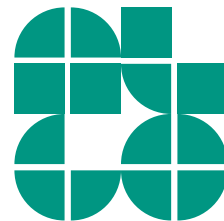


Vorlesung Algorithmische Geometrie

Spanner und weitere Anwendungen der WSPD

LEHRSTUHL FÜR ALGORITHMIK I · INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK · FAKULTÄT FÜR INFORMATIK

Martin Nöllenburg
05.07.2011



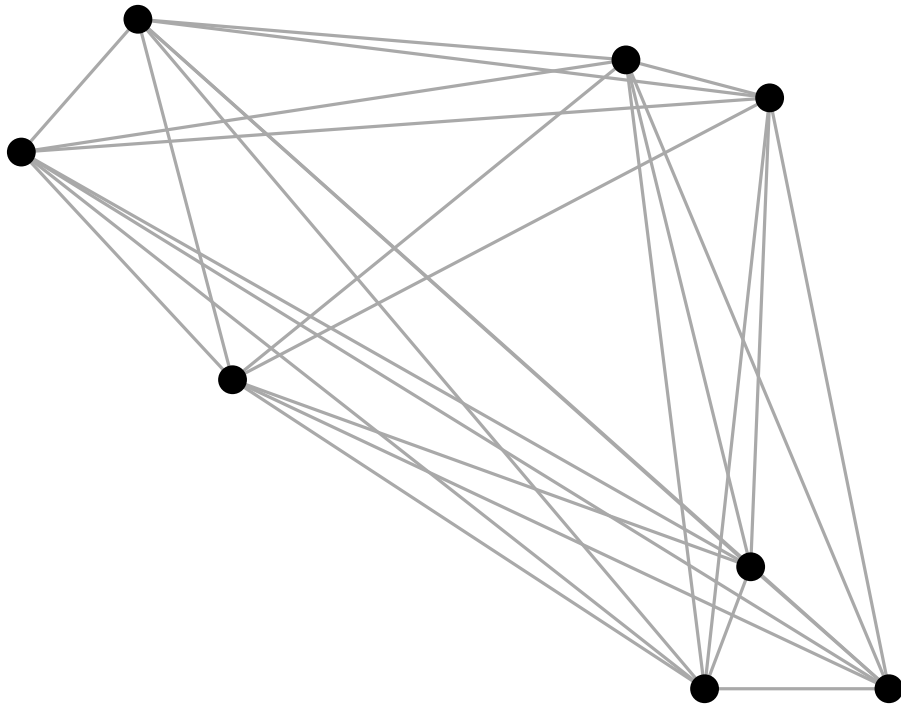
Wdh.: Well-Separated Pair Decomposition

Def.: Ein Paar disjunkter Punktmenge A und B im \mathbb{R}^d heißt **s -well separated** für ein $s > 0$, falls A und B jeweils von einer Kugel mit Radius r überdeckt werden und der Abstand der beiden Kugeln mindestens sr ist.

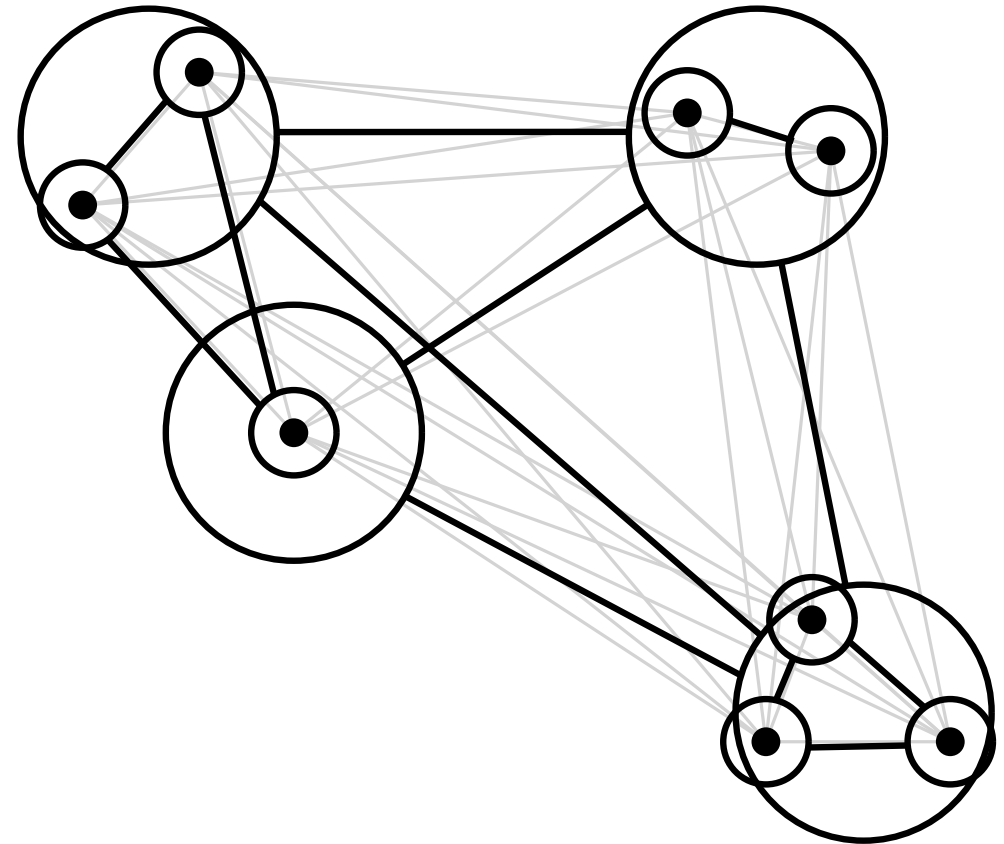
Def.: Für eine Punktmenge P und ein $s > 0$ ist eine **s -well separated pair decomposition** (s -WSPD) eine Menge von Paaren $\{\{A_1, B_1\}, \dots, \{A_m, B_m\}\}$ mit

- $A_i, B_i \subset P$ für alle i
- $A_i \cap B_i = \emptyset$ für alle i
- $\bigcup_{i=1}^m A_i \otimes B_i = P \otimes P$
- $\{A_i, B_i\}$ s -well separated für alle i

Beispiel



28 Punktpaare



12 s -well separated pairs

Satz 1: Gegeben eine Punktmenge P im \mathbb{R}^d und $s \geq 1$ lässt sich eine s -WSPD mit $O(s^d n)$ Paaren in Zeit $O(n \log n + s^d n)$ konstruieren.

