

Übung Algorithmische Geometrie

Streckensegmente + Polygontriangulierung

LEHRSTUHL FÜR ALGORITHMIK I · INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK · FAKULTÄT FÜR INFORMATIK

Andreas Gemsa
10.05.2012



Übungsblatt 2

Übungsblatt 3

Nachtrag – Konvexe Hülle

Input: $P \subset \mathbb{R}^2$

- Berechne in $O(n)$ die Menge P' alle Punkte der von $CH(P)$
- Berechne die konvexe Hülle von P' in $O(h \log h)$

Gesamtlaufzeit: $O(n) + O(h \log h)$

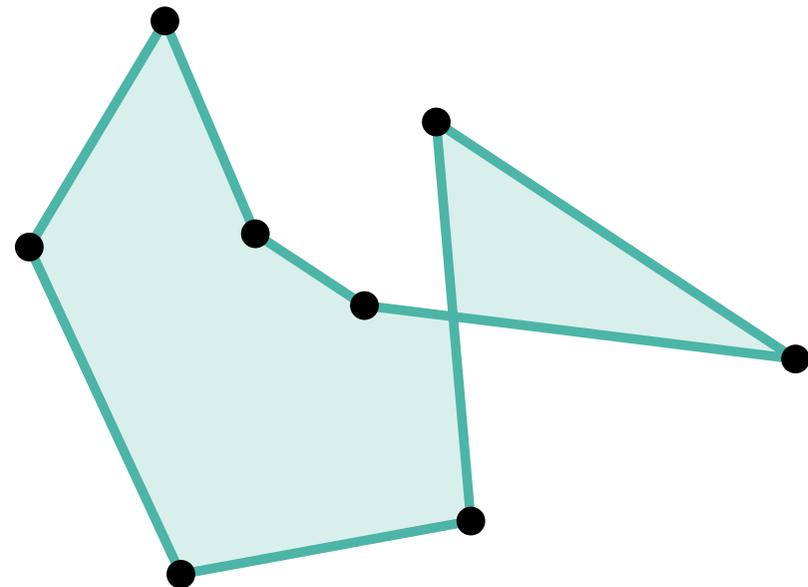
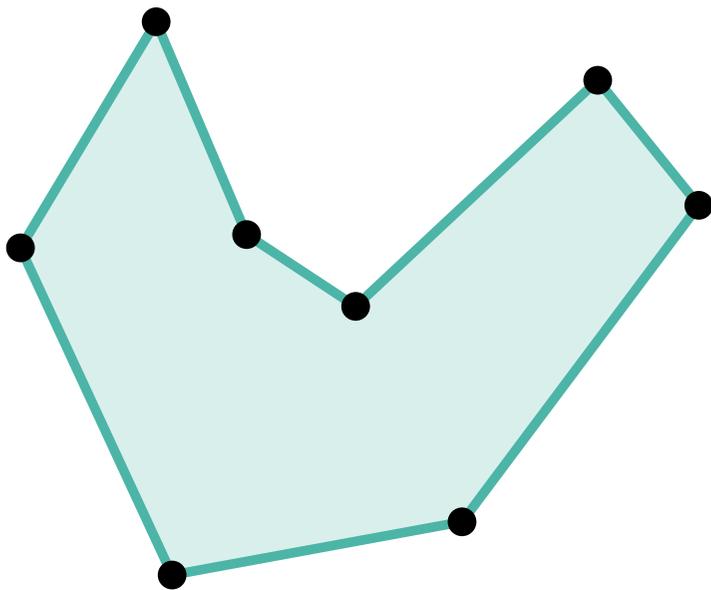
	Alg	Chan
Für $h = \log n$:	$O(n) + O(\log n \cdot \log \log n)$ $= O(n)$	$O(n \log \log n)$

Ist so ein Verfahren denkbar?

Übungsblatt 2 - Aufgabe 1

Gesucht:

Algorithmus der in $\mathcal{O}(n \log n)$ bestimmt ob ein Polygon einfach (d.h. schnittfrei) ist.



Übungsblatt 2 - Aufgabe 2

VL:

Laufzeit: $\mathcal{O}((n + I) \log n)$

Speicherplatz: $\mathcal{O}(n + I)$

Gesucht:

Algorithmus der nur linearen Speicher benötigt.

Übungsblatt 2 - Aufgabe 2

VL:

Laufzeit: $\mathcal{O}((n + I) \log n)$

Speicherplatz: $\mathcal{O}(n + I)$

Gesucht:

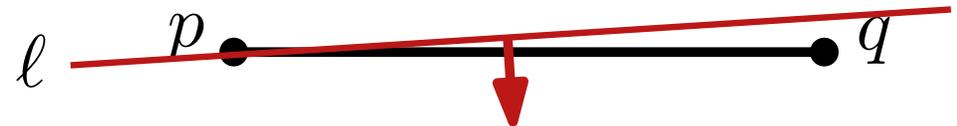
Algorithmus der nur linearen Speicher benötigt.

Frage:

Welche Datenstruktur ist problematisch?

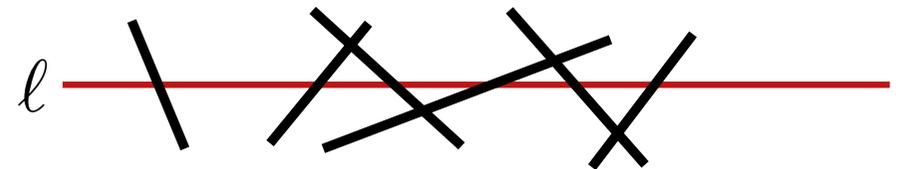
1.) Event Queue Q

- definiere $p \prec q \iff_{\text{def.}} y_p > y_q \vee (y_p = y_q \wedge x_p < x_q)$



- speichere Events sortiert nach \prec in **balanciertem binärem Suchbaum**
→ AVL-Baum, Rot-Schwarz-Baum, ...
- Operationen insert, delete und nextEvent in $O(\log |Q|)$ Zeit

2.) Sweep-Line Status \mathcal{T}



- speichere von l geschnittene Strecken geordnet von links nach rechts
- benötigte Operationen insert, delete, findNeighbor
- ebenfalls balancierter binärer Suchbaum mit Strecken in den Blättern!

Übungsblatt 2 - Aufgabe 2

FindIntersections(S)

Input: Menge S von Strecken

Output: Menge aller Schnittpunkte mit zugeh. Strecken

$Q \leftarrow \emptyset; \mathcal{T} \leftarrow \emptyset$

foreach $s \in S$ **do**

Q .insert(upperEndPoint(s))
 Q .insert(lowerEndPoint(s))

while $Q \neq \emptyset$ **do**

$p \leftarrow Q$.nextEvent()
 Q .deleteEvent(p)
 handleEvent(p)

Übungsblatt 2 - Aufgabe 2

handleEvent(p)

$U(p) \leftarrow$ Strecken mit p oberer Endpunkt

$L(p) \leftarrow$ Strecken mit p unterer Endpunkt

$C(p) \leftarrow$ Strecken mit p innerer Punkt

if $|U(p) \cup L(p) \cup C(p)| \geq 2$ **then**

└ gebe p und $U(p) \cup L(p) \cup C(p)$ aus

entferne $L(p) \cup C(p)$ aus \mathcal{T}

füge $U(p) \cup C(p)$ in \mathcal{T} ein

if $U(p) \cup C(p) = \emptyset$ **then** // s_l und s_r Nachbarn von p in \mathcal{T}

└ $Q \leftarrow$ prüfe s_l und s_r auf Schnitt unterhalb p

else // s' und s'' linkeste und rechteste Strecke in $U(p) \cup C(p)$

└ $Q \leftarrow$ prüfe s_l und s' auf Schnitt unterhalb p

└ $Q \leftarrow$ prüfe s_r und s'' auf Schnitt unterhalb p

Übungsblatt 2 - Aufgabe 2

VL:

Laufzeit: $\mathcal{O}((n + I) \log n)$

Speicherplatz: $\mathcal{O}(n + I)$

Gesucht:

Algorithmus der nur linearen Speicher benötigt.

Frage:

Welche Datenstruktur ist problematisch?

Übungsblatt 2 - Aufgabe 2

VL:

Laufzeit: $\mathcal{O}((n + I) \log n)$

Speicherplatz: $\mathcal{O}(n + I)$

Gesucht:

Algorithmus der nur linearen Speicher benötigt.

Frage:

Welche Datenstruktur ist problematisch?

Maximale Größe von Q : $\mathcal{O}(n \log^2 n)$

[Pach, Sharir, "On Vertical Visibility in Arrangements of Segments and the Queue Size in the Bentley-Ottmann Line Sweeping Algorithm", (1991)]

Übungsblatt 2 - Aufgabe 3

Gegeben:

Endliche Punktmenge P

Def.:

größter rechter obere Bereich (groB) von $p \in P$: Vereinigung aller offenen achsenparallelen Quadrate, die p mit ihrer linken unteren Ecke berühren und keinen Punkt aus P in ihrem Inneren enthalten.

