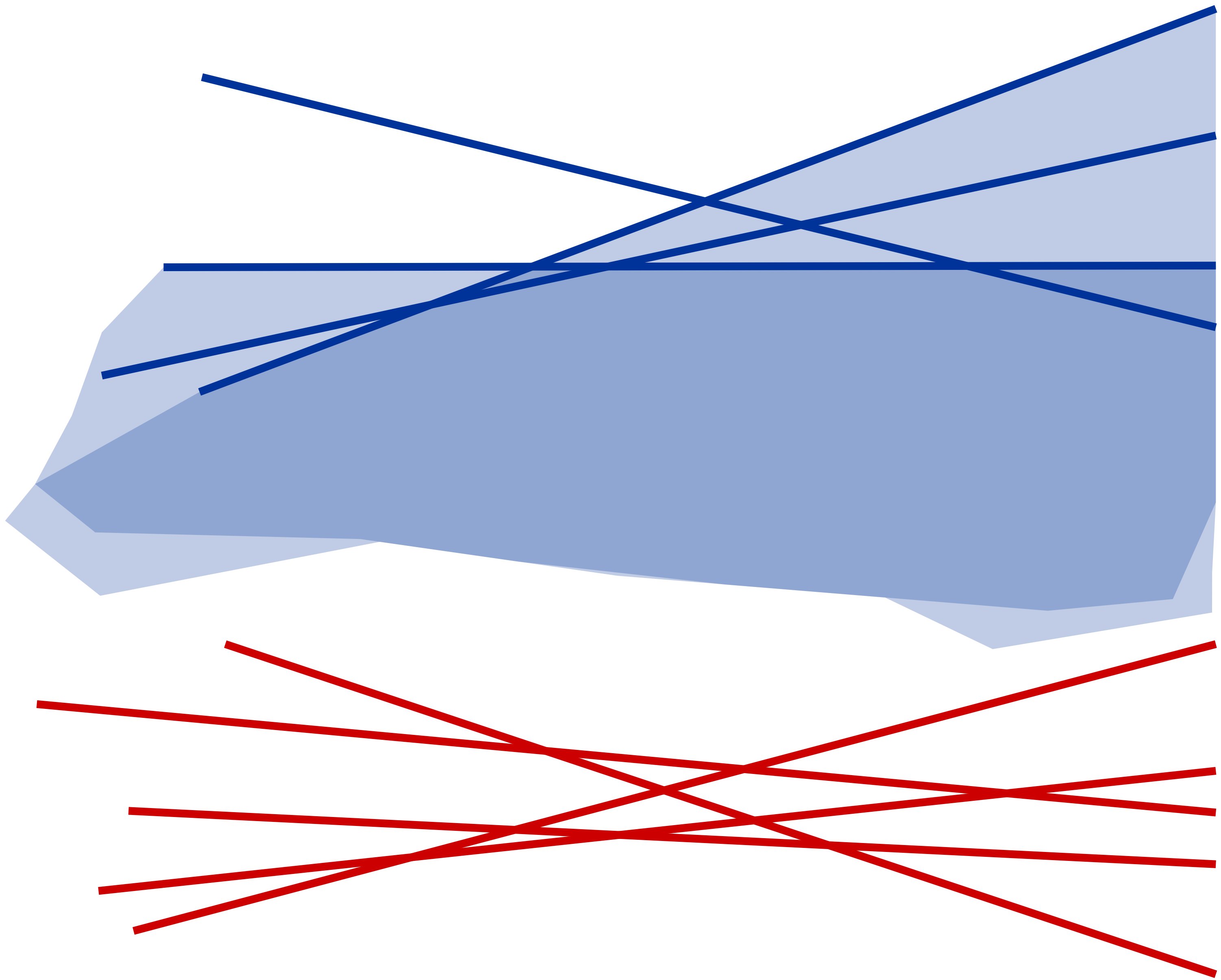
Aufgabe 3



