

# Übung Algorithmische Geometrie

## Point Location

LEHRSTUHL FÜR ALGORITHMIK I · INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK · FAKULTÄT FÜR INFORMATIK

Andreas Gemsa  
31.05.2012



## Übungsblatt 6 - Point Location

# Aufgabe 1

## Problem:

Bestimme ob Punkt  $q \in \mathbb{R}^2$  im Inneren eines Polygons  $P$  liegt.

## Algorithmus:

1. Starte in  $q$  eine horizontal verlaufende Halbgerade  $\rho$ .
2. Zähle Schnitte von Polygonkanten mit  $\rho$ .
  - Anzahl Schnitte gerade:  $q$  nicht im Inneren von  $P$
  - Anzahl Schnitte ungerade:  $q$  im Inneren von  $P$

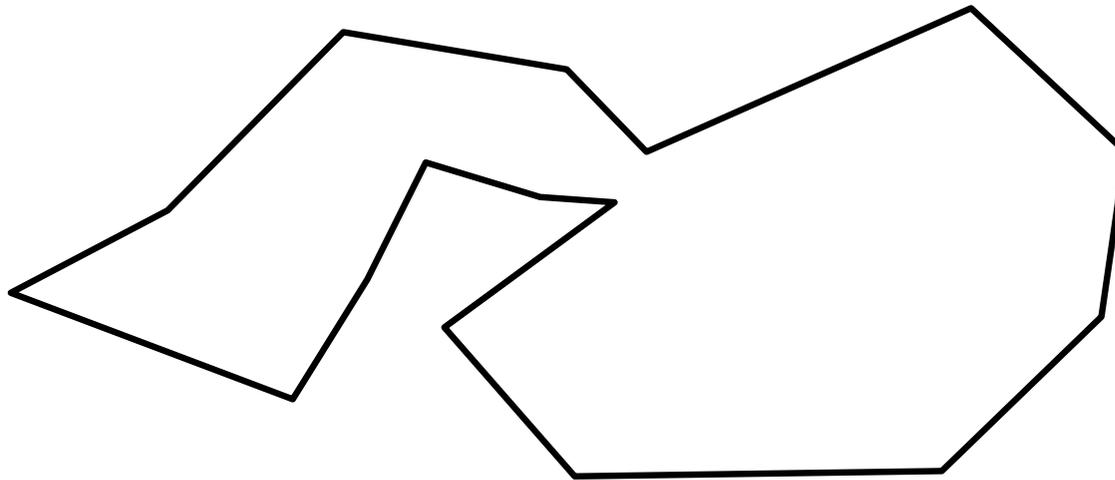
# Aufgabe 1

## Problem:

Bestimme ob Punkt  $q \in \mathbb{R}^2$  im Inneren eines Polygons  $P$  liegt.

## Algorithmus:

1. Starte in  $q$  eine horizontal verlaufende Halbgerade  $\rho$ .
2. Zähle Schnitte von Polygonkanten mit  $\rho$ .
  - Anzahl Schnitte gerade:  $q$  nicht im Inneren von  $P$
  - Anzahl Schnitte ungerade:  $q$  im Inneren von  $P$



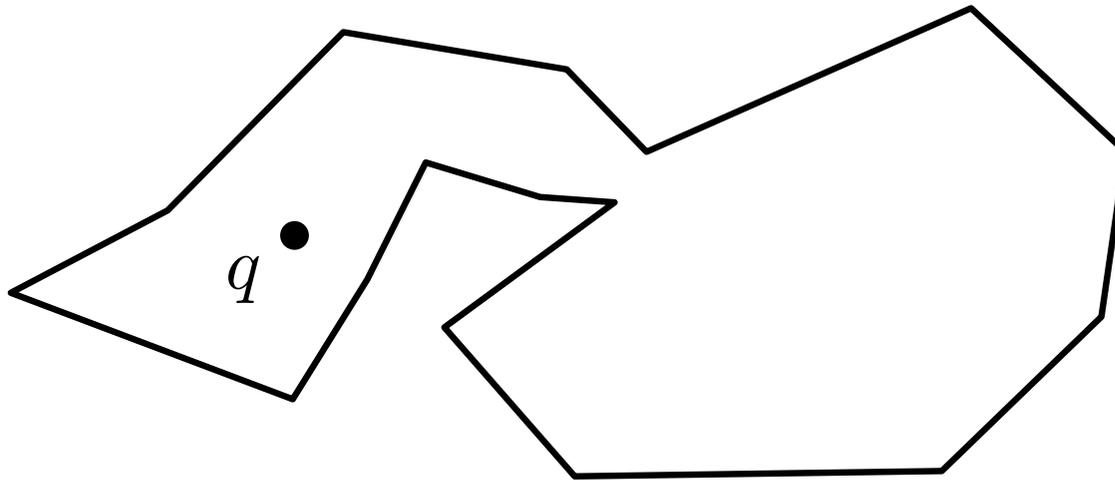
# Aufgabe 1

## Problem:

Bestimme ob Punkt  $q \in \mathbb{R}^2$  im Inneren eines Polygons  $P$  liegt.

## Algorithmus:

1. Starte in  $q$  eine horizontal verlaufende Halbgerade  $\rho$ .
2. Zähle Schnitte von Polygonkanten mit  $\rho$ .
  - Anzahl Schnitte gerade:  $q$  nicht im Inneren von  $P$
  - Anzahl Schnitte ungerade:  $q$  im Inneren von  $P$



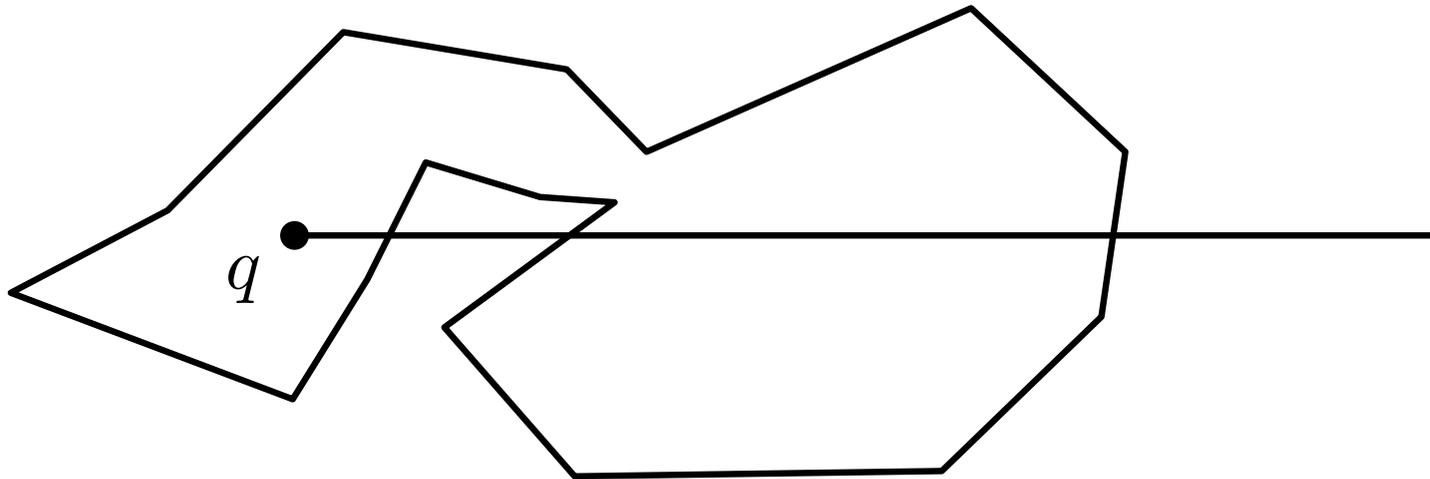
# Aufgabe 1

## Problem:

Bestimme ob Punkt  $q \in \mathbb{R}^2$  im Inneren eines Polygons  $P$  liegt.

## Algorithmus:

1. Starte in  $q$  eine horizontal verlaufende Halbgerade  $\rho$ .
2. Zähle Schnitte von Polygonkanten mit  $\rho$ .
  - Anzahl Schnitte gerade:  $q$  nicht im Inneren von  $P$
  - Anzahl Schnitte ungerade:  $q$  im Inneren von  $P$



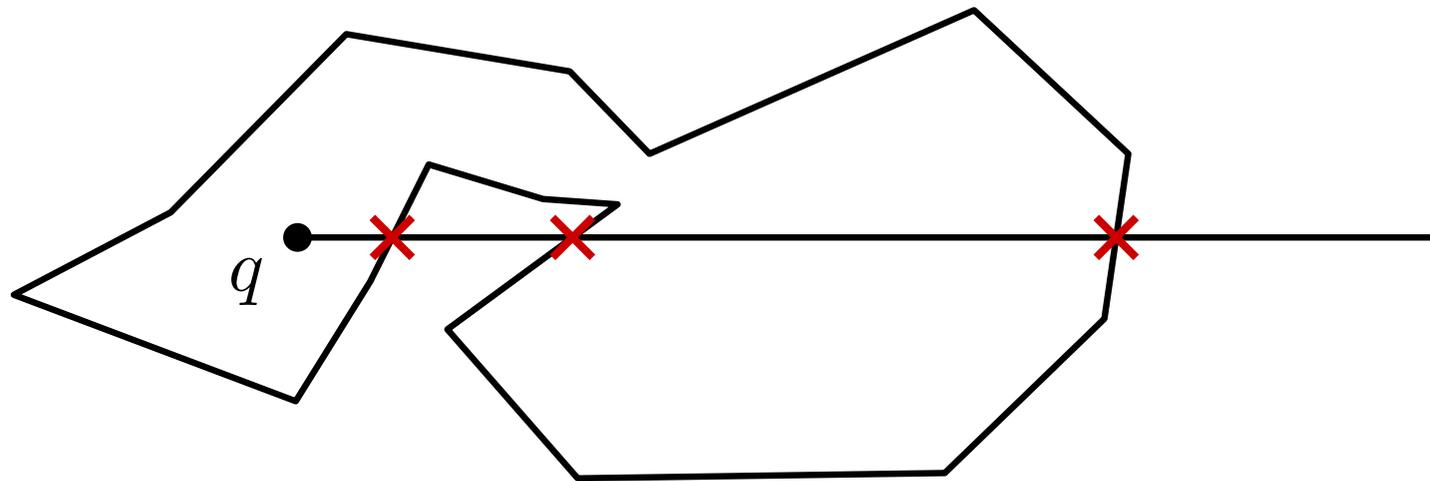
# Aufgabe 1

## Problem:

Bestimme ob Punkt  $q \in \mathbb{R}^2$  im Inneren eines Polygons  $P$  liegt.

## Algorithmus:

1. Starte in  $q$  eine horizontal verlaufende Halbgerade  $\rho$ .
2. Zähle Schnitte von Polygonkanten mit  $\rho$ .
  - Anzahl Schnitte gerade:  $q$  nicht im Inneren von  $P$
  - Anzahl Schnitte ungerade:  $q$  im Inneren von  $P$



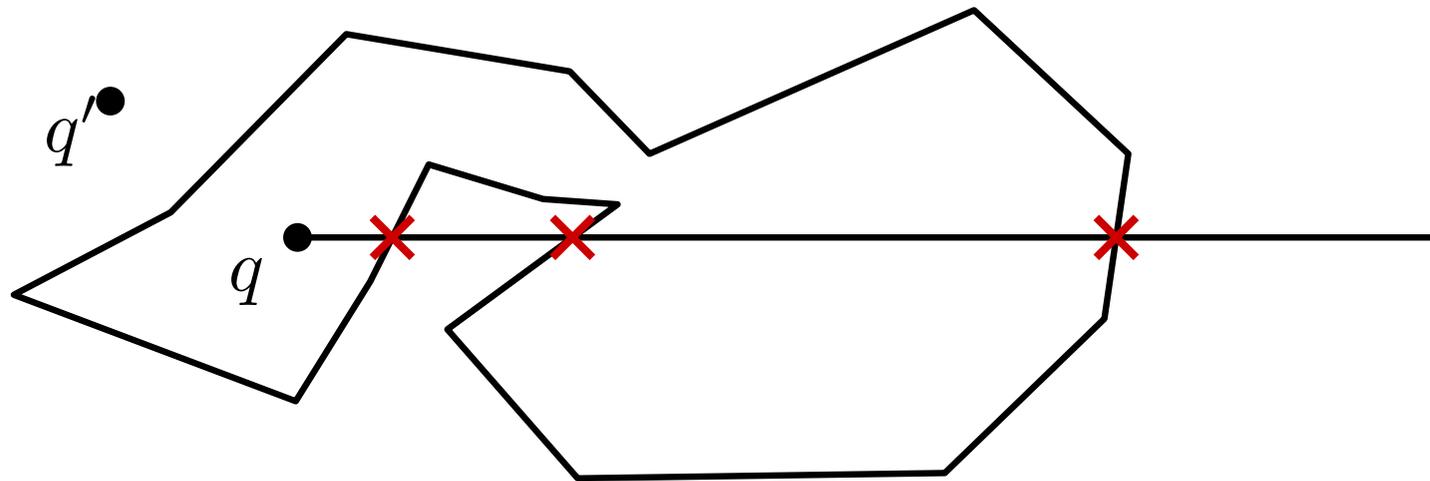
# Aufgabe 1

## Problem:

Bestimme ob Punkt  $q \in \mathbb{R}^2$  im Inneren eines Polygons  $P$  liegt.

## Algorithmus:

1. Starte in  $q$  eine horizontal verlaufende Halbgerade  $\rho$ .
2. Zähle Schnitte von Polygonkanten mit  $\rho$ .
  - Anzahl Schnitte gerade:  $q$  nicht im Inneren von  $P$
  - Anzahl Schnitte ungerade:  $q$  im Inneren von  $P$



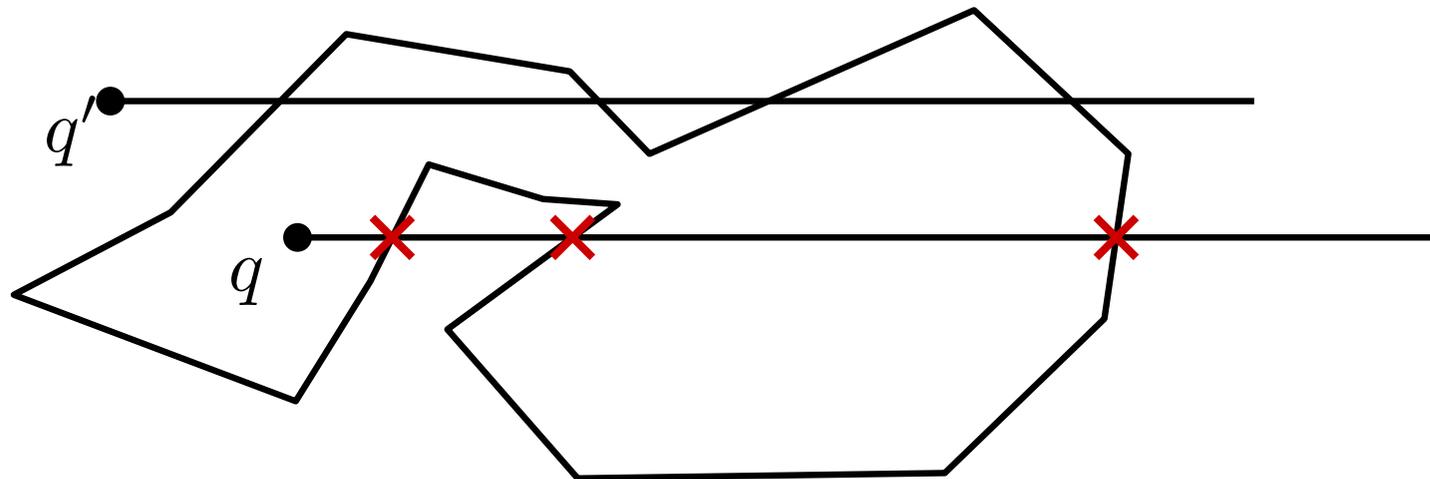
# Aufgabe 1

## Problem:

Bestimme ob Punkt  $q \in \mathbb{R}^2$  im Inneren eines Polygons  $P$  liegt.

## Algorithmus:

1. Starte in  $q$  eine horizontal verlaufende Halbgerade  $\rho$ .
2. Zähle Schnitte von Polygonkanten mit  $\rho$ .
  - Anzahl Schnitte gerade:  $q$  nicht im Inneren von  $P$
  - Anzahl Schnitte ungerade:  $q$  im Inneren von  $P$



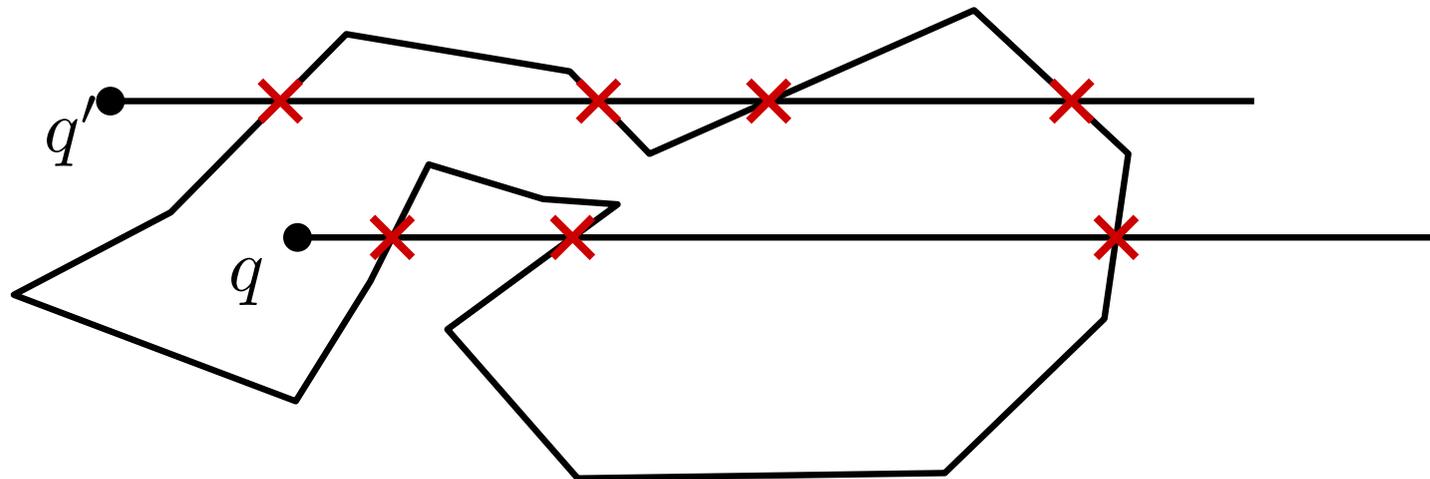
# Aufgabe 1

## Problem:

Bestimme ob Punkt  $q \in \mathbb{R}^2$  im Inneren eines Polygons  $P$  liegt.