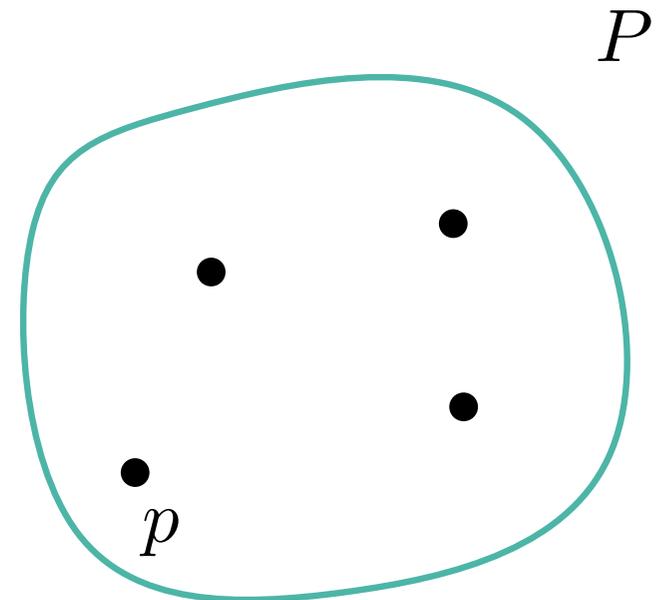
Übungsblatt 2 - Aufgabe 3

Gegeben:

Endliche Punktmenge P

Def.:

größter rechter obere Bereich (groB) von $p \in P$: Vereinigung aller offenen achsenparallelen Quadrate, die p mit ihrer linken unteren Ecke berühren und keinen Punkt aus P in ihrem Inneren enthalten.



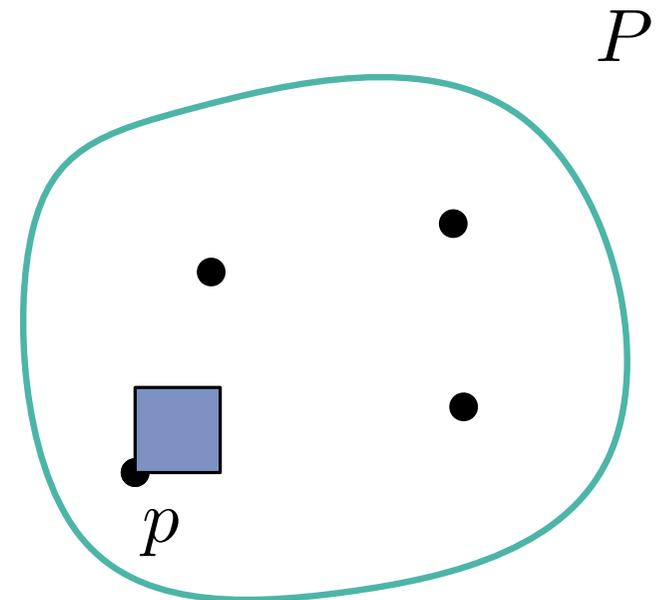
Übungsblatt 2 - Aufgabe 3

Gegeben:

Endliche Punktmenge P

Def.:

größter rechter obere Bereich (groB) von $p \in P$: Vereinigung aller offenen achsenparallelen Quadrate, die p mit ihrer linken unteren Ecke berühren und keinen Punkt aus P in ihrem Inneren enthalten.



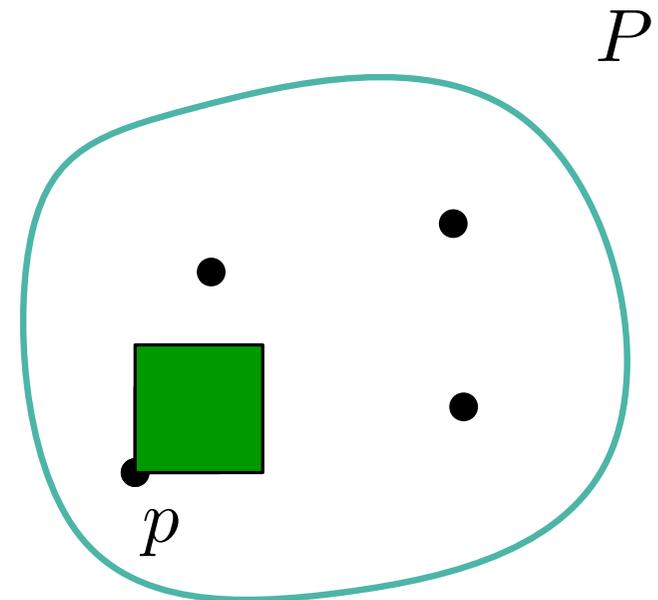
Übungsblatt 2 - Aufgabe 3

Gegeben:

Endliche Punktmenge P

Def.:

größter rechter obere Bereich (groB) von $p \in P$: Vereinigung aller offenen achsenparallelen Quadrate, die p mit ihrer linken unteren Ecke berühren und keinen Punkt aus P in ihrem Inneren enthalten.



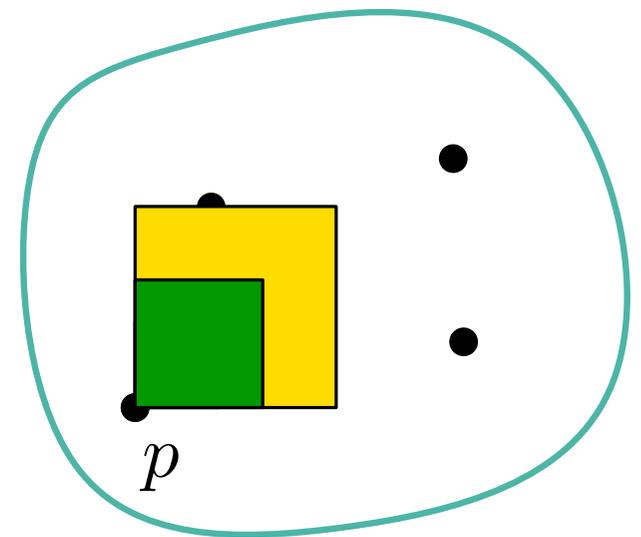
Übungsblatt 2 - Aufgabe 3

Gegeben:

Endliche Punktmenge P

Def.:

größter rechter obere Bereich (groB) von $p \in P$: Vereinigung aller offenen achsenparallelen Quadrate, die p mit ihrer linken unteren Ecke berühren und keinen Punkt aus P in ihrem Inneren enthalten.



Übungsblatt 2 - Aufgabe 3

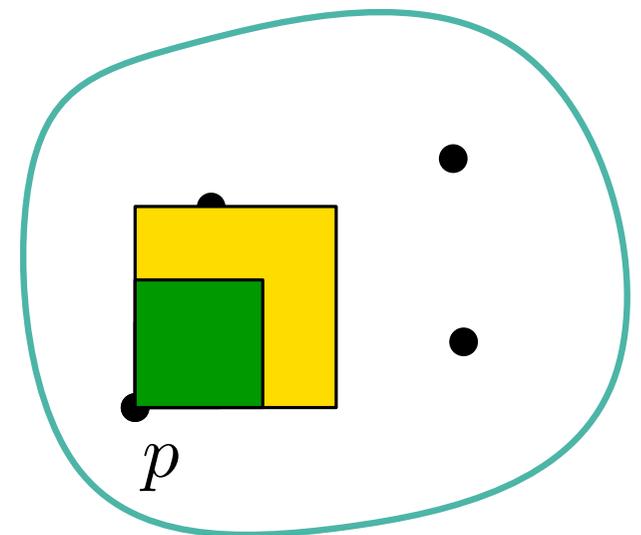
Gegeben:

Endliche Punktmenge P

Def.:

größter rechter obere Bereich (groB) von $p \in P$: Vereinigung aller offenen achsenparallelen Quadrate, die p mit ihrer linken unteren Ecke berühren und keinen Punkt aus P in ihrem Inneren enthalten.

a) Zeige, dass *groB* entweder Quadrat oder Schnitt zweier offener Halbebenen



Übungsblatt 2 - Aufgabe 3

Gegeben:

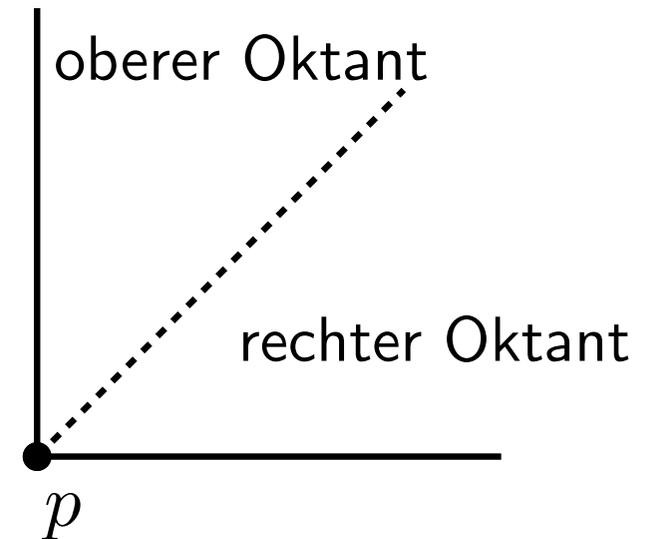
Endliche Punktmenge P

Def.:

größter rechter obere Bereich (groB) von $p \in P$: Vereinigung aller offenen achsenparallelen Quadrate, die p mit ihrer linken unteren Ecke berühren und keinen Punkt aus P in ihrem Inneren enthalten.

a) Zeige, dass *groB* entweder Quadrat oder Schnitt zweier offener Halbebenen

b) Welche Punkte im rechten und im oberen Oktanten schränken den *groB* am stärksten ein?