Anmerkung zum Beweis:

Behauptung im Beweis war:

$$2(2 + 6s\sqrt{d})^d \in O(s^d)$$

wobei d **feste** Dimension und s **variabler** Separationsfaktor.

$$O(g(n)) = \{f(n) \mid \exists c, n_0 : 0 \leq f(n) \leq cg(n) \forall n \geq n_0\}$$

Wähle nun z.B. $c = 2 \cdot (12\sqrt{d})^d$. Damit folgt die Behauptung.

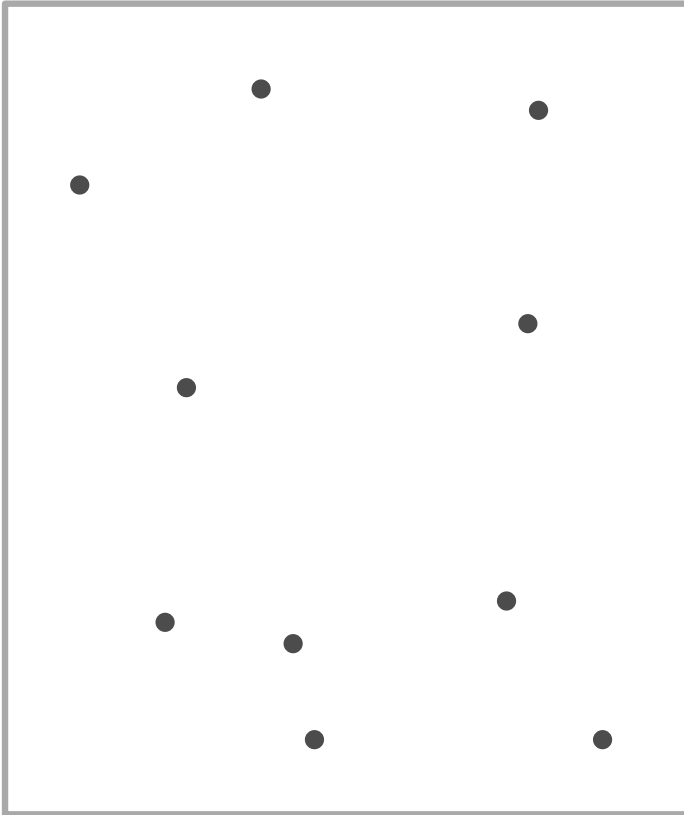
Satz 1: Gegeben eine Punktmenge P im \mathbb{R}^d und $s \geq 1$ lässt sich eine s -WSPD mit $O(s^d n)$ Paaren in Zeit $O(n \log n + s^d n)$ konstruieren.

Also: s -WSPD hat nur lineare Größe für festes s und d !



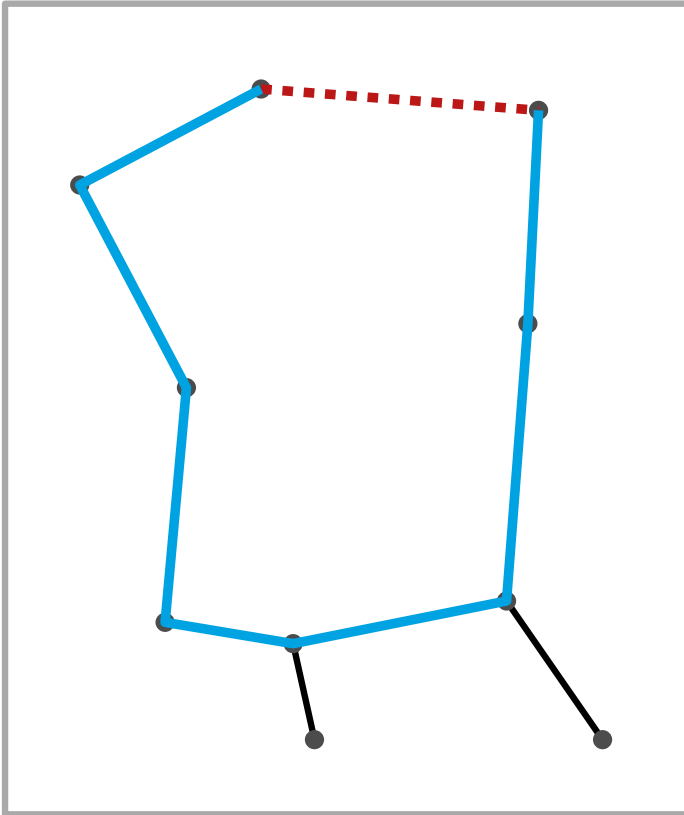
Zurück zur Anwendung: t -Spanner

Motivation: Spanner



Aufgabe:

Eine Menge von Städten soll über ein neues Straßennetz miteinander verbunden werden.