## Algorithmus:

1. Starte in  $q$  eine horizontal verlaufende Halbgerade  $\rho$ .
2. Zähle Schnitte von Polygonkanten mit  $\rho$ .
  - Anzahl Schnitte gerade:  $q$  nicht im Inneren von  $P$
  - Anzahl Schnitte ungerade:  $q$  im Inneren von  $P$



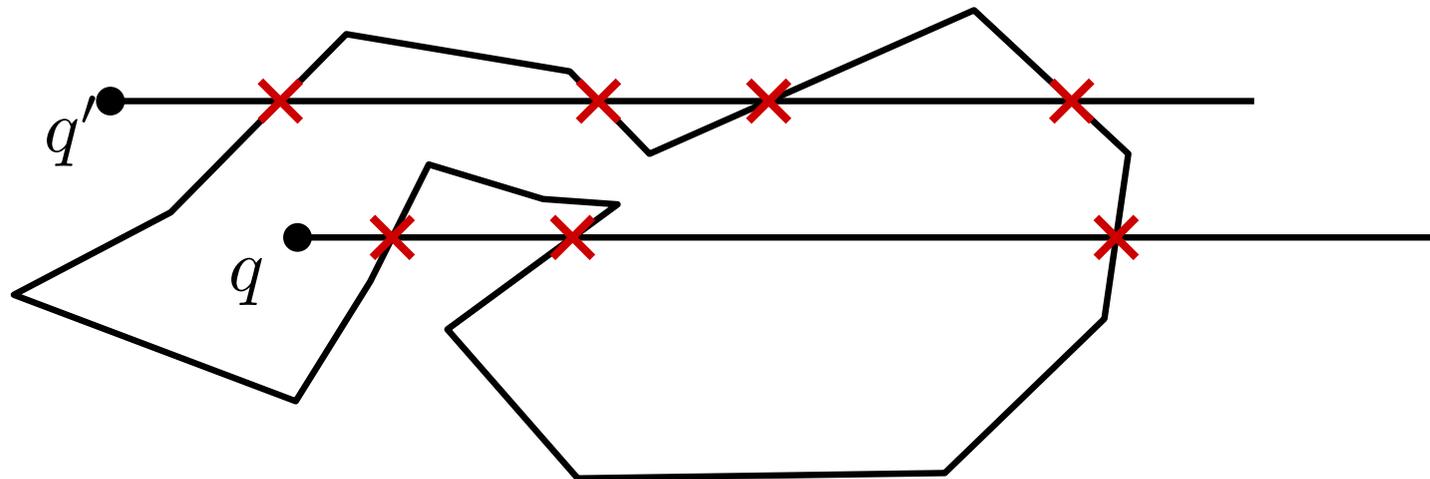
# Aufgabe 1

## Problem:

Bestimme ob Punkt  $q \in \mathbb{R}^2$  im Inneren eines Polygons  $P$  liegt.

## Algorithmus:

1. Starte in  $q$  eine horizontal verlaufende Halbgerade  $\rho$ .
2. Zähle Schnitte von Polygonkanten mit  $\rho$ .
  - Anzahl Schnitte gerade:  $q$  nicht im Inneren von  $P$
  - Anzahl Schnitte ungerade:  $q$  im Inneren von  $P$



## a) Korrektheit

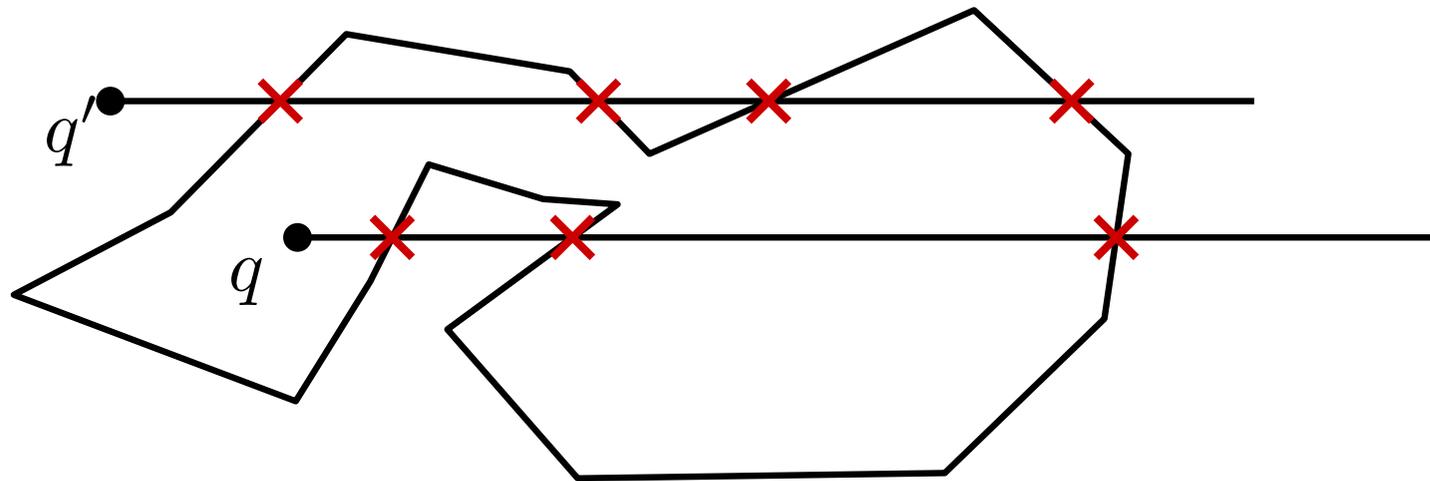
# Aufgabe 1

## Problem:

Bestimme ob Punkt  $q \in \mathbb{R}^2$  im Inneren eines Polygons  $P$  liegt.

## Algorithmus:

1. Starte in  $q$  eine horizontal verlaufende Halbgerade  $\rho$ .
2. Zähle Schnitte von Polygonkanten mit  $\rho$ .
  - Anzahl Schnitte gerade:  $q$  nicht im Inneren von  $P$
  - Anzahl Schnitte ungerade:  $q$  im Inneren von  $P$



## b) Degenerierte Fälle?

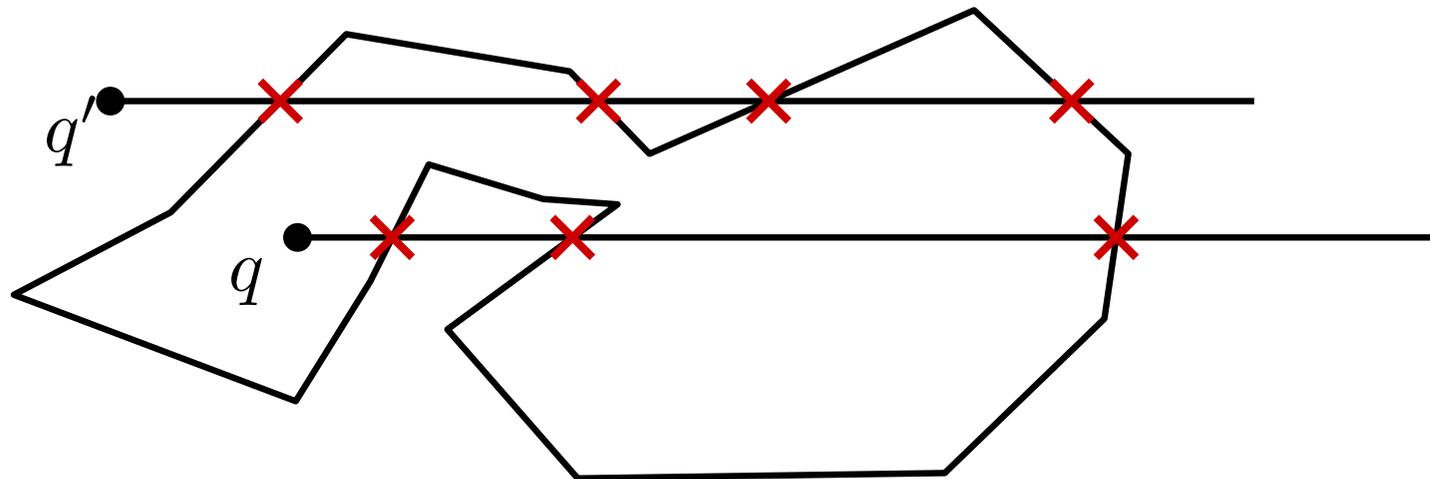
# Aufgabe 1

## Problem:

Bestimme ob Punkt  $q \in \mathbb{R}^2$  im Inneren eines Polygons  $P$  liegt.

## Algorithmus:

1. Starte in  $q$  eine horizontal verlaufende Halbgerade  $\rho$ .
2. Zähle Schnitte von Polygonkanten mit  $\rho$ .
  - Anzahl Schnitte gerade:  $q$  nicht im Inneren von  $P$
  - Anzahl Schnitte ungerade:  $q$  im Inneren von  $P$



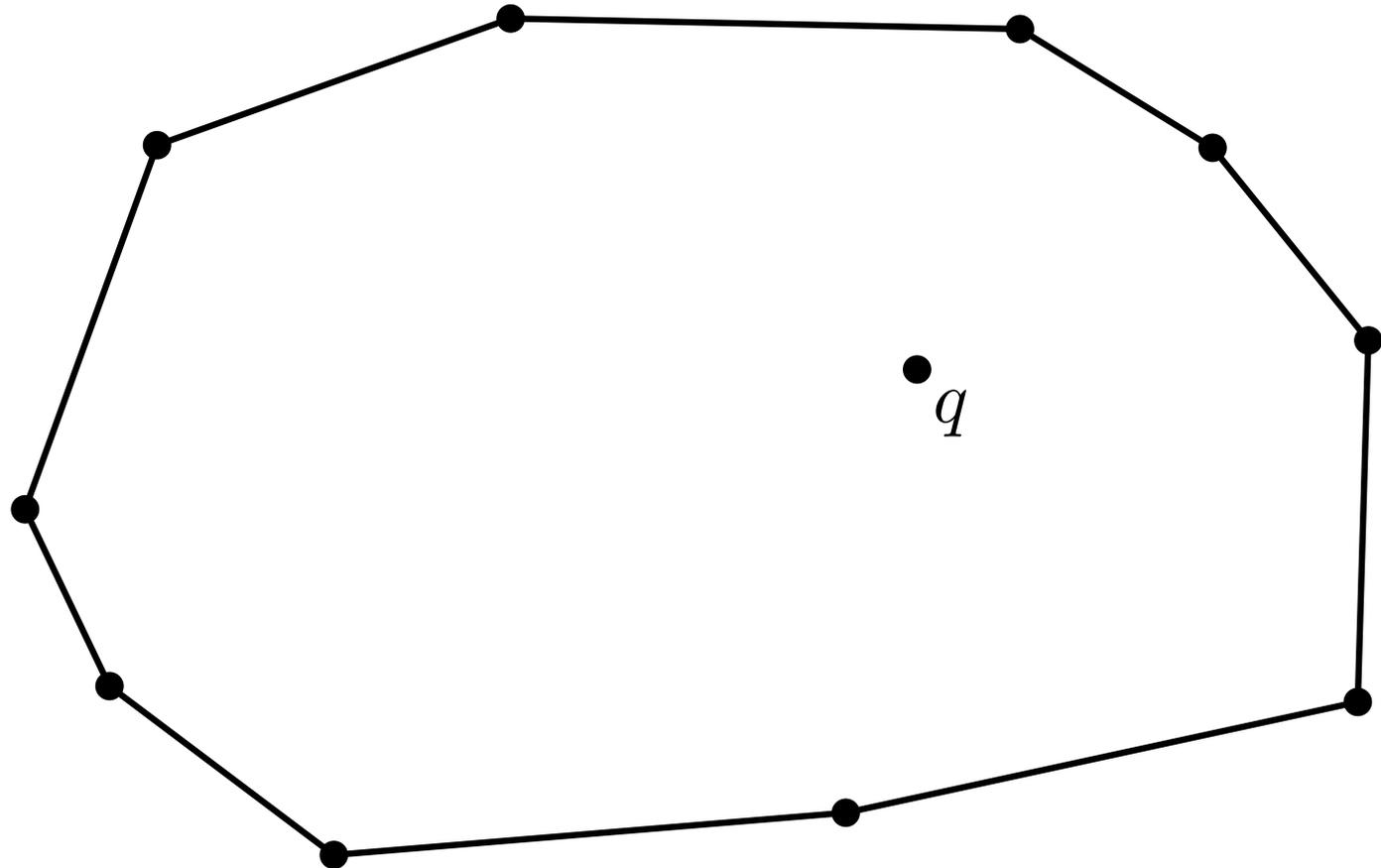
## c) Laufzeit?