Übungsblatt 2 - Aufgabe 3

Gegeben:

Endliche Punktmenge P

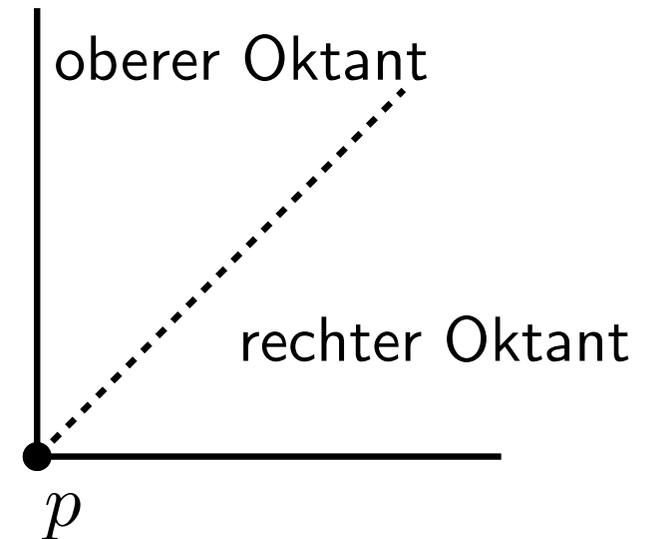
Def.:

größter rechter obere Bereich (groB) von $p \in P$: Vereinigung aller offenen achsenparallelen Quadrate, die p mit ihrer linken unteren Ecke berühren und keinen Punkt aus P in ihrem Inneren enthalten.

a) Zeige, dass *groB* entweder Quadrat oder Schnitt zweier offener Halbebenen

b) Welche Punkte im rechten und im oberen Oktanten schränken den *groB* am stärksten ein?

c) Algorithmus der für alle Punkte in P den *groB* in $\mathcal{O}(n \log n)$ berechnet.



Übungsblatt 2 - Aufgabe 3

c) Algorithmus der für alle Punkte in P den $groB$ in $\mathcal{O}(n \log n)$ berechnet.

Vorschlag:

Sweep(P)

Input: Punktmenge P

Output: $groB$ für alle Punkte aus P

$y_{sort} = \text{sort}_y(P)$ //aufsteigend

$x_{sort} = \text{sort}_x(P)$ //aufsteigend

foreach $p \in P$ **do**

$next_x =$ erster Knoten rechts von p

$next_y =$ erster Knoten oberhalb von p

$groB[p] = \min\{x(next_x) - x(p), y(next_y) - y(p)\}$

return $groB$

Übungsblatt 2 - Aufgabe 3

c) Algorithmus der für alle Punkte in P den $groB$ in $\mathcal{O}(n \log n)$ berechnet.

Vorschlag:

Sweep(P)

Input: Punktmenge P

Output: $groB$ für alle Punkte aus P

$y_{sort} = \text{sort}_y(P)$ //aufsteigend

$x_{sort} = \text{sort}_x(P)$ //aufsteigend

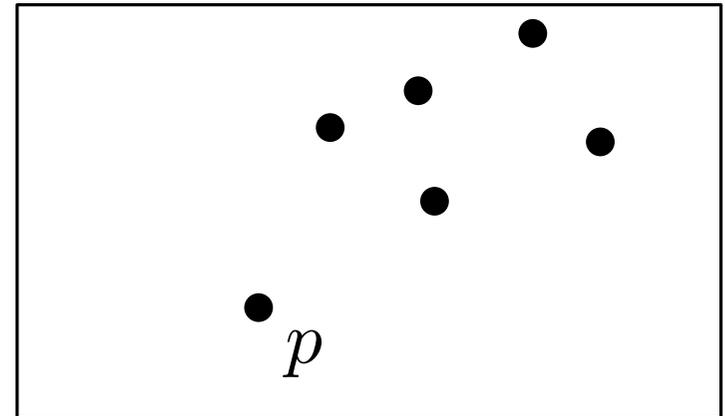
foreach $p \in P$ **do**

$next_x =$ erster Knoten rechts von p

$next_y =$ erster Knoten oberhalb von p

$groB[p] = \min\{x(next_x) - x(p), y(next_y) - y(p)\}$

return $groB$



Übungsblatt 2 - Aufgabe 3

c) Algorithmus der für alle Punkte in P den $groB$ in $\mathcal{O}(n \log n)$ berechnet.

Vorschlag:

Sweep(P)

Input: Punktmenge P

Output: $groB$ für alle Punkte aus P

$y_{sort} = \text{sort}_y(P)$ //aufsteigend

$x_{sort} = \text{sort}_x(P)$ //aufsteigend

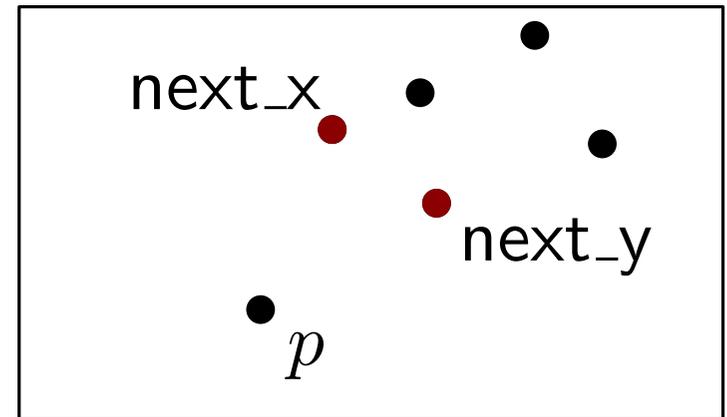
foreach $p \in P$ **do**

$next_x =$ erster Knoten rechts von p

$next_y =$ erster Knoten oberhalb von p

$groB[p] = \min\{x(next_x) - x(p), y(next_y) - y(p)\}$

return $groB$



Übungsblatt 2 - Aufgabe 3

c) Algorithmus der für alle Punkte in P den $groB$ in $\mathcal{O}(n \log n)$ berechnet.

Vorschlag:

Sweep(P)

Input: Punktmenge P

Output: $groB$ für alle Punkte aus P

$y_{sort} = \text{sort}_y(P)$ //aufsteigend

$x_{sort} = \text{sort}_x(P)$ //aufsteigend

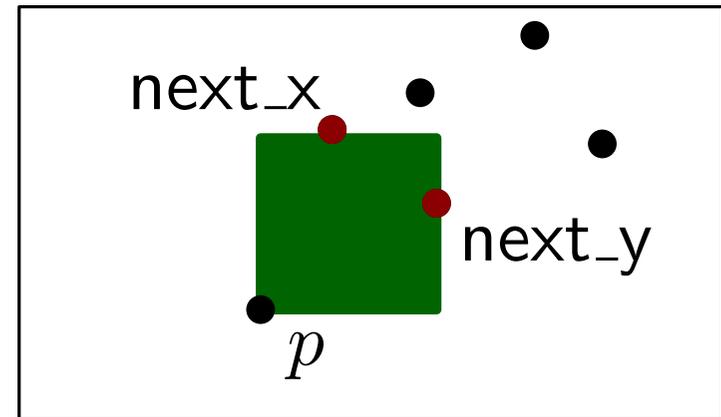
foreach $p \in P$ **do**

$next_x =$ erster Knoten rechts von p

$next_y =$ erster Knoten oberhalb von p

$groB[p] = \min\{x(next_x) - x(p), y(next_y) - y(p)\}$

return $groB$



Übungsblatt 2 - Aufgabe 3

c) Algorithmus der für alle Punkte in P den $groB$ in $\mathcal{O}(n \log n)$ berechnet.

Vorschlag:

Sweep(P)

Input: Punktmenge P

Output: $groB$ für alle Punkte aus P

$y_{sort} = \text{sort}_y(P)$ //aufsteigend

$\mathcal{O}(n \log n)$

$x_{sort} = \text{sort}_x(P)$ //aufsteigend

foreach $p \in P$ **do**

$\mathcal{O}(n)$

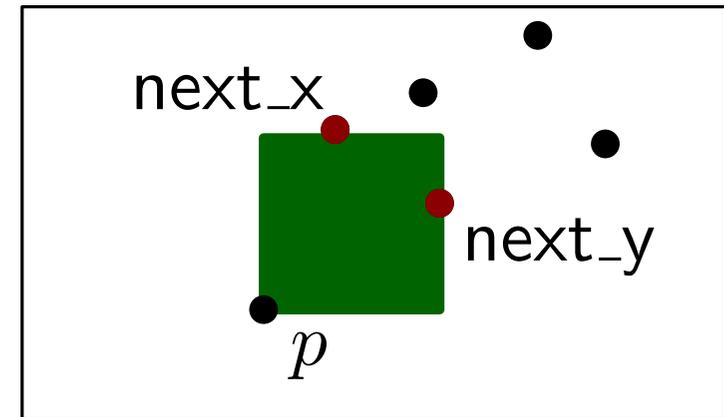
$\text{next}_x =$ erster Knoten rechts von p

$\mathcal{O}(1)$

$\text{next}_y =$ erster Knoten oberhalb von p

$\text{groB}[p] = \min\{x(\text{next}_x) - x(p), y(\text{next}_y) - y(p)\}$

return $groB$



Übungsblatt 2 - Aufgabe 3

c) Algorithmus der für alle Punkte in P den $groB$ in $\mathcal{O}(n \log n)$ berechnet.

