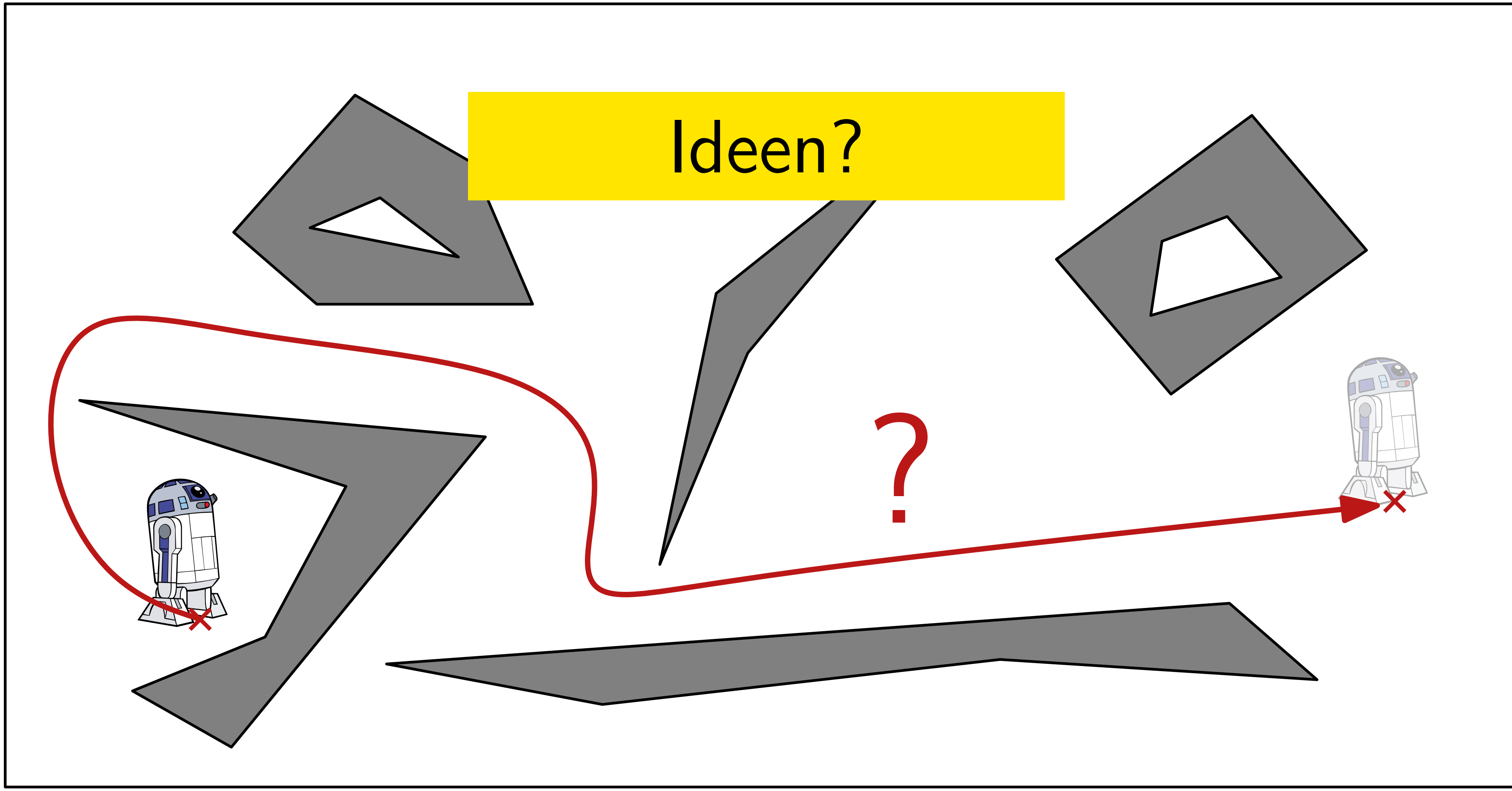
# Vorlesung Algorithmische Geometrie
## Sichtbarkeitsgraphen