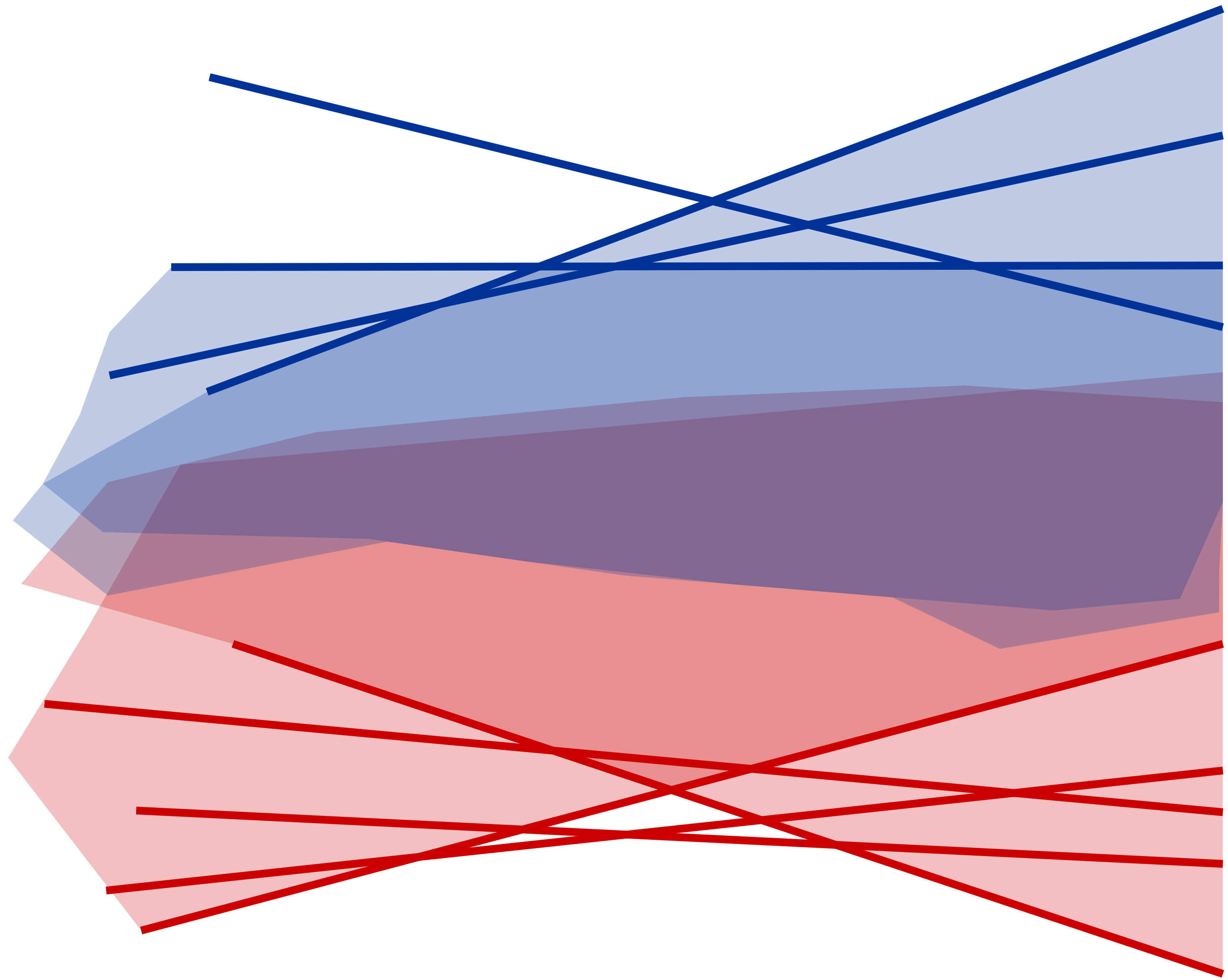
Aufgabe 3



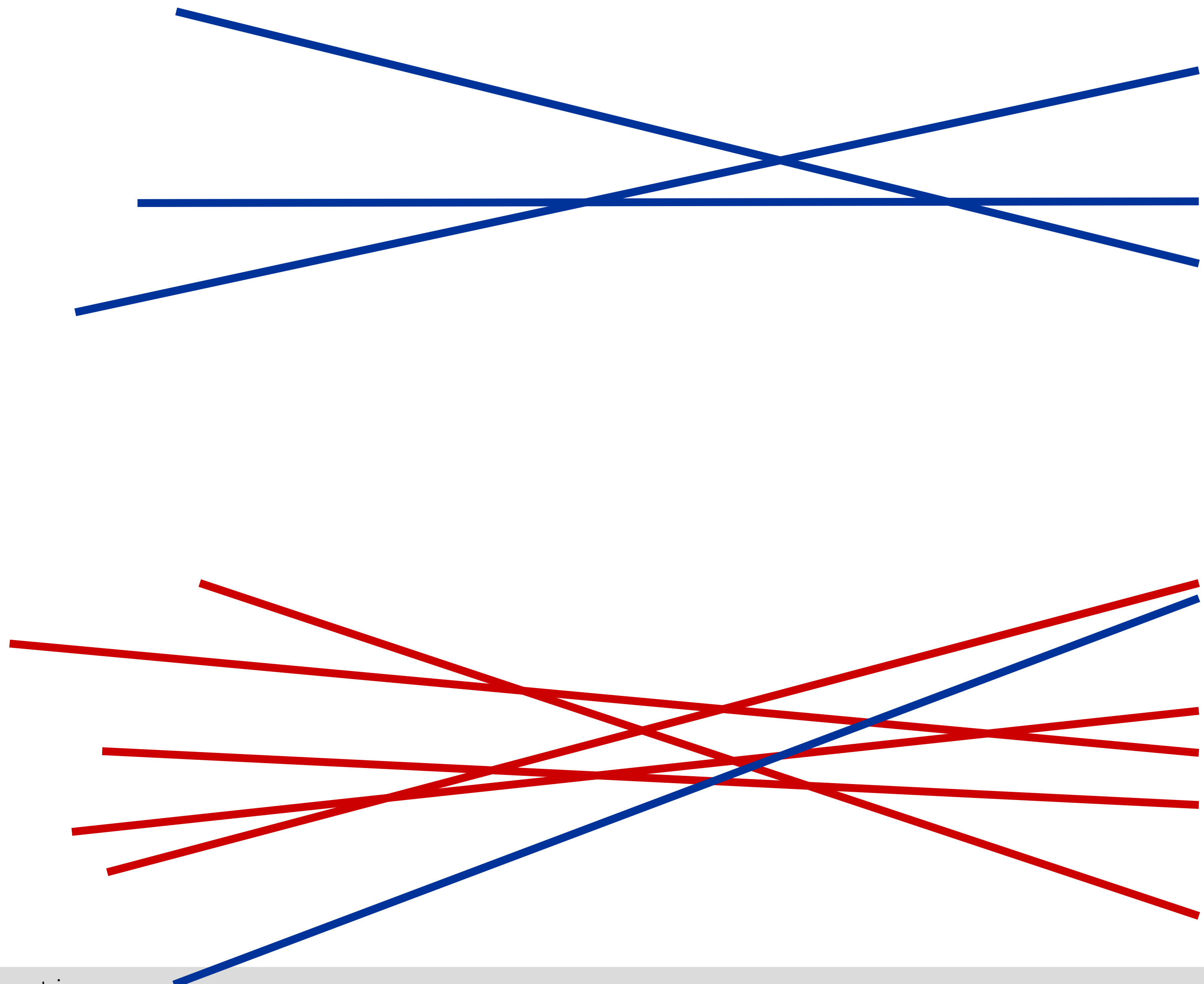
