

Algorithmen für Routenplanung

12. Sitzung, Sommersemester 2011

Reinhard Bauer, Thomas Pajor | 6. Juni 2011

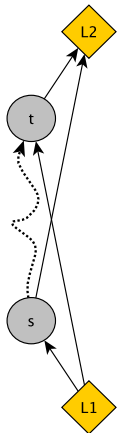
INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK · ALGORITHMIK I · PROF. DR. DOROTHEA WAGNER



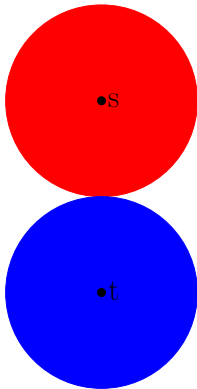
Kombinationen

Fünf Bausteine

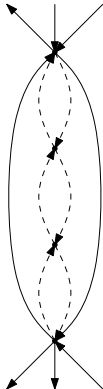
Landmarken



Bidirektionale Suche



Kontraktion



Arc-Flags

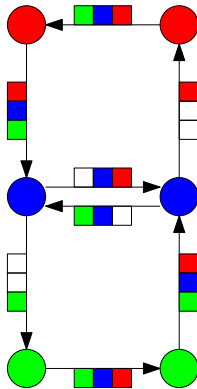
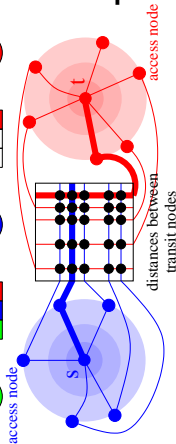


Table-Lookups

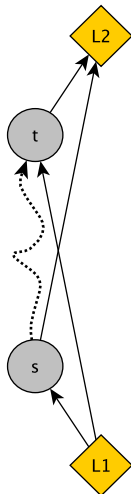


Vorbereitung:

- wähle eine Hand voll (≈ 16) Knoten als **Landmarken**
- berechne Abstände von und zu allen Landmarken

Anfrage:

- benutze Landmarken und Dreiecksungleichung um eine **untere Schranke** für den Abstand zum Ziel zu bestimmen
- verändert **Reihenfolge** der besuchten Knoten
- bevorzugt Knoten zwischen Start- und Zielknoten
- bekannt als **ALT: A***, **L**andmarken, **T**riangle Inequality



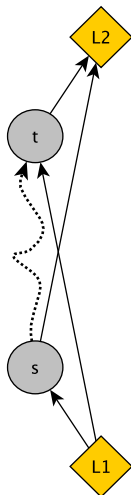
Landmarken

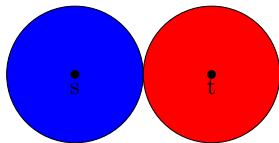
Vorteile:

- + Anpassung einfach
- + einfache und schnelle Vorberechnung
- + sehr **robust** gegenüber der Eingabe
- + zusätzliche Staus können berücksichtigt werden

Nachteile:

- **geringe** Beschleunigung ("nur" Faktor von ca. 100)
- dies auch nur mit **bidirektionaler** Suche erreichbar
- Vorberechnung benötigt viel Speicher (2 Distanzen pro Knoten und Landmarke)





- starte zweite Suche von t
- relaxiere rückwärts nur eingehende Kanten
- stoppe die Suche, wenn beide Suchräume sich treffen

Beobachtung:

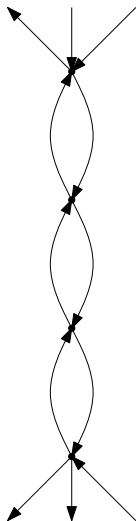
- Knoten mit niedrigem Grad sind **unwichtig**

Knoten-Reduktion:

- entferne diese Knoten **iterativ**
- füge neue Kanten (**Abkürzungen**) hinzu, um die Abstände zwischen verbleibenden Knoten zu erhalten

Kanten-Reduktion:

- behalte nur relevante Shortcuts
- lokale Suche während oder nach Knoten-reduktion



Beobachtung:

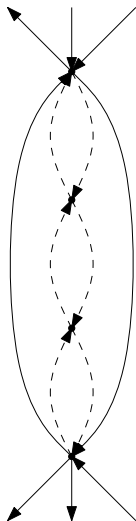
- Knoten mit niedrigem Grad sind **unwichtig**

Knoten-Reduktion:

- entferne diese Knoten **iterativ**
- füge neue Kanten (**Abkürzungen**) hinzu, um die Abstände zwischen verbleibenden Knoten zu erhalten

Kanten-Reduktion:

- behalte nur relevante Shortcuts
- lokale Suche während oder nach Knoten-reduktion

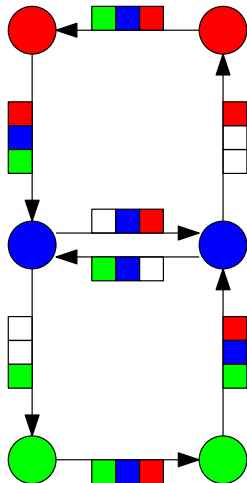


Idee:

- partitioniere den Graph in k Zellen
- hänge ein Label mit k Bits an jede Kante
- zeigt ob e wichtig für die Zielzelle ist
- modifizierter Dijkstra überspringt unwichtige Kanten

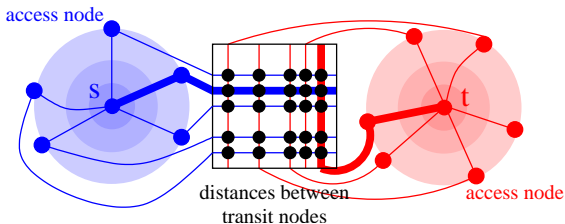
Diskussion:

- + einfacher Suchalgorithmus
- + schnell
- lange Vorberechnungszeit
- keine Vorteile in Zielzelle

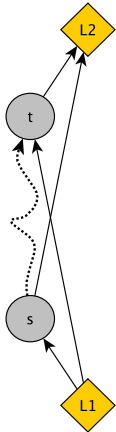


Idee:

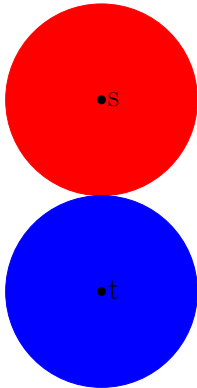
- speichere Distanztabellen
- nur für "wichtige" Teile des Graphen
- Suchen laufen nur bis zur Tabelle
- harmoniert gut mit hierarchischen Techniken



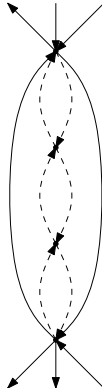
Landmarken



Bidirektionale
Suche



Kontraktion



Arc-Flags

Table-
Lookups

Motivation:

- ALT ist robust gegenüber der Eingabe
- aber hoher Speicherverbrauch

Hauptidee:

- beschränke ALT nur im Kern

Core-ALT

(Landmarken, bidirektionale Suche, Kontraktion)

Idee

- begrenze Beschleunigungstechnik auf kleinen Subgraphen (Kern)

s ●

● t

Vorbereitung

- kontrahiere Graphen zu einem Kern
- Landmarken nur im Kern

Anfrage

- Initialphase: normaler Dijkstra
- benutze Landmarken nur im Kern

Core-ALT

(Landmarken, bidirektionale Suche, Kontraktion)