# Aufgabe 2

## Gegeben:

- Punkt  $q$
- konvexes Polygon  $P$  bestehend aus  $n$  Punkten

a) Liegt  $q$  im Inneren von  $P$ ?  $\mathcal{O}(\log n)$

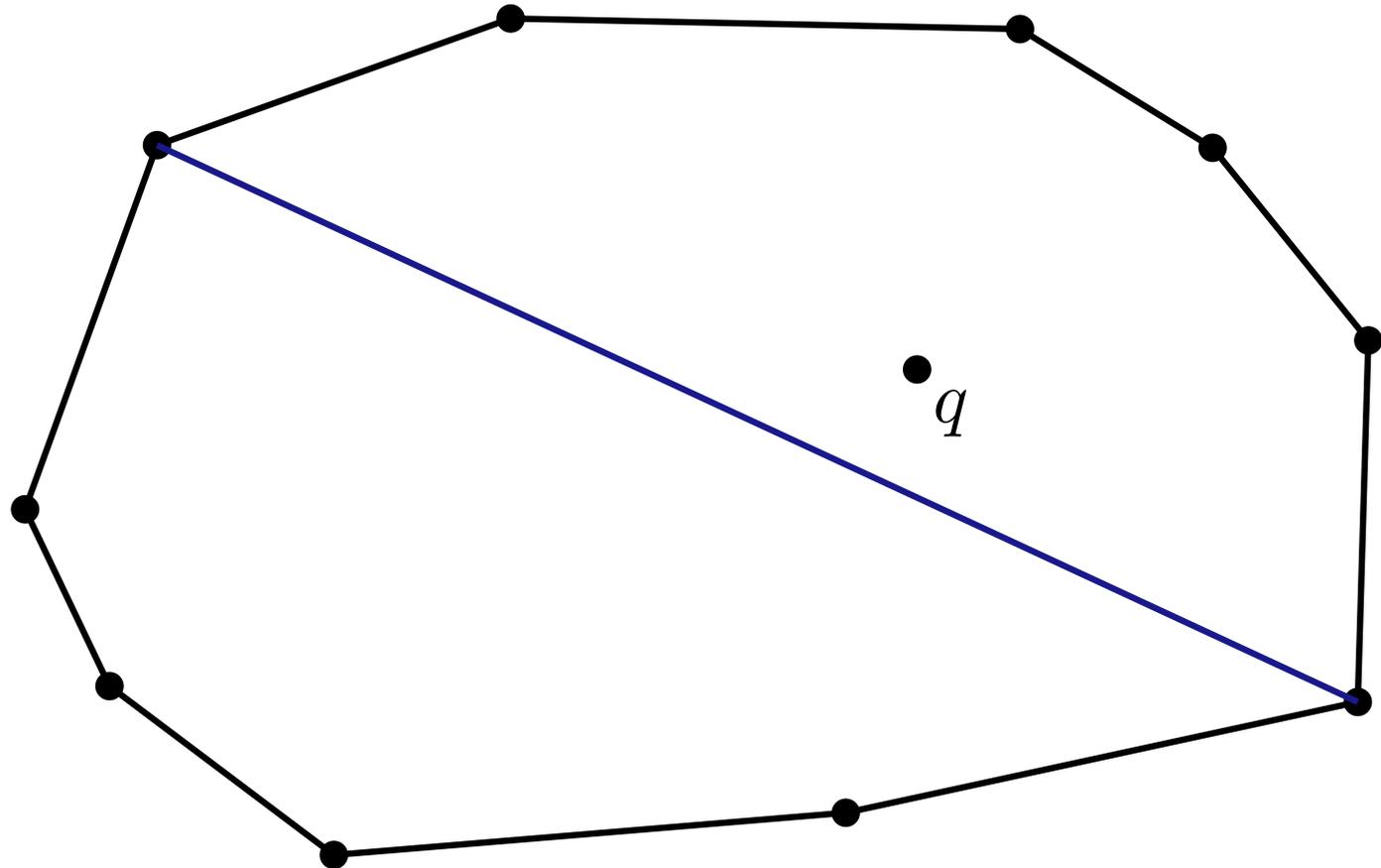


# Aufgabe 2

## Gegeben:

- Punkt  $q$
- konvexes Polygon  $P$  bestehend aus  $n$  Punkten

a) Liegt  $q$  im Inneren von  $P$ ?  $\mathcal{O}(\log n)$

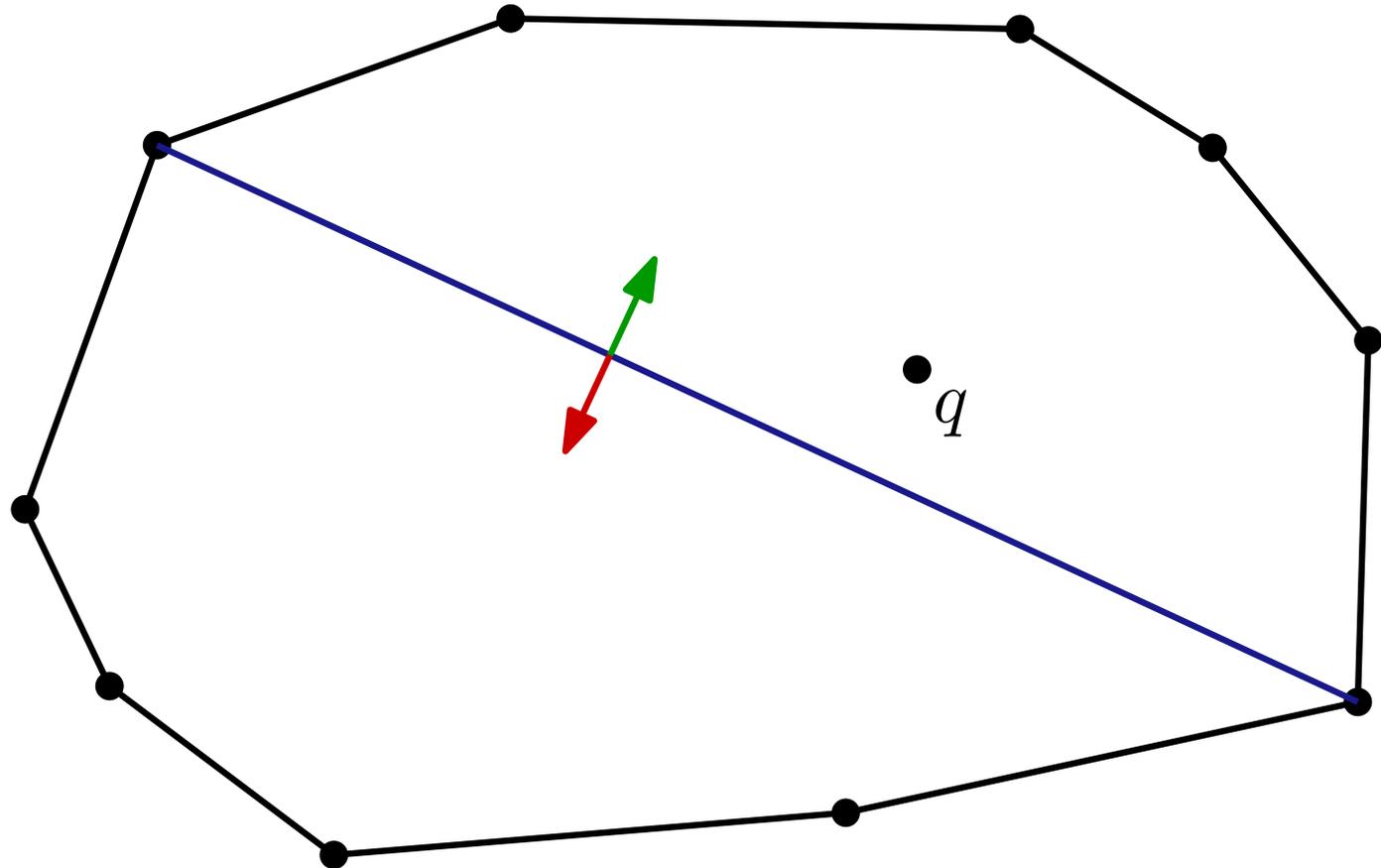


# Aufgabe 2

## Gegeben:

- Punkt  $q$
- konvexes Polygon  $P$  bestehend aus  $n$  Punkten

a) Liegt  $q$  im Inneren von  $P$ ?  $\mathcal{O}(\log n)$

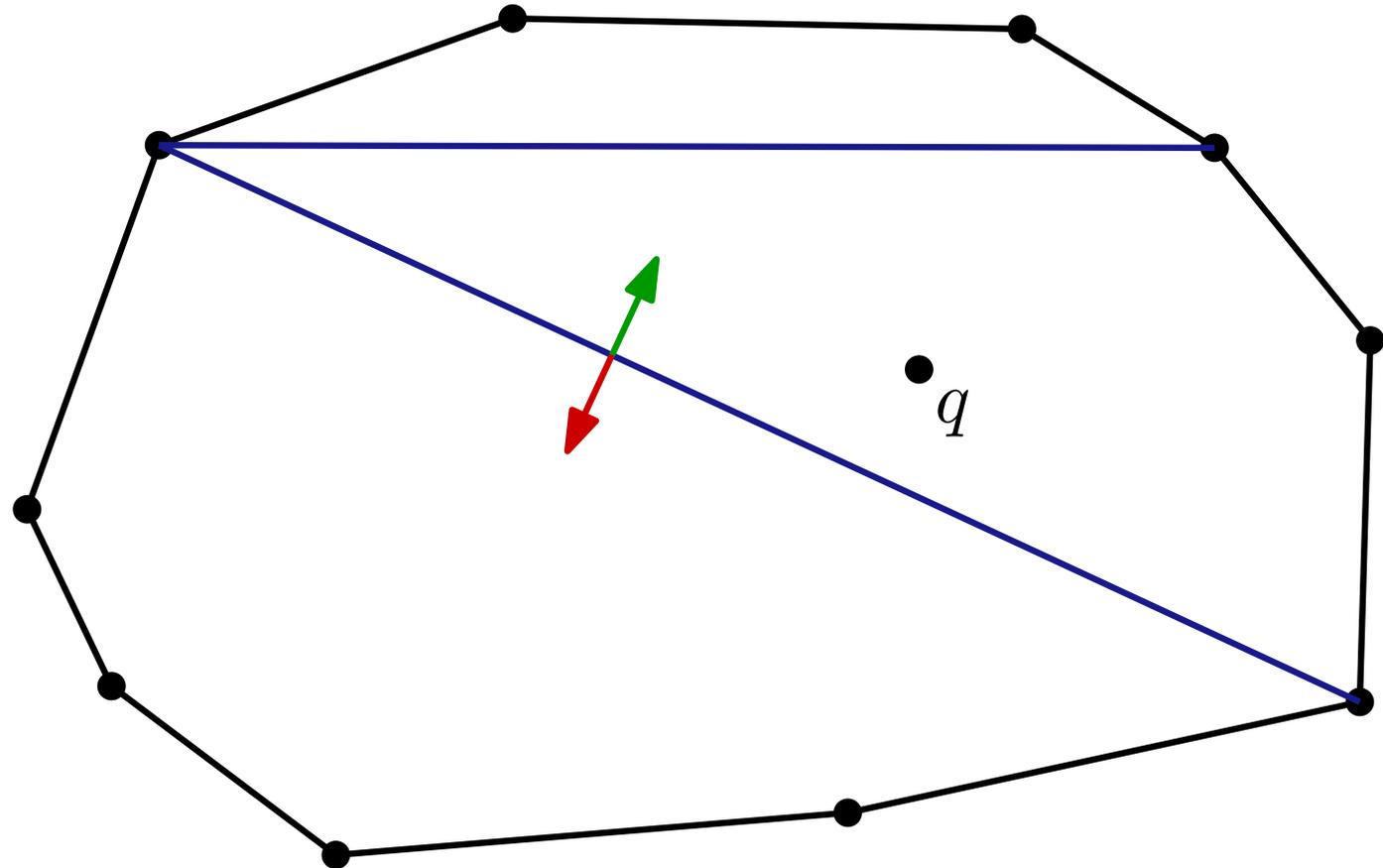


# Aufgabe 2

## Gegeben:

- Punkt  $q$
- konvexes Polygon  $P$  bestehend aus  $n$  Punkten

a) Liegt  $q$  im Inneren von  $P$ ?  $\mathcal{O}(\log n)$

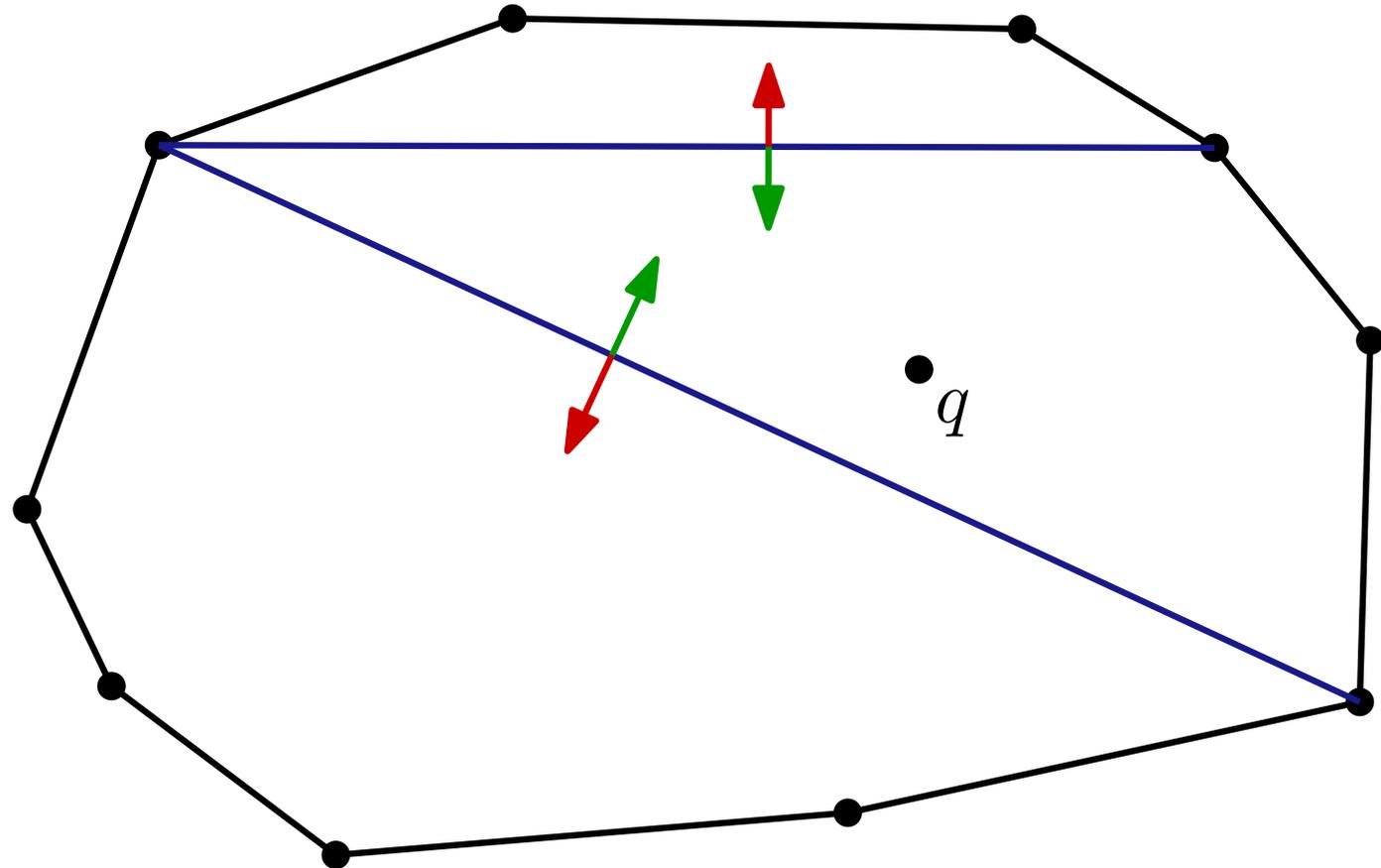


# Aufgabe 2

## Gegeben:

- Punkt  $q$
- konvexes Polygon  $P$  bestehend aus  $n$  Punkten

a) Liegt  $q$  im Inneren von  $P$ ?  $\mathcal{O}(\log n)$

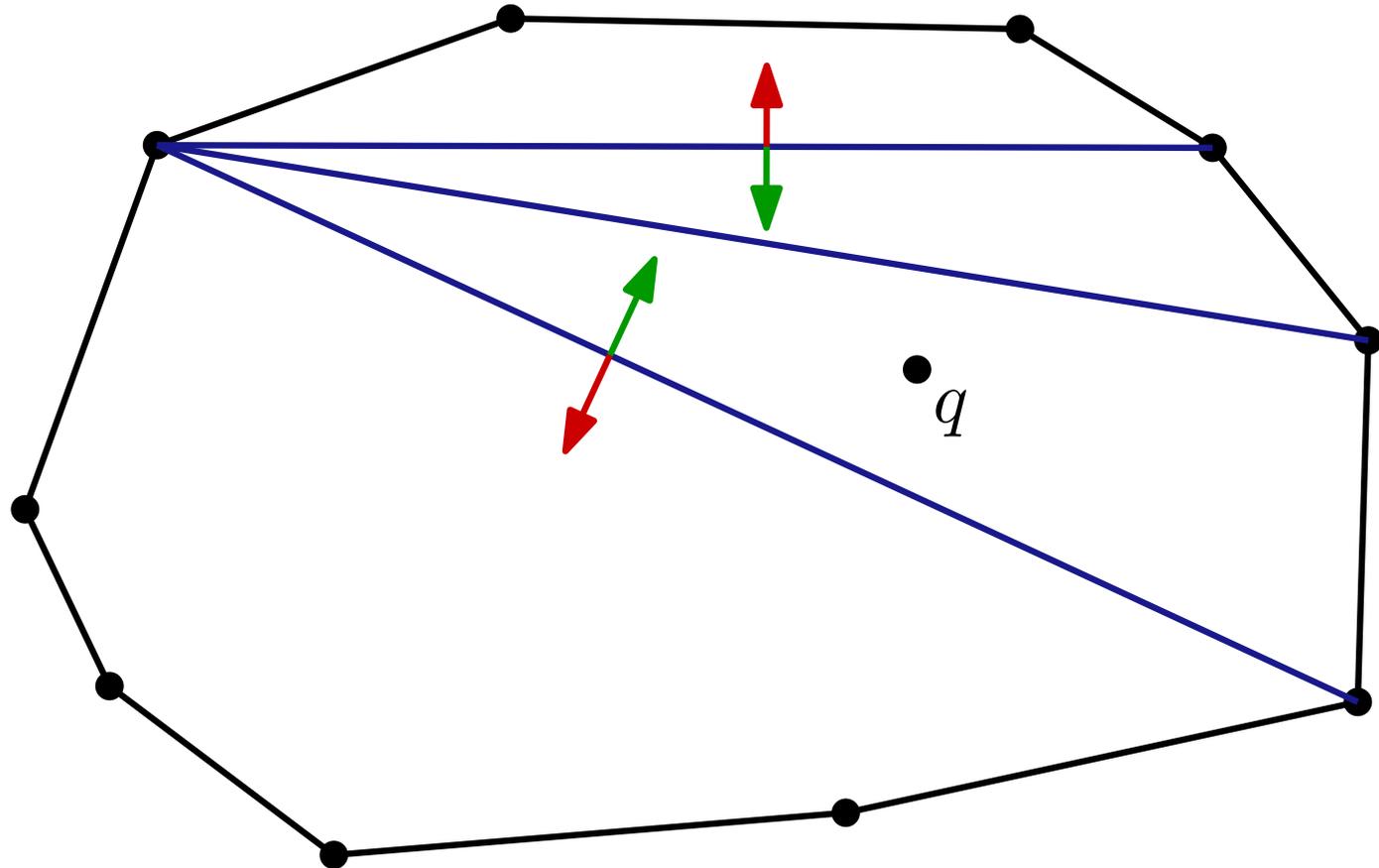


# Aufgabe 2

## Gegeben:

- Punkt  $q$
- konvexes Polygon  $P$  bestehend aus  $n$  Punkten