LEHRSTUHL FÜR ALGORITHMIK I · INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK · FAKULTÄT FÜR INFORMATIK

Martin Nöllenburg

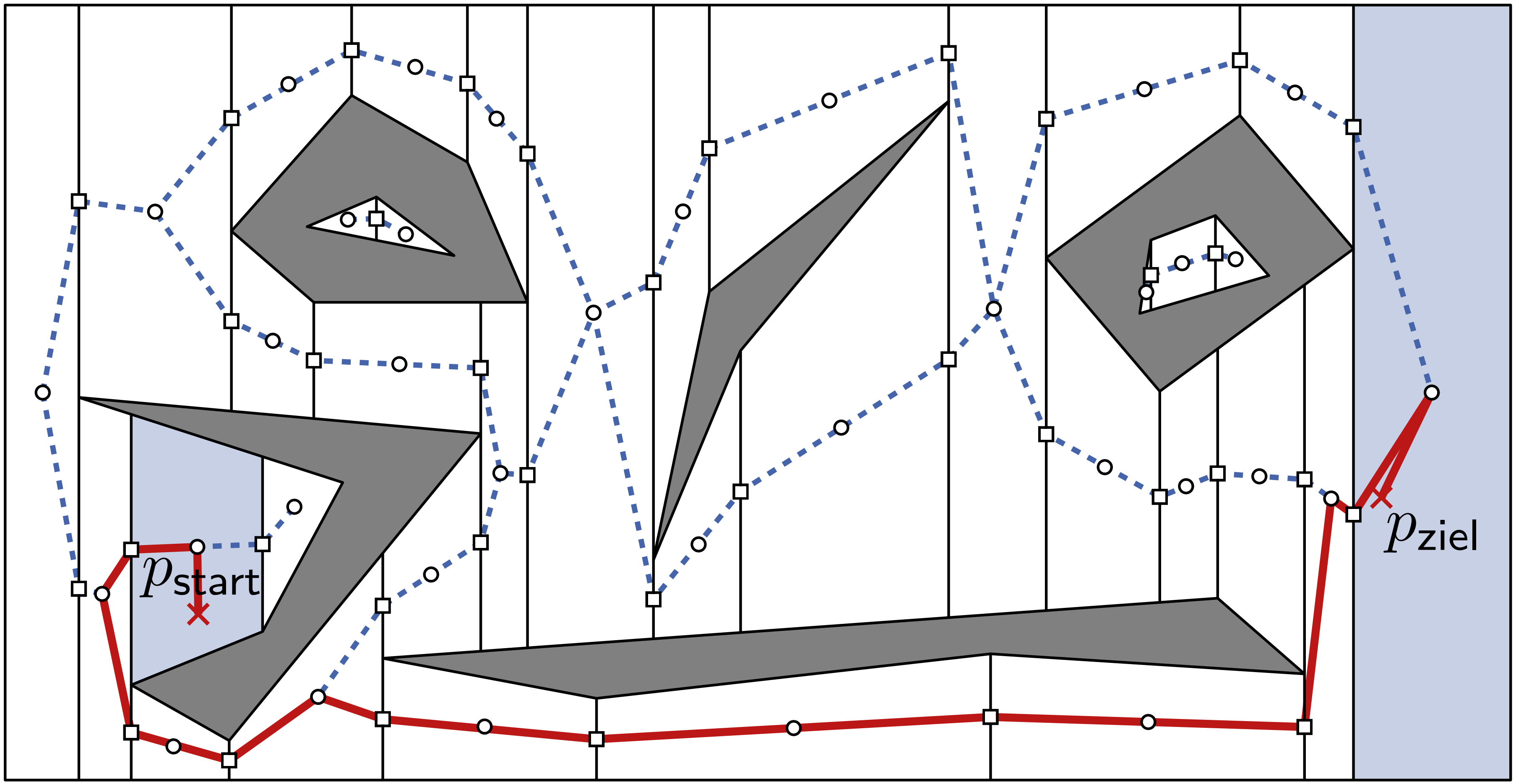
12.07.2011

# Bewegungsplanung für Roboter



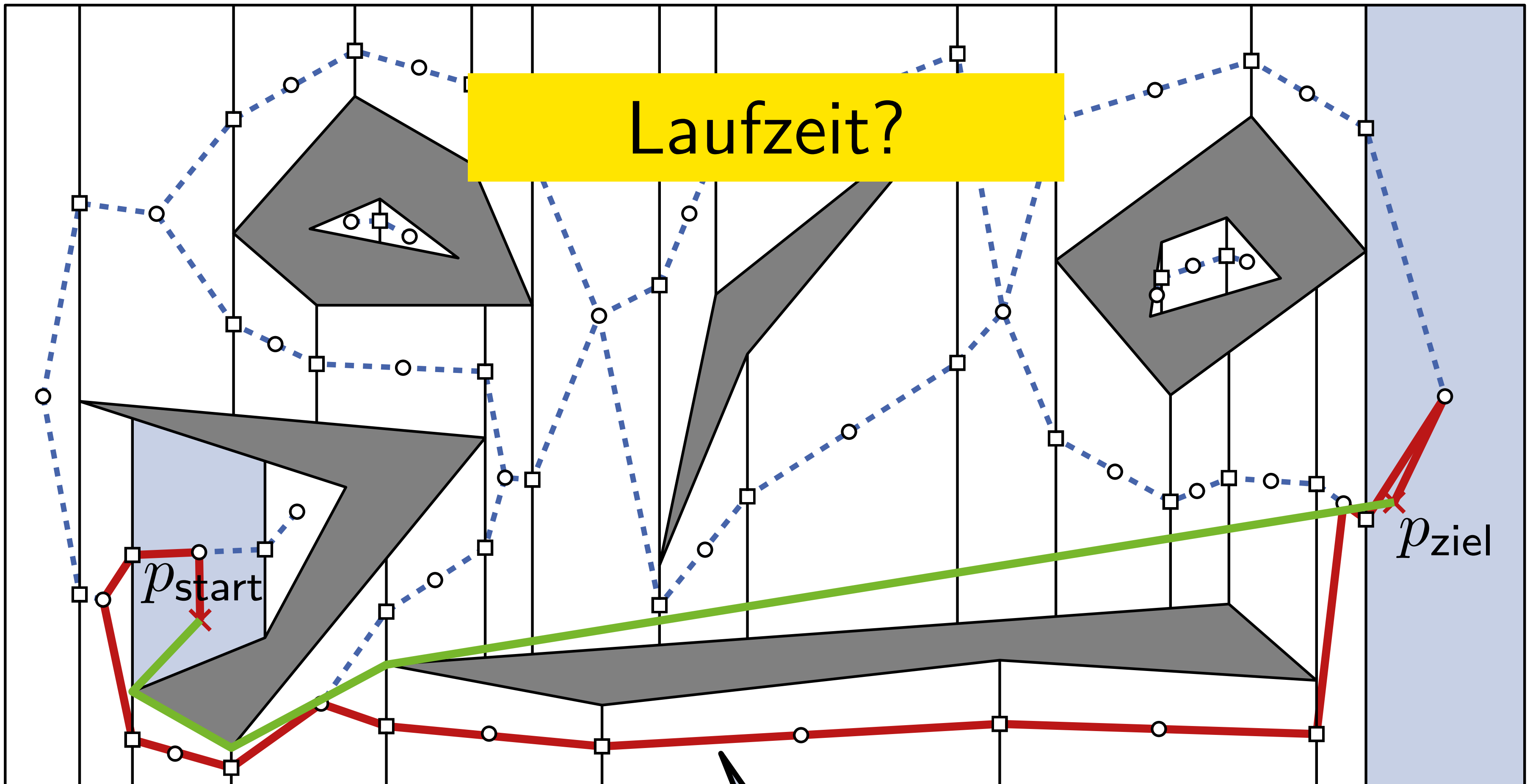

**Problem:** Gegeben ein (punktförmiger) Roboter an Position $p_{\text{start}}$ in einem Gebiet mit polygonalen Hindernissen finde einen möglichst kurzen Weg zum Ziel $p_{\text{ziel}}$ um die Hindernisse herum.

# Erste Idee: Kürzeste Wege in Graphen




- erstelle Trapezzerlegung