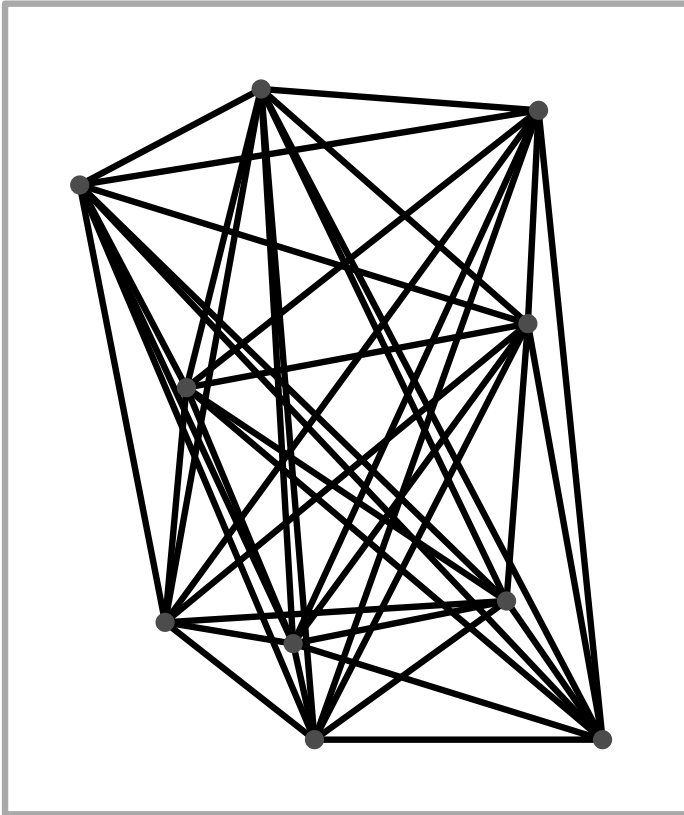


Aufgabe:

Eine Menge von Städten soll über ein neues Straßennetz miteinander verbunden werden.

Allerdings soll für kein Paar (x, y) der Weg im Straßennetz viel länger als die Distanz $\|xy\|$ sein.

1. Idee: Euklid. min. Spannbaum



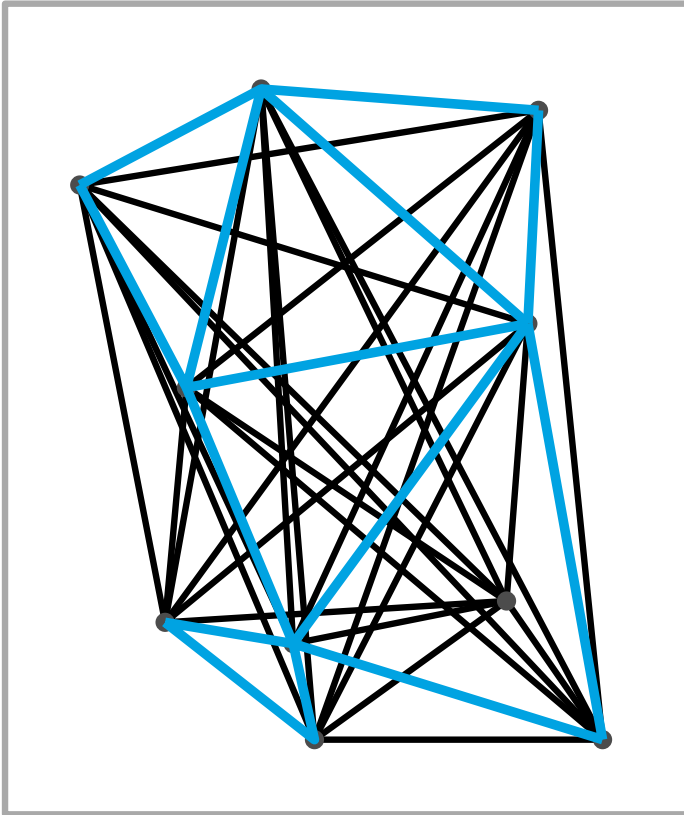
Aufgabe:

Eine Menge von Städten soll über ein neues Straßennetz miteinander verbunden werden.

Allerdings soll für kein Paar (x, y) der Weg im Straßennetz viel länger als die Distanz $\|xy\|$ sein.

Die Baukosten sollen im Rahmen bleiben, also z.B. nur $O(n)$ Kanten.

1. Idee: Euklid. min. Spannbaum
2. Idee: vollständiger Graph



Aufgabe:

Eine Menge von Städten soll über ein neues Straßennetz miteinander verbunden werden.

Allerdings soll für kein Paar (x, y) der Weg im Straßennetz viel länger als die Distanz $\|xy\|$ sein.

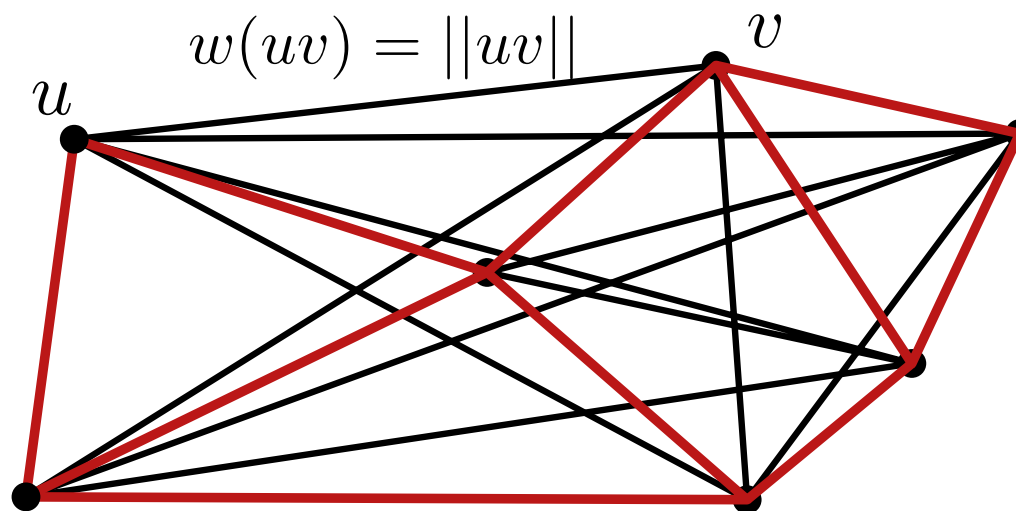
Die Baukosten sollen im Rahmen bleiben, also z.B. nur $O(n)$ Kanten.