Idee

- begrenze Beschleunigungstechnik auf kleinen Subgraphen (Kern)



Vorbereitung

- kontrahiere Graphen zu einem Kern
- Landmarken nur im Kern

Anfrage

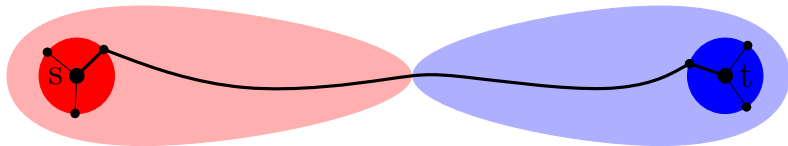
- Initialphase: normaler Dijkstra
- benutze Landmarken nur im Kern

Core-ALT

(Landmarken, bidirektionale Suche, Kontraktion)

Idee

- begrenze Beschleunigungstechnik auf kleinen Subgraphen (Kern)



Vorbereitung

- kontrahiere Graphen zu einem Kern
- Landmarken nur im Kern

Anfrage

- Initialphase: normaler Dijkstra
- benutze Landmarken nur im Kern

Problem:

- ALT braucht Potential von jedem Knoten zu t und s
- s und/oder t könnten außerhalb des Kerns liegen
- somit keine Abstandswerte von den Landmarken zu s und t

Lösung:

- bestimme Proxy-Knoten t'
für t (s analog), t' im Kern
- neue Ungleichungen:

$$d(u, t) \geq d(u, l_2) - d(t', l_2) - d(t, t')$$

$$d(u, t) \geq d(l_1, t') - d(l_1, u) - d(t, t')$$

Problem:

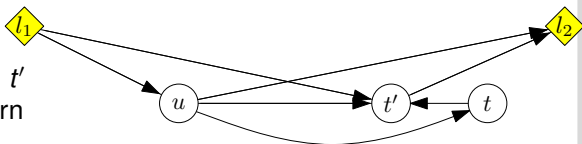
- ALT braucht Potential von jedem Knoten zu t und s
- s und/oder t könnten außerhalb des Kerns liegen
- somit keine Abstandswerte von den Landmarken zu s und t

Lösung:

- bestimme Proxy-Knoten t' für t (s analog), t' im Kern
- neue Ungleichungen:

$$d(u, t) \geq d(u, l_2) - d(t', l_2) - d(t, t')$$

$$d(u, t) \geq d(l_1, t') - d(l_1, u) - d(t, t')$$

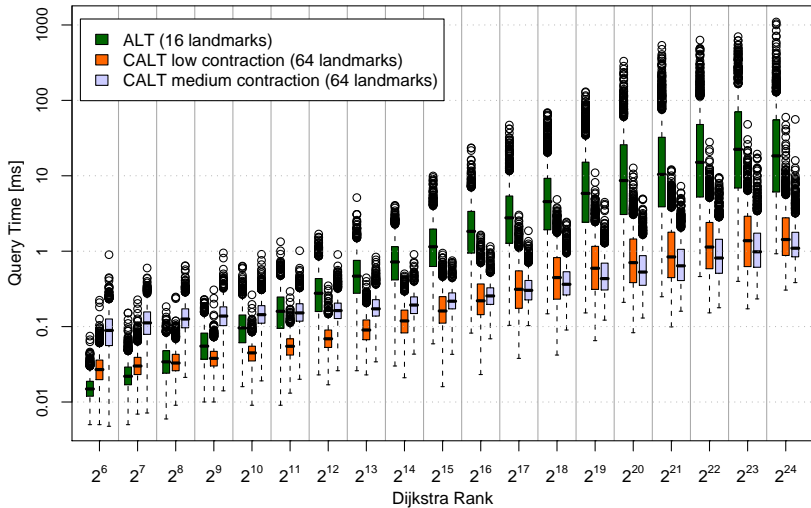


input	c	h	PREPRO.				QUERY		
			core nodes	$ E $ incr.	time [min]	space [B/n]	#settled nodes	#entry nodes	time [ms]
Europe	0.0	0	100.00%	0.00%	68	512.0	25 324	1.0	19.61
	0.5	10	35.48%	10.23%	21	187.7	10 925	3.2	8.02
	1.0	20	6.32%	14.24%	7	38.4	2 233	8.2	2.16
	2.0	30	3.04%	11.41%	9	21.8	1 382	13.3	1.55
	2.5	50	1.88%	9.16%	11	15.4	1 394	18.6	1.34
	3.0	75	1.29%	7.80%	12	12.2	1 963	24.2	1.43
	5.0	100	0.86%	6.94%	18	9.8	3 126	34.0	1.67
USA	0.0	0	100.00%	0.00%	93	512.0	68 861	1.0	48.87
	0.5	10	28.90%	11.40%	20	154.2	21 544	3.4	16.61
	1.0	20	8.29%	12.68%	11	48.9	7 662	7.1	6.96
	2.0	30	3.21%	10.53%	12	22.5	3 338	12.6	4.11
	2.5	50	2.06%	8.00%	13	16.1	2 697	17.1	3.01
	3.0	75	1.45%	6.39%	14	12.6	2 863	22.0	2.85
	5.0	100	0.86%	4.50%	21	9.3	3 416	30.2	2.35

Einfluss Anzahl Landmarken

L	no cont. ($c=0.0, h=0$)				low cont. ($c=1.0, h=20$)			
	PREPRO.		QUERY		PREPRO.		QUERY	
	time [min]	space [B/n]	#settled nodes	time [ms]	time [min]	space [B/n]	#settled nodes	time [ms]
8	26.1	64	163 776	127.8	7.1	10.9	12 529	10.25
16	85.2	128	74 669	53.6	9.4	14.9	5 672	5.77
32	27.1	256	40 945	29.4	6.8	23.0	3 268	2.97
64	68.2	512	25 324	19.6	8.5	36.2	2 233	2.16

L	med: $c=2.5, h=50$				high: $c=5.0, h=100$			
	PREPRO.		QUERY		PREPRO.		QUERY	
	time [min]	space [B/n]	#settled nodes	time [ms]	time [min]	space [B/n]	#settled nodes	time [ms]
8	10.1	7.0	4 431	3.98	17.8	5.9	4 106	2.51
16	11.0	8.2	2 456	2.33	18.3	6.5	3 500	2.23
32	10.0	10.6	1 704	1.66	17.7	7.6	3 264	2.01
64	10.5	15.4	1 394	1.34	18.0	9.8	3 126	1.67



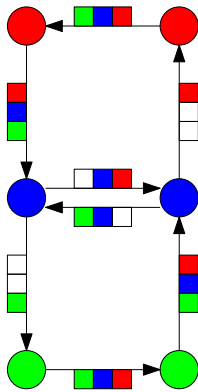
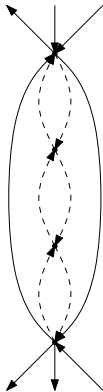
Landmarken

Bidirektionale
Suche

Kontraktion

Arc-Flags

Table-
Lookups

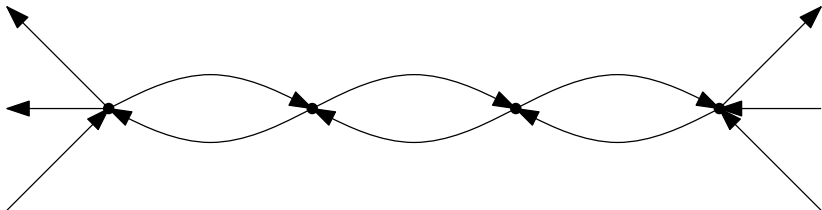


Motivation:

- unidirektional
- Vorberechnungszeiten von Arc-Flags reduzieren

Ideen:

- Multi-Level Arc-Flags
- Integration von Kontraktion
- Verfeinern von Flaggen

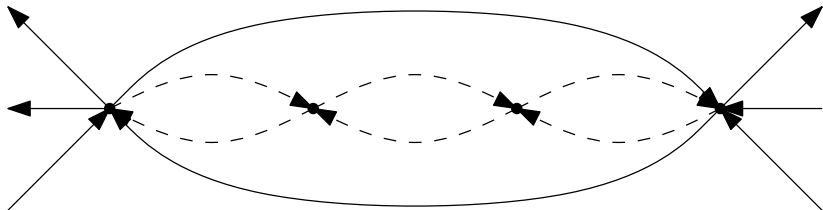


Idee:

- sub-optimale flaggen für entfernte Kanten
- in die Komponente, nur own-cell Flagge
- sonst volle Flaggen

⇒

- Vorberechnung nur auf kontrahierten Graph
- sub-optimale Flaggen nur am Anfang und Ende der Query
- Überspringen von Kanten automatisch durch Arc-Flags Query

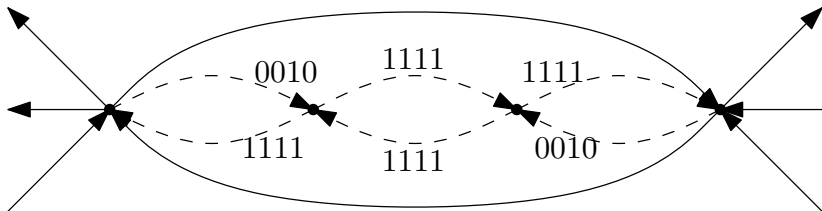


Idee:

- sub-optimale flaggen für entfernte Kanten
- in die Komponente, nur own-cell Flagge
- sonst volle Flaggen

⇒

- Vorberechnung nur auf kontrahierten Graph
- sub-optimale Flaggen nur am Anfang und Ende der Query
- Überspringen von Kanten automatisch durch Arc-Flags Query



Idee:

- sub-optimale flaggen für entfernte Kanten
- in die Komponente, nur own-cell Flagge
- sonst volle Flaggen

⇒

- Vorberechnung nur auf kontrahierten Graph
- sub-optimale Flaggen nur am Anfang und Ende der Query
- Überspringen von Kanten automatisch durch Arc-Flags Query

Vorbereitung:

- Multi-Level-Partition
- iterativer Prozess:
 - kontrahiere Subgraphen
 - berechne Flaggen

Anfragen:

- unidirektional
- hierarchisch (Kontraktion)
- zielgerichtet (Arc-Flags)

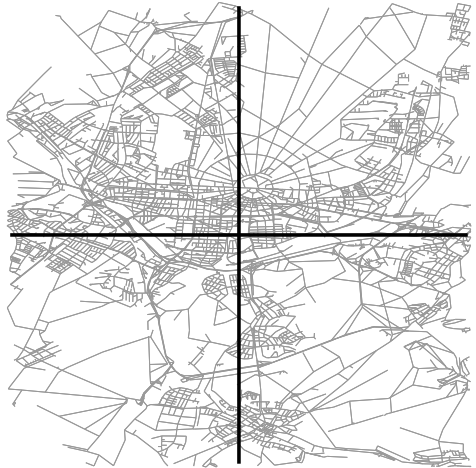


Vorbereitung:

- Multi-Level-Partition
- iterativer Prozess:
 - kontrahiere Subgraphen
 - berechne Flaggen

Anfragen:

- unidirektional
- hierarchisch (Kontraktion)
- zielgerichtet (Arc-Flags)

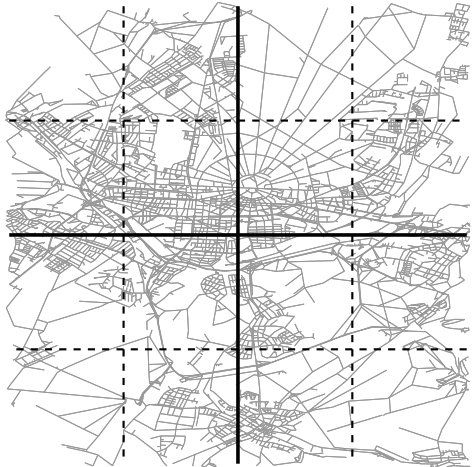


Vorbereitung:

- Multi-Level-Partition
- iterativer Prozess:
 - kontrahiere Subgraphen
 - berechne Flaggen

Anfragen:

- unidirektional
- hierarchisch (Kontraktion)
- zielgerichtet (Arc-Flags)

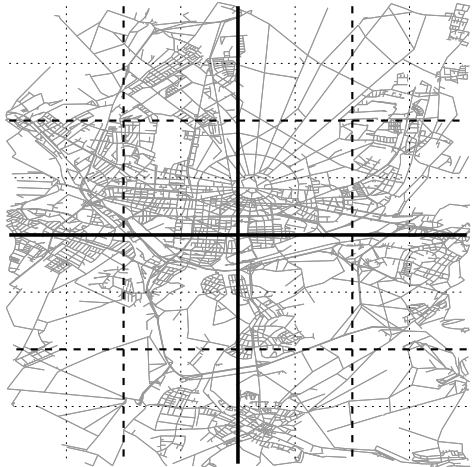


Vorbereitung:

- Multi-Level-Partition
- iterativer Prozess:
 - kontrahiere Subgraphen
 - berechne Flaggen

Anfragen:

- unidirektional
- hierarchisch (Kontraktion)
- zielgerichtet (Arc-Flags)

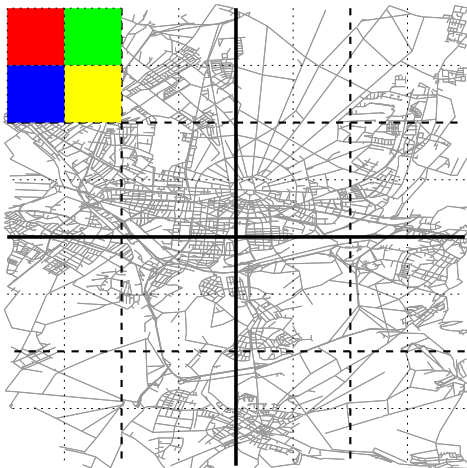


Vorbereitung:

- Multi-Level-Partition
- iterativer Prozess:
 - kontrahiere Subgraphen
 - berechne Flaggen

Anfragen:

- unidirektional
- hierarchisch (Kontraktion)
- zielgerichtet (Arc-Flags)

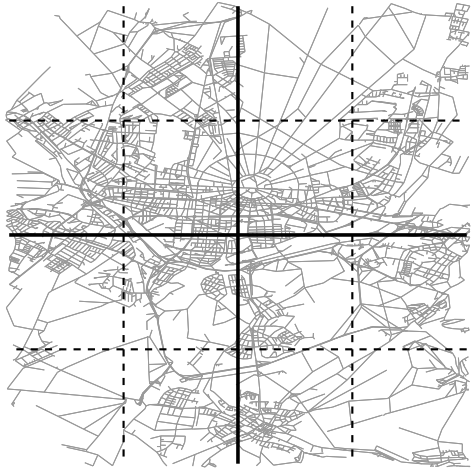


Vorbereitung:

- Multi-Level-Partition
- iterativer Prozess:
 - kontrahiere Subgraphen
 - berechne Flaggen

Anfragen:

- unidirektional
- hierarchisch (Kontraktion)
- zielgerichtet (Arc-Flags)

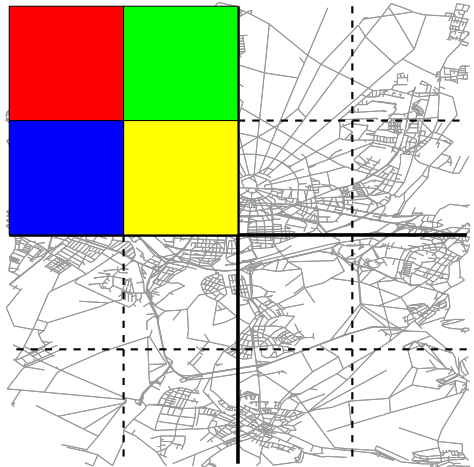


Vorbereitung:

- Multi-Level-Partition
- iterativer Prozess:
 - kontrahiere Subgraphen
 - berechne Flaggen

Anfragen:

- unidirektional
- hierarchisch (Kontraktion)
- zielgerichtet (Arc-Flags)

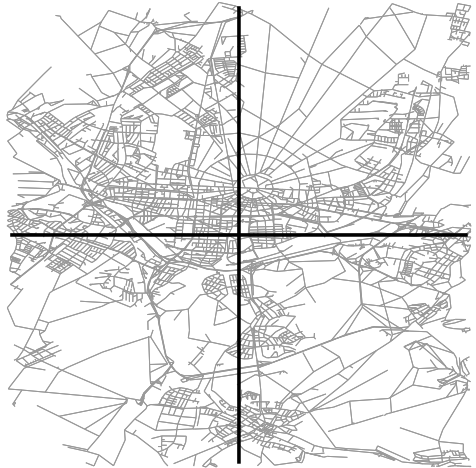


Vorbereitung:

- Multi-Level-Partition
- iterativer Prozess:
 - kontrahiere Subgraphen
 - berechne Flaggen

Anfragen:

- unidirektional
- hierarchisch (Kontraktion)
- zielgerichtet (Arc-Flags)

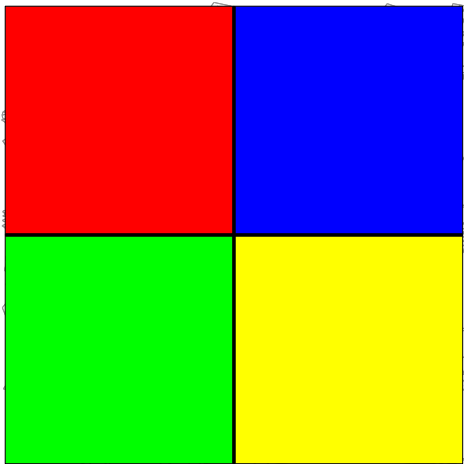


Vorbereitung:

- Multi-Level-Partition
- iterativer Prozess:
 - kontrahiere Subgraphen
 - berechne Flaggen

Anfragen:

- unidirektional
- hierarchisch (Kontraktion)
- zielgerichtet (Arc-Flags)

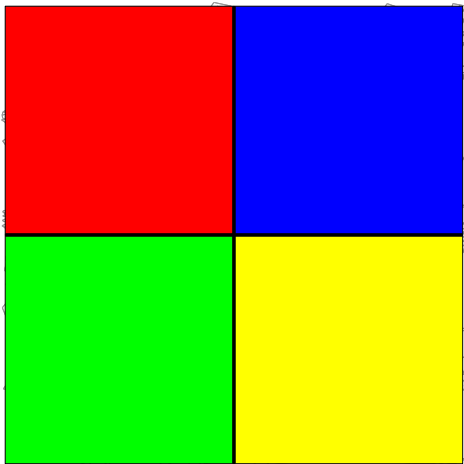


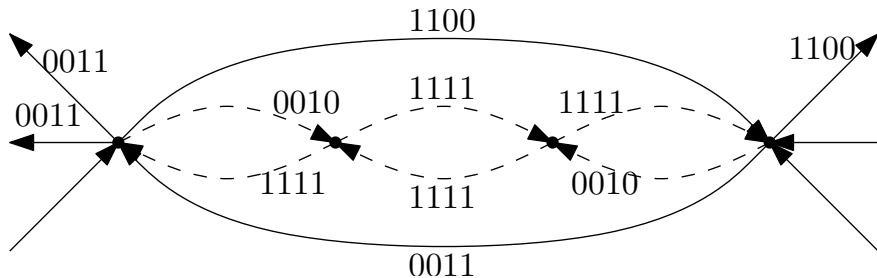
Vorbereitung:

- Multi-Level-Partition
- iterativer Prozess:
 - kontrahiere Subgraphen
 - berechne Flaggen

Anfragen:

- unidirektional
- hierarchisch (Kontraktion)
- zielgerichtet (Arc-Flags)



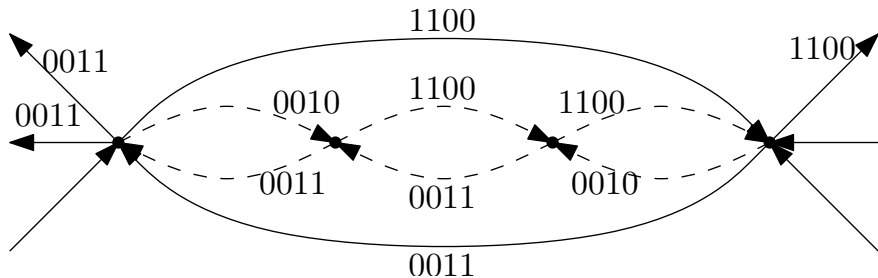


Beobachtung:

- Flaggen schlechter als nötig
- geht es besser?

Idee:

- verfeinere Flaggen
 - propagiere Flaggen von wichtigen zu unwichtigen Kanten
 - mittels lokaler Suche
- ⇒ sehr gute Flaggen



Beobachtung:

- Flaggen schlechter als nötig
- geht es besser?

Idee:

- verfeinere Flaggen
 - propagiere Flaggen von wichtigen zu unwichtigen Kanten
 - mittels lokaler Suche
- ⇒ sehr gute Flaggen

Partielle Flaggenberechnung:

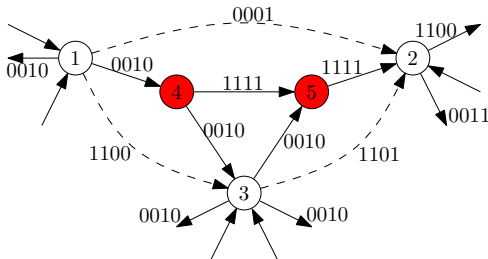
- Flaggen auf unteren Leveln unwichtig
- nur wenige werden am Ende relaxiert
- setze einfach alle Flaggen auf 1
- offensichtlich korrekt

Partielle Verfeinerung:

- Berechne exakte Flaggen nur auf hohen Leveln
- dadurch zu Beginn einer Anfrage schlechte Flaggen
- Verfeinerung für niedrigere Level wichtiger als Flaggenberechnung

Beobachtung:

- Shortcut entspricht einem Pfad
- manche Shortcuts erscheinen unwichtig

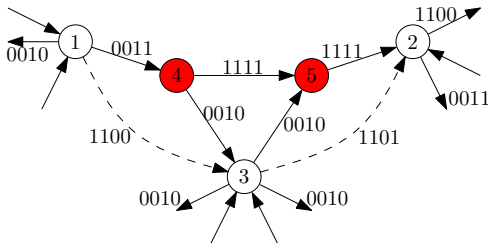


Idee:

- entferne (manche) Shortcuts nach Vorberechnung
- vererbe Flaggen an erste Kante des Pfades
- Extremfall: entferne alle Shortcuts

Beobachtung:

- Shortcut entspricht einem Pfad
- manche Shortcuts erscheinen unwichtig



Idee:

- entferne (manche) Shortcuts nach Vorberechnung
- vererbe Flaggen an erste Kante des Pfades
- Extremfall: entferne alle Shortcuts

PARTITION									PREPRO		QUERY			
#cells per level									⊙#nodes	time space	#settled	#rel.	time	
l_0	l_1	l_2	l_3	l_4	l_5	l_6	l_7	#total cells	per cell	[h:m]	[B/n]	nodes	edges	[μ s]
128	-	-	-	-	-	-	-	128	140 704.5	1:52	6.0	78 429	178 103	23 306
8	120	-	-	-	-	-	-	960	18 760.6	1:14	9.8	11 362	26 323	3 049
4	4	120	-	-	-	-	-	1 920	9 380.3	1:24	10.6	5 982	14 128	1 637
4	8	116	-	-	-	-	-	3 712	4 851.9	1:25	10.8	3 459	8 372	983
8	8	112	-	-	-	-	-	7 168	2 512.6	1:36	11.5	2 182	5 389	667
16	16	96	-	-	-	-	-	24 576	732.8	2:12	13.1	1 217	3 169	428
4	4	4	116	-	-	-	-	7 424	2 425.9	1:20	11.2	2 025	5 219	625
4	4	8	112	-	-	-	-	14 336	1 256.3	1:14	11.6	1 320	3 544	441
4	8	16	100	-	-	-	-	51 200	351.8	1:17	13.1	819	2 357	319
4	4	4	4	112	-	-	-	28 672	628.1	1:12	12.0	957	2 827	360
4	4	8	8	104	-	-	-	106 496	169.1	1:18	13.7	700	2 153	294
4	4	4	16	100	-	-	-	102 400	175.9	1:16	13.7	703	2 162	295
4	8	8	16	92	-	-	-	376 832	47.8	1:30	16.0	663	2 046	288
4	4	4	4	4	108	-	-	110 592	162.9	1:15	13.6	695	2 263	299
4	4	4	4	8	104	-	-	212 992	84.6	1:21	14.5	654	2 116	290
4	4	4	8	8	100	-	-	409 600	44.0	1:28	16.1	645	2 087	290
4	4	4	8	16	92	-	-	753 664	23.9	1:31	17.7	646	2 028	289
4	4	8	8	16	88	-	-	1 441 792	12.5	1:50	19.8	663	2 085	296
4	4	4	4	4	4	104	-	425 984	42.3	1:27	15.6	649	2 209	299
4	4	4	4	8	8	96	-	1 572 864	11.5	1:46	19.3	637	2 092	294
4	4	4	8	8	16	84	-	5 505 024	3.3	2:00	21.5	655	2 035	294
4	4	4	4	4	4	4	100	1 638 400	11.0	1:43	19.2	650	2 247	308
4	4	4	4	4	4	8	96	3 145 728	5.7	1:56	20.0	627	2 113	293
4	4	4	4	4	8	8	92	6 029 312	3.0	1:51	21.1	649	2 121	300
4	4	4	4	4	8	16	84	11 010 048	1.6	2:03	21.5	648	2 035	296

c	PREPRO		QUERY		
	time [h:m]	space [B/n]	#settled nodes	#relaxed edges	time [μ s]
1.0	1:40	15.1	1 572	3 705	578
1.5	1:20	14.8	886	2 464	348
2.0	1:20	14.7	714	2 171	301
2.5	1:21	14.5	654	2 116	290
3.0	1:23	14.6	622	2 109	286

Beobachtung:

- Einfluss der Kontraktion begrenzt

Einfluss Flaggenberechnung

ARC-FLAGS		PREPRO		QUERY		
core refinement levels	levels	time [h:m]	space [B/n]	#settled nodes	#relaxed edges	time [μs]
-	-	0:16	12.8	204 518	960 653	76 640
5	5	0:24	13.2	23 313	70 225	6 021
5	4-5	0:24	13.2	6 583	23 038	1 843
5	3-5	0:25	13.3	2 394	11 547	856
5	2-5	0:27	13.6	1 350	8 721	611
5	1-5	0:29	13.7	1 127	8 091	553
4-5	4-5	0:30	13.7	6 186	18 170	1 626
4-5	3-5	0:30	13.7	2 042	6 683	648
4-5	2-5	0:31	13.7	993	3 883	405
4-5	1-5	0:34	13.7	784	3 338	355
3-5	3-5	0:35	13.8	1 974	5 962	615
3-5	2-5	0:37	14.2	933	3 161	371
3-5	1-5	0:39	14.2	729	2 629	323
2-5	2-5	0:44	14.3	900	2 862	354
2-5	1-5	0:46	14.3	696	2 335	305
1-5	1-5	0:54	14.5	684	2 236	300
0-5	0-5	1:21	14.5	654	2 116	290

Beobachtung:

- partielle Berechnung reicht aus
- Verfeinerung wichtiger als Berechnung
- Ungenauigkeit am Ende der Anfrage eher verzeihbar als am Anfang (Suchraum fächert sich auf)

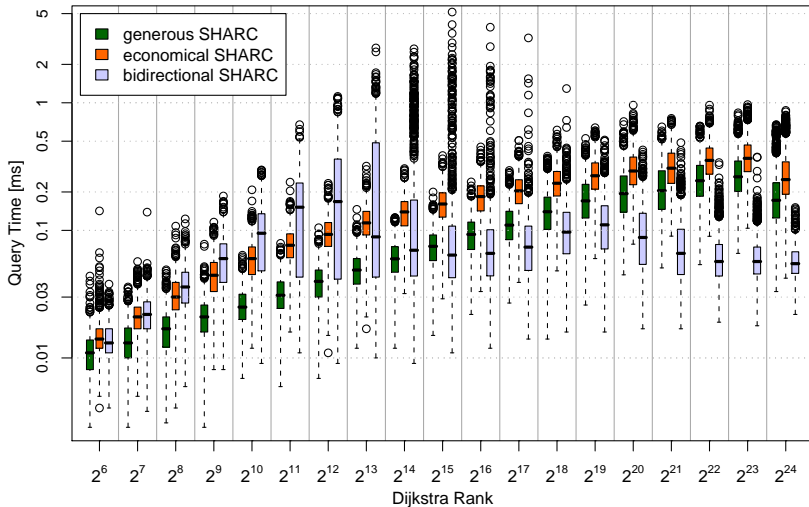
c	SHARC				stripped SHARC			
	PREPRO		QUERY		PREPRO		QUERY	
	time	space	#settled	time	time	space	#settled	time
	[h:m]	[B/n]	nodes	[ms]	[h:m]	[B/n]	nodes	[ms]
0.50	7:32	13.8	10 876	3.38	7:48	7.8	14 697	4.76
0.75	4:29	14.3	5 420	1.99	4:43	7.7	62 303	26.03
1.00	1:45	15.1	1 997	0.90	2:03	7.5	1 891 320	1 096.48