Vorschlag:

Sweep(P)

Input: Punktmenge P

Output: $groB$ für alle Punkte aus P

$y_{sort} = \text{sort}_y(P)$ //aufsteigend

$\mathcal{O}(n \log n)$

$x_{sort} = \text{sort}_x(P)$ //aufsteigend

foreach $p \in P$ **do**

$\mathcal{O}(n)$

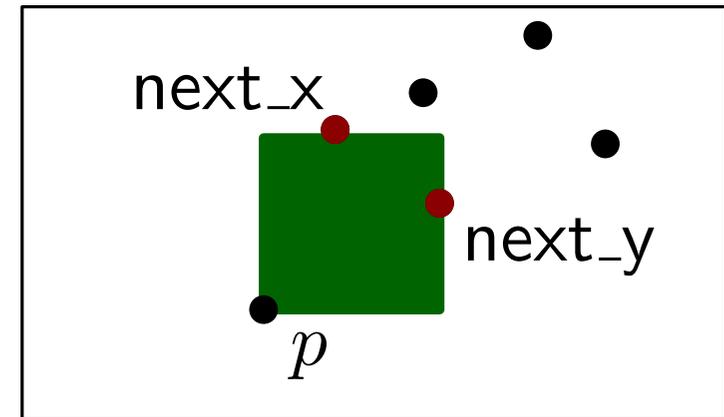
$\text{next}_x =$ erster Knoten rechts von p

$\mathcal{O}(1)$

$\text{next}_y =$ erster Knoten oberhalb von p

$\text{groB}[p] = \min\{x(\text{next}_x) - x(p), y(\text{next}_y) - y(p)\}$

return $groB$



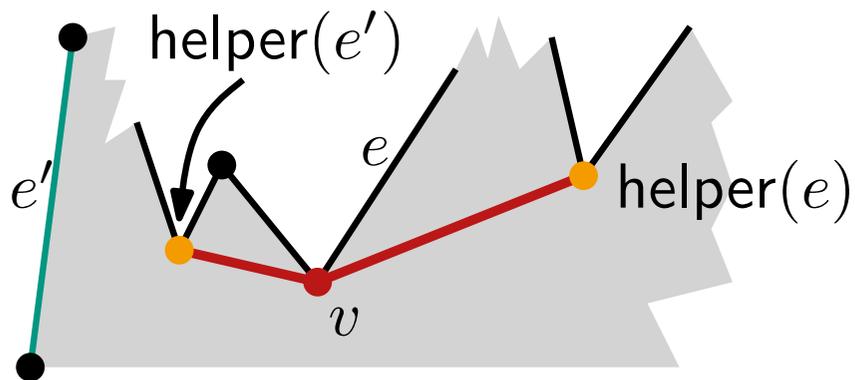
Korrekt?

Übungsblatt 2

Übungsblatt 3

Aufgabe 1

Beweise die Korrektheit von **handleMergeVertex**.



handleMergeVertex(vertex v)

$e \leftarrow$ rechte Kante

if isMergeVertex(helper(e)) **then**

└ $\mathcal{D} \leftarrow$ füge (helper(e), v) ein

lösche e aus \mathcal{T}

$e' \leftarrow$ Kante links von v in \mathcal{T}

if isMergeVertex(helper(e')) **then**

└ $\mathcal{D} \leftarrow$ füge (helper(e'), v) ein

helper(e') $\leftarrow v$

Aufgabe 2

VL: Algorithmus zur Partitionierung eines Polygons in y -monotone Teilpolygone in $\mathcal{O}(n \log n)$.

Angenommen die Anzahl der Wendeknoten ist in $\mathcal{O}(1)$.
Reduziere die Laufzeit zu $\mathcal{O}(n)$.

Aufgabe 2

VL: Algorithmus zur Partitionierung eines Polygons in y -monotone Teilpolygone in $\mathcal{O}(n \log n)$.

Angenommen die Anzahl der Wendeknoten ist in $\mathcal{O}(1)$.
Reduziere die Laufzeit zu $\mathcal{O}(n)$.

MakeMonotone(Polygon P)

$\mathcal{D} \leftarrow$ doppelt-verkettete Kantenliste für $(V(P), E(P))$

$\mathcal{Q} \leftarrow$ priority queue für $V(P)$ lexikographisch sortiert

$\mathcal{T} \leftarrow \emptyset$ (binärer Suchbaum für Sweep-Line Status)

while $\mathcal{Q} \neq \emptyset$ **do**

```
|  $v \leftarrow \mathcal{Q}.\text{nextVertex}()$   
|  $\mathcal{Q}.\text{deleteVertex}(v)$   
|  $\text{handleVertex}(v)$ 
```

return \mathcal{D}

Algorithmus MakeMonotone(P)

MakeMonotone(Polygon P)

$\mathcal{D} \leftarrow$ doppelt-verkettete Kantenliste für $(V(P), E(P))$

$Q \leftarrow$ priority queue für $V(P)$ lexikographisch sortiert

$\mathcal{T} \leftarrow \emptyset$ (binärer Suchbaum für Sweep-Line Status)

while $Q \neq \emptyset$ **do**

$v \leftarrow Q.\text{nextVertex}()$
 $Q.\text{deleteVertex}(v)$
 $\text{handleVertex}(v)$

return \mathcal{D}

Algorithmus MakeMonotone(P)

MakeMonotone(Polygon P)

$\mathcal{D} \leftarrow$ doppelt-verkettete Kantenliste für $(V(P), E(P))$

$\mathcal{Q} \leftarrow$ priority queue für $V(P)$ lexikographisch sortiert

$\mathcal{T} \leftarrow \emptyset$ (binärer Suchbaum für Sweep-Line Status)

while $\mathcal{Q} \neq \emptyset$ **do**

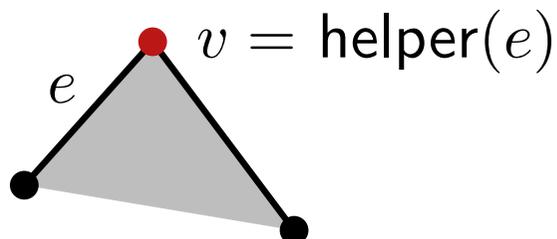
$v \leftarrow \mathcal{Q}.\text{nextVertex}()$
 $\mathcal{Q}.\text{deleteVertex}(v)$
 handleVertex(v)

return \mathcal{D}

handleStartVertex(vertex v)

$\mathcal{T} \leftarrow$ füge linke Kante e ein

helper(e) $\leftarrow v$



Algorithmus MakeMonotone(P)

MakeMonotone(Polygon P)

$\mathcal{D} \leftarrow$ doppelt-verkettete Kantenliste für $(V(P), E(P))$

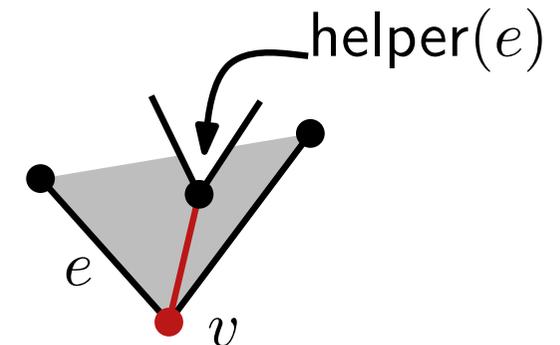
$Q \leftarrow$ priority queue für $V(P)$ lexikographisch sortiert

$\mathcal{T} \leftarrow \emptyset$ (binärer Suchbaum für Sweep-Line Status)

while $Q \neq \emptyset$ **do**

$v \leftarrow Q.\text{nextVertex}()$
 $Q.\text{deleteVertex}(v)$
 handleVertex(v)

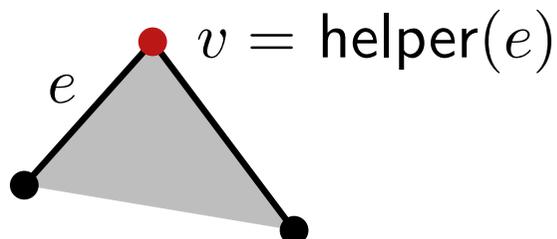
return \mathcal{D}



handleStartVertex(vertex v)

$\mathcal{T} \leftarrow$ füge linke Kante e ein

$\text{helper}(e) \leftarrow v$



handleEndVertex(vertex v)

$e \leftarrow$ linke Kante

if isMergeVertex($\text{helper}(e)$) **then**

$\mathcal{D} \leftarrow$ füge $(\text{helper}(e), v)$ ein

lösche e aus \mathcal{T}

Algorithmus MakeMonotone(P)

MakeMonotone(Polygon P)

$\mathcal{D} \leftarrow$ doppelt-verkettete Kantenliste für $(V(P), E(P))$

$\mathcal{Q} \leftarrow$ priority queue für $V(P)$ lexikographisch sortiert

$\mathcal{T} \leftarrow \emptyset$ (binärer Suchbaum für Sweep-Line Status)

while $\mathcal{Q} \neq \emptyset$ **do**

```
┌  $v \leftarrow \mathcal{Q}.\text{nextVertex}()$   
├  $\mathcal{Q}.\text{deleteVertex}(v)$   
└  $\text{handleVertex}(v)$ 
```

return \mathcal{D}

handleSplitVertex(vertex v)

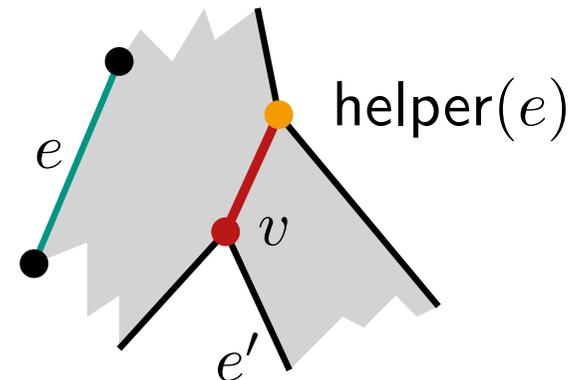
$e \leftarrow$ Kante links von v in \mathcal{T}