1. Idee: Euklid. min. Spannbaum
2. Idee: vollständiger Graph
3. Idee: **sparse t -Spanner**

t -Spanner

Für eine Menge P von n Punkten in \mathbb{R}^d ist der **Euklidische Graph** $\mathcal{EG}(P) = (P, \binom{P}{2})$ der vollständige gewichtete Graph, dessen Kantengewichte dem Euklidischen Abstand der Kantenendpunkte entsprechen.

Da $\mathcal{EG}(P) \Theta(n^2)$ Kanten hat, wird oft ein dünner Graph mit $O(n)$ Kanten gesucht, dessen kürzeste Wege die Kantengewichte in $\mathcal{EG}(P)$ approximieren.



Für eine Menge P von n Punkten in \mathbb{R}^d ist der **Euklidische Graph** $\mathcal{EG}(P) = (P, \binom{P}{2})$ der vollständige gewichtete Graph, dessen Kantengewichte dem Euklidischen Abstand der Kantenendpunkte entsprechen.

Da $\mathcal{EG}(P) \Theta(n^2)$ Kanten hat, wird oft ein dünner Graph mit $O(n)$ Kanten gesucht, dessen kürzeste Wege die Kantengewichte in $\mathcal{EG}(P)$ approximieren.

Def.: Ein gewichteter Graph G mit Knotenmenge P heißt **t -Spanner** für P und einen Dehnungsfaktor $t \geq 1$, falls für alle Paare $x, y \in P$ gilt

$$\|xy\| \leq \delta_G(x, y) \leq t \cdot \|xy\|,$$

wobei $\delta_G(x, y) =$ Länge kürzester x - y -Weg in G .

Def.: Für n Punkte P in \mathbb{R}^d und eine WSPD W von P definiere den Graphen $G = (P, E)$ mit
 $E = \{\{x, y\} \mid \{u, v\} \in W \text{ und } \text{rep}(u) = x, \text{rep}(v) = y\}$.

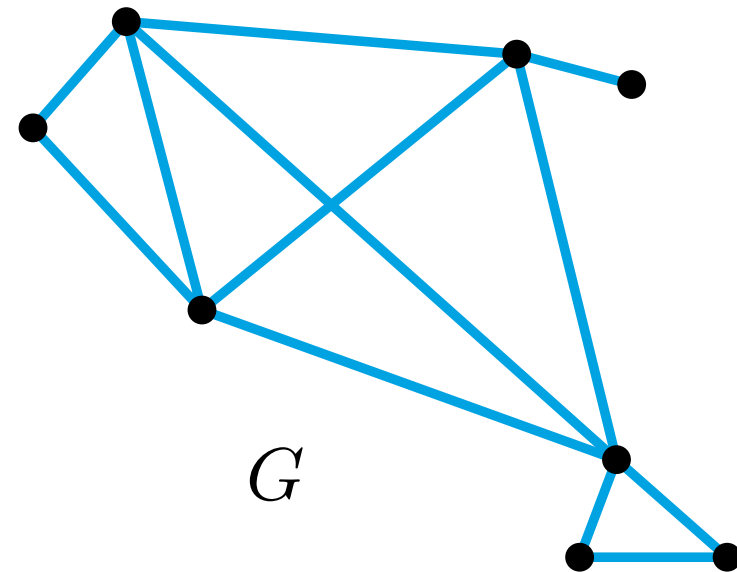
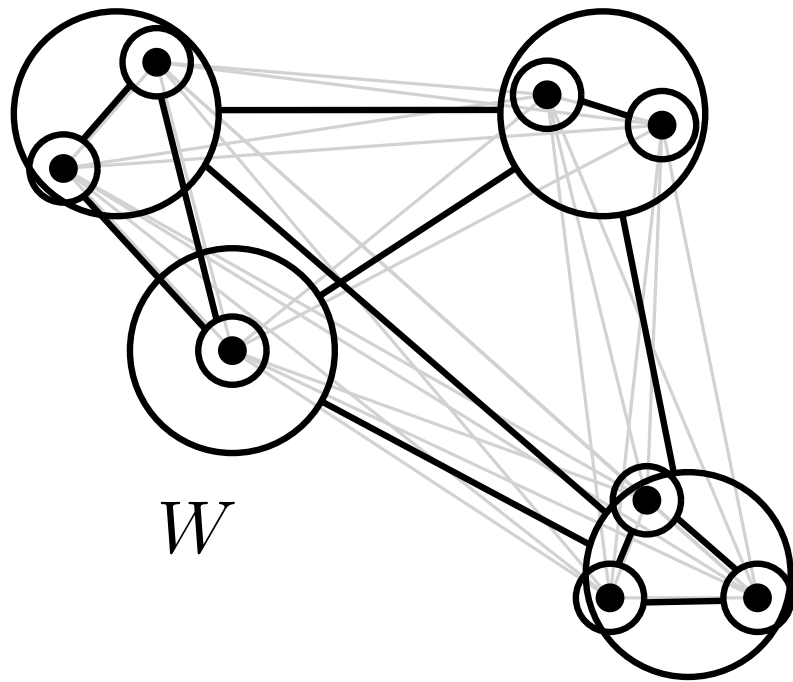
Wdh.: Jedes Paar $\{u, v\} \in W$ entspricht zwei Quadtreeknoten u und v . Aus jedem Quadtreeknoten wird wie folgt ein Repräsentant gewählt. Für Blatt u definiere den Repräsentanten

$$\text{rep}(u) = \begin{cases} p & \text{falls } P_u = \{p\} \text{ (} u \text{ ist Blatt)} \\ \emptyset & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für einen inneren Knoten v setze $\text{rep}(v) = \text{rep}(u)$ für ein nichtleeres Kind u von v .