- entferne Segmente in Hindernissen
- Knoten in Trapezen und Vertikalen
- euklidisch gewichteter „Dualgraph“ $G$ mit Viaknoten auf Vertikalen
- Lokalisiere Start und Ziel
- kürzester Weg mit Dijkstra in $G$

# Erste Idee: Kürzeste Wege in Graphen

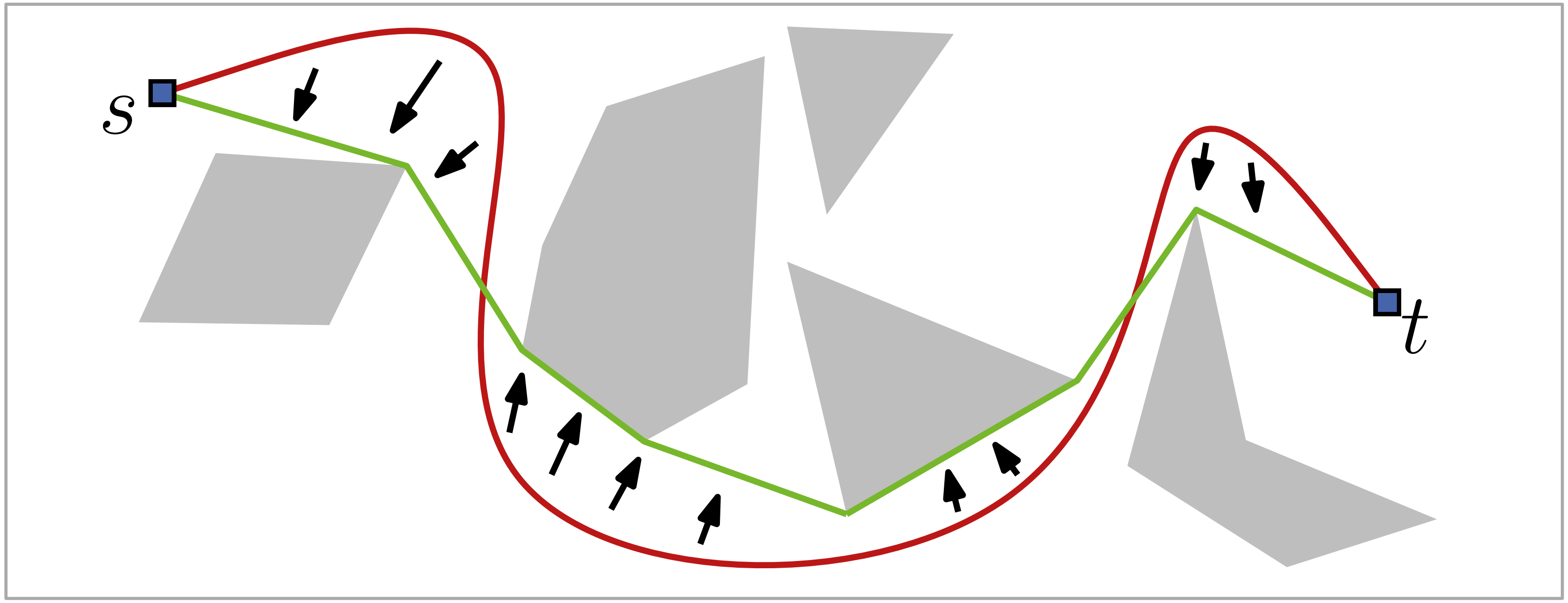



- erstelle Trapezzerlegung
- entferne Segmente in Hindernissen
- Knoten in Trapezen und Vertikalen
- euklidisch gewichteter „Dualgraph“ $G$ mit Viaknoten auf Vertikalen
- Lokalisiere Start und Ziel
- kürzester Weg mit Dijkstra in $G$