a) Liegt  $q$  im Inneren von  $P$ ?  $\mathcal{O}(\log n)$

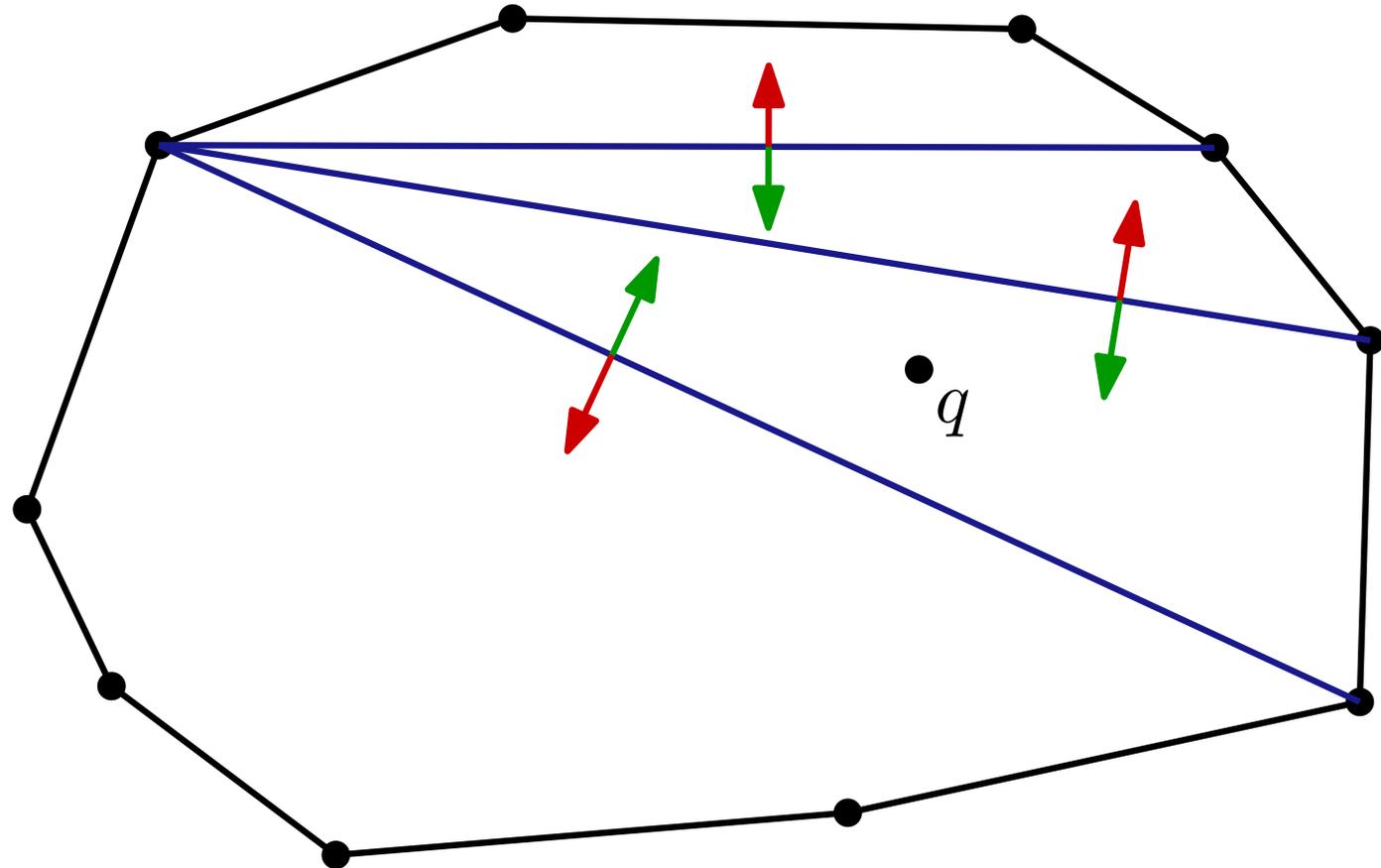


# Aufgabe 2

## Gegeben:

- Punkt  $q$
- konvexes Polygon  $P$  bestehend aus  $n$  Punkten

a) Liegt  $q$  im Inneren von  $P$ ?  $\mathcal{O}(\log n)$

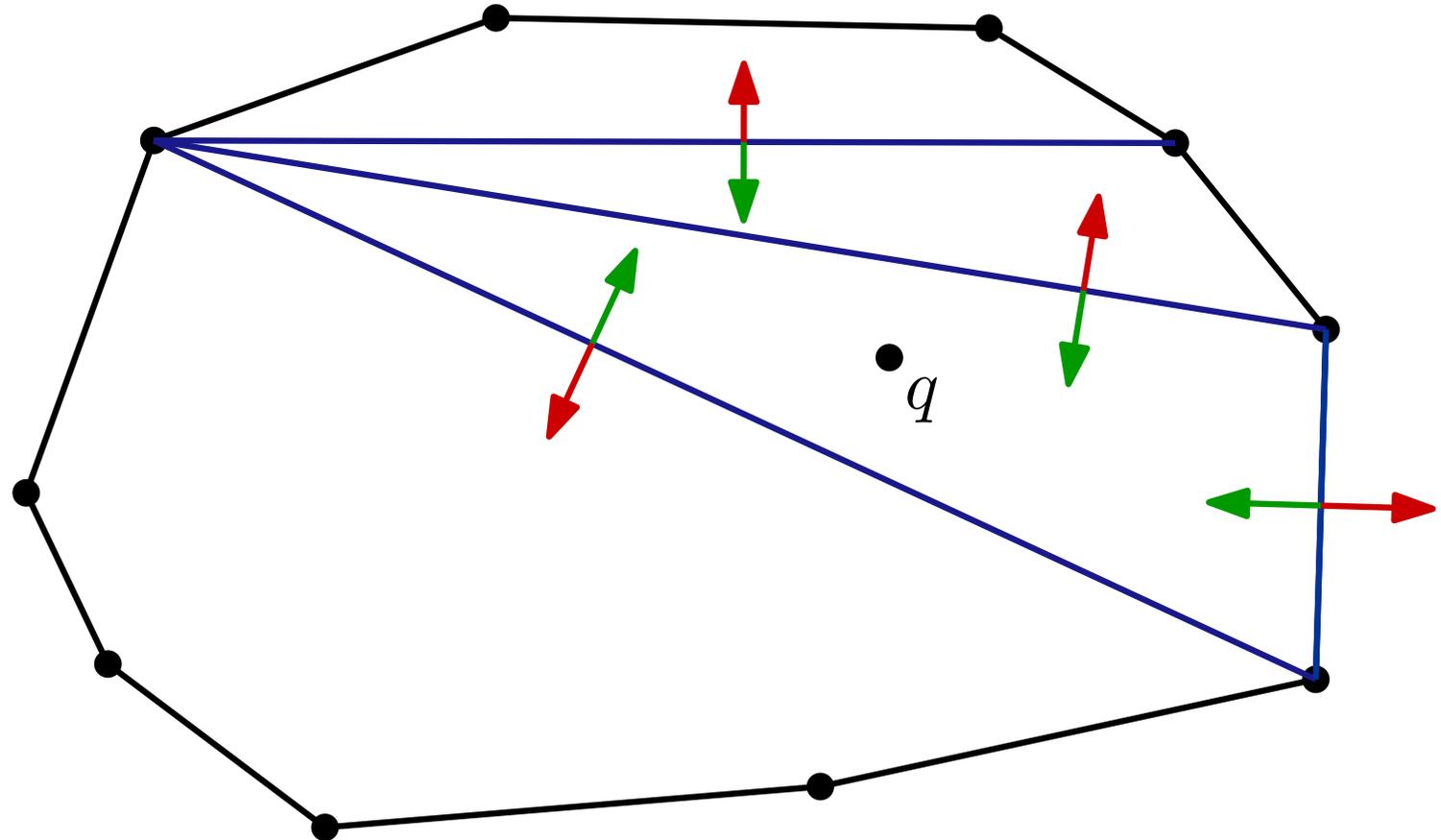


# Aufgabe 2

## Gegeben:

- Punkt  $q$
- konvexes Polygon  $P$  bestehend aus  $n$  Punkten

a) Liegt  $q$  im Inneren von  $P$ ?  $\mathcal{O}(\log n)$

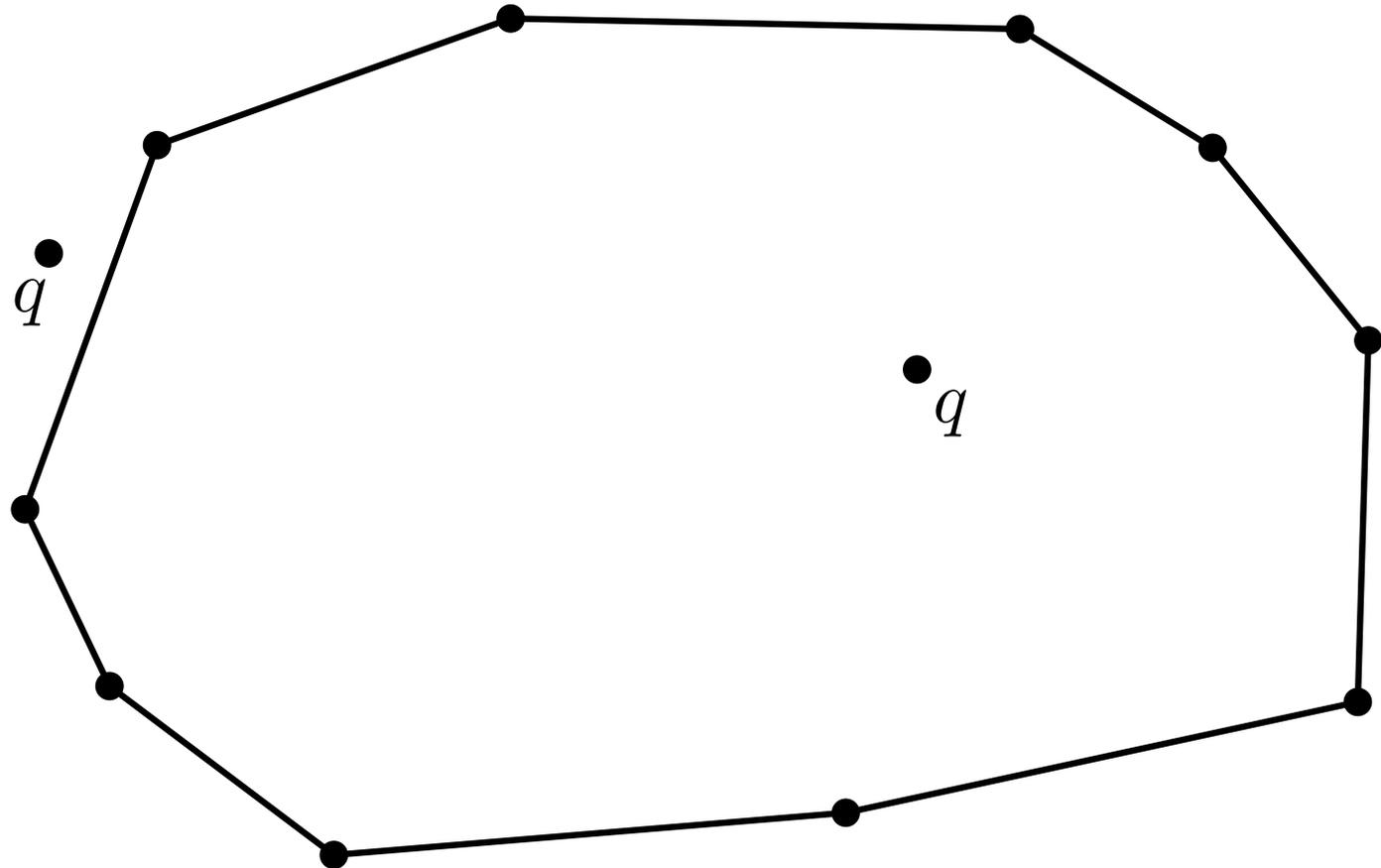


# Aufgabe 2

## Gegeben:

- Punkt  $q$
- konvexes Polygon  $P$  bestehend aus  $n$  Punkten

a) Liegt  $q$  im Inneren von  $P$ ?  $\mathcal{O}(\log n)$

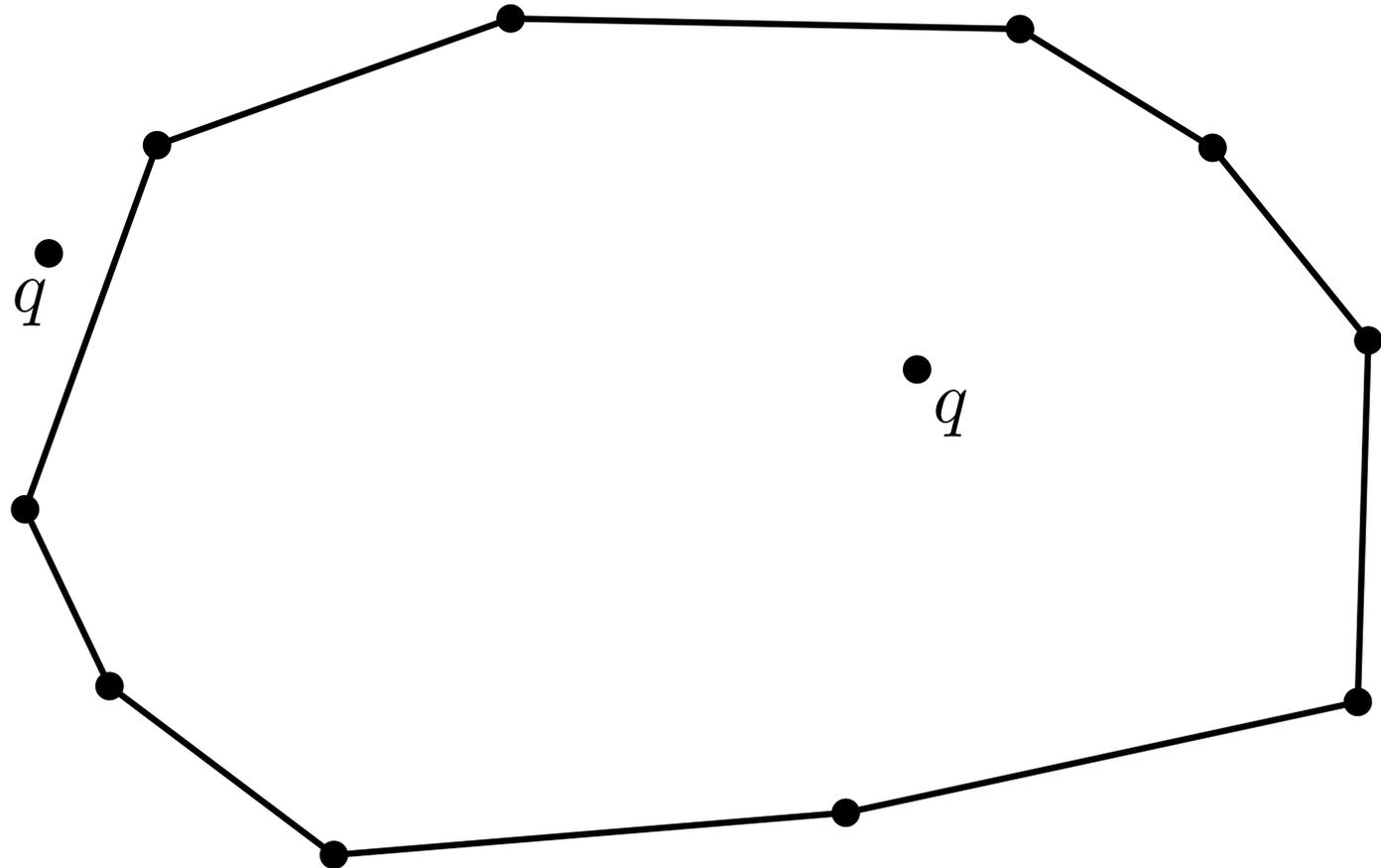


# Aufgabe 2

## Gegeben:

- Punkt  $q$
- konvexes Polygon  $P$  bestehend aus  $n$  Punkten

a) Liegt  $q$  im Inneren von  $P$ ?  $\mathcal{O}(\log n)$

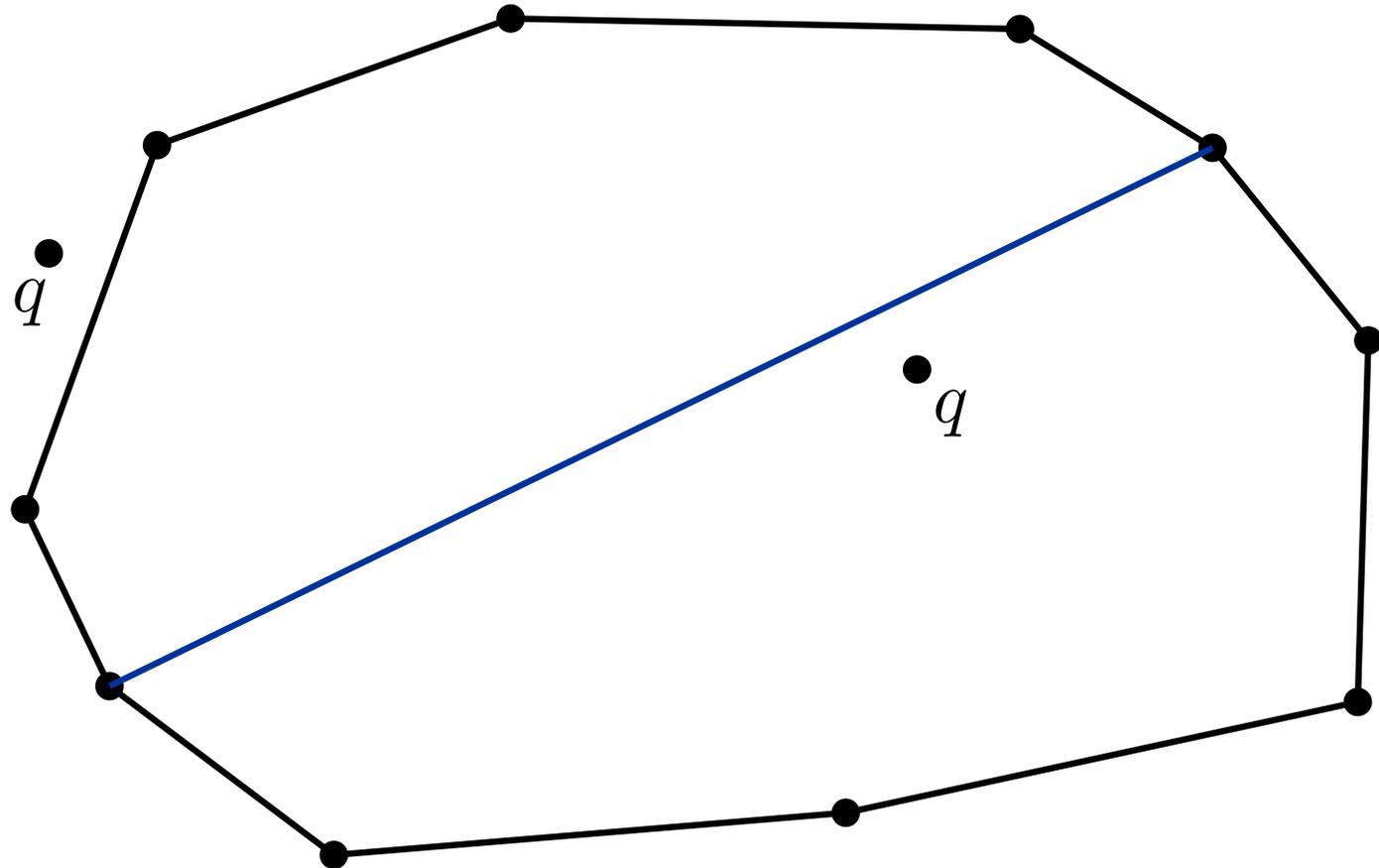


# Aufgabe 2

## Gegeben:

- Punkt  $q$
- konvexes Polygon  $P$  bestehend aus  $n$  Punkten

a) Liegt  $q$  im Inneren von  $P$ ?  $\mathcal{O}(\log n)$