$\mathcal{D} \leftarrow$ füge $(\text{helper}(e), v)$ ein

$\text{helper}(e) \leftarrow v$

$\mathcal{T} \leftarrow$ füge rechte Kante e' von v ein

$\text{helper}(e') \leftarrow v$



Algorithmus MakeMonotone(P)

MakeMonotone(Polygon P)

$\mathcal{D} \leftarrow$ doppelt-verkettete Kantenliste für $(V(P), E(P))$

$Q \leftarrow$ priority queue für $V(P)$ lexikographisch sortiert

$\mathcal{T} \leftarrow \emptyset$ (binärer Suchbaum für Sweep-Line Status)

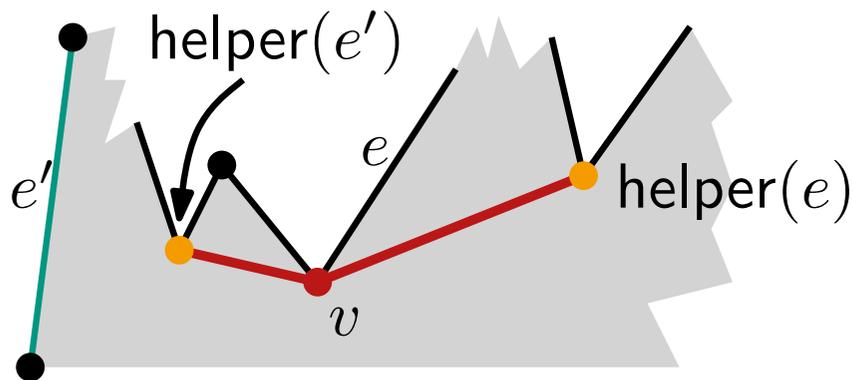
while $Q \neq \emptyset$ **do**

$v \leftarrow Q.\text{nextVertex}()$

$Q.\text{deleteVertex}(v)$

 handleVertex(v)

return \mathcal{D}



handleMergeVertex(vertex v)

$e \leftarrow$ rechte Kante

if isMergeVertex(helper(e)) **then**

$\mathcal{D} \leftarrow$ füge (helper(e), v) ein

lösche e aus \mathcal{T}

$e' \leftarrow$ Kante links von v in \mathcal{T}

if isMergeVertex(helper(e')) **then**

$\mathcal{D} \leftarrow$ füge (helper(e'), v) ein

helper(e') $\leftarrow v$

Algorithmus MakeMonotone(P)

MakeMonotone(Polygon P)

$\mathcal{D} \leftarrow$ doppelt-verkettete Kantenliste für $(V(P), E(P))$

$Q \leftarrow$ priority queue für $V(P)$ lexikographisch sortiert

$\mathcal{T} \leftarrow \emptyset$ (binärer Suchbaum für Sweep-Line Status)

while $Q \neq \emptyset$ **do**

$v \leftarrow Q.\text{nextVertex}()$

$Q.\text{deleteVertex}(v)$

 handleVertex(v)

return \mathcal{D}

handleRegularVertex(vertex v)

if P liegt lokal rechts von v **then**

$e, e' \leftarrow$ obere, untere Kante

if isMergeVertex(helper(e)) **then**

$\mathcal{D} \leftarrow$ füge (helper(e), v) ein

 lösche e aus \mathcal{T}

$\mathcal{T} \leftarrow$ füge e' ein; helper(e') $\leftarrow v$

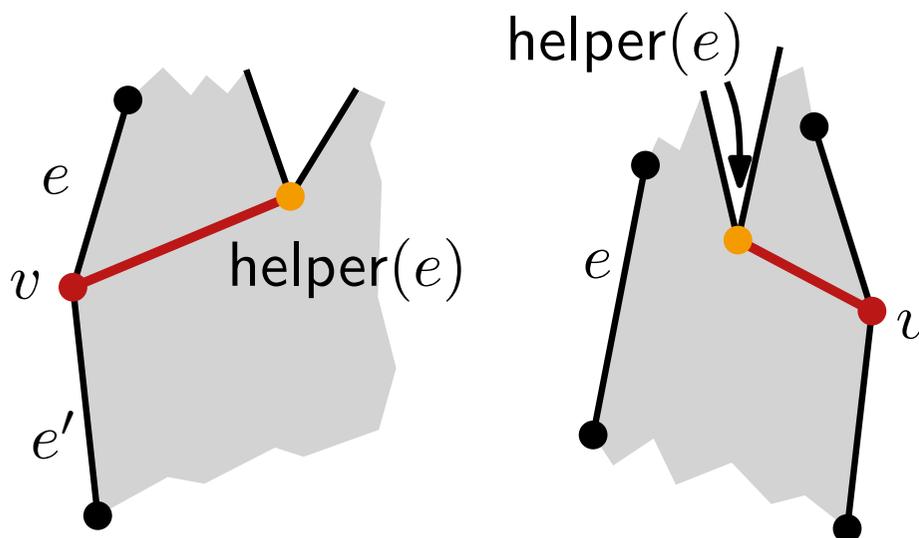
else

$e \leftarrow$ Kante links von v in \mathcal{T}

if isMergeVertex(helper(e)) **then**

$\mathcal{D} \leftarrow$ füge (helper(e), v) ein

 helper(e) $\leftarrow v$



Aufgabe 3

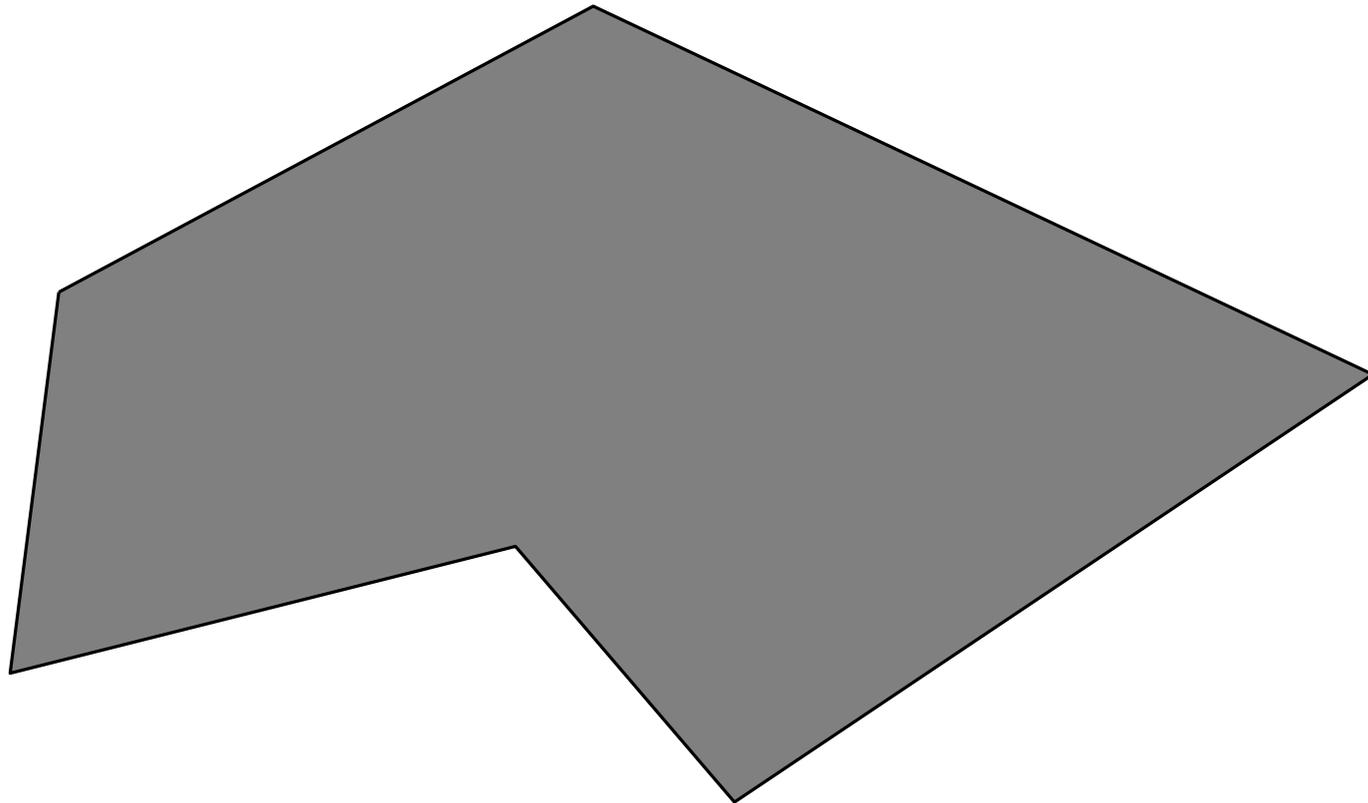
\mathcal{P} sei Polygon.

Kameras sind so platziert, dass der vollständige Rand von \mathcal{P} abgedeckt wird. Wird automatisch auch das Innere vollständig abgedeckt?

Aufgabe 3

\mathcal{P} sei Polygon.