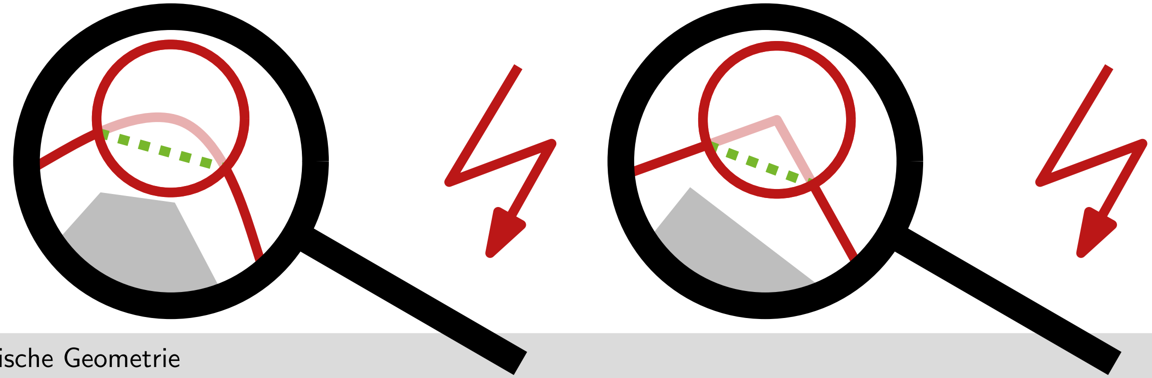
kein kürzester Weg!

# Kürzeste Wege in Polygongebieten

**Lemma 1:** Für eine Menge $S$ von disjunkten Polygonen in $\mathbb{R}^2$ und zwei Punkte $s$ und $t$ außerhalb $S$ ist jeder kürzeste $st$-Weg in $\mathbb{R}^2 \setminus \bigcup S$ ein Polygonzug dessen innere Knoten Knoten von $S$ sind.

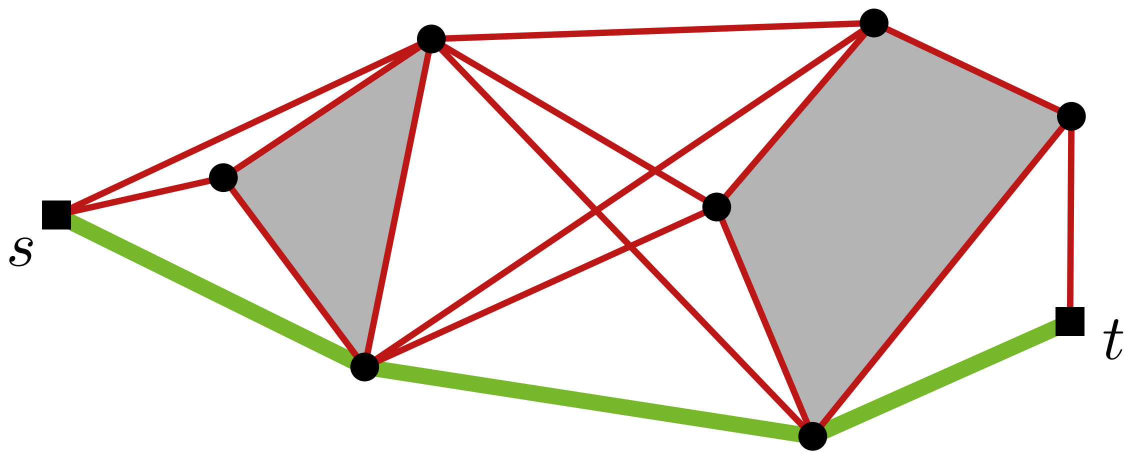



**Beweisskizze:**



# Sichtbarkeitsgraph

Gegeben sei eine Menge $S$ disjunkter offener Polygone...




...mit Knotenmenge $V(S)$.

**Def.:** Dann ist $G_{\text{vis}}(S) = (V(S), E_{\text{vis}}(S))$ der **Sichtbarkeitsgraph** von $S$ mit $E_{\text{vis}}(S) = \{uv \mid u, v \in V(S) \text{ und } u \textit{ sieht } v\}$ und $w(uv) = |uv|$.
Dabei gilt $u$ **sieht** $v$ $:\Leftrightarrow \overline{uv} \subset \mathcal{C}_{\text{free}} = \mathbb{R}^2 \setminus \bigcup S$

Definiere $S^\star = S \cup \{s, t\}$ und $G_{\text{vis}}(S^\star)$ analog.