Aufgabe 3



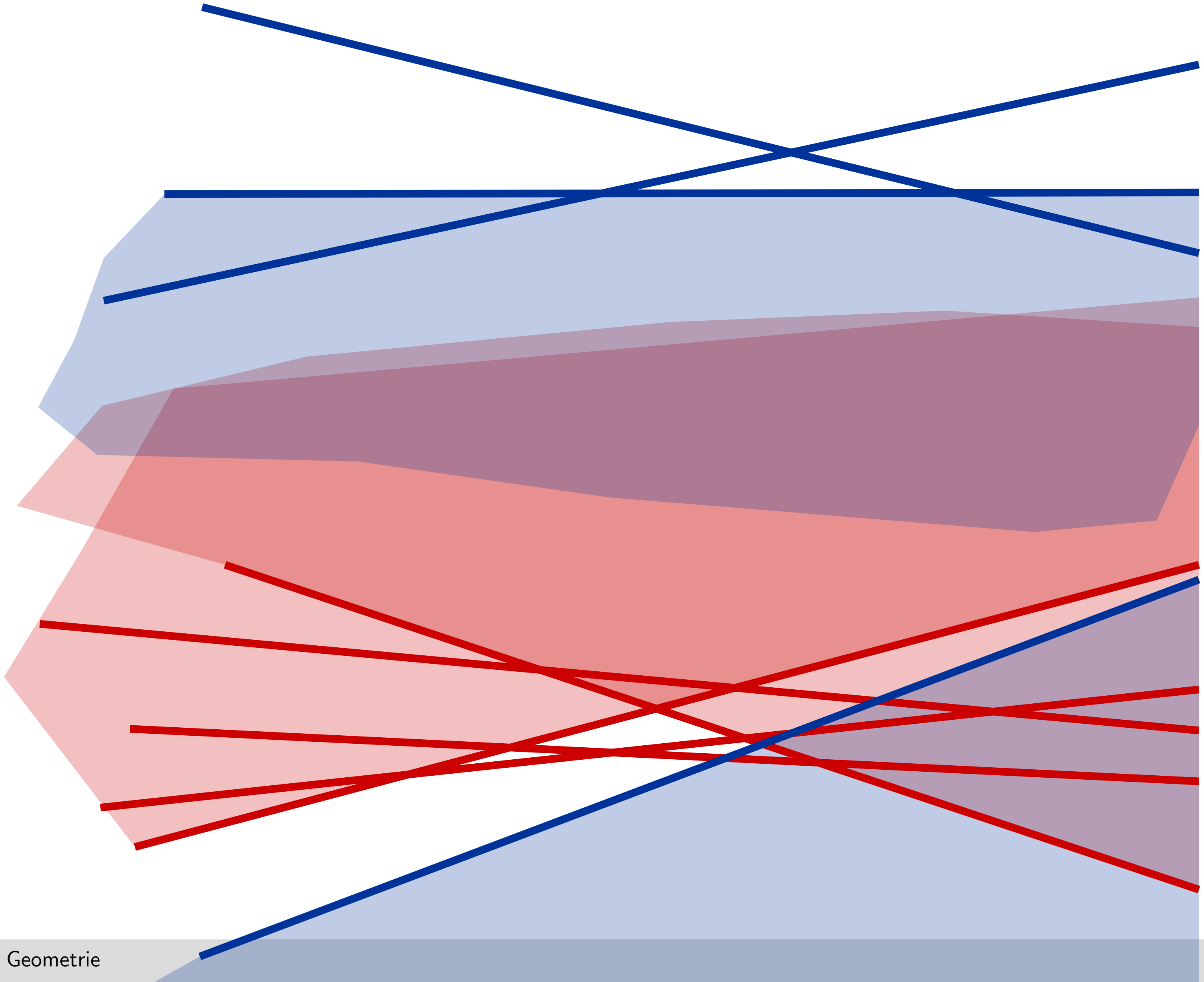
Aufgabe 3