WSPD und t -Spanner

Def.: Für n Punkte P in \mathbb{R}^d und eine WSPD W von P definiere den Graphen $G = (P, E)$ mit
 $E = \{\{x, y\} \mid \{u, v\} \in W \text{ und } \text{rep}(u) = x, \text{rep}(v) = y\}$.



WSPD und t -Spanner

Def.: Für n Punkte P in \mathbb{R}^d und eine WSPD W von P definiere den Graphen $G = (P, E)$ mit

$$E = \{\{x, y\} \mid \{u, v\} \in W \text{ und } \text{rep}(u) = x, \text{rep}(v) = y\}.$$

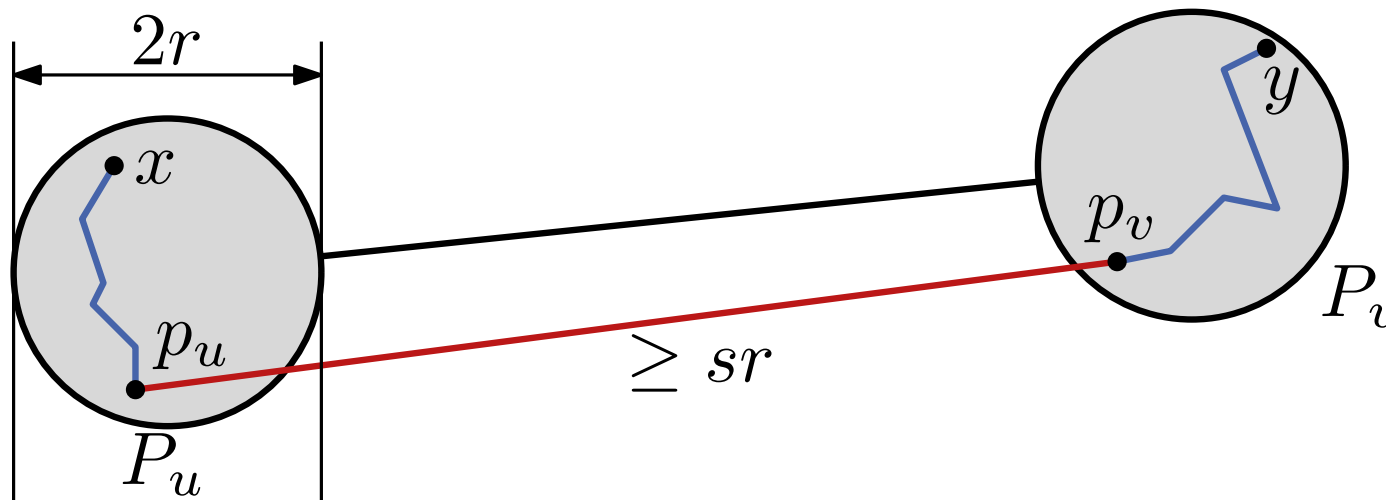
Lemma 1: Ist W eine s -WSPD für ein geeignetes $s = s(t)$, so ist G ein t -Spanner für P mit $O(s^d n)$ Kanten.

WSPD und t -Spanner

Def.: Für n Punkte P in \mathbb{R}^d und eine WSPD W von P definiere den Graphen $G = (P, E)$ mit
 $E = \{\{x, y\} \mid \{u, v\} \in W \text{ und } \text{rep}(u) = x, \text{rep}(v) = y\}$.

Lemma 1: Ist W eine s -WSPD für ein geeignetes $s = s(t)$, so ist G ein t -Spanner für P mit $O(s^d n)$ Kanten.

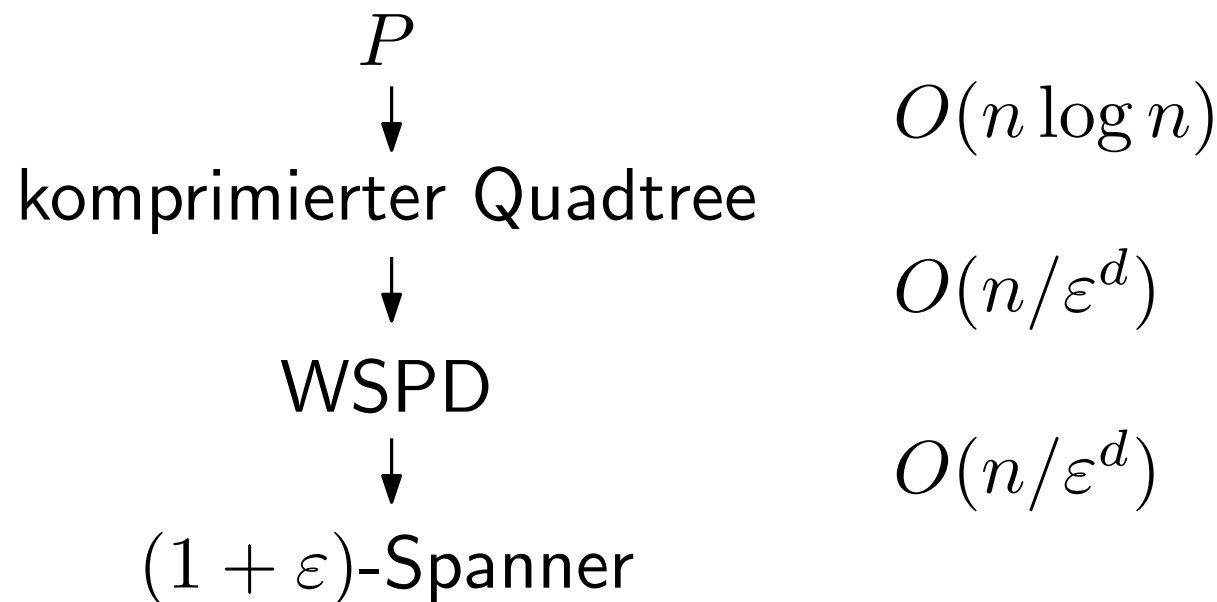
Beweis: (Tafel)