Lemma 1
$\Rightarrow$ Der kürzeste $st$-Weg, der die Hindernisse in $S$ vermeidet, entspricht einem kürzesten Weg in $G_{\text{vis}}(S^\star)$.

# Algorithmus

$\textsc{ShortestPath}(S, s, t)$ $\boxed{n = |V(S)|, m = |E_{\mathsf{vis}}(S)|}$

**Input**: Hindernismenge $S$, Punkte $s, t \in \mathbb{R}^2 \setminus \bigcup S$
**Output**: kürzester kollisionsfreier $st$-Weg in $S$

$G_{\mathsf{vis}} \leftarrow \textsc{VisibilityGraph}(S \cup \{s, t\})$ $O(n^2 \log n)$
**foreach** $uv \in E_{\mathsf{vis}}(S)$ **do** $w(uv) \leftarrow |uv|$ $O(m)$
**return** $\textsc{Dijkstra}(G_{\mathsf{vis}}, w, s, t)$ $O(n \log n + m)$

$O(n^2 \log n)$

**Satz 1:** Ein kürzester $st$-Weg in einem Gebiet mit Polygon-Hindernissen mit $n$ Kanten kann in $O(n^2 \log n)$ Zeit berechnet werden.

# Sichtbarkeitsgraph berechnen

$\textsc{VisibilityGraph}(S)$

**Input**: Menge disjunkter Polygone $S$

**Output**: Sichtbarkeitsgraph $G_{\mathsf{vis}}(S)$

$E \leftarrow \emptyset$

**foreach** $v \in V(S)$ **do**

  $W \leftarrow \textsc{VisibleVertices}(v, S)$

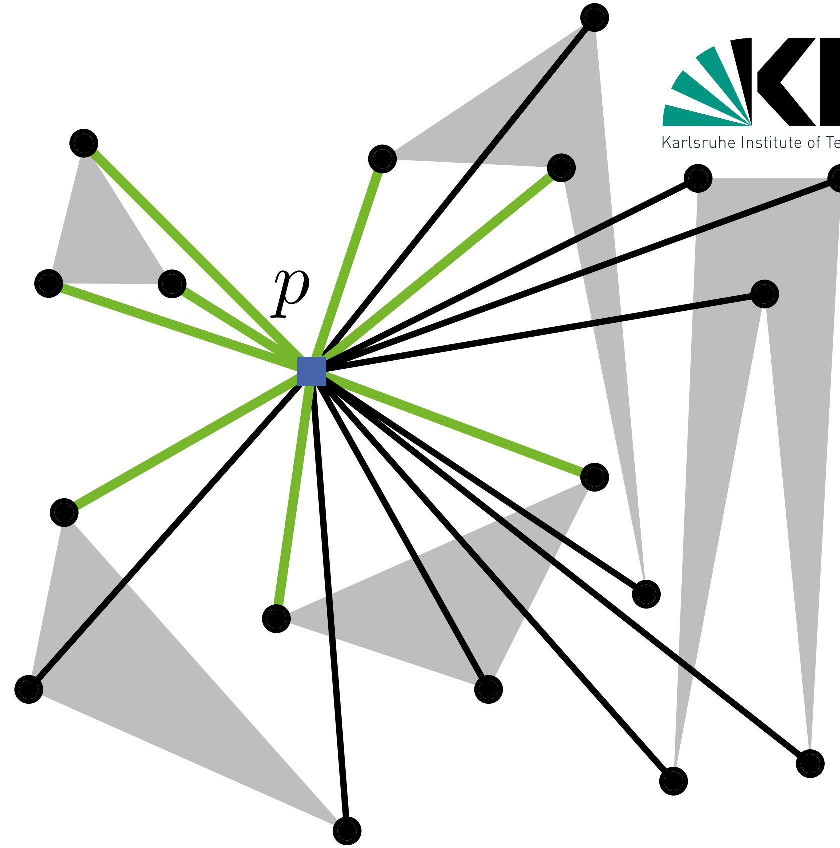
  $E \leftarrow E \cup \{vw \mid w \in W\}$