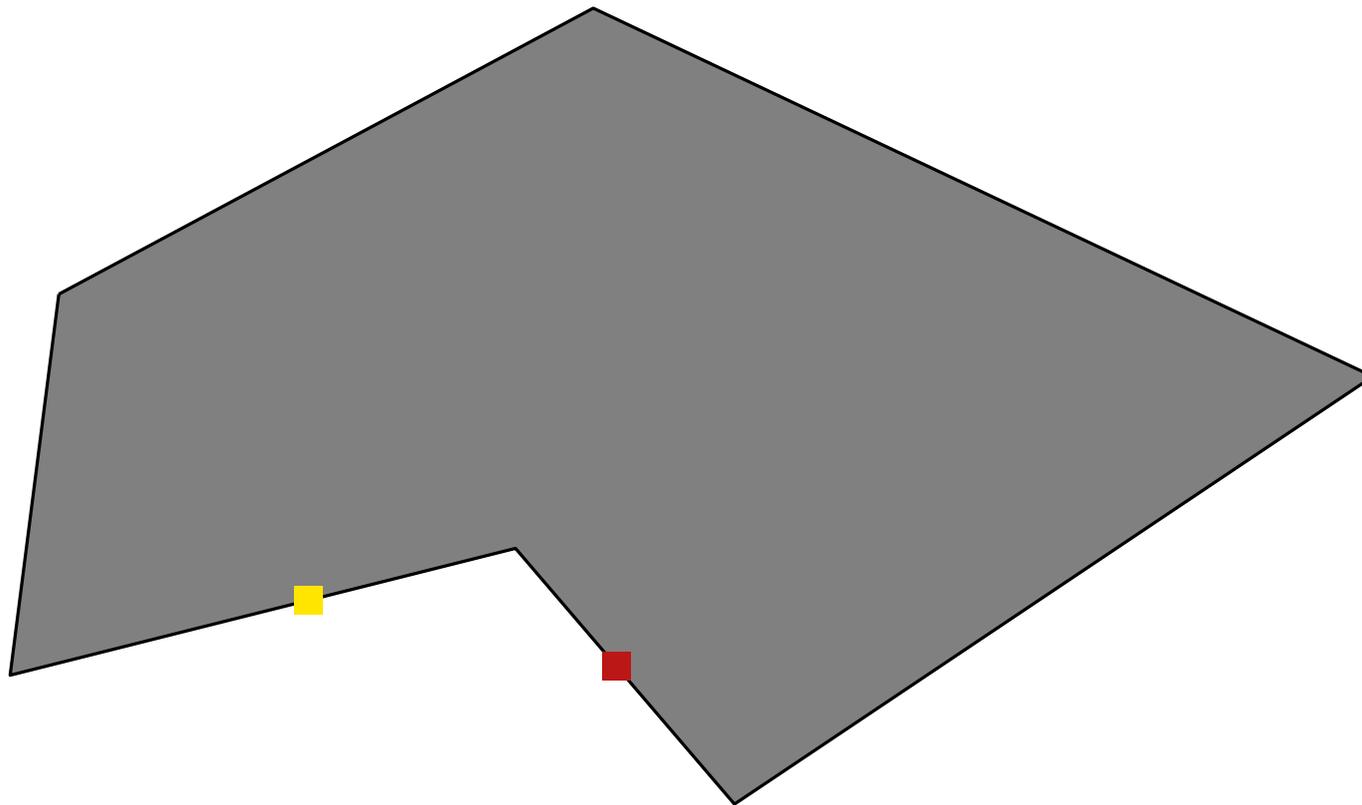
Kameras sind so platziert, dass der vollständige Rand von \mathcal{P} abgedeckt wird. Wird automatisch auch das Innere vollständig abgedeckt?



Aufgabe 3

\mathcal{P} sei Polygon.

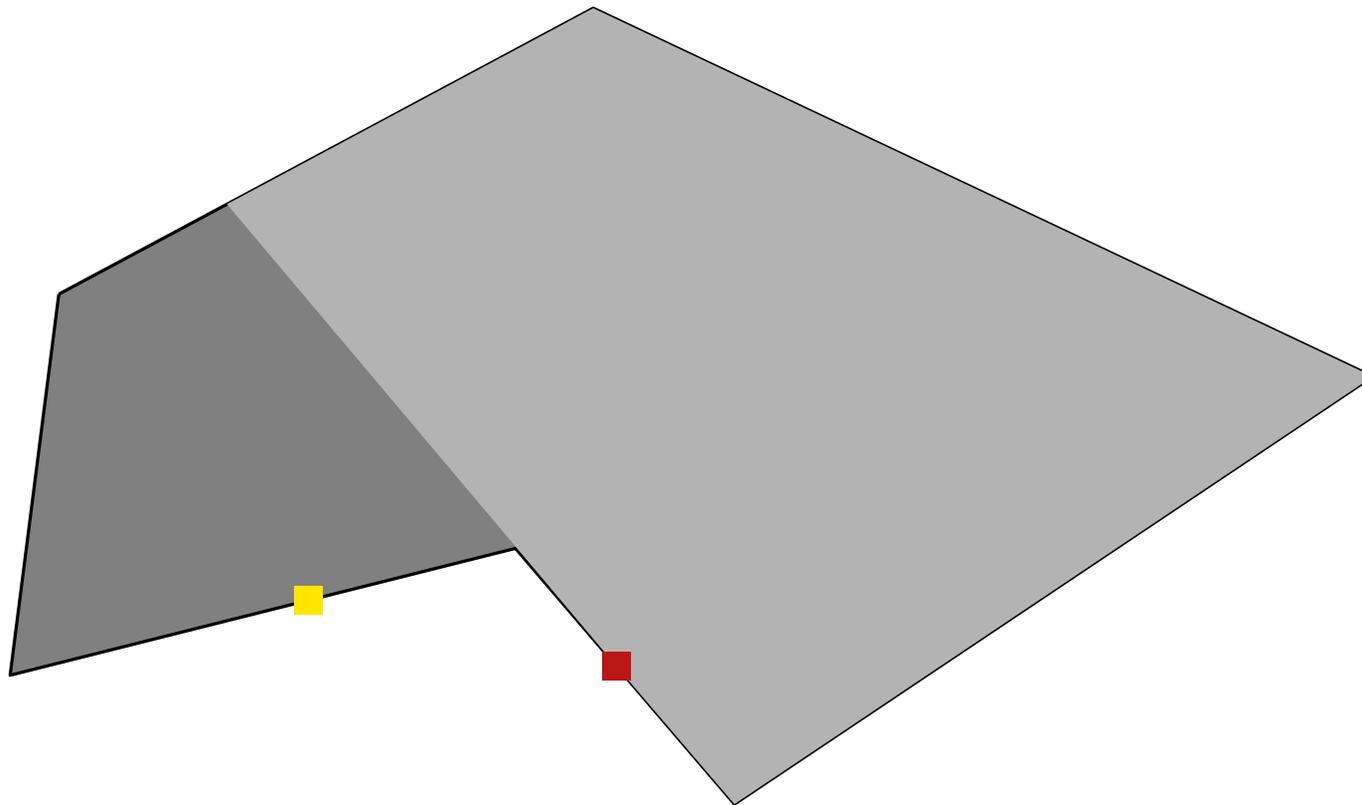
Kameras sind so platziert, dass der vollständige Rand von \mathcal{P} abgedeckt wird. Wird automatisch auch das Innere vollständig abgedeckt?



Aufgabe 3

\mathcal{P} sei Polygon.

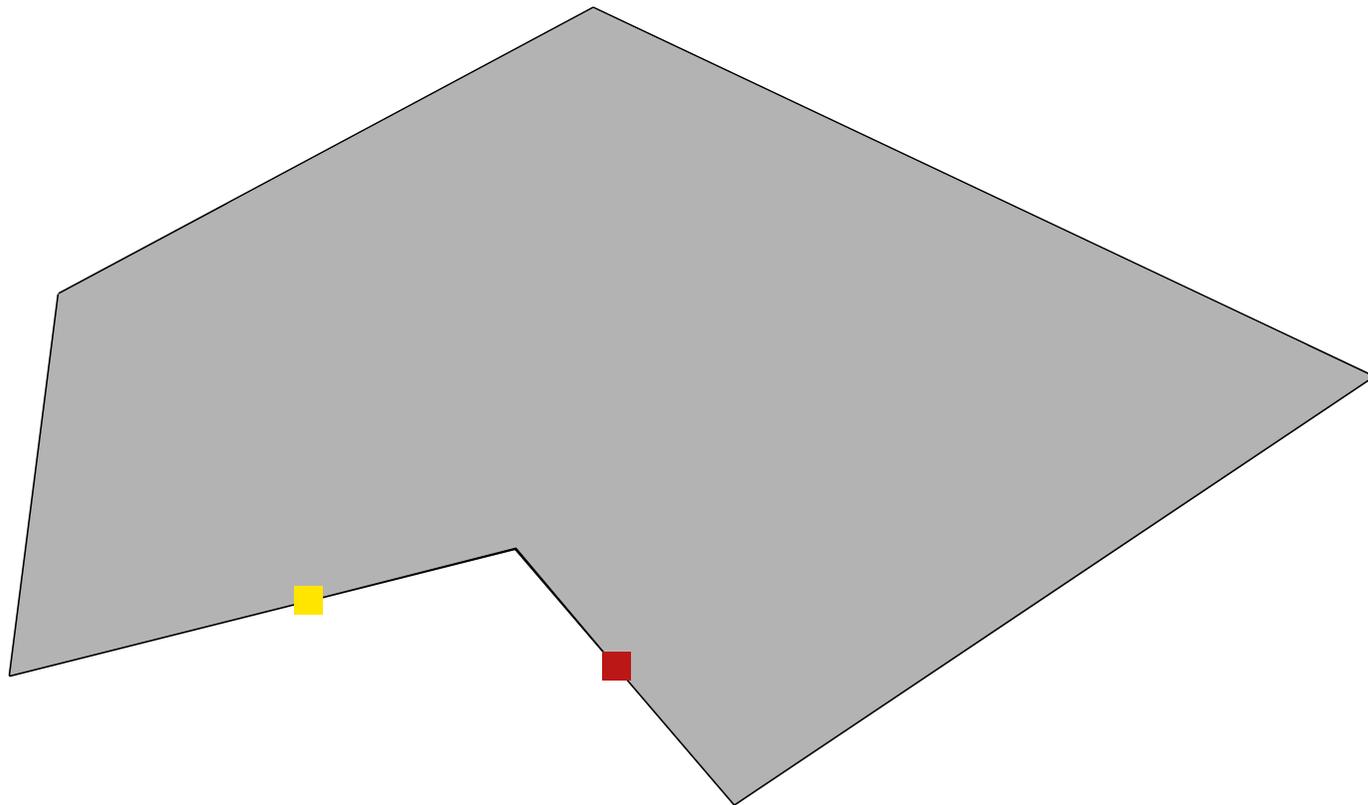
Kameras sind so platziert, dass der vollständige Rand von \mathcal{P} abgedeckt wird. Wird automatisch auch das Innere vollständig abgedeckt?