Aufgabe 3



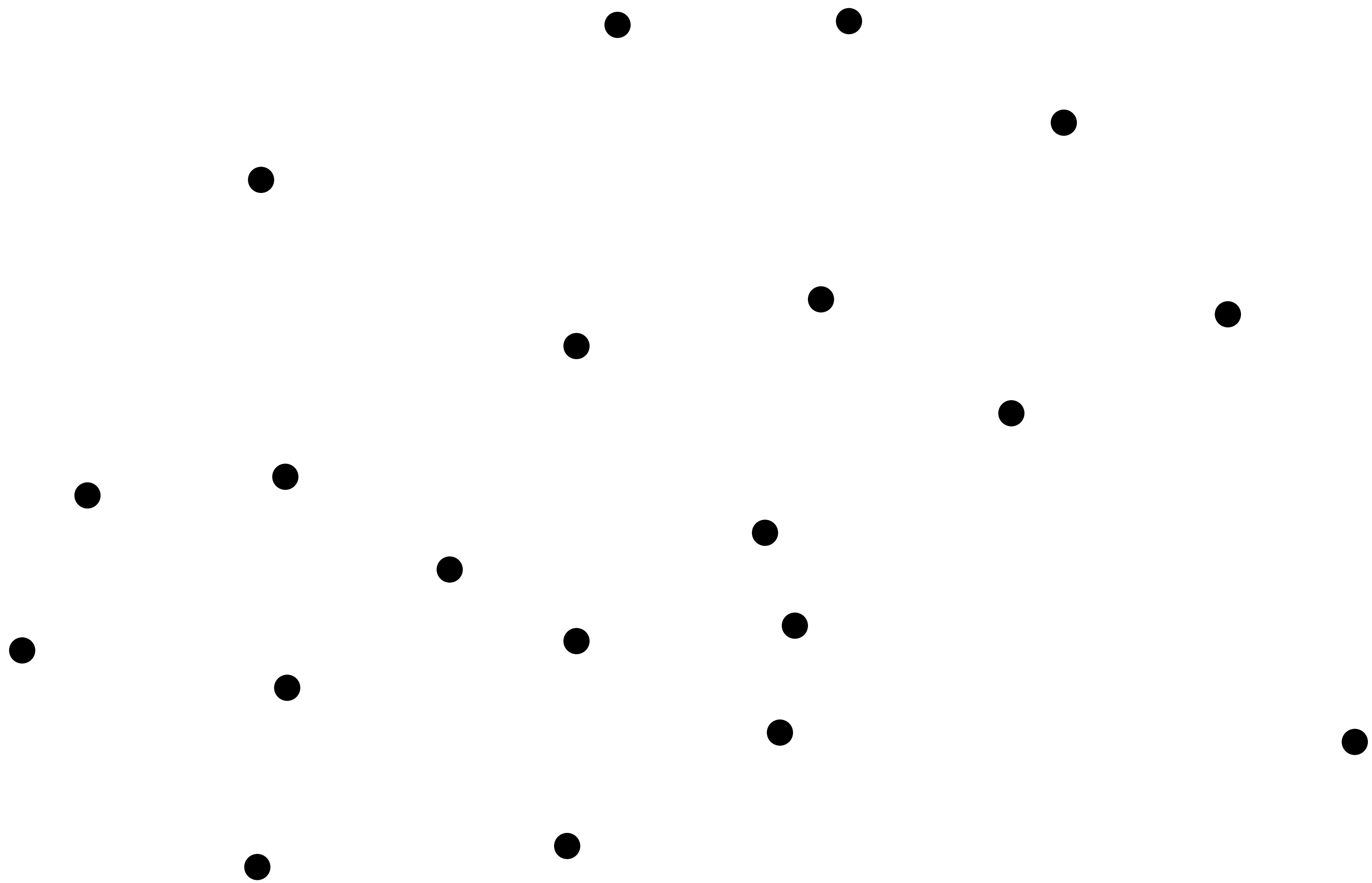
Aufgabe 3



Aufgabe 4