**return** $E$

# Sichtbare Knoten berechnen

$\textsc{VisibleVertices}(p, S)$

**Aufgabe:** Gegeben $p$ und $S$ finde in $O(n \log n)$ Zeit alle von $p$ aus sichtbaren Knoten in $V(S)$!



# Sichtbare Knoten berechnen

$\textsc{VisibleVertices}(p, S)$

$r \leftarrow \{p + k\binom{1}{0} \mid k \in \mathbb{R}_0^+\}$

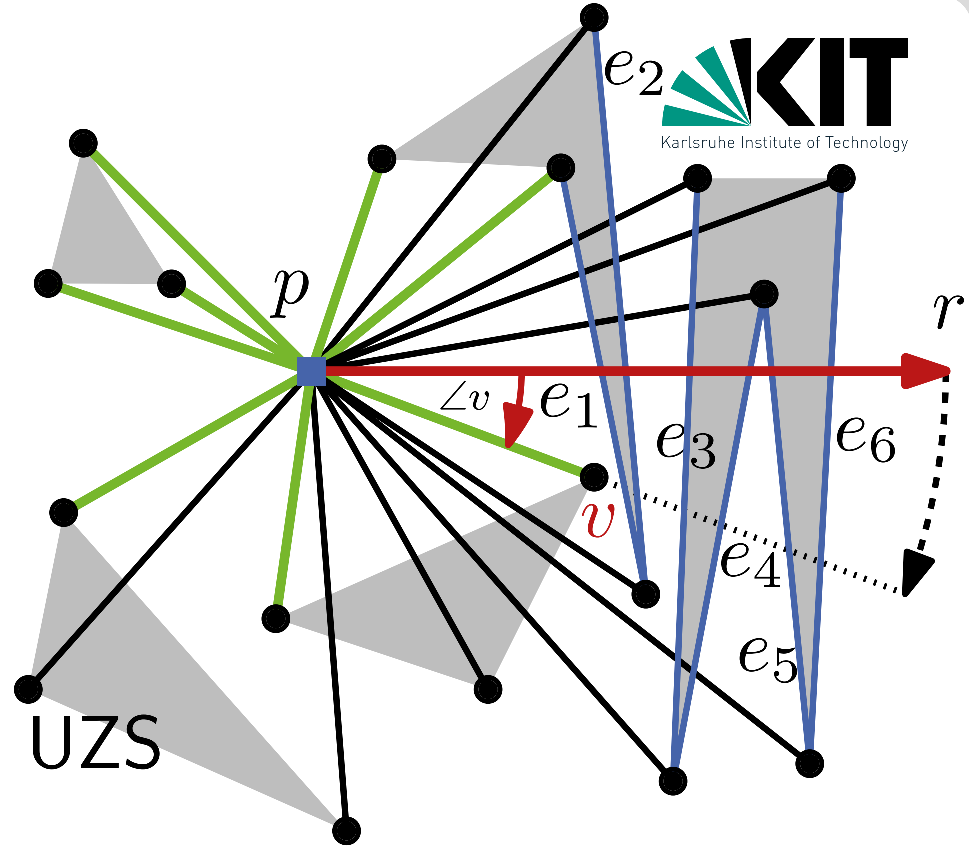
$I \leftarrow \{e \in E(S) \mid e \cap r \neq \emptyset\}$

$\mathcal{T} \leftarrow \text{balancedBinaryTree}(I)$

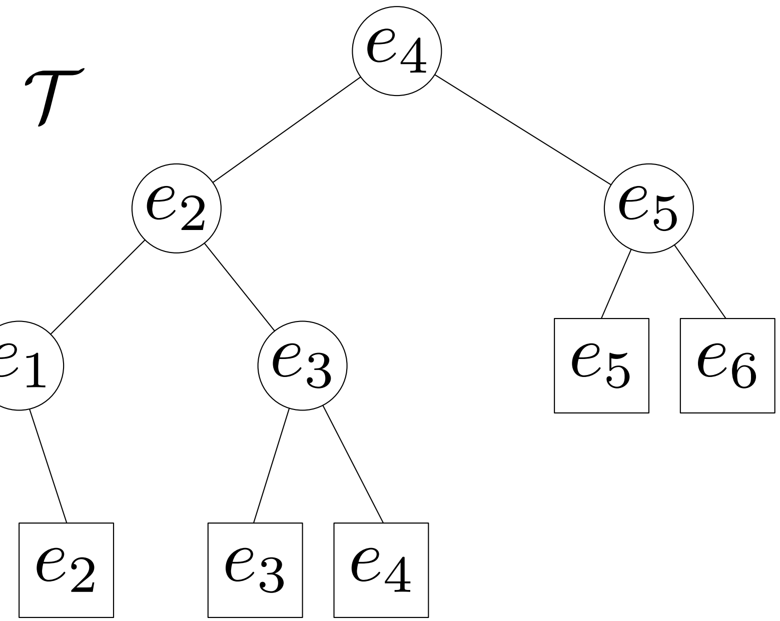
$w_1, \ldots, w_n \leftarrow$ sortiere $V(S)$ im UZS

$v \prec v' :\Leftrightarrow$

$\boxed{\begin{array}{l}\angle v < \angle v' \text{ or} \\ (\angle v = \angle v' \text{ and } |pv| < |pv'|)\end{array}}$