Aufgabe 3

\mathcal{P} sei Polygon.

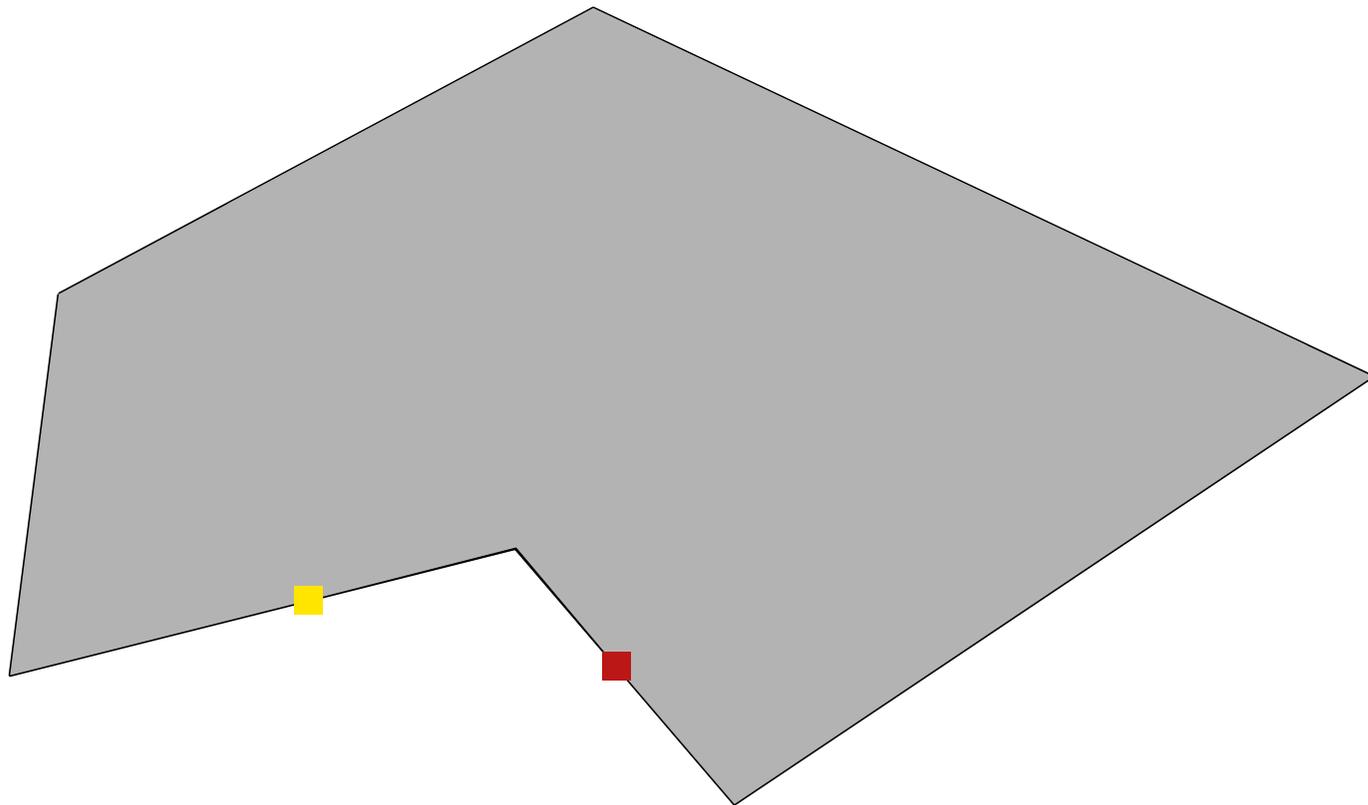
Kameras sind so platziert, dass der vollständige Rand von \mathcal{P} abgedeckt wird. Wird automatisch auch das Innere vollständig abgedeckt?



Aufgabe 3

\mathcal{P} sei Polygon.

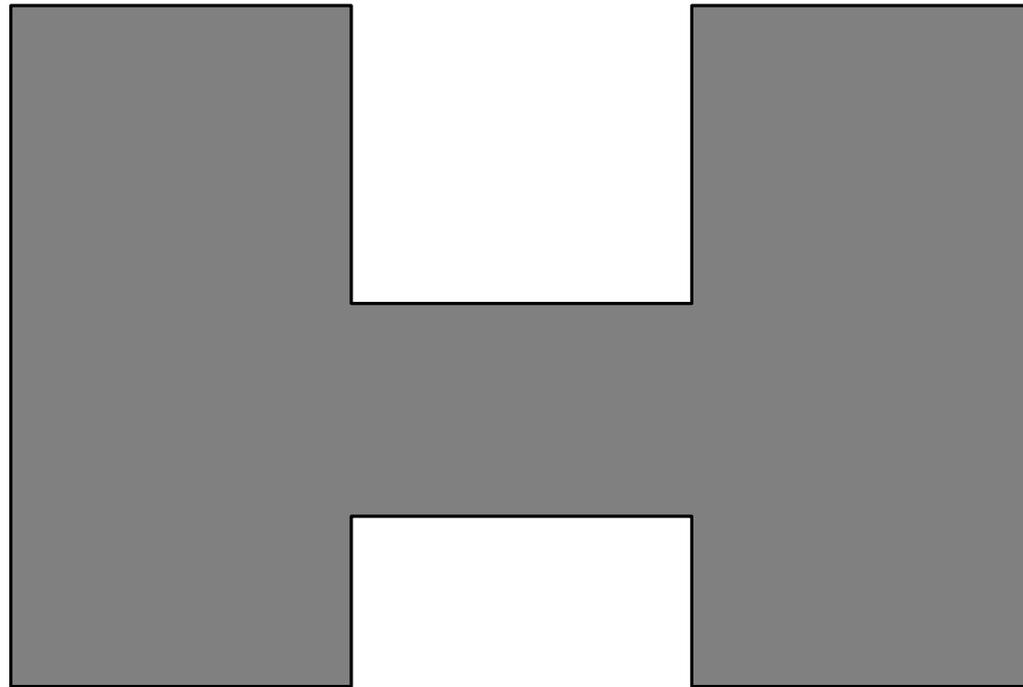
Kameras sind so platziert, dass der vollständige Rand von \mathcal{P} abgedeckt wird. Wird automatisch auch das Innere vollständig abgedeckt?



Aufgabe 3

\mathcal{P} sei Polygon.

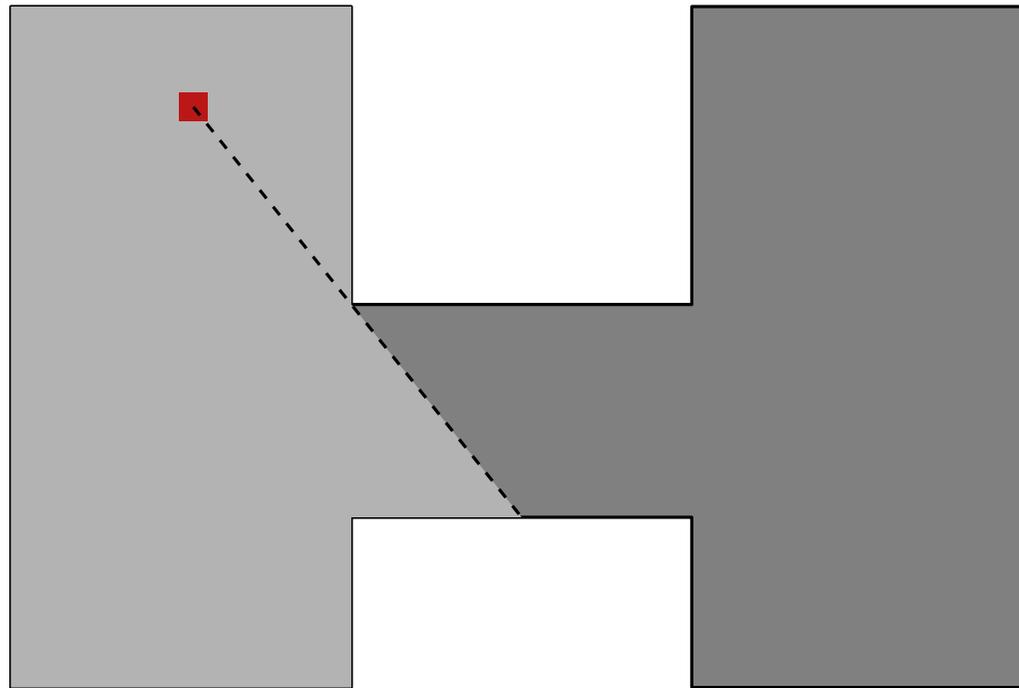
Kameras sind so platziert, dass der vollständige Rand von \mathcal{P} abgedeckt wird. Wird automatisch auch das Innere vollständig abgedeckt?