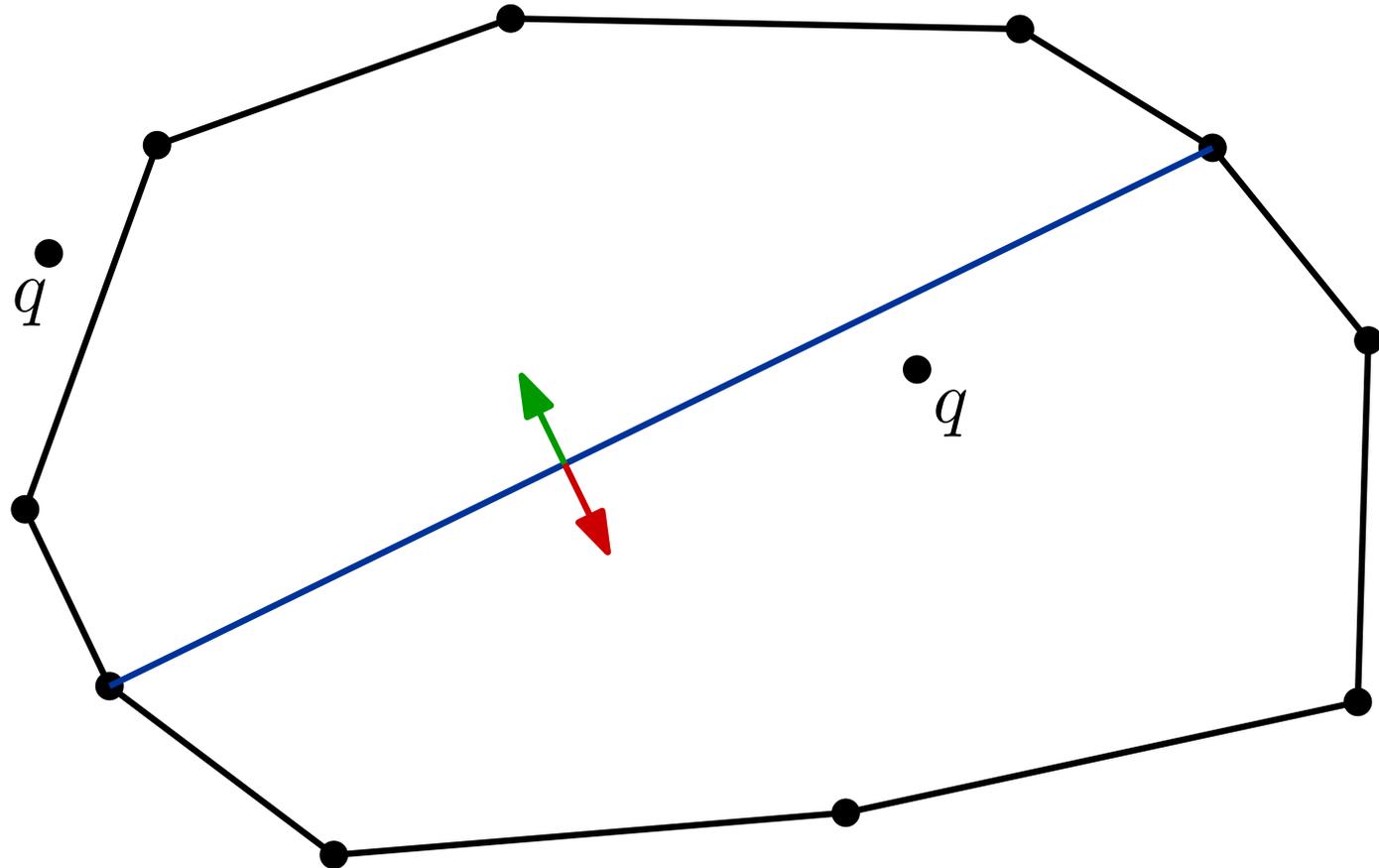


# Aufgabe 2

## Gegeben:

- Punkt  $q$
- konvexes Polygon  $P$  bestehend aus  $n$  Punkten

a) Liegt  $q$  im Inneren von  $P$ ?  $\mathcal{O}(\log n)$

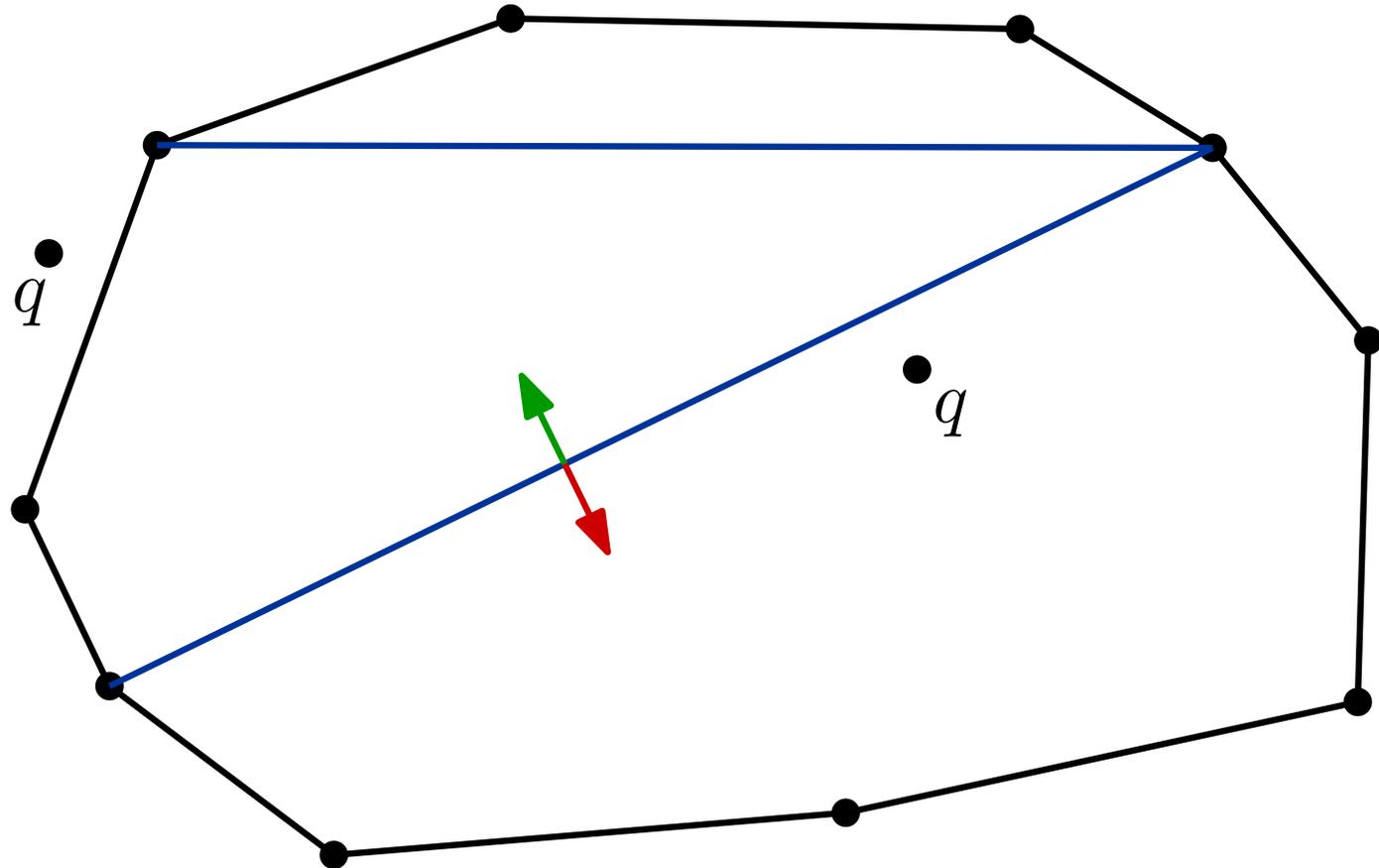


# Aufgabe 2

## Gegeben:

- Punkt  $q$
- konvexes Polygon  $P$  bestehend aus  $n$  Punkten

a) Liegt  $q$  im Inneren von  $P$ ?  $\mathcal{O}(\log n)$

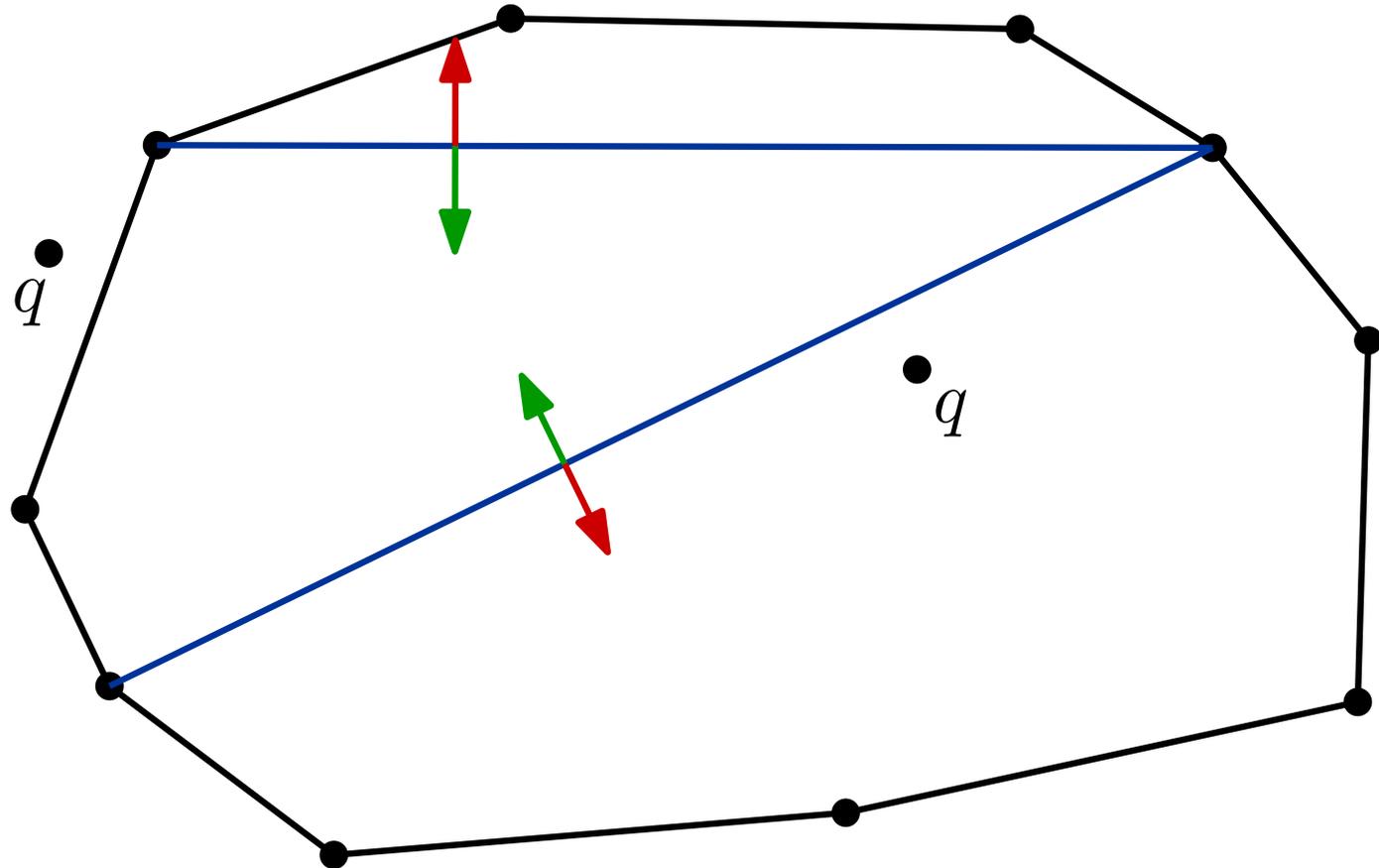


# Aufgabe 2

## Gegeben:

- Punkt  $q$
- konvexes Polygon  $P$  bestehend aus  $n$  Punkten

a) Liegt  $q$  im Inneren von  $P$ ?  $\mathcal{O}(\log n)$

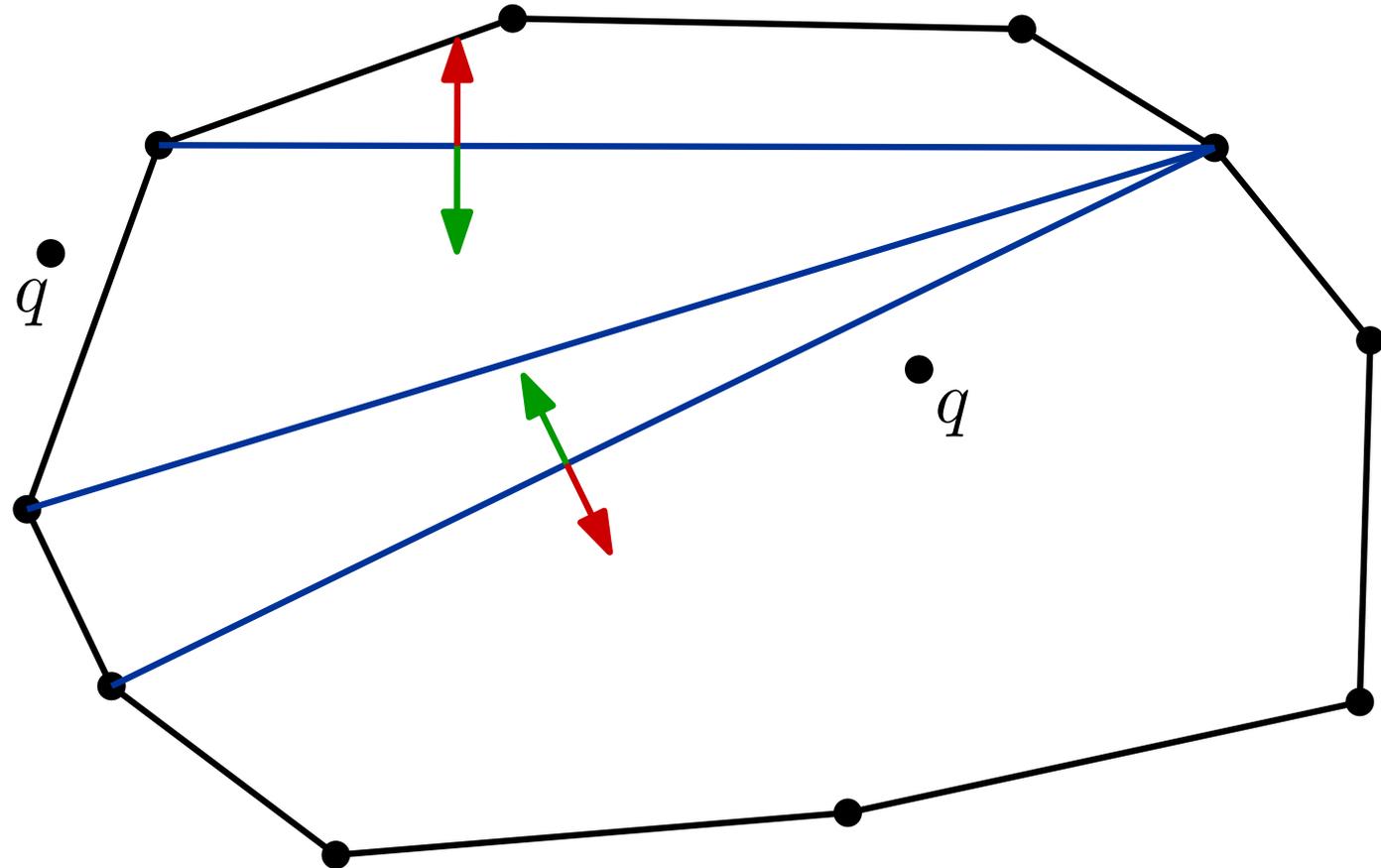


# Aufgabe 2

## Gegeben:

- Punkt  $q$
- konvexes Polygon  $P$  bestehend aus  $n$  Punkten

a) Liegt  $q$  im Inneren von  $P$ ?  $\mathcal{O}(\log n)$

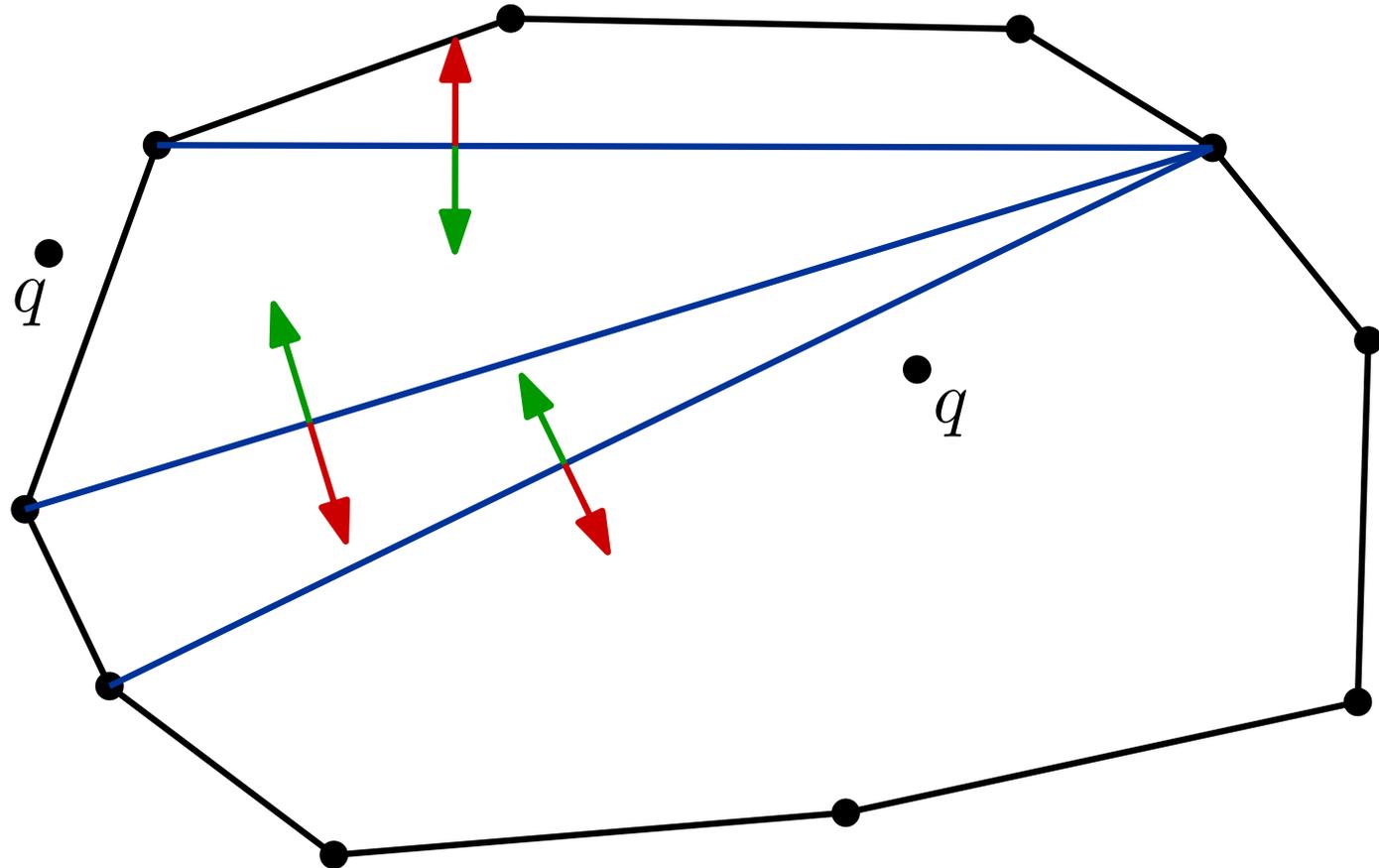


# Aufgabe 2

## Gegeben:

- Punkt  $q$
- konvexes Polygon  $P$  bestehend aus  $n$  Punkten

a) Liegt  $q$  im Inneren von  $P$ ?  $\mathcal{O}(\log n)$

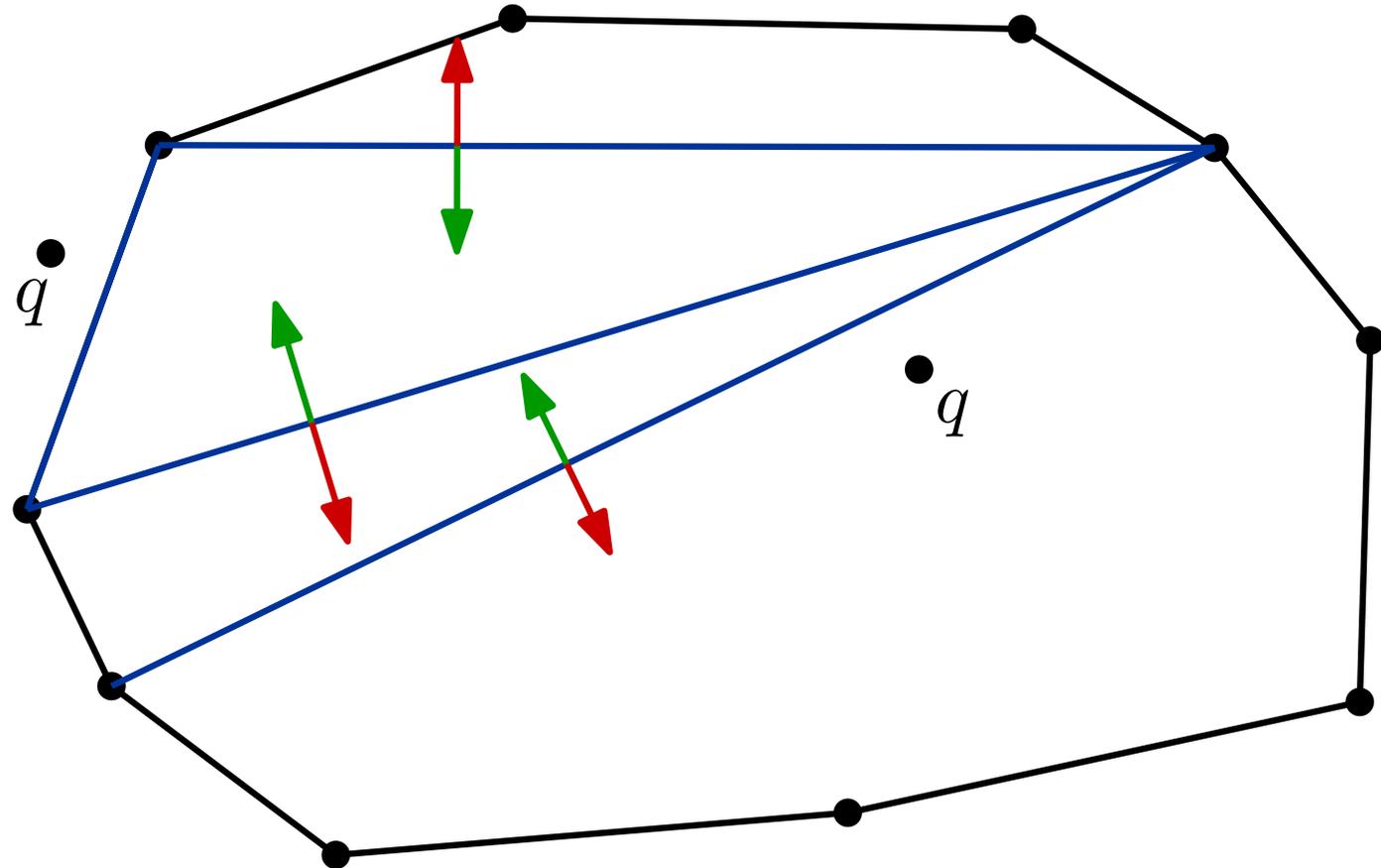


# Aufgabe 2

## Gegeben:

- Punkt  $q$