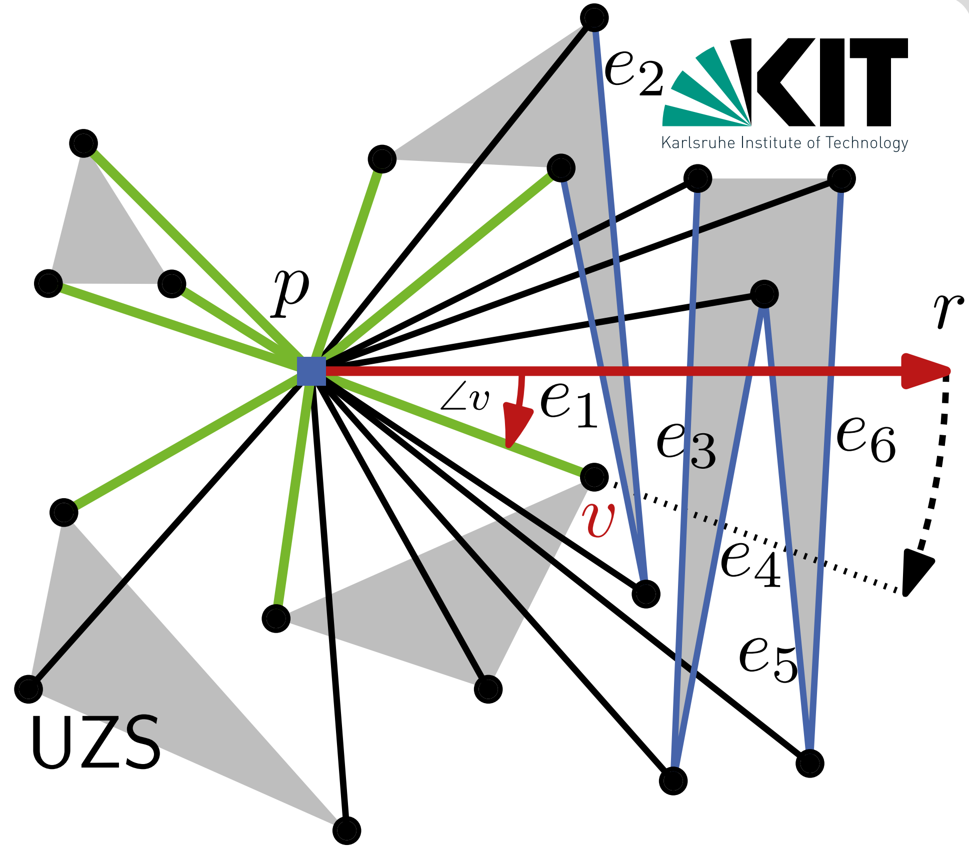



*Sweep-Verfahren mit Rotation*



# Sichtbare Knoten berechnen

$\textsc{VisibleVertices}(p, S)$




$r \leftarrow \{p + k\binom{1}{0} \mid k \in \mathbb{R}_0^+\}$

$I \leftarrow \{e \in E(S) \mid e \cap r \neq \emptyset\}$

$\mathcal{T} \leftarrow$ balancedBinaryTree$(I)$

$w_1, \ldots, w_n \leftarrow$ sortiere $V(S)$ im UZS

$W \leftarrow \emptyset$

**for** $i = 1$ **to** $n$ **do**

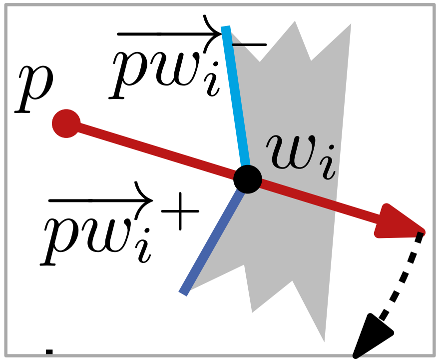
  **if** $\textsc{Visible}(p, w_i)$ **then**

    $W \leftarrow W \cup \{w_i\}$

  füge in $\mathcal{T}$ zu $w_i$ inzidente Kante aus $\overrightarrow{pw_i}^+$ ein

  lösche aus $\mathcal{T}$ zu $w_i$ inzidente Kanten aus $\overrightarrow{pw_i}^-$

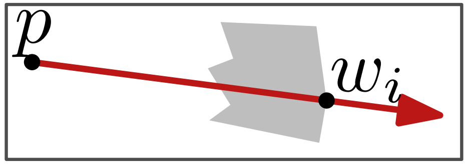
**return** $W$



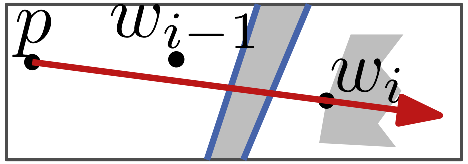
# Fallunterscheidung Sichtbarkeit

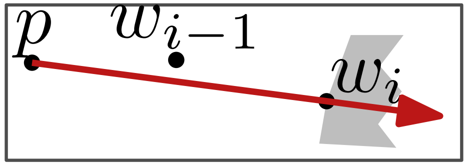


$\textsc{Visible}(p, w_i)$



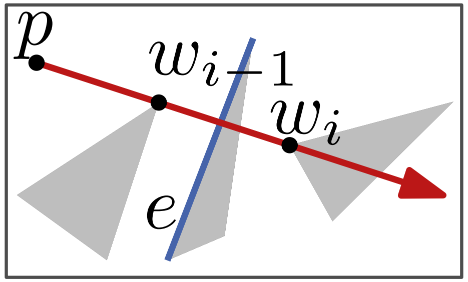

**if** $\overline{pw_i}$ schneidet Polygon von $w_i$ **then**
  **return** false




**if** $i = 1$ oder $w_{i-1} \notin \overline{pw_i}$ **then**
  $e \leftarrow$ Kante im linkesten Blatt von $\mathcal{T}$
  **if** $e \neq$ nil und $\overline{pw_i} \cap e \neq \emptyset$ **then**
    **return** false
  **else return** true

**else**
  **if** $w_{i-1}$ nicht sichtbar **then**
    **return** false
  **else**
    $e \leftarrow$ suche Kante in $\mathcal{T}$, die $\overline{w_{i-1}w_i}$ schneidet
    **if** $e \neq$ nil **then return** false
    **else return** true



# Zusammenfassung

**Satz 1:** Ein kürzester $st$-Weg in einem Gebiet mit Polygon-Hindernissen mit $n$ Kanten kann in $O(n^2 \log n)$ Zeit berechnet werden.