Aufgabe 3

\mathcal{P} sei Polygon.

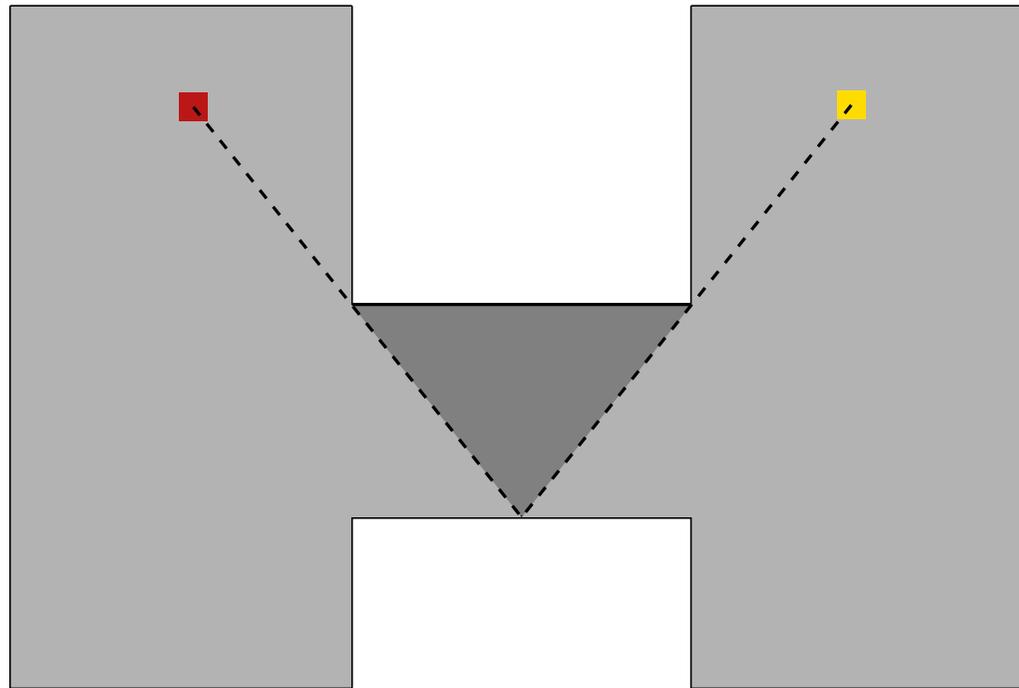
Kameras sind so platziert, dass der vollständige Rand von \mathcal{P} abgedeckt wird. Wird automatisch auch das Innere vollständig abgedeckt?



Aufgabe 3

\mathcal{P} sei Polygon.

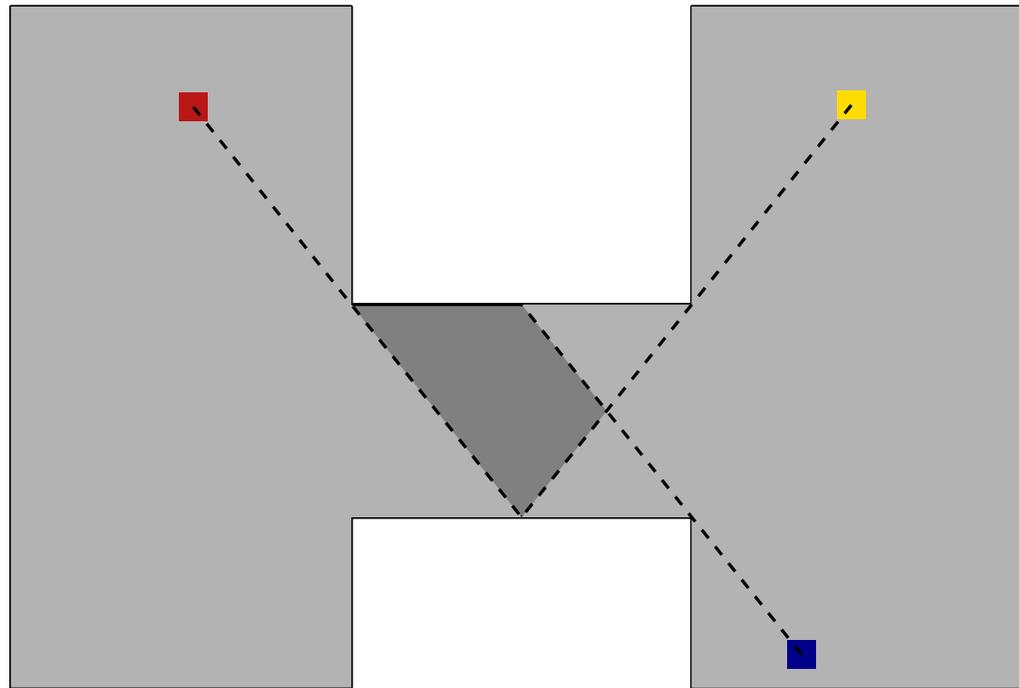
Kameras sind so platziert, dass der vollständige Rand von \mathcal{P} abgedeckt wird. Wird automatisch auch das Innere vollständig abgedeckt?



Aufgabe 3

\mathcal{P} sei Polygon.

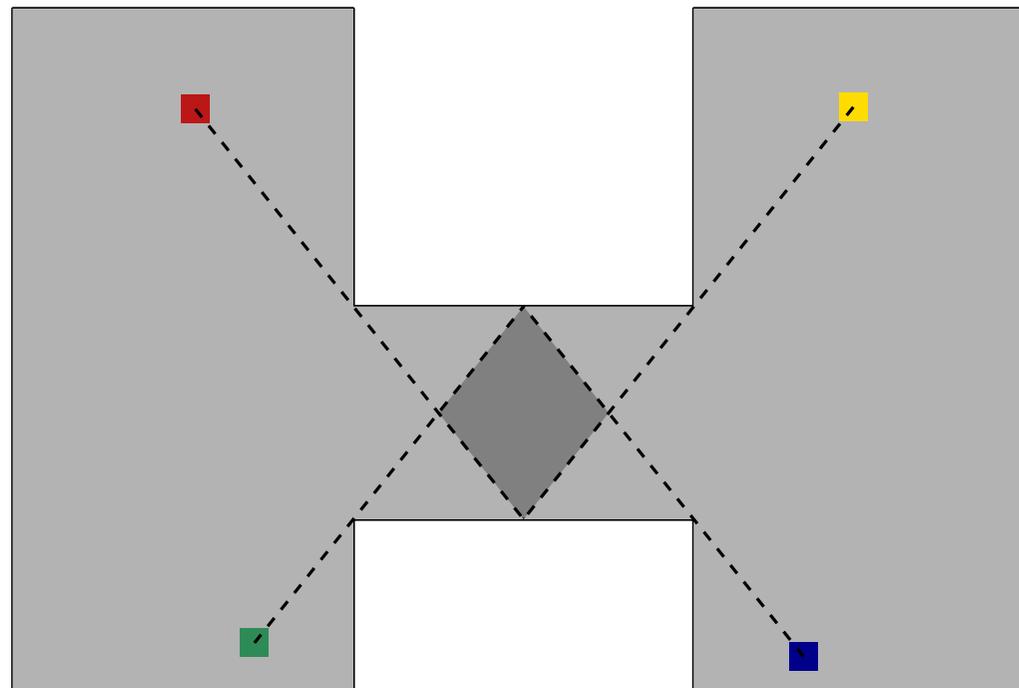
Kameras sind so platziert, dass der vollständige Rand von \mathcal{P} abgedeckt wird. Wird automatisch auch das Innere vollständig abgedeckt?



Aufgabe 3

\mathcal{P} sei Polygon.

Kameras sind so platziert, dass der vollständige Rand von \mathcal{P} abgedeckt wird. Wird automatisch auch das Innere vollständig abgedeckt?



Aufgabe 4

Gebe einen $O(n \log n)$ Algorithmus an der ein einfaches Polygon aus n Knoten in zwei einfache Polygone auftrennt. Jedes der beiden soll aus höchstens $\lfloor 2n/3 \rfloor + 2$ Knoten bestehen.

Aufgabe 4

Gebe einen $\mathcal{O}(n \log n)$ Algorithmus an der ein einfaches Polygon aus n Knoten in zwei einfache Polygone auftrennt. Jedes der beiden soll aus höchstens $\lfloor 2n/3 \rfloor + 2$ Knoten bestehen.

- Trianguliere das Polygon
- Berechne Dualgraph zum Polygon
- Bestimme alle Blätter im Dualgraphen (Dualgraph ist ein Baum)

Aufgabe 4

Gebe einen $\mathcal{O}(n \log n)$ Algorithmus an der ein einfaches Polygon aus n Knoten in zwei einfache Polygone auftrennt. Jedes der beiden soll aus höchstens $\lfloor 2n/3 \rfloor + 2$ Knoten bestehen.

- Trianguliere das Polygon
- Berechne Dualgraph zum Polygon
- Bestimme alle Blätter im Dualgraphen (Dualgraph ist ein Baum)

Das war's!

Nächster Übung:
Donnertag, 17.05, 10:15 Uhr
Raum 131, Gebäude 50.34