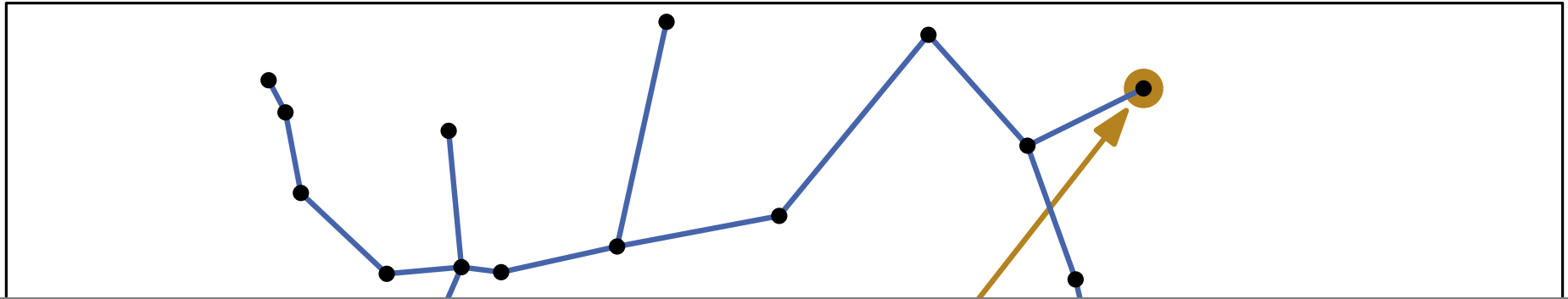
Satz 2: Für eine Menge P von n Punkten in \mathbb{R}^d und ein $\varepsilon \in (0, 1]$ kann ein $(1 + \varepsilon)$ -Spanner für P mit $O(n/\varepsilon^d)$ Kanten in $O(n \log n + n/\varepsilon^d)$ Zeit berechnet werden.

Beweis: Für $t = (1 + \varepsilon)$ gilt mit $s = 4 \cdot \frac{t+1}{t-1}$

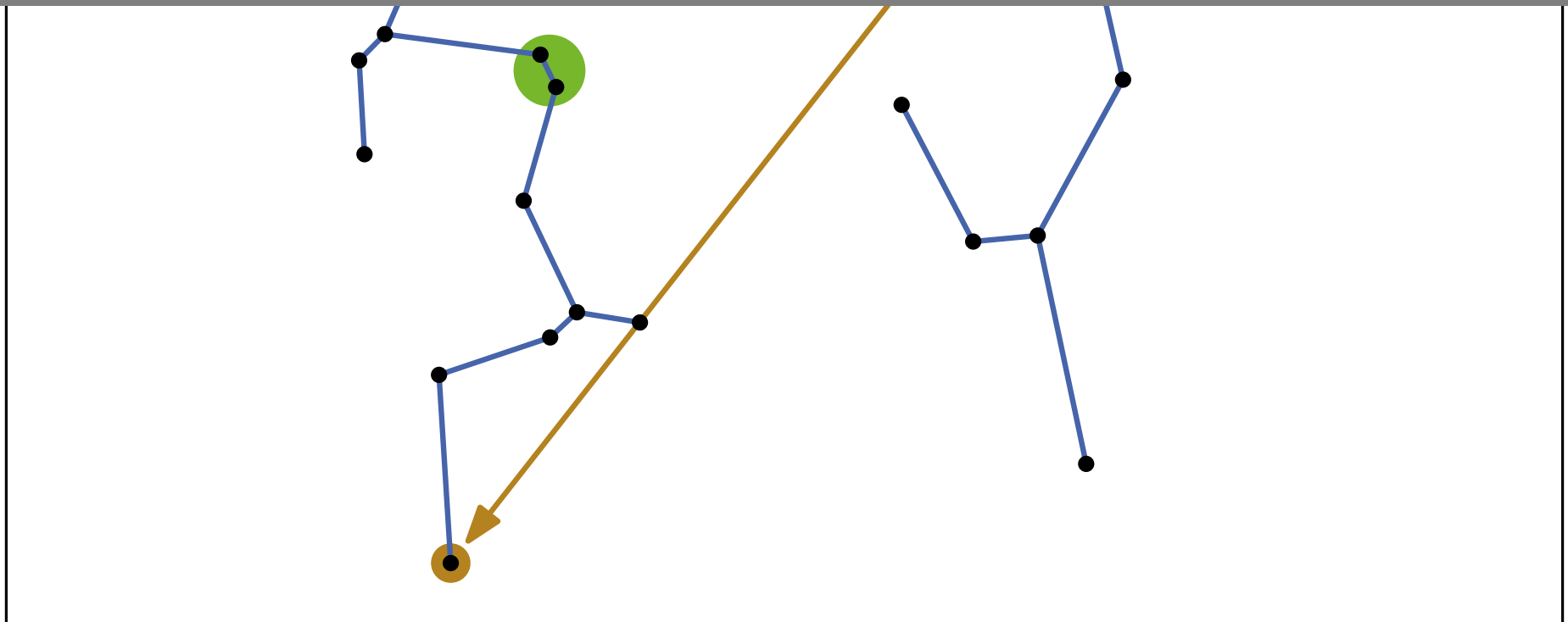
$$O(s^d n) = O\left(\left(4 \cdot \frac{2 + \varepsilon}{\varepsilon}\right)^d n\right) \subseteq O\left(\left(\frac{12}{\varepsilon}\right)^d n\right) = O\left(\frac{n}{\varepsilon^d}\right)$$



□



Weitere Anwendungen der WSPD



Problem: Finde für eine Punktmenge P einen minimalen Spannbaum (MST) im Euklidischen Graphen $\mathcal{EG}(P)$.