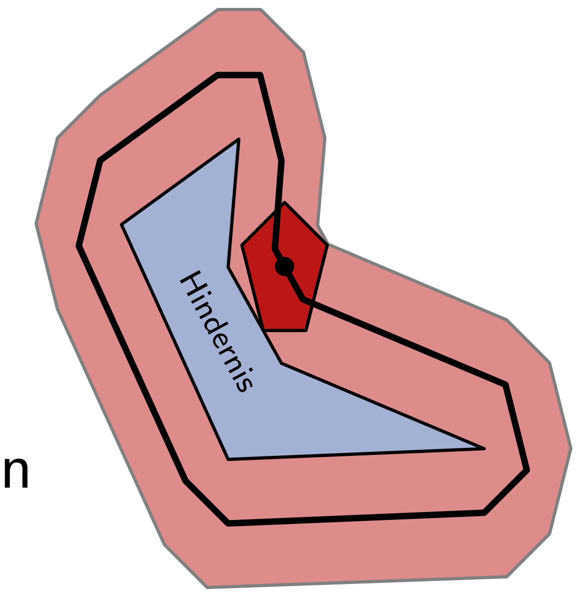
**Beweis:**

- Korrektheit folgt direkt aus Lemma 1
- Laufzeit:
  - $\textsc{VisibleVertices}$ benötigt $O(n \log n)$ Zeit pro Knoten
  - $n$ Aufrufe von $\textsc{VisibleVertices}$ $\square$

# Diskussion

## Roboter sind meistens nicht punktförmig...

Für den Fall von Robotern, deren Grundfläche ein konvexes Polygon ist und die nicht rotieren können, geht es trotzdem durch geeignete Vergrößerung der Hindernisse
($\rightarrow$ Minkowski-Summe, Kap. 13 in [BCKO08]).



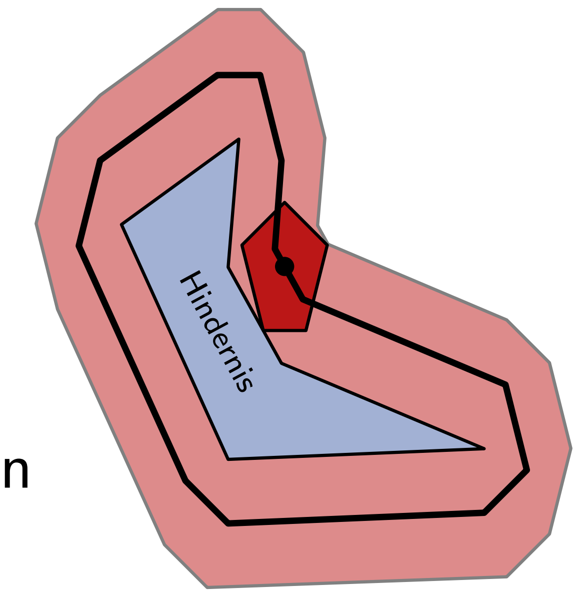

## Geht es schneller als $O(n^2 \log n)$?

Ja, durch Ausnutzung der Dualität und einen simultanen Rotations-Sweep für alle Punkte im dualen Geradenarrangement geht es auch in $O(n^2)$. Da $G_{\text{vis}}$ $\Omega(n^2)$ Kanten haben kann, lässt sich der Sichtbarkeitsgraph im Allgemeinen auch nicht schneller konstruieren.
Es gibt jedoch einen ausgabesensitiven $O(n \log n + m)$-Algorithmus.
[Ghosh, Mount 1987]

# Diskussion

## Roboter sind meistens nicht punktförmig...

Für den Fall von Robotern, deren Grundfläche ein konvexes Polygon ist und die nicht rotieren können, geht es trotzdem durch geeignete Vergrößerung der Hindernisse
($\rightarrow$ Minkowski-Summe, Kap. 13 in [BCKO08]).




## Geht es schneller als $O(n^2 \log n)$?

Ja, durch Ausnutzung der Dualität und einen simultanen Rotations-Sweep für alle Punkte im dualen Geradenarrangement geht es auch in $O(n^2)$. Da $G_{\text{vis}}$ $\Omega(n^2)$ Kanten haben kann, lässt sich der Sichtbarkeitsgraph im Allgemeinen auch nicht schneller konstruieren.
Es gibt jedoch einen ausgabesensitiven $O(n \log n + m)$-Algorithmus.

[Ghosh, Mount 1987]

Sucht man jedoch nur einen kürzesten Euklidischen $st$-Weg, gibt es einen Algorithmus mit optimaler Laufzeit $O(n \log n)$. [Hershberger, Suri 1999]