- konvexes Polygon  $P$  bestehend aus  $n$  Punkten

a) Liegt  $q$  im Inneren von  $P$ ?  $\mathcal{O}(\log n)$

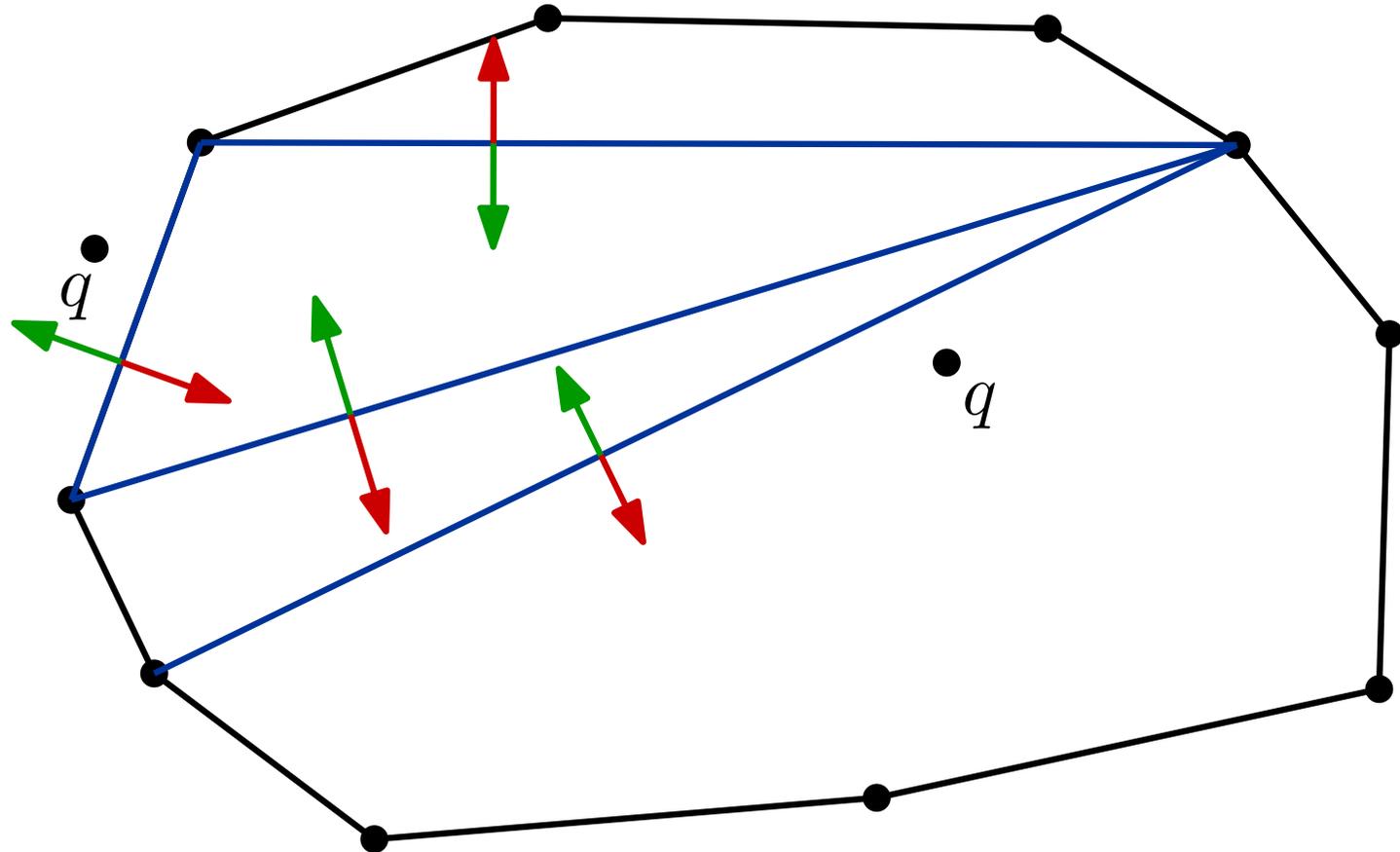


# Aufgabe 2

## Gegeben:

- Punkt  $q$
- konvexes Polygon  $P$  bestehend aus  $n$  Punkten

a) Liegt  $q$  im Inneren von  $P$ ?  $\mathcal{O}(\log n)$



# Aufgabe 2

## Gegeben:

- Punkt  $q$
- $y$ -monotones Polygon  $P$  bestehend aus  $n$  Punkten

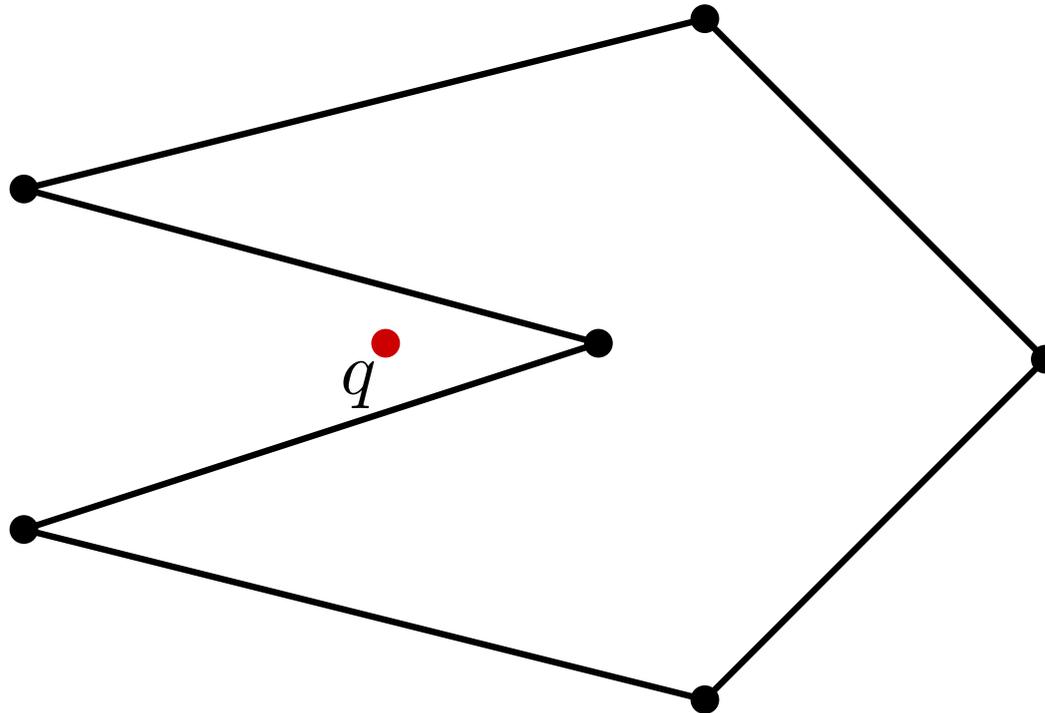
b) Kann man das Verfahren aus a) anpassen?

# Aufgabe 2

## Gegeben:

- Punkt  $q$
- $y$ -monotones Polygon  $P$  bestehend aus  $n$  Punkten

b) Kann man das Verfahren aus a) anpassen?

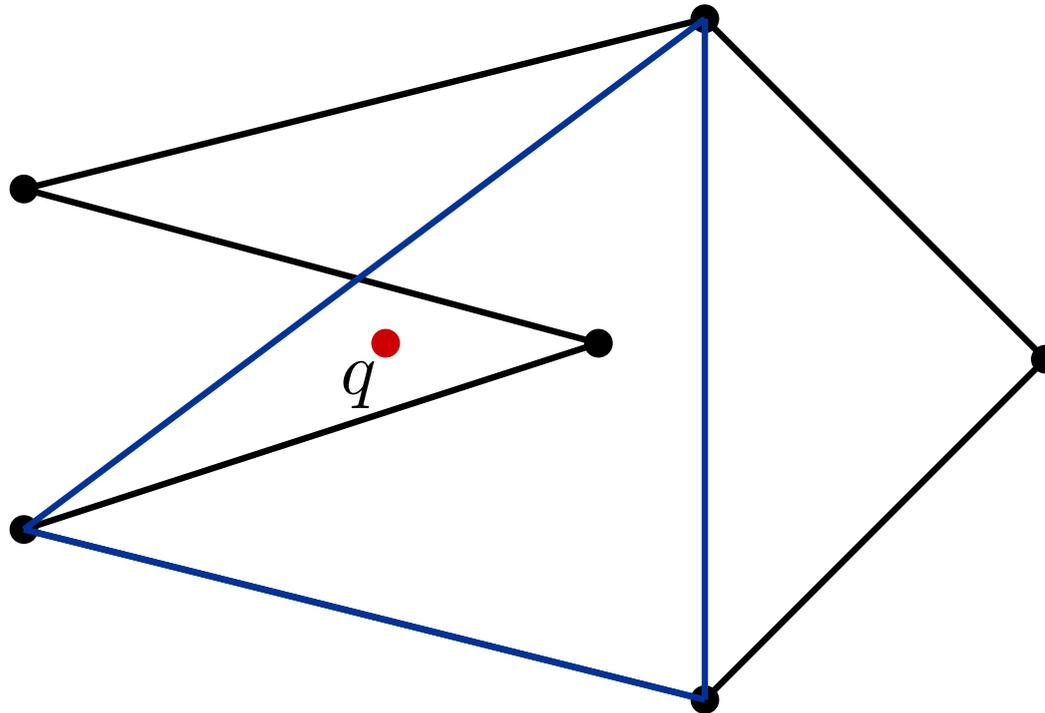


# Aufgabe 2

## Gegeben:

- Punkt  $q$
- $y$ -monotones Polygon  $P$  bestehend aus  $n$  Punkten

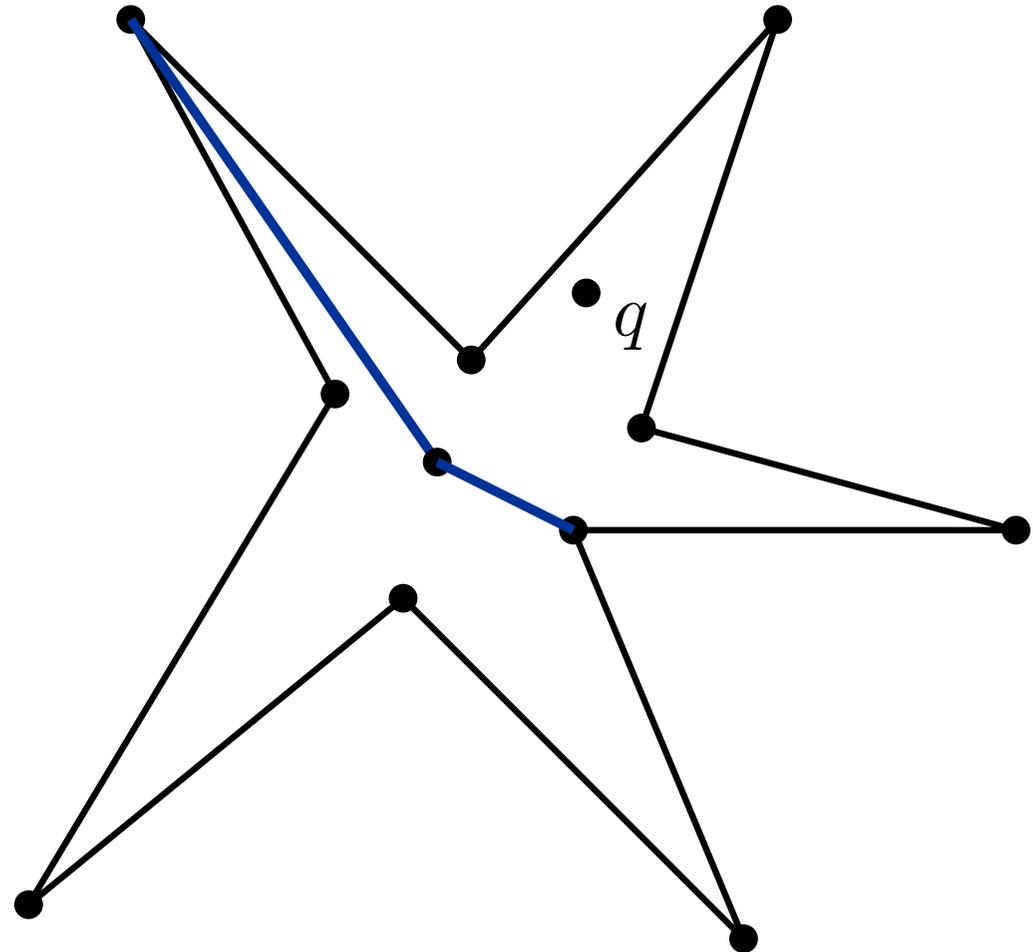
b) Kann man das Verfahren aus a) anpassen?



# Aufgabe 3

## Gegeben:

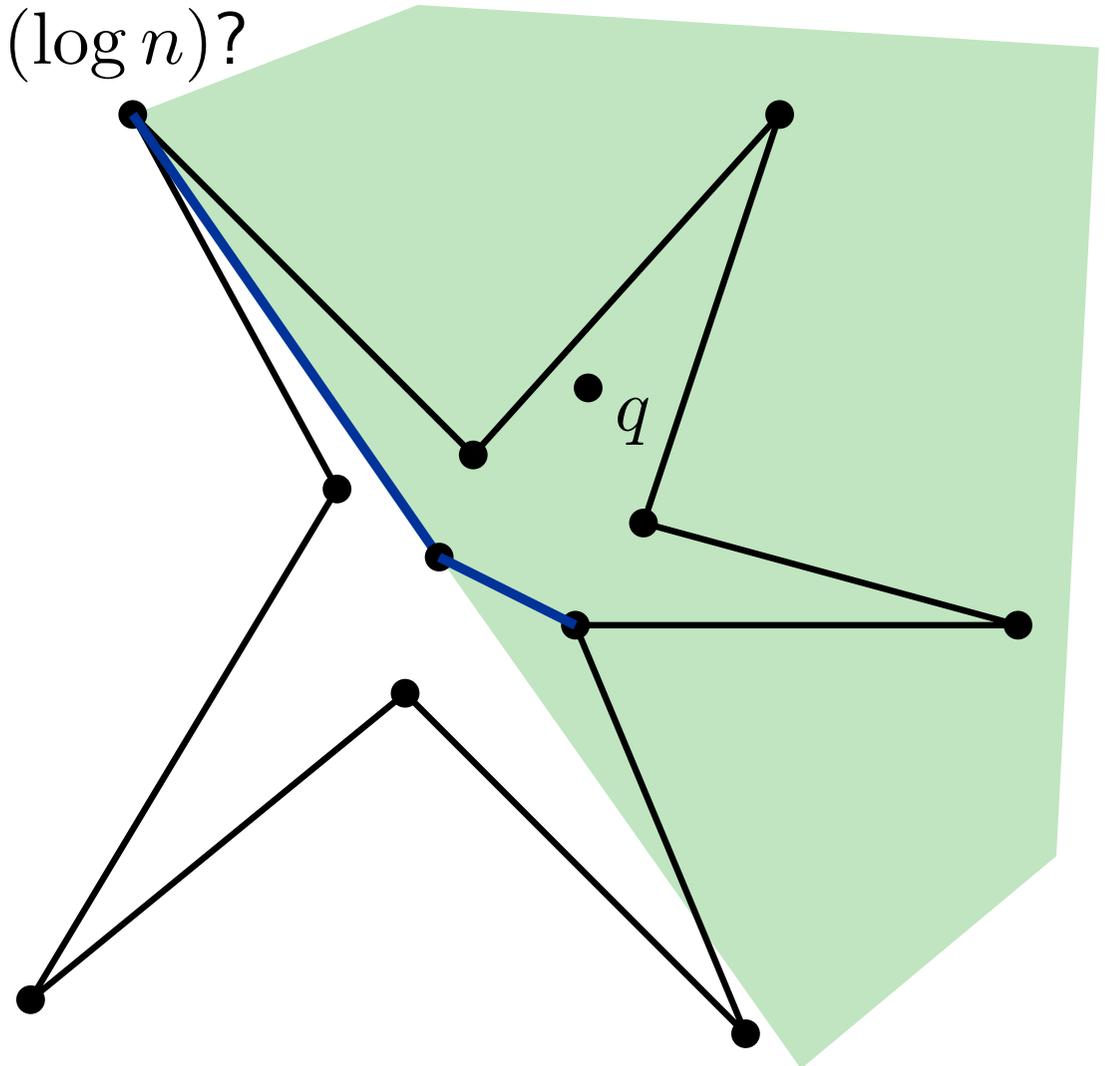
- Punkt  $q$
  - sternförmiges Polygon  $P$  bestehend aus  $n$  Punkten
- a)  $q$  im Inneren von  $P$  in  $\mathcal{O}(\log n)$ ?