Gegeben: Menge $S \subset \mathbb{R}^2$

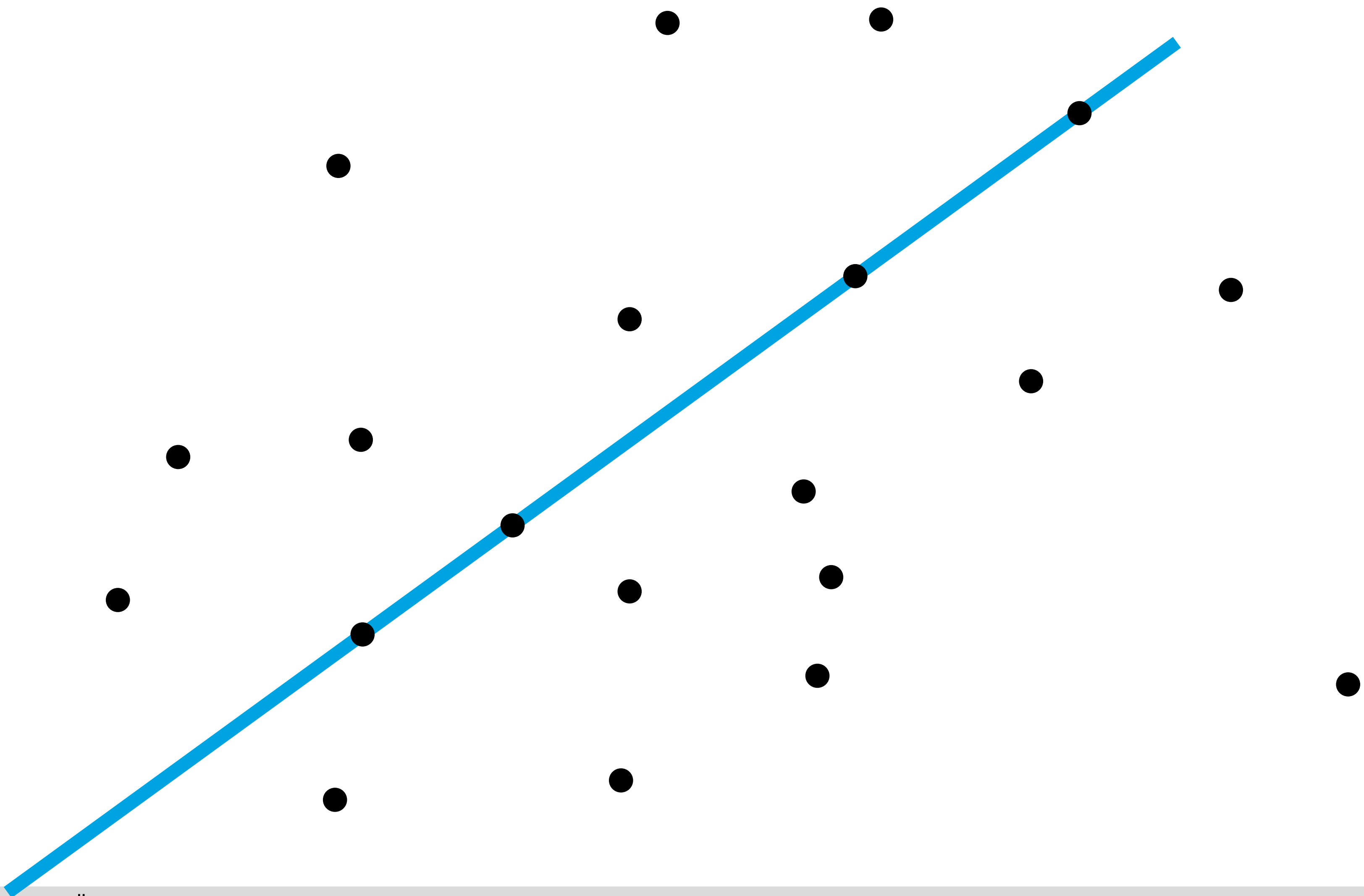
Finde Linie, die durch die meisten Punkte geht [in $O(n^2)$].