Prim: MST in einem Graph $G = (V, E)$ kann in $O(|E| + |V| \log |V|)$ Zeit berechnet werden.

- $\mathcal{EG}(P)$ hat $\Theta(n^2)$ Kanten \Rightarrow Laufzeit $O(n^2)$:-)
- $(1 + \varepsilon)$ -Spanner für P hat $O(n/\varepsilon^d)$ Kanten \Rightarrow Laufzeit $O(n \log n + n/\varepsilon^d)$:-)

Wie gut ist der MST eines $(1 + \varepsilon)$ -Spanners?

Satz 3: Der aus einem $(1 + \varepsilon)$ -Spanner von P gewonnene MST ist eine $(1 + \varepsilon)$ -Approximation des EMST von P .

Durchmesser von P

Problem: Finde den Durchmesser einer Punktmenge P , d.h. das Paar $\{x, y\} \subset P$ mit größtem Abstand.

- brute-force alle Punktpaare testen \Rightarrow Laufzeit $O(n^2)$:-)
- teste Abstände $\| \text{rep}(u) - \text{rep}(v) \|$ aller ws-Paare $\{P_u, P_v\}$
 \Rightarrow Laufzeit $O(n \log n + s^d n)$:-)

Wie gut ist der berechnete Durchmesser?

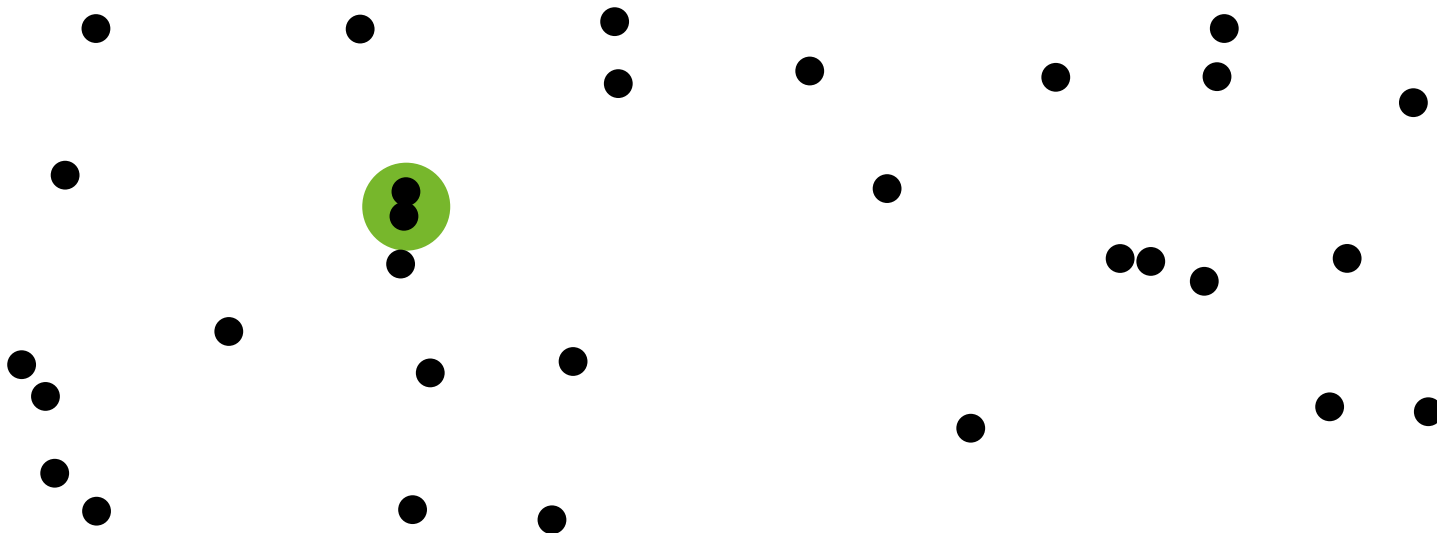
Satz 4: Der aus einer s -WSPD von P berechnete Durchmesser ist eine $(1 + \varepsilon)$ -Approximation des Durchmessers von P .

Nächstes Punktepaar

Problem: Finde das Paar $\{x, y\} \subset P$ mit geringstem Abstand.