Beobachtung:

- volles Entfernen nur bei niedriger Kontraktion

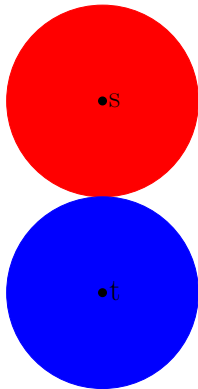
	Europe				USA			
	PREPRO		QUERY		PREPRO		QUERY	
	time	space	#settled	time	time	space	#settled	time
	[h:m]	[B/n]	nodes	[μ s]	[h:m]	[B/n]	nodes	[μ s]
generous SHARC	1:21	14.5	654	290	0:58	18.1	865	376
economical SHARC	0:34	13.7	784	355	0:38	17.2	1 230	578
stripped SHARC	7:48	7.8	14 697	4 762	6:41	9.2	38 817	12 719
bidirectional SHARC	2:38	21.0	125	65	2:34	23.1	254	118

Lokale Anfragen

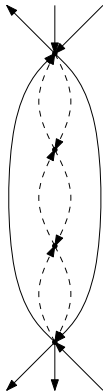


Landmarken

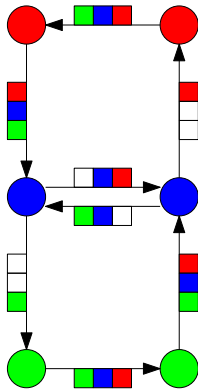
**Bidirektionale
Suche**



Kontraktion



Arc-Flags



**Table-
Lookups**

Motivation:

- CHs sind ungerichtet
- weitere Beschleunigung von CH durch zielgerichtetes Verfahren

Hauptideen:

- Flaggen auf Suchgraphen berechnen
- nur auf oberen Teil der Hierarchie

Vorbereitung:

- CH-Vorbereitung
- partitioniere Suchgraphen
- berechne Flaggen für Suchgraphen

Anfragen:

- normale CH-query
- mit Flaggen pruning

Problem:

- mehr Randknoten durch Shortcuts
- sehr lange Vorberechnungszeit

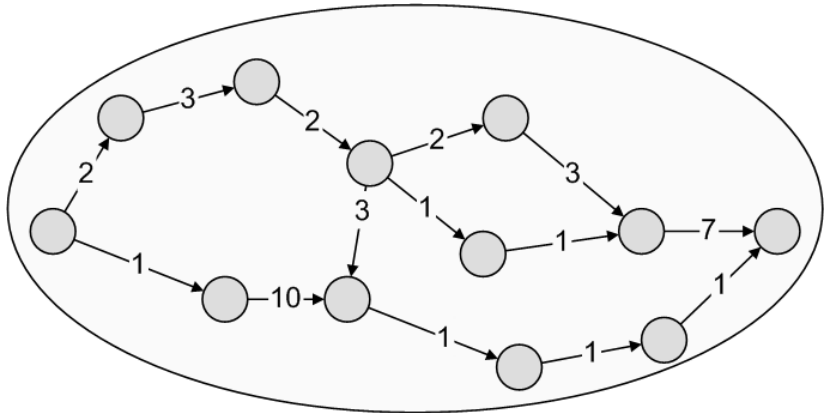
Vorbereitung:

- extrahiere Graphen H mit k wichtigsten Knoten
- führe Vorbereitung für H aus

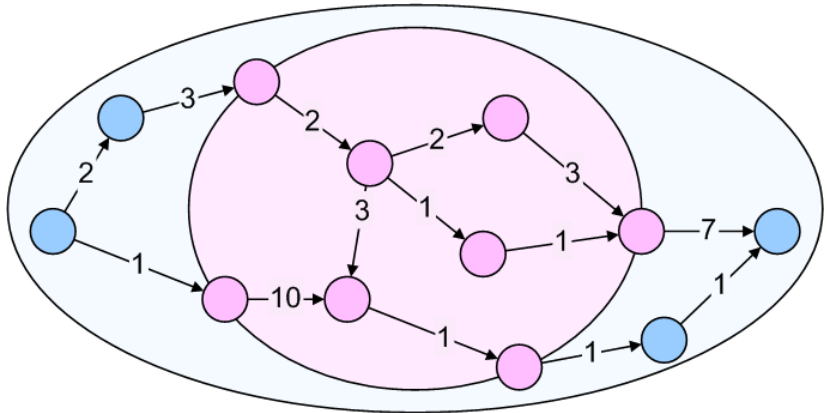
2-Phasen Anfragen:

- 1 normale CH-query
- 2 CH + Flaggen query

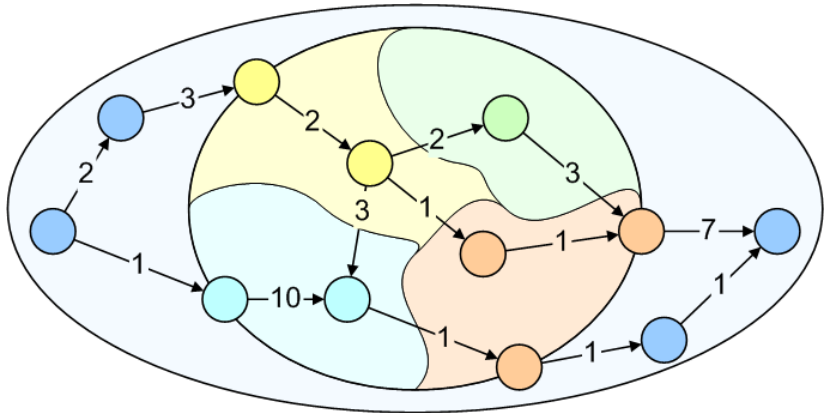
Beispiel



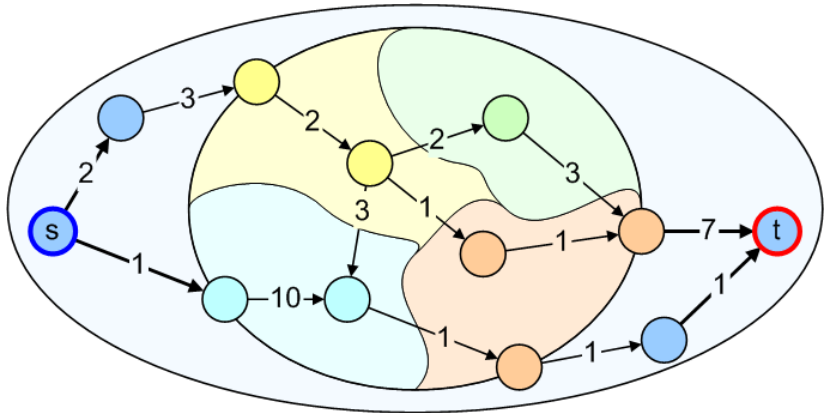
Beispiel



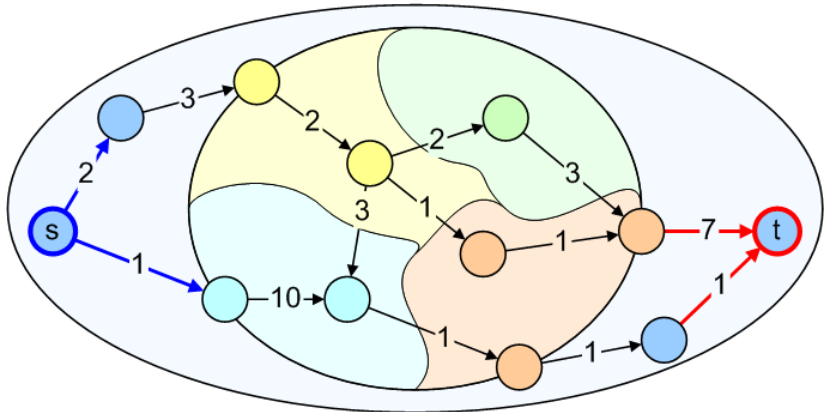
Beispiel



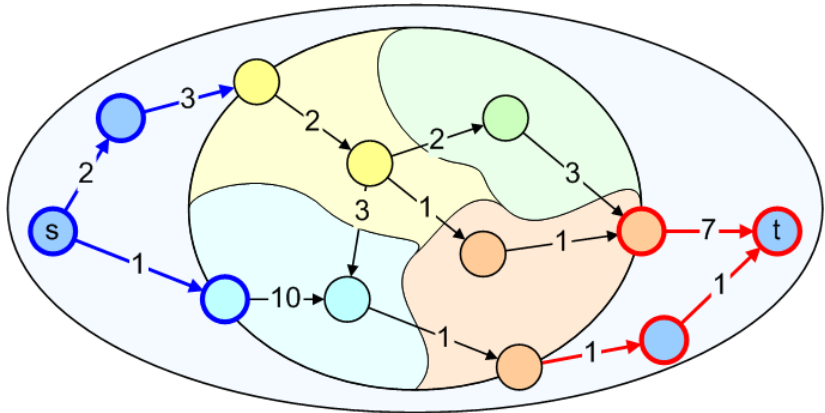
Beispiel



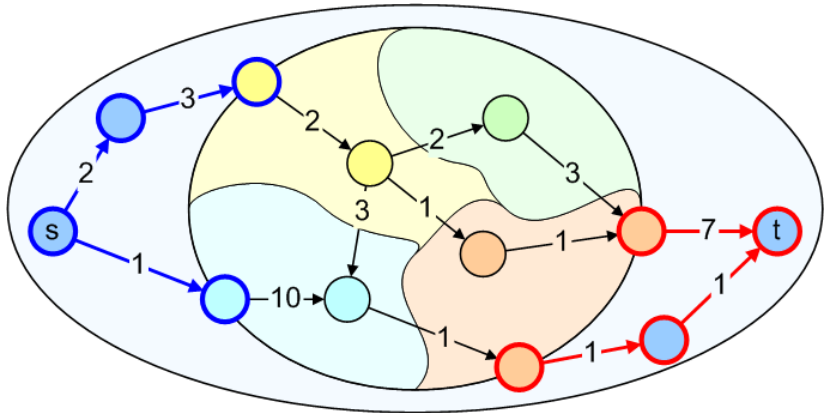
Beispiel



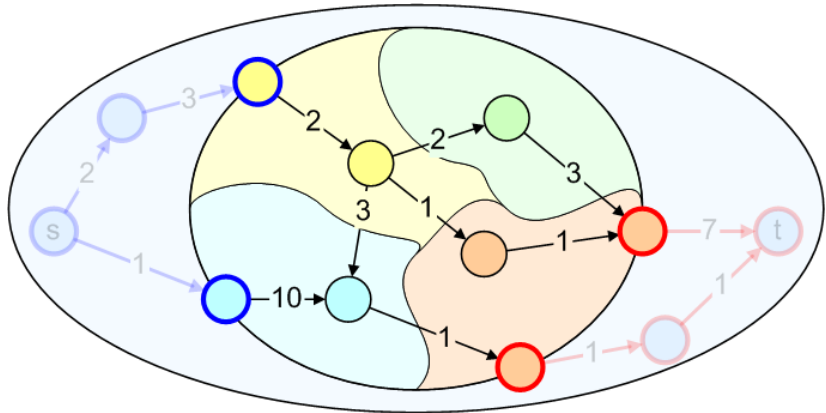
Beispiel



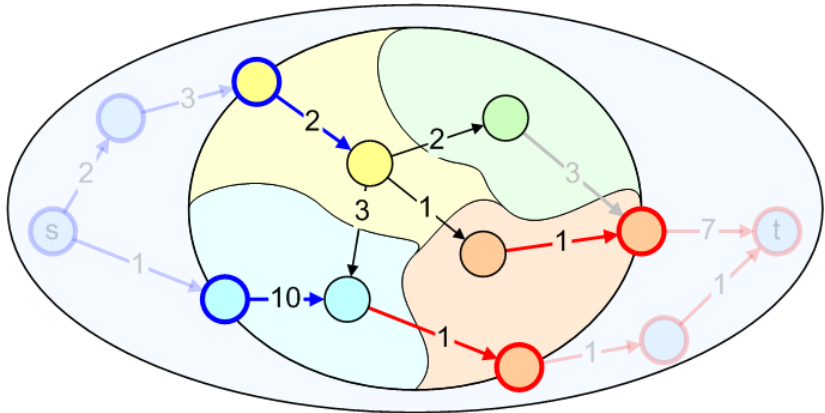
Beispiel



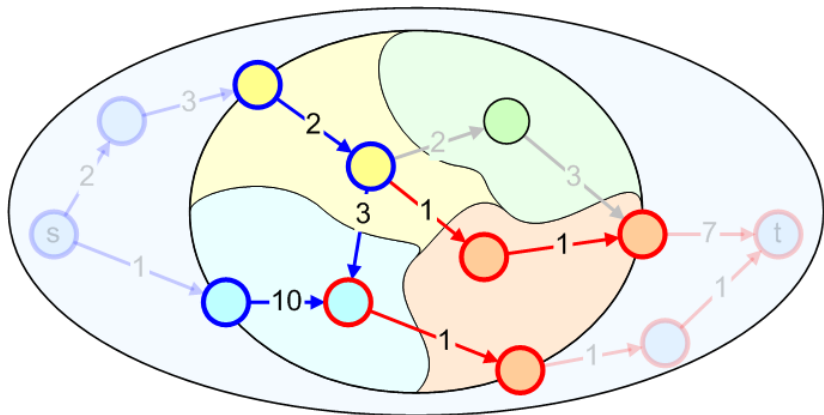
Beispiel



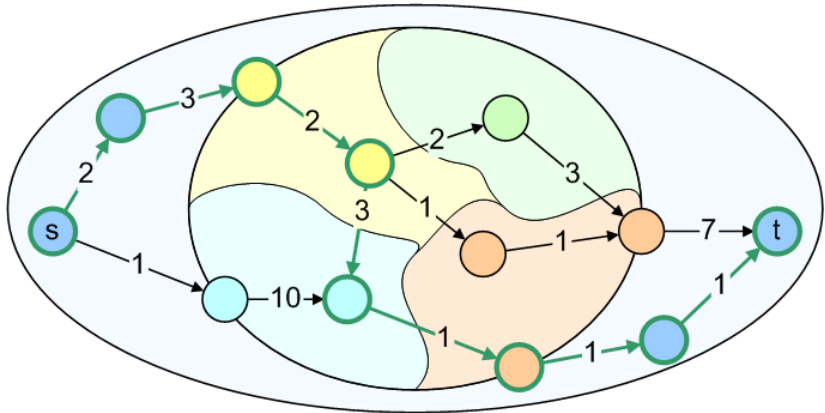
Beispiel



Beispiel



Beispiel



size of Arc-Flags		0%	0.5%	1%	2%	5%	10%	20%
Prepro.	[h:m]	0:25	0:32	0:41	1:02	1:39	4:04	8:56
	[B/n]	-2.7	0.0	1.9	4.9	12.1	22.2	39.5
Query	# settled	355	111	78	59	45	39	35
	time [μ s]	180.0	43.8	30.8	23.1	17.3	14.9	13.0