Aufgabe 4

Gegeben: Menge $S \subset \mathbb{R}^2$

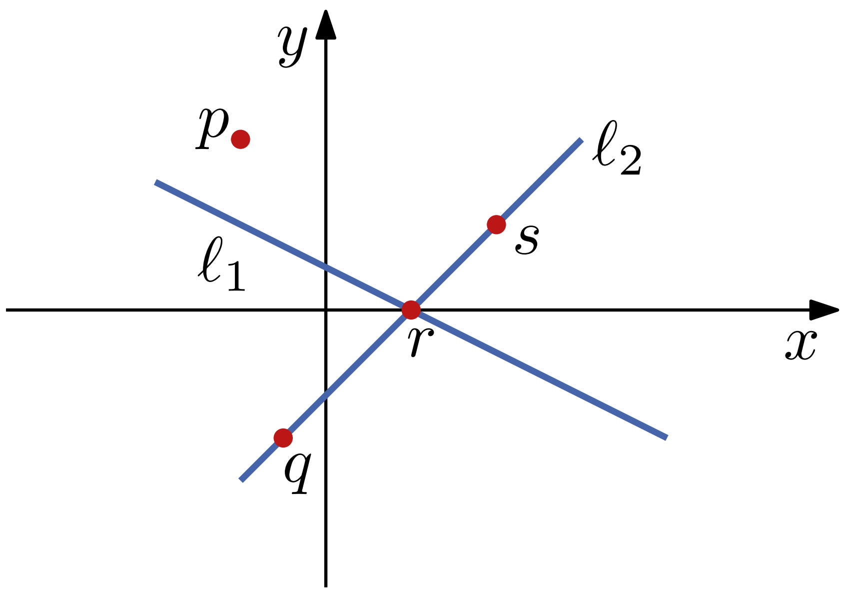
Finde Linie, die durch die meisten Punkte geht [in $O(n^2)$].

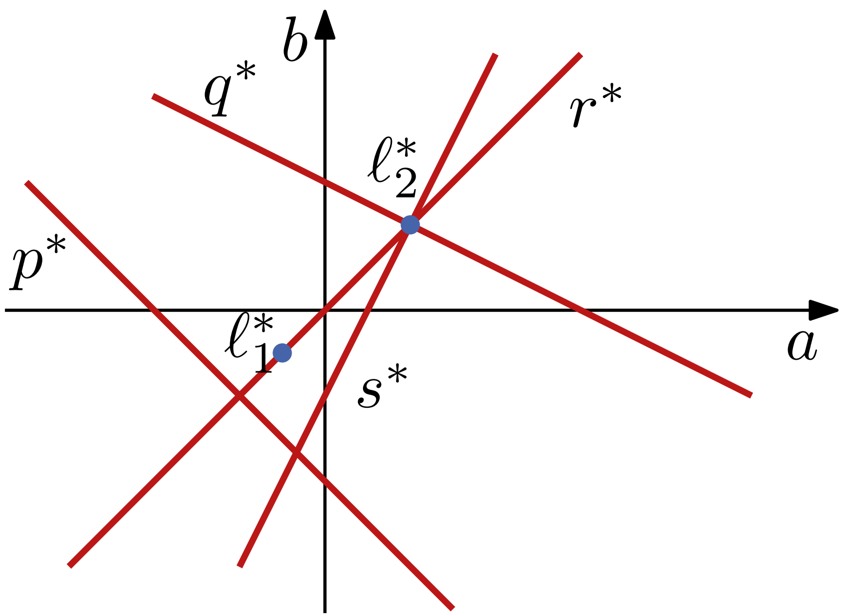


Eigenschaften

Lemma 1: Es gelten die folgenden Eigenschaften

- $(p^*)^* = p$ und $(\ell^*)^* = \ell$
- p liegt unter/auf/über $\ell \Leftrightarrow p^*$ läuft über/auf/unter ℓ^*
- ℓ_1 und ℓ_2 schneiden sich in r
  $\Leftrightarrow r^*$ geht durch ℓ_1^* und ℓ_2^*
- q, r, s kollinear
  $\Leftrightarrow q^*, r^*, s^*$ schneiden sich in gemeinsamem Punkt