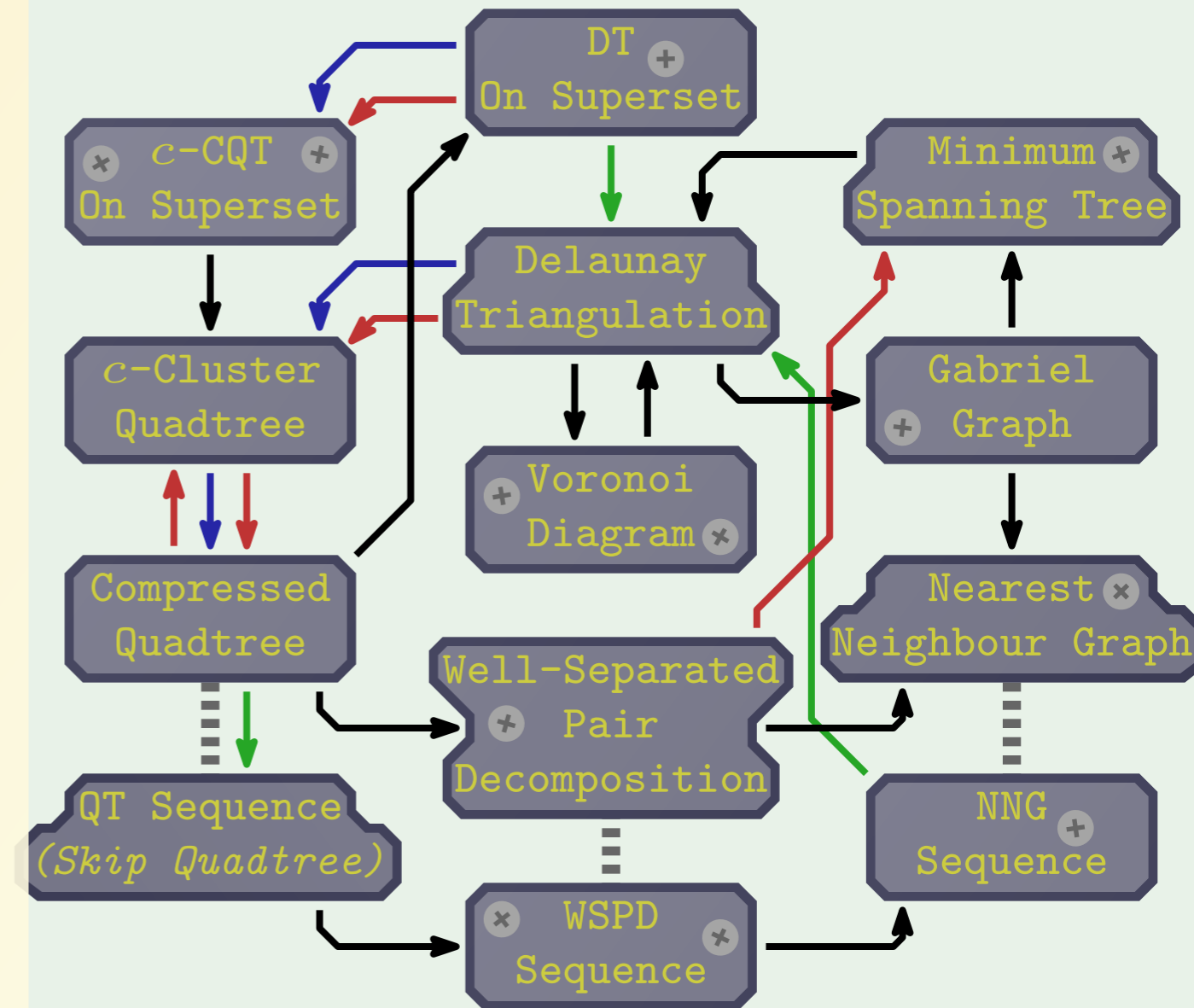
- brute-force alle Punktepaare testen \Rightarrow Laufzeit $O(n^2)$:-)
- teste Abstände $\|rep(u) - rep(v)\|$ aller ws-Paare $\{P_u, P_v\}$
 \Rightarrow Laufzeit $O(n \log n + s^d n)$:-)

Übungsblatt: Für $s > 2$ liefert dieser Ansatz sogar exakt das nächste Paar.



Proximity Structures

[Dirichlet, 1850]
 [Delaunay, 1934]
 [Gabriel, 1969]
 [Clarkson, 1983]
 [Preparata & Shamos, 1985]
 [Bern, Eppstein & Gilbert, 1990]
 [Chazelle, 1991]
 [Matsui, 1995]
 [Callahan & Kosaraju, 1995]
 [Chin & Wang, 1998]
 [Krzmaric & Levcopoulos, 1998]
 [Chazelle, Devillers, Hurtado, Mora, Sacristán & Teillaud, 2001]
 [Eppstein, Goodrich & Sun, 2005]
 [Buchin & Mulzer, 2009]
 [Löffler & Mulzer, 2011]



- Deterministic linear time
- Randomised linear time
- Linear time with floor operation
- Deterministic linear time

Welche weiteren Anwendungen hat die WSPD?

WSPD bietet sich immer dann an, wenn man auf die $\Theta(n^2)$ exakten Distanzen in einer Punktmenge verzichten kann und diese stattdessen approximiert. Ein Beispiel sind kräftebasierte Layoutalgorithmen im Graphenzeichnen, wo paarweise Abstoßungskräfte von n Objekten berechnet werden müssen.

Wozu geometrisch approximieren?

Einerseits ersetzt man dadurch langsame Berechnungen durch schnellere (aber ungenauere), andererseits sind oft auch die Eingabedaten schon mit einer gewissen Ungenauigkeit behaftet, so dass approximative Lösungen je nach Anwendung ausreichend sind.

Geht es nicht auch genauso schnell exakt?

Oft im \mathbb{R}^2 ja, aber nicht mehr im \mathbb{R}^d für $d > 2$. (EMST, Durchmesser)

Was haben wir alles behandelt?

t -Spanner

Ebenenunterteilung

konvexe Hülle (2d und 3d)

Quadtrees

randomisierte Algorithmen

kd-Trees

Voronoi-Diagramme

Dualität

Polygontriangulierung

Streckenschnitte

WSPD

Schnitt von Halbebenen

Delaunay-Triangulierung

Sweep-Line Algorithmen

Trapezzerlegung

Range-Trees

Geradenarrangements

Divide & Conquer

Was kommt in der Prüfung dran?

- grundlegende Problemdefinitionen
- Aufbau und Queries von Datenstrukturen
- Zusammenhänge zwischen verschiedenen Datenstrukturen
- Eigenschaften und Ablauf der Algorithmen
- zentrale Beweisideen, nicht die technischen Details
- Einsatz der Algorithmen und Datenstrukturen in Anwendungen
- bei 3SWS bzw. im Master: Stoff der Übungen

Wie vorbereiten?

- Vorlesungsfolien **und** Tafelbeweise aus angegebener Literatur (v.a. [BCKO08])
- Übungsaufgaben
- nicht behandeltes Material aus der Literatur nur ergänzend