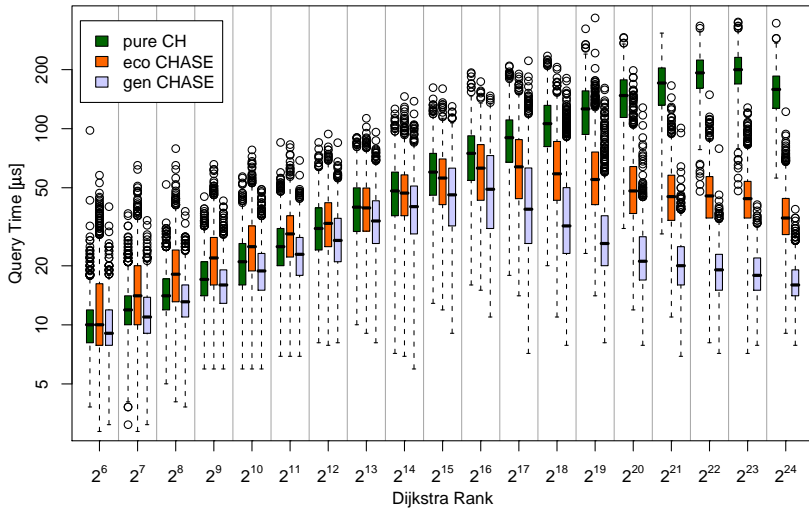
Beobachtungen:

- zusätzliche 7 Minuten Vorberechnung \Rightarrow zusätzlicher speedup von 4.1 (economical variant)
- eine Stunde \Rightarrow speedup von 10.4
- mehr als 5% lohnen sich nicht

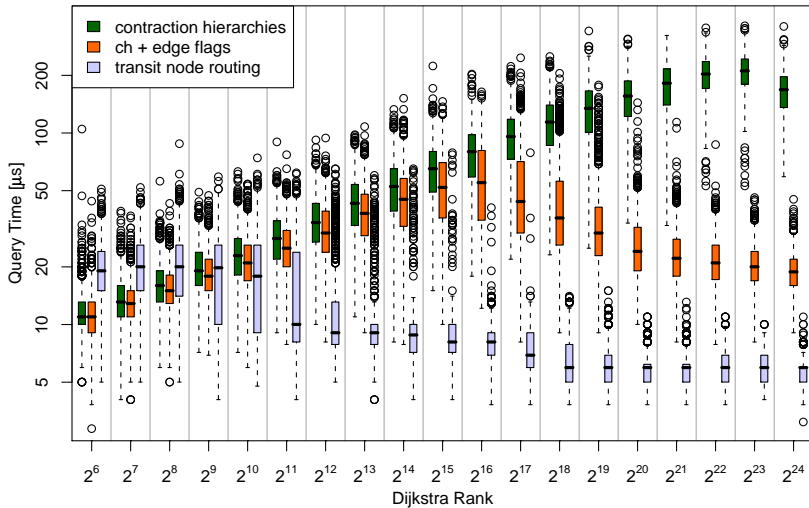
	Preprocessing		Query	
	[h:m]	[B/n]	#settled	[μ s]
Contraction Hierarchies	0:25	-3	355	180
bidirectional Arc-Flags	17:08	19	2 369	1 600
Transit-Node Routing	1:52	204	N/A	3.4
bidirectional SHARC	3:32	21	125	65
REAL-(64,16)	2:21	32	679	1 100
eco. CHASE	0:32	0	111	43.8
gen. CHASE	1:39	12	45	17.3

Beobachtung:

- CHASE fast so schnell wie TNR
- aber **weniger Vorberechnungsaufwand**

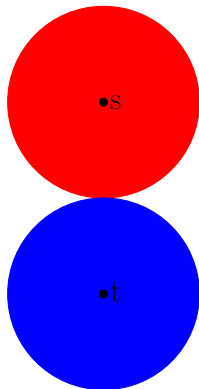


Lokale Anfragen



Landmarken

Bidirektionale
Suche



Kontraktion

Arc-Flags

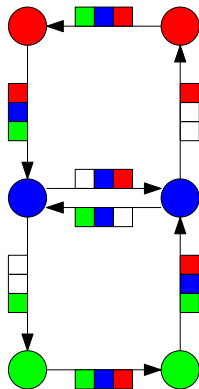
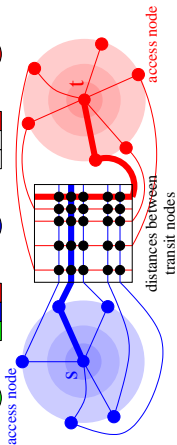


Table-
Lookups

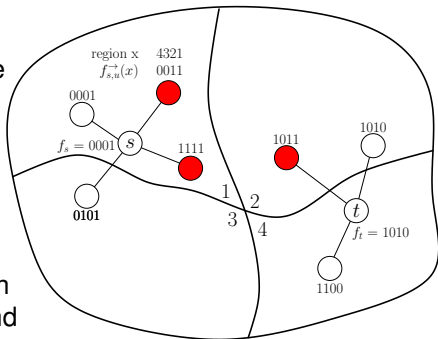


Beobachtung:

- Table-Lookups in Distanztabelle dauern "lange"

Idee:

- **partitioniere** Graphen induziert von Transit-Knoten
- berechne welche Transit-Knoten für welche Regionen wichtig sind



Anfragen:

- evaluiere nur Tabelleneinträge mit gesetzter Flagge

	Preprocessing		Query	
	[h:m]	[B/n]	#settled	[μ s]
bidirectional Arc-Flags	17:08	19	2 369	1 600
Transit-Node Routing	1:52	204	N/A	3.4
gen. CHASE	1:39	12	45	17.3
Goal-Directed TNR	3:49	321	N/A	1.9

Beobachtung:

- **milder** speedup gegenüber puren TNR
- aber: **> 3 Mio.** mal schneller als Dijkstra

Kombinationen

- Basismodule:
 - bidirektionale Suche
 - landmarken
 - reach
 - arc-flags
 - Kontraktion
 - Table-Lookups
- beste Kombinationen: hierarchisch + zielgerichtet
- CH + Arc-Flags sehr effizient
- TNR + Arc-Flags schnellstes Verfahren: $< 2 \mu\text{s}$ Anfragezeit

Literatur (SHARC und Kombinationen):

- Reinhard Bauer and Daniel Delling:
SHARC: Fast and Robust Unidirectional Routing
In: *ACM Journal of Experimental Algorithmics*, 14:2.4, 2009.
- Reinhard Bauer, Daniel Delling, Peter Sanders, Dennis Schieferdecker, Dominik Schultes, and Dorothea Wagner:
Combining Hierarchical and Goal-Directed Speed-Up Techniques for Dijkstra's Algorithm
In: *ACM Journal of Experimental Algorithmics*, 15:2.3, 2010.