# Aufgabe 3

## Gegeben:

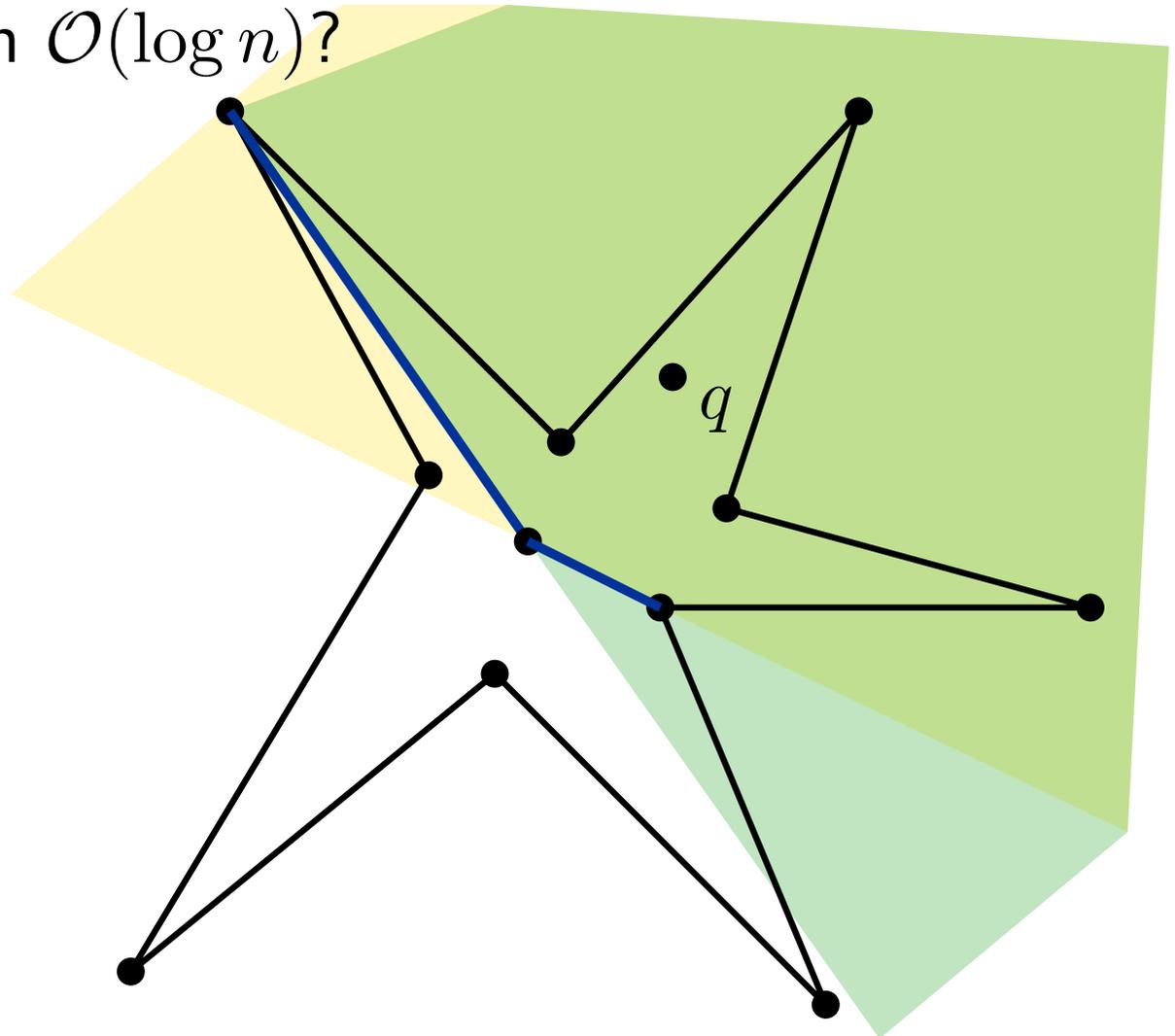
- Punkt  $q$
  - sternförmiges Polygon  $P$  bestehend aus  $n$  Punkten
- a)  $q$  im Inneren von  $P$  in  $\mathcal{O}(\log n)$ ?



# Aufgabe 3

## Gegeben:

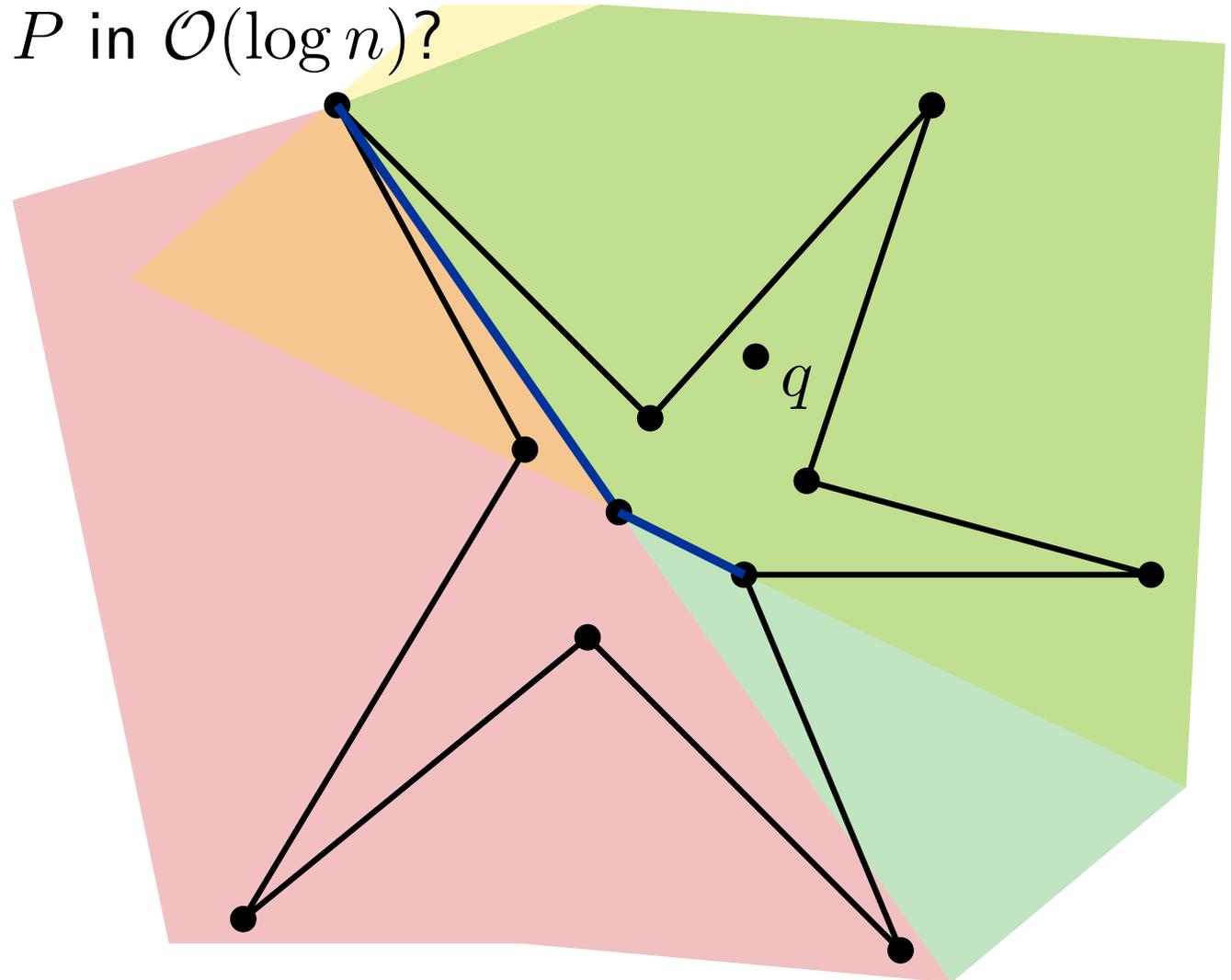
- Punkt  $q$
  - sternförmiges Polygon  $P$  bestehend aus  $n$  Punkten
- a)  $q$  im Inneren von  $P$  in  $\mathcal{O}(\log n)$ ?



# Aufgabe 3

## Gegeben:

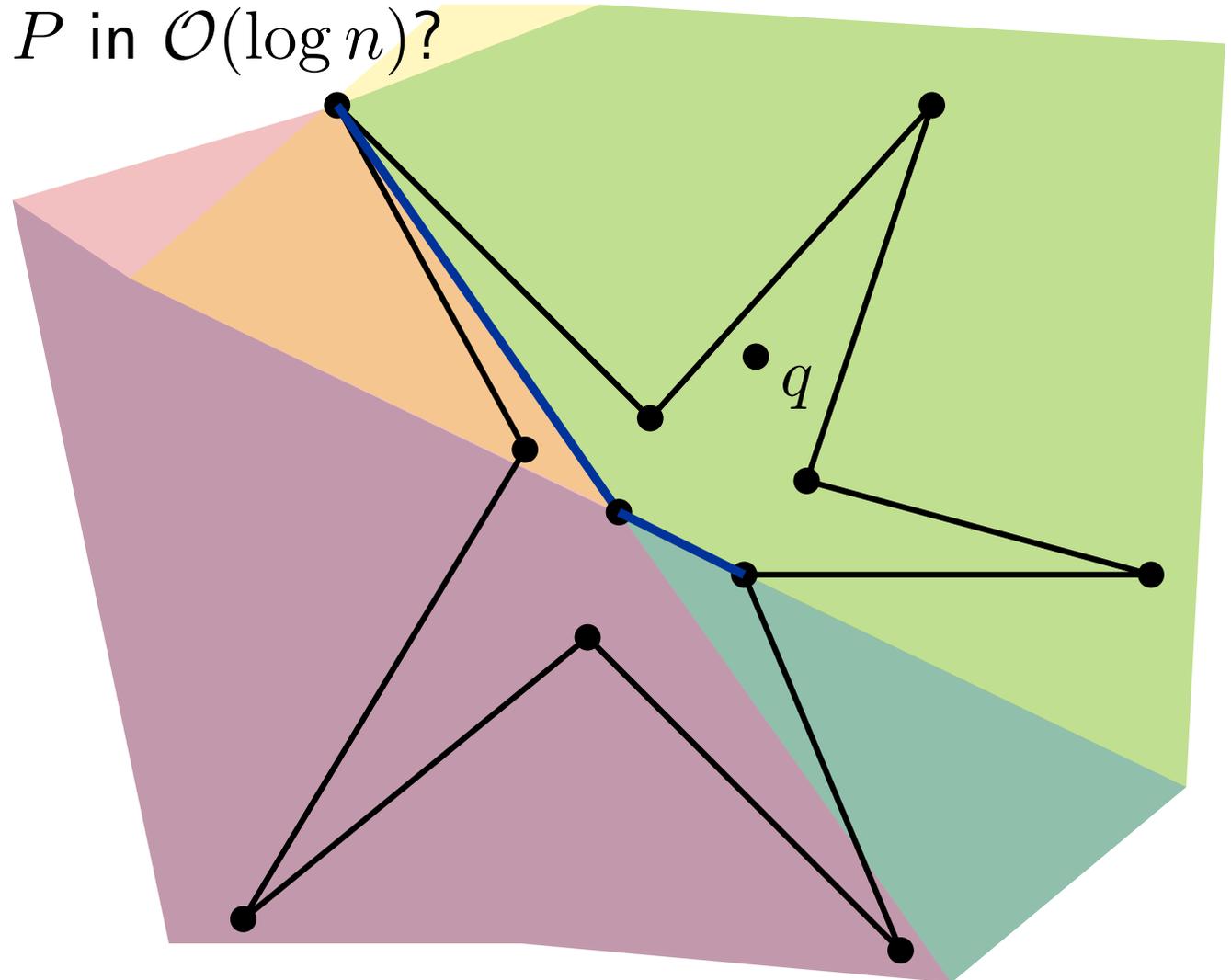
- Punkt  $q$
  - sternförmiges Polygon  $P$  bestehend aus  $n$  Punkten
- a)  $q$  im Inneren von  $P$  in  $\mathcal{O}(\log n)$ ?



# Aufgabe 3

## Gegeben:

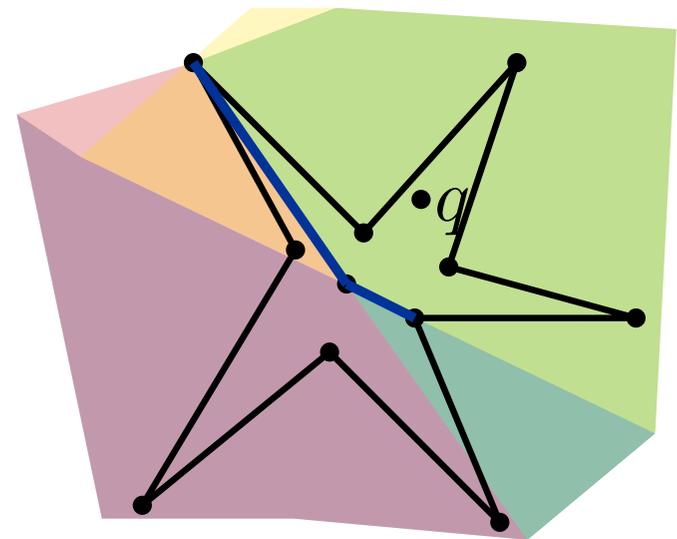
- Punkt  $q$
  - sternförmiges Polygon  $P$  bestehend aus  $n$  Punkten
- a)  $q$  im Inneren von  $P$  in  $\mathcal{O}(\log n)$ ?



# Aufgabe 3

## Gegeben:

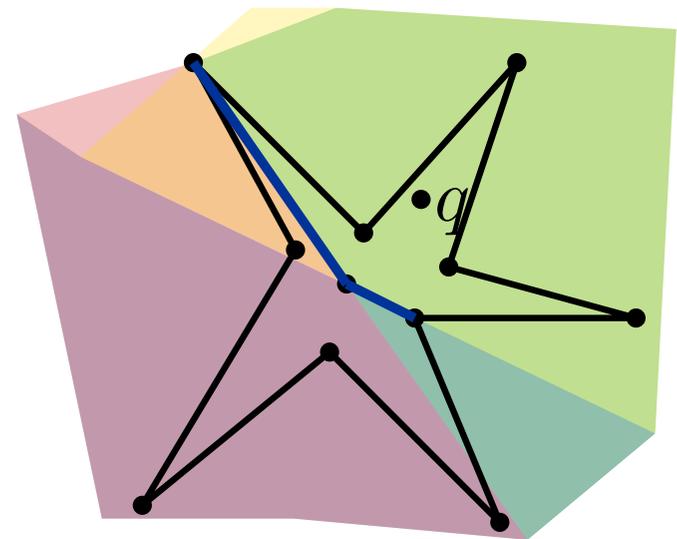
- Punkt  $q$
  - sternförmiges Polygon  $P$  bestehend aus  $n$  Punkten
- a)  $q$  im Inneren von  $P$  in  $\mathcal{O}(\log n)$ ?



# Aufgabe 3

## Gegeben:

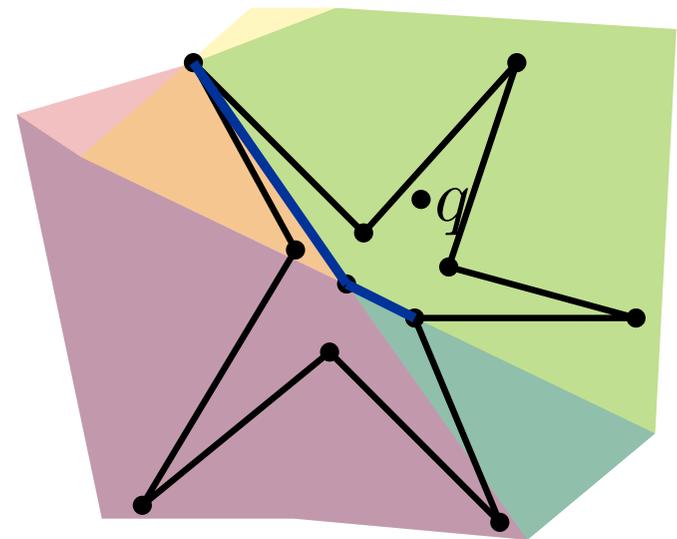
- Punkt  $q$
  - sternförmiges Polygon  $P$  bestehend aus  $n$  Punkten
- a)  $q$  im Inneren von  $P$  in  $\mathcal{O}(\log n)$ ?



# Aufgabe 3

## Gegeben:

- Punkt  $q$
  - sternförmiges Polygon  $P$  bestehend aus  $n$  Punkten
- b) Was ist, wenn  $p$  nicht bekannt ist?