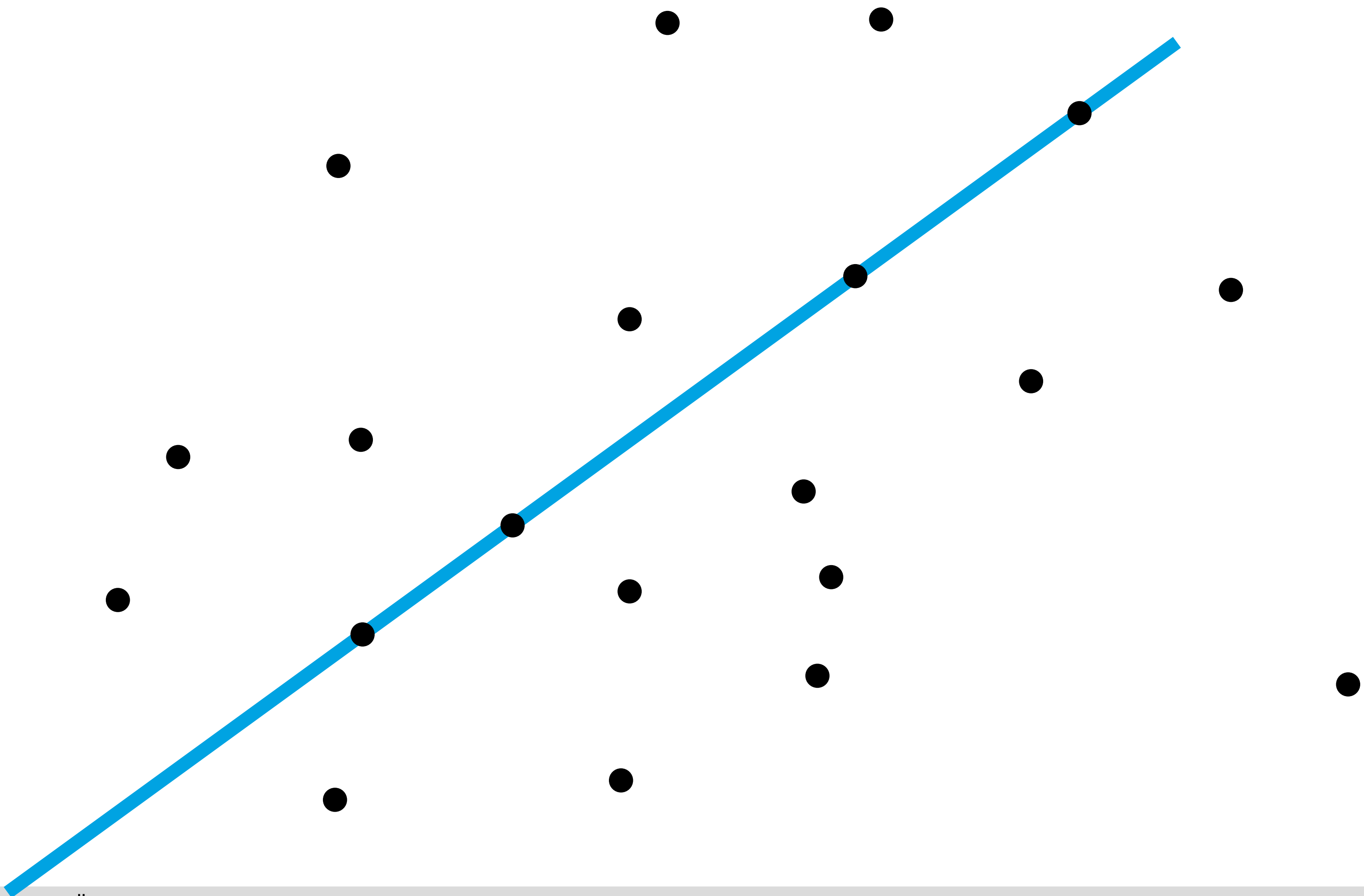




Aufgabe 4

Gegeben: Menge $S \subset \mathbb{R}^2$

Finde Linie, die durch die meisten Punkte geht [in $O(n^2)$].



Übersicht

Nachtrag

Übungsblatt 09 - Dualität

Das war's!

Danke, und das war's!

Nächster und letzter Termin:
Donnertag, 28.06, 10:15 Uhr
Raum 131, Gebäude 50.34