

# Vorlesung Algorithmische Geometrie

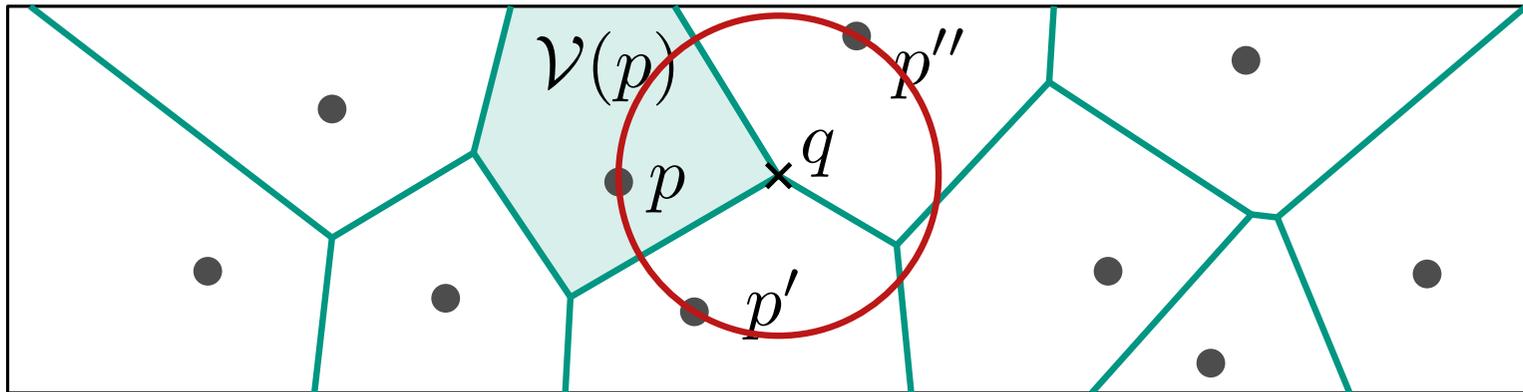
## Voronoi-Diagramme & Delaunay-Triangulierungen

LEHRSTUHL FÜR ALGORITHMIK I · INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK · FAKULTÄT FÜR INFORMATIK

Martin Nöllenburg  
07.06.2011

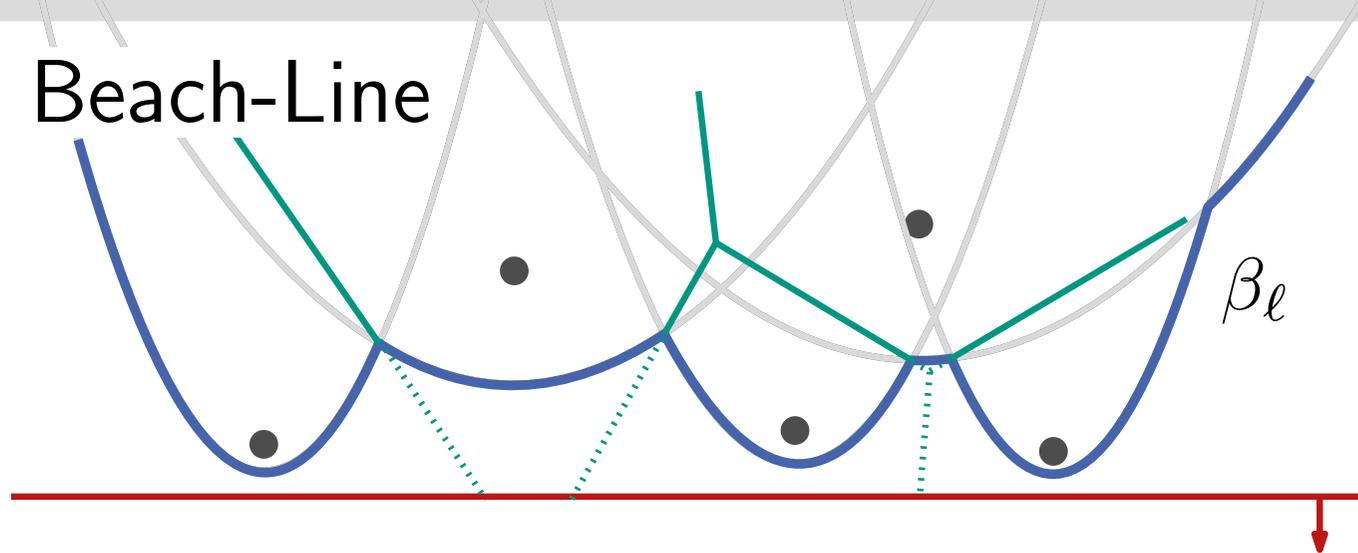


# Erinnerung: Voronoi-Diagramm



- $\mathcal{V}(p) = \{x \in \mathbb{R}^2 : |px| < |qx| \forall q \in P \setminus \{p\}\}$
- $\mathcal{V}(\{p, p'\}) = \{x \in \mathbb{R}^2 : |px| = |p'x| < |qx| \forall q \in P \setminus \{p, p'\}\}$
- $\mathcal{V}(\{p, p', p''\}) = \partial\mathcal{V}(p) \cap \partial\mathcal{V}(p') \cap \partial\mathcal{V}(p'')$
- $q \in \mathcal{V}(\{p, p'\}) \Leftrightarrow C_P(q) \cap P = \{p, p'\}$
- $q = \mathcal{V}(\{p, p', p''\}) \Leftrightarrow C_P(q) \cap P \supseteq \{p, p', p''\}$

Wdh: Beach-Line



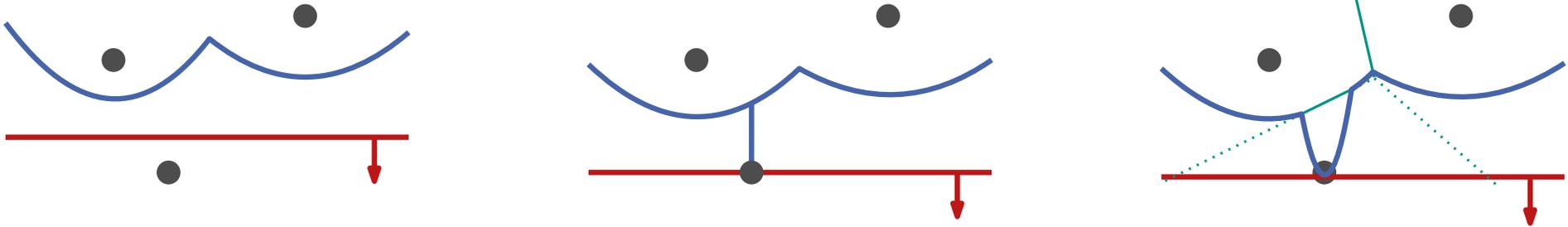
**Definition:** Die **Beach-Line**  $\beta_\ell$  ist die untere Kontur der Parabeln  $f_p^\ell$  für die bereits besuchten Punkte.

**Beob.:**

- Beach-Line ist  $x$ -monoton
- Schnittpunkte der Beach-Line „zeichnen“ die Voronoi- Kanten

**Ziel:** speichere (implizit) aktuelle Kontur  $\beta_\ell$  statt  $\text{Vor}(P) \cap \ell$

# Wdh: Punkt-Events

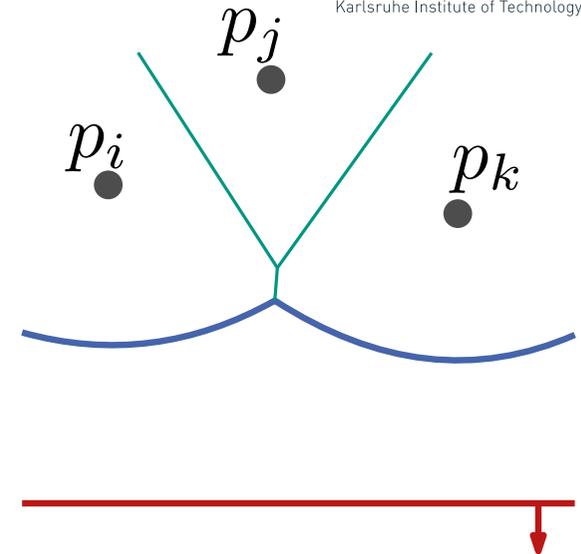
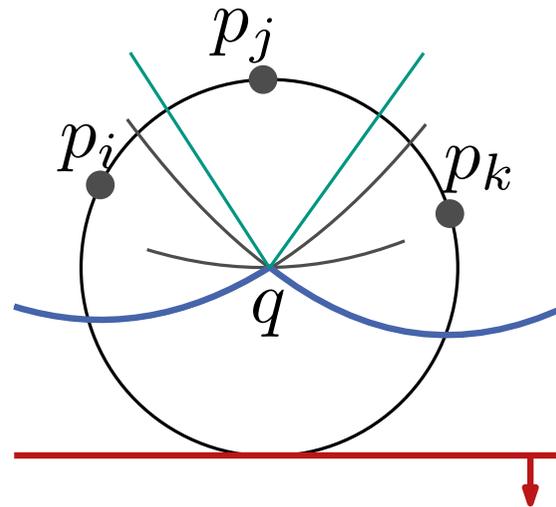
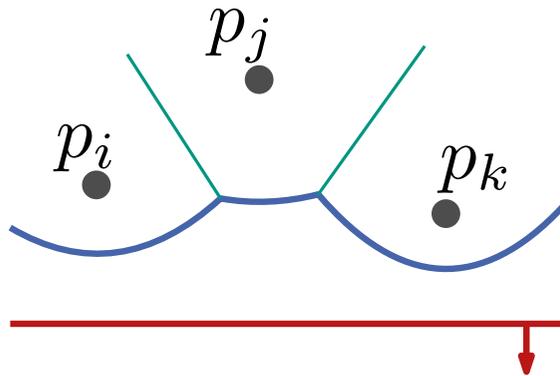


- trifft  $\ell$  auf einen Punkt, kommt neue Parabel zu  $\beta_\ell$  hinzu
- die beiden Schnittpunkte erzeugen neue Teilkante

**Lemma:** Neue Bögen auf  $\beta$  entstehen nur durch Punkt-Events.

**Korollar:**  $\beta$  besteht aus maximal  $2n - 1$  Parabelbögen

# Wdh: Kreis-Events



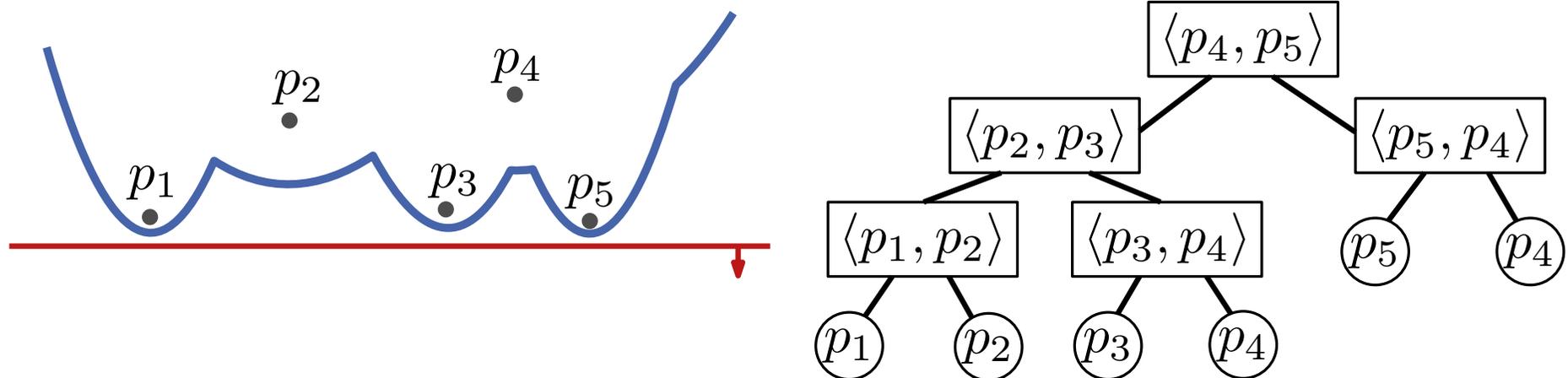
- verschwindet der Bogen für  $p_j$  so laufen  $f_{p_i}^l, f_{p_j}^l, f_{p_k}^l$  durch einen gemeinsamen Punkt  $q$
- Kreis  $C_P(q)$  geht durch  $p_i, p_j, p_k$  und berührt  $l$   
 $\Rightarrow q$  ist Voronoi-Knoten

**Def.:** Der unterste Punkt des Kreises durch drei Punkte mit konsekutiven Bögen auf  $\beta$  definiert ein **Kreis-Event**.

**Lemma:** Bögen von  $\beta$  werden nur durch Kreis-Events entfernt.

**Lemma:** Für jeden Voronoi-Knoten gibt es ein Kreis-Event.

- doppelt-verkettete Kantenliste (DCEL)  $\mathcal{D}$  für  $\text{Vor}(P)$   
**Achtung:** am Schluss bounding box wg. Halbgeraden einfügen
- balancierter binärer Suchbaum  $\mathcal{T}$  für implizite Beach-Line
  - Blätter entsprechen Parabelbögen von links nach rechts
  - innerer Knoten  $\langle p_i, p_j \rangle$  entspricht Schnittpunkt von  $p_i$  und  $p_j$
  - Pointer von inneren Knoten auf zugeh. Kanten in  $\mathcal{D}$



- Priority Queue  $\mathcal{Q}$  für die Punkt- und Kreis-Events
  - Pointer von Kreis-Events auf zugeh. Blätter in  $\mathcal{T}$  und umgekehrt

# Fortune's Sweep Algorithmus

VoronoiDiagram( $P \subset \mathbb{R}^2$ )

$Q \leftarrow$  new PriorityQueue( $P$ ) // Punkt-Events sortiert nach  $y$

$\mathcal{T} \leftarrow$  new BalancedBinarySearchTree() // Beach-Line

$\mathcal{D} \leftarrow$  new DCEL() // DS für Vor( $P$ )

**while not**  $Q.empty()$  **do**

$p \leftarrow Q.ExtractMax()$

**if**  $p$  Punkt-Event **then**

        | HandlePointEvent( $p$ )

**else**

        |  $\alpha \leftarrow$  Bogen von  $\beta$ , der entfernt werden soll

        | HandleCircleEvent( $\alpha$ )

    behandle innere Restknoten von  $\mathcal{T}$  (Halbgeraden von Vor( $P$ ))

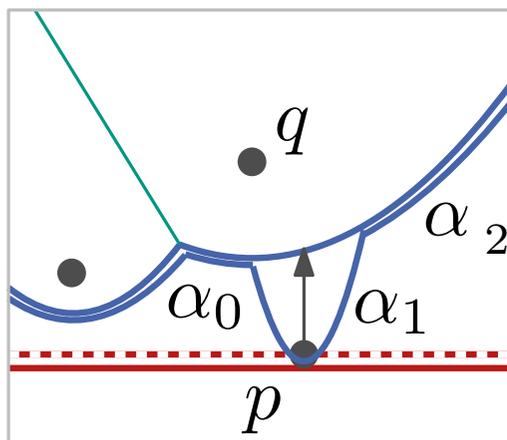
**return**  $\mathcal{D}$

# Punkt-Events behandeln

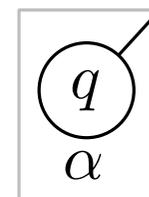
## HandlePointEvent(Punkt $p$ )

$O(\log n)$

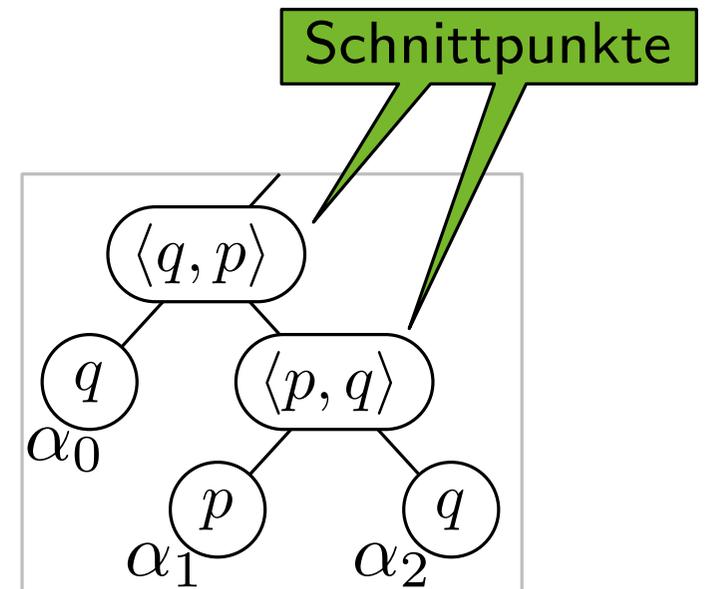
- Suche in  $\mathcal{T}$  den Bogen  $\alpha$  vertikal über  $p$ .  
Hat  $\alpha$  pointer auf Kreis-Event in  $\mathcal{Q}$ , lösche es aus  $\mathcal{Q}$ .
- Teile  $\alpha$  in  $\alpha_0$  und  $\alpha_2$ .  
Sei  $\alpha_1$  neuer Bogen für  $p$ .
- Füge Kanten  $\langle q, p \rangle$  und  $\langle p, q \rangle$  in  $\mathcal{D}$  ein.
- Prüfe  $\langle \cdot, \alpha_0, \alpha_1 \rangle$  und  $\langle \alpha_1, \alpha_2, \cdot \rangle$  auf Kreis-Events.



In  $\mathcal{T}$ :



Laufzeit?

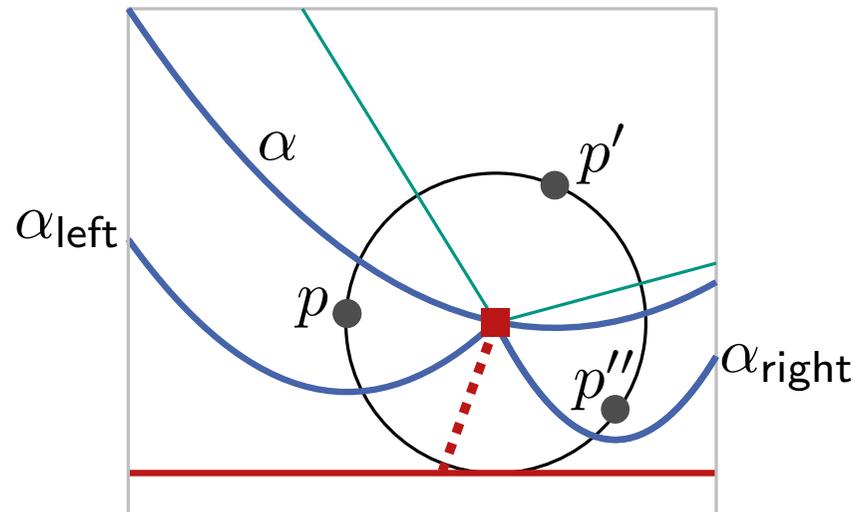


# Kreis-Events behandeln

## HandleCircleEvent(Bogen $\alpha$ )

$O(\log n)$

- $\mathcal{T}.\text{delete}(\alpha)$ ; Schnittpunkte in  $\mathcal{T}$  updaten
- Entferne alle Kreis-Events zu  $\alpha$  aus  $\mathcal{Q}$ .
- Füge Knoten  $\mathcal{V}(\{p, p', p''\})$  und Kante  $\mathcal{V}(\{p, p''\})$  in  $\mathcal{D}$  ein.
- Update potenzielle Kreis-Events  $\langle \cdot, \alpha_{\text{left}}, \alpha_{\text{right}} \rangle$  und  $\langle \alpha_{\text{left}}, \alpha_{\text{right}}, \cdot \rangle$  in  $\mathcal{Q}$ .



Laufzeit?

# Fortune's Sweep Algorithmus

**Satz:** Für eine Menge  $P$  von  $n$  Punkten berechnet Fortune's Sweep Algorithmus das Voronoi-Diagramm  $\text{Vor}(P)$  in  $O(n \log n)$  Zeit und  $O(n)$  Platz.

## Beweisskizze:

- jedes Event benötigt  $O(\log n)$  Zeit
- $n$  Punkt-Events
- $\leq 2n - 5$  Kreis-Events (= #Knoten von  $\text{Vor}(P)$ )
- Fehlalarme erzeugen & löschen bereits inklusive

## Bemerkung:

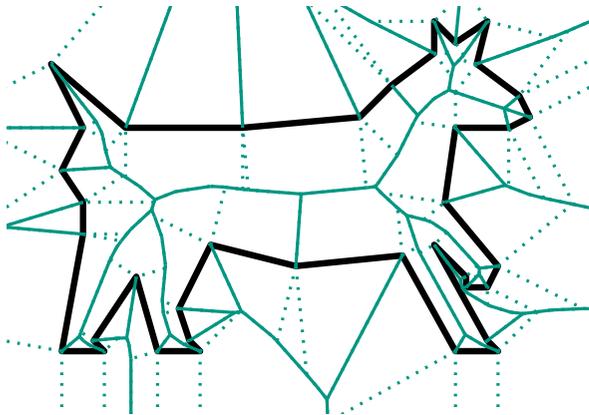
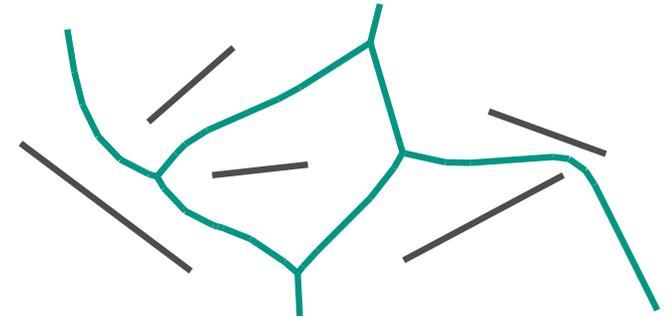
degenerierte Eingaben diesmal unproblematisch:

- Kreis-Events vor Punkt-Events, sonst Reihenfolge beliebig
- Kreis-Events für  $k \geq 4$  Punkte: Länge-0 Kanten und Knotenduplikate im Postprocessing entfernen
- zweideutiges Punktevent: beliebigen Bogen wählen

## Gibt es weitere Varianten von Voronoi-Diagrammen?

Ja! Beispielsweise kann der Algorithmus bei gleicher Laufzeit und Platzbedarf auch für Voronoi-Diagramme von Strecken modifiziert werden.

Auch andere Metriken wie  $L_p$  oder additiv/multiplikativ gewichtete Voronoi-Diagramme sind möglich.



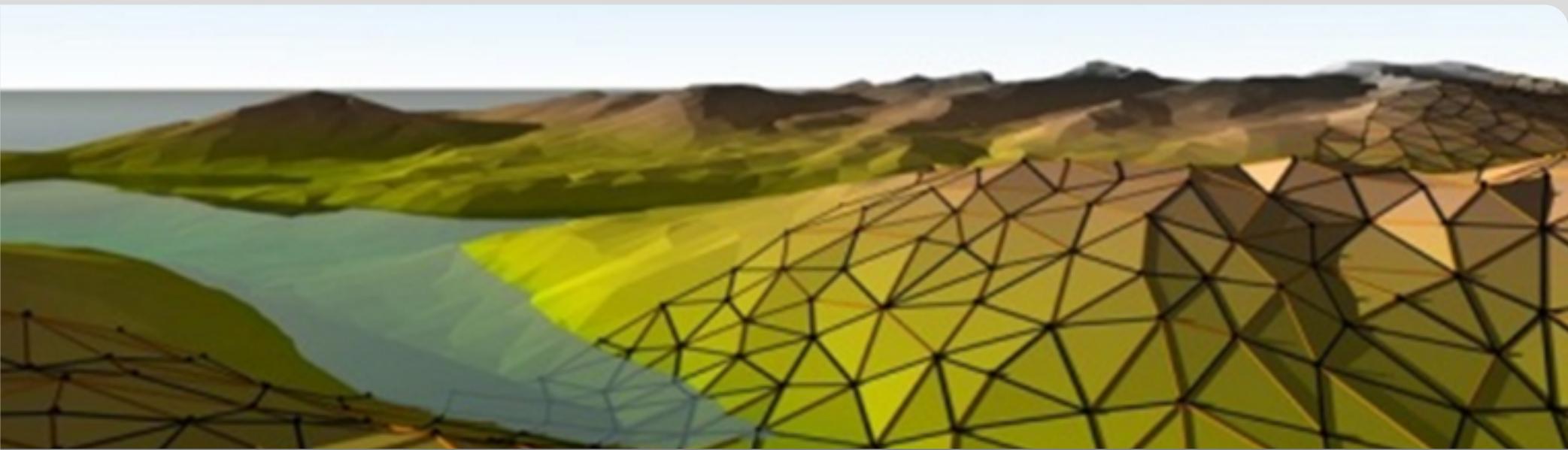
Voronoi-Diagramm für Polygone definieren die sog. Mittelachse, die z.B. in der Bildverarbeitung wichtig ist.

Auch farthest-point Voronoi-Diagramme sind möglich.

## Was passiert in höheren Dimensionen?

Die Komplexität von  $\text{Vor}(P)$  steigt auf  $\Theta(n^{\lceil d/2 \rceil})$  und die Laufzeit zur Berechnung auf  $O(n \log n + n^{\lceil d/2 \rceil})$ .

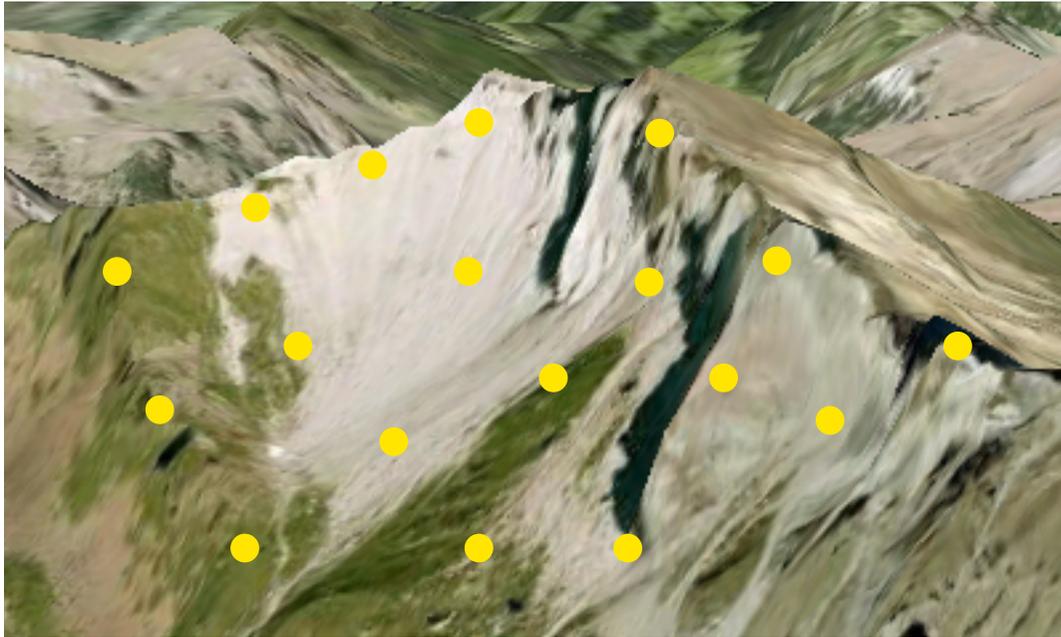
- **Druckversion der Folien**  
ab sofort online verfügbar
- **Beweise und Tafel/Folien**  
alle Beweise in der Literatur (meist [BCKO08]) detailliert nachlesbar
- **Musterlösung für Übungsblätter**  
Andreas wird die Lösungsideen schriftlich skizzieren
- **Folien schneller und fehlerfrei online stellen**  
sind auch bisher immer kurz nach der Vorlesung verfügbar;  
bei Fehlern bitte Bescheid geben!



# Delaunay-Triangulierungen

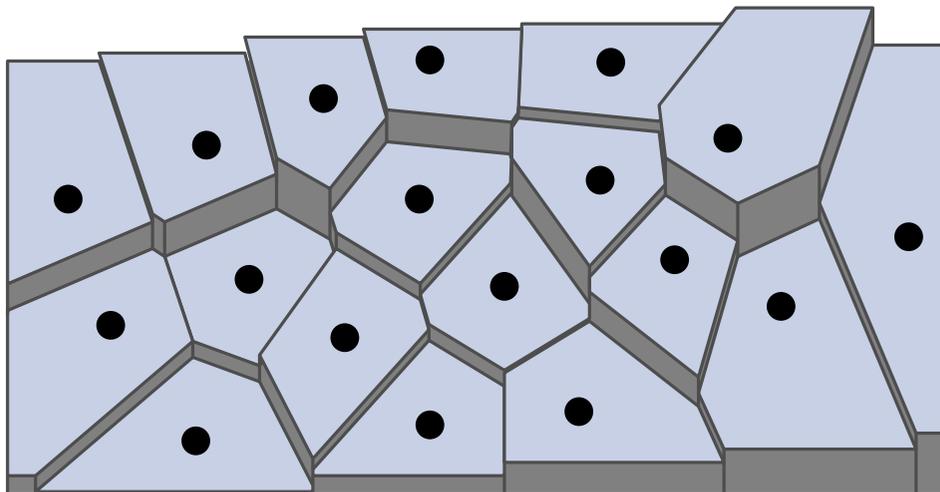


Grafik © Rodrigo I. Silveira



Höhenmesspunkte

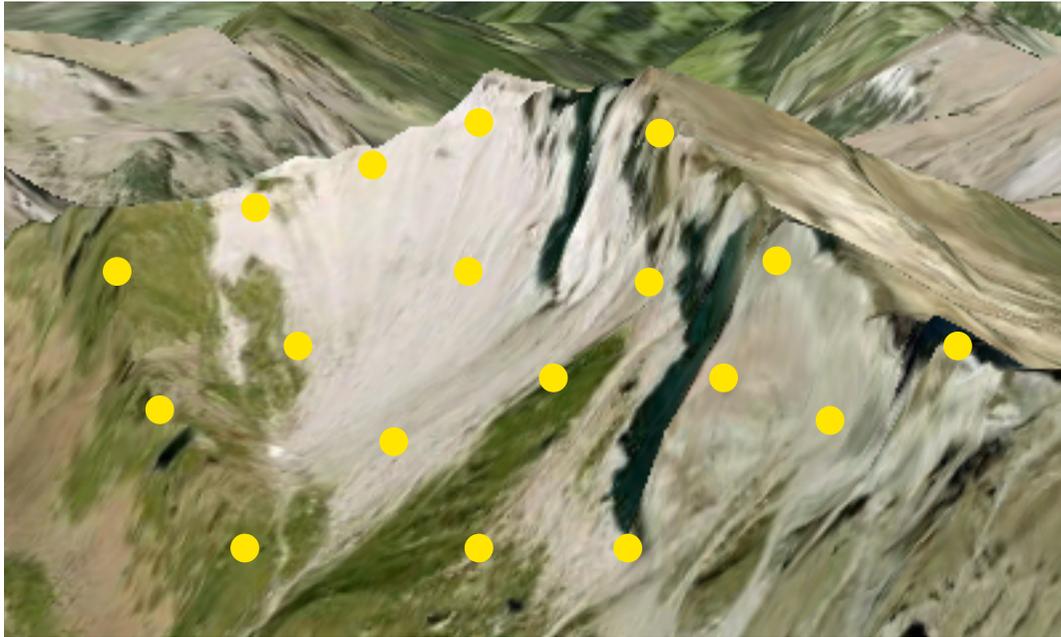
$$p = (x_p, y_p, z_p)$$



Projektion

$$\pi(p) = (p_x, p_y, 0)$$

Interpolation 1: jeder Punkt bekommt Höhe des nächsten Messpunktes



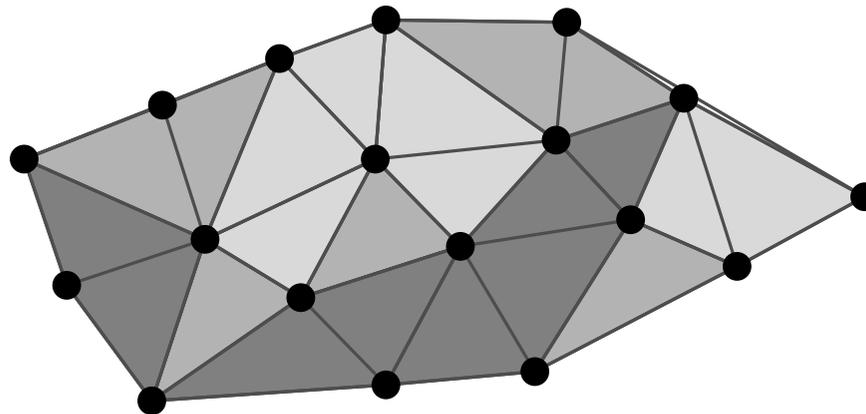
Höhenmesspunkte

$$p = (x_p, y_p, z_p)$$

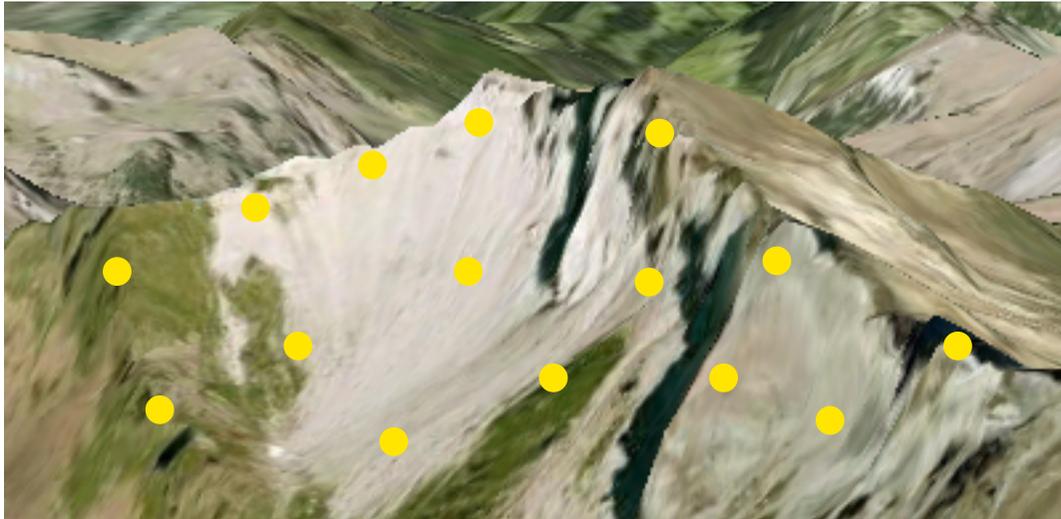


Projektion

$$\pi(p) = (p_x, p_y, 0)$$

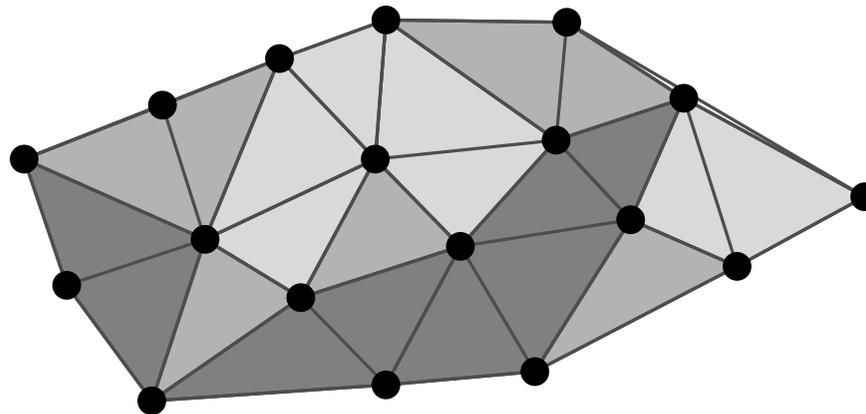


Interpolation 2: trianguliere Messpunkte und interpoliere auf Dreiecken



Höhenmesspunkte  
 $p = (x_p, y_p, z_p)$

Aber wie sieht eine gute Triangulierung aus?

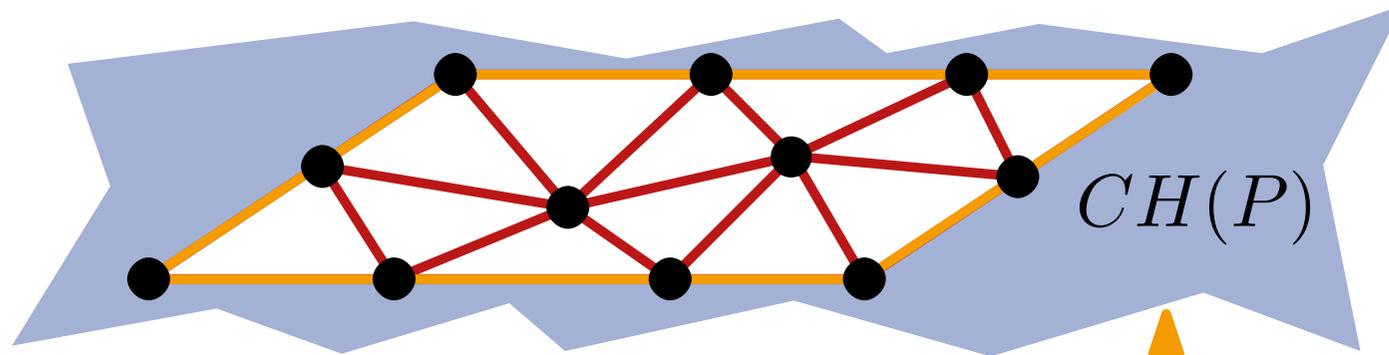


Projektion  
 $\pi(p) = (p_x, p_y, 0)$

Interpolation 2: trianguliere Messpunkte und interpoliere auf Dreiecken

# Triangulierung von Punkten

**Def.:** Eine **Triangulierung** einer Punktmenge  $P \subset \mathbb{R}^2$  ist eine maximale planare Unterteilung mit Knotenmenge  $P$ .



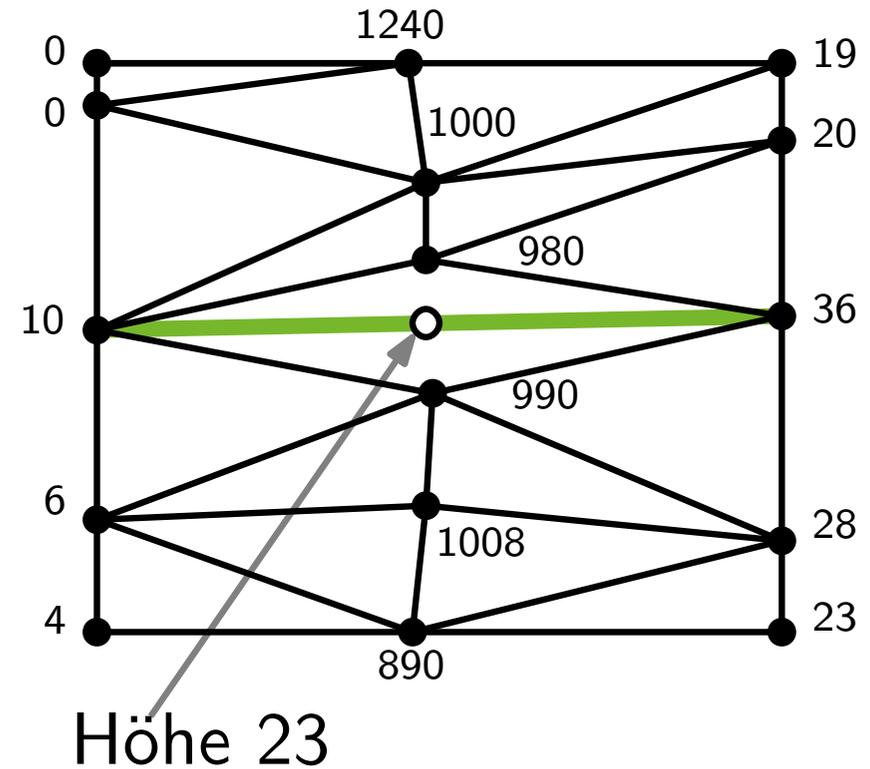
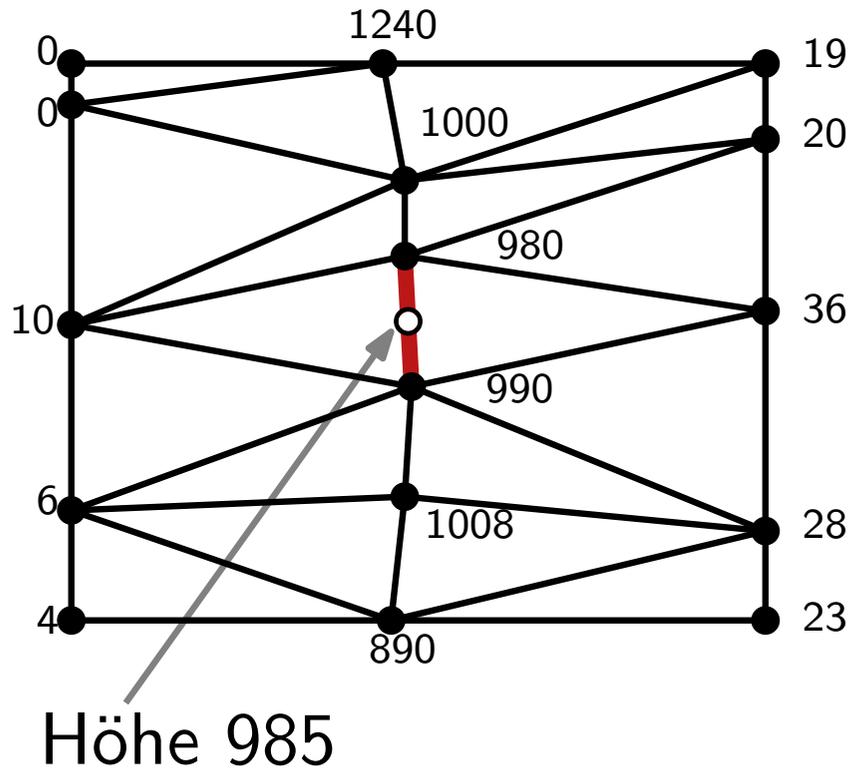
**Beob.:**

- alle inneren Facetten sind Dreiecke
- äußere Facette ist Komplement der konvexen Hülle

**Satz 1:** Sei  $P$  eine Menge von  $n$  nicht kollinearen Punkten und  $h$  die Anzahl Punkte auf  $CH(P)$ .

Dann hat *jede* Triangulierung von  $P$   $(2n - 2 - h)$  Dreiecke und  $(3n - 3 - h)$  Kanten.

# Zurück zur Höheninterpolation



**Intuitiv:** Vermeide zu schmale Dreiecke!