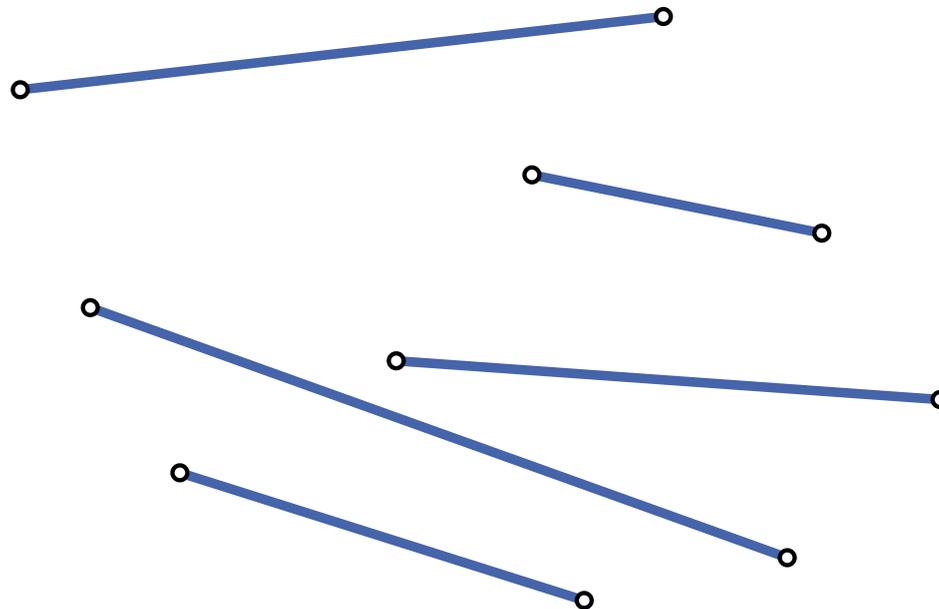


# Aufgabe 4

## Ray-Shooting Problem Hier: Vereinfachte Version

Punkt  $q \in \mathbb{R}^2$  gegeben und  $n$  sich nicht schneidende Streckensegmente.  
Sei  $\rho$  vertikale Halbgerade die von  $q$  aus nach oben 'schießt'.

Finde 'erstes' Streckensegment das  $\rho$  schneidet.

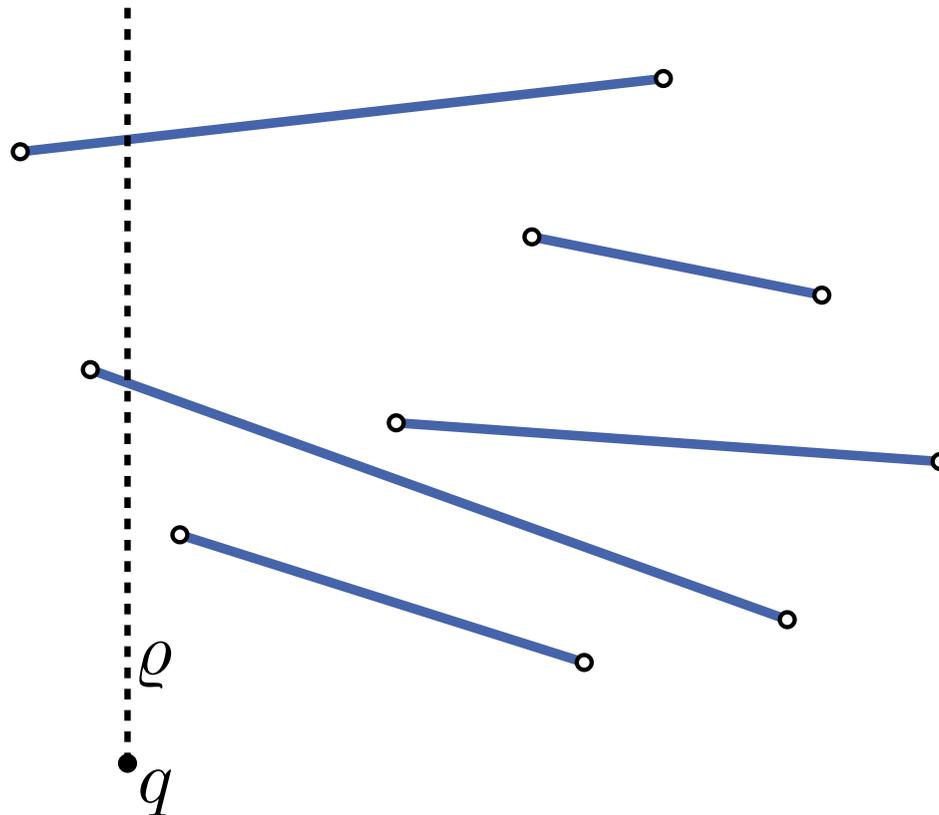


# Aufgabe 4

## Ray-Shooting Problem Hier: Vereinfachte Version

Punkt  $q \in \mathbb{R}^2$  gegeben und  $n$  sich nicht schneidende Streckensegmente.  
Sei  $\rho$  vertikale Halbgerade die von  $q$  aus nach oben 'schießt'.

Finde 'erstes' Streckensegment das  $\rho$  schneidet.

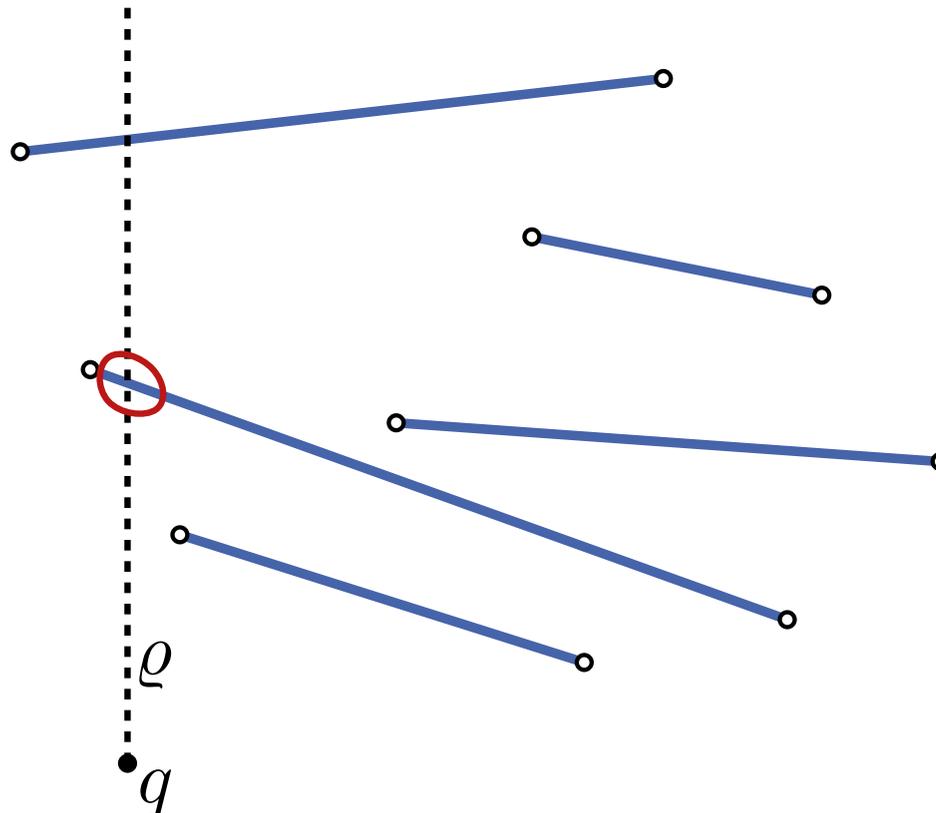


# Aufgabe 4

## Ray-Shooting Problem Hier: Vereinfachte Version

Punkt  $q \in \mathbb{R}^2$  gegeben und  $n$  sich nicht schneidende Streckensegmente.  
Sei  $\rho$  vertikale Halbgerade die von  $q$  aus nach oben 'schießt'.

Finde 'erstes' Streckensegment das  $\rho$  schneidet.

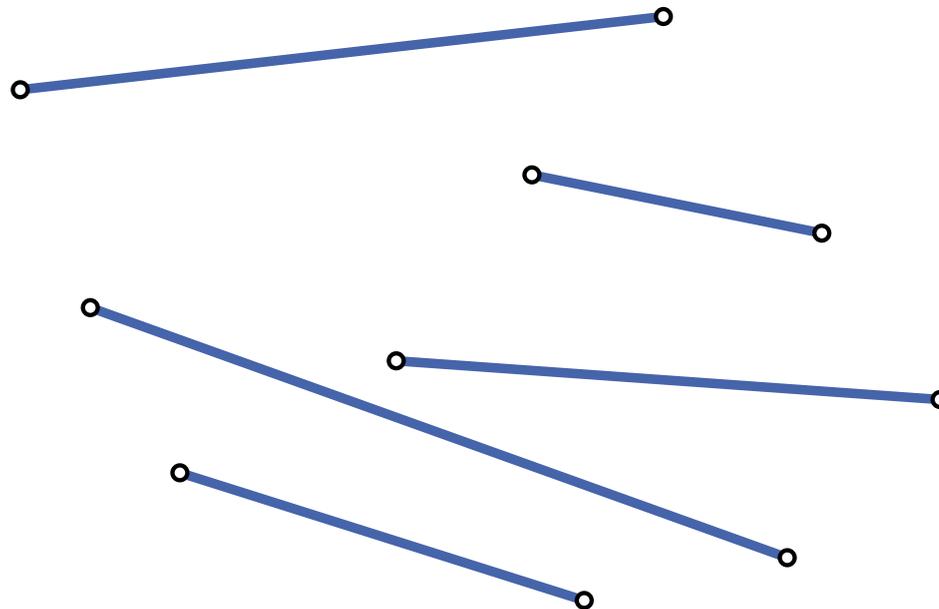


# Aufgabe 4

## Ray-Shooting Problem Hier: Vereinfachte Version

Punkt  $q \in \mathbb{R}^2$  gegeben und  $n$  sich nicht schneidende Streckensegmente.  
Sei  $\rho$  vertikale Halbgerade die von  $q$  aus nach oben 'schießt'.

Finde 'erstes' Streckensegment das  $\rho$  schneidet.

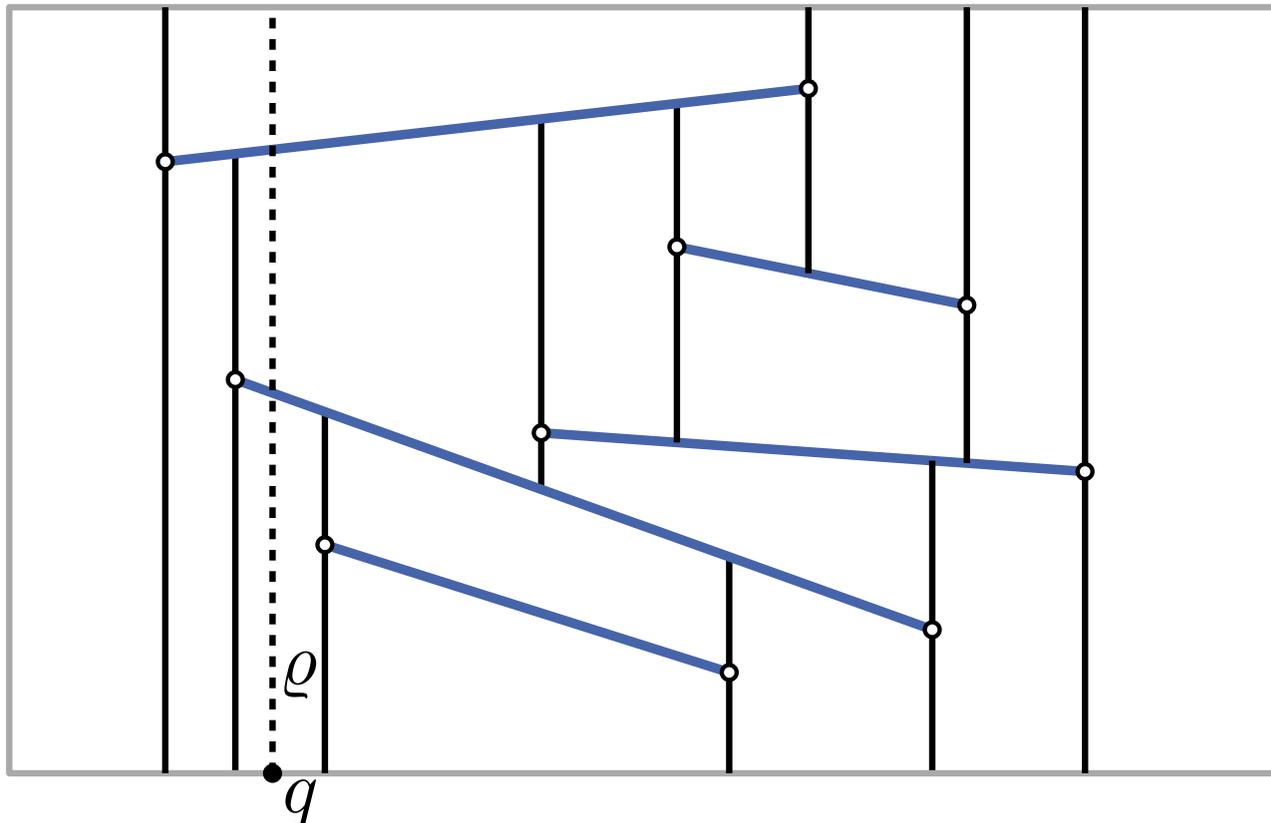


# Aufgabe 4

## Ray-Shooting Problem Hier: Vereinfachte Version

Punkt  $q \in \mathbb{R}^2$  gegeben und  $n$  sich nicht schneidende Streckensegmente.  
Sei  $\rho$  vertikale Halbgerade die von  $q$  aus nach oben 'schießt'.

Finde 'erstes' Streckensegment das  $\rho$  schneidet.

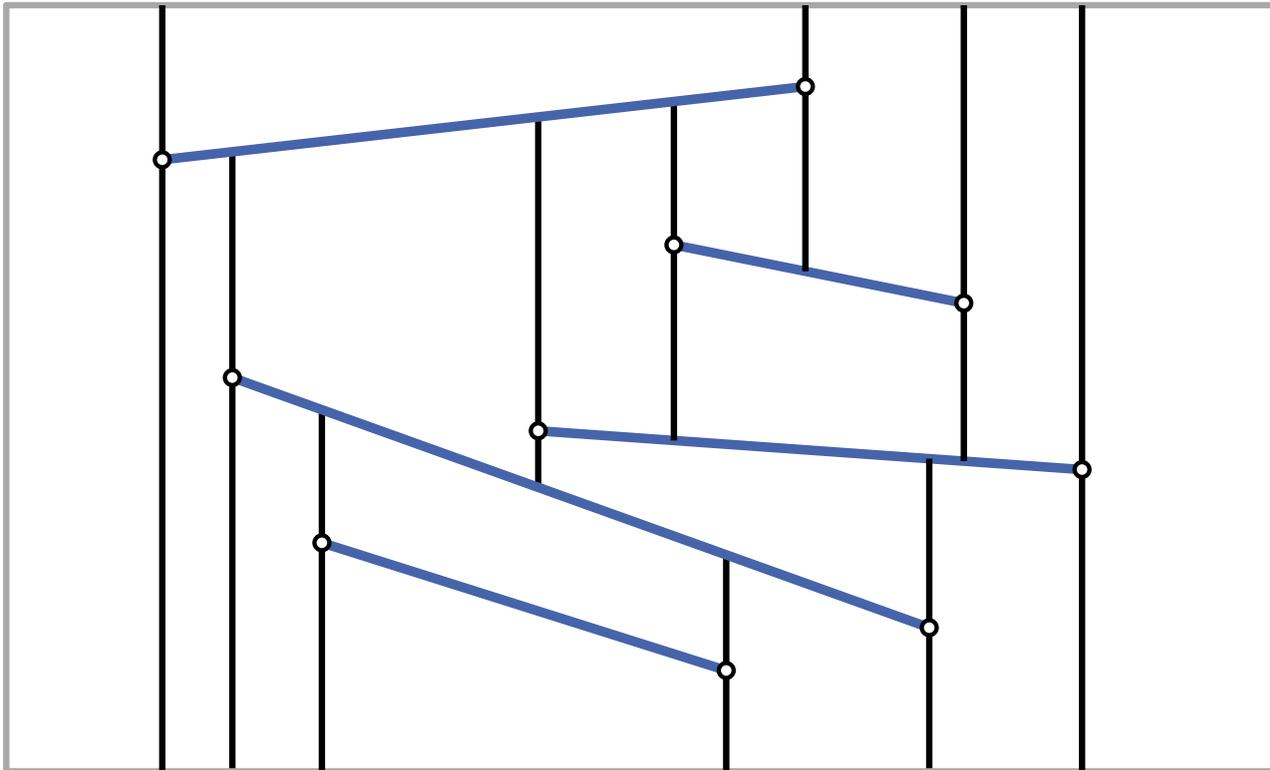


# Aufgabe 4

## Ray-Shooting Problem Hier: Vereinfachte Version

Punkt  $q \in \mathbb{R}^2$  gegeben und  $n$  sich nicht schneidende Streckensegmente.  
Sei  $\rho$  vertikale Halbgerade die von  $q$  aus nach oben 'schießt'.

Finde 'erstes' Streckensegment das  $\rho$  schneidet.



# Aufgabe 4

## Ray-Shooting Problem Hier: Vereinfachte Version

Punkt  $q \in \mathbb{R}^2$  gegeben und  $n$  sich mögl. schneidende Streckensegmente.  
Sei  $\rho$  vertikale Halbgerade die von  $q$  aus nach oben 'schießt'.

Finde 'erstes' Streckensegment das  $\rho$  schneidet.

b) Verfahren aus a) adaptierbar? Wenn ja, wie aufwändig?

# Aufgabe 4

## Ray-Shooting Problem Hier: Vereinfachte Version

Punkt  $q \in \mathbb{R}^2$  gegeben und  $n$  sich mögl. schneidende Streckensegmente.  
Sei  $\rho$  vertikale Halbgerade die von  $q$  aus nach oben 'schießt'.

Finde 'erstes' Streckensegment das  $\rho$  schneidet.

b) Verfahren aus a) adaptierbar? Wenn ja, wie aufwändig?

Behauptung:

Anfrage-Zeit  $\mathcal{O}(\log n)$  und Konstruktionszeit  $\mathcal{O}((n + I) \log n)$

Das war's!

Achtung!

Nächster Termin:  
**Donnertag, 14.06, 09:45 Uhr**  
Raum 131, Gebäude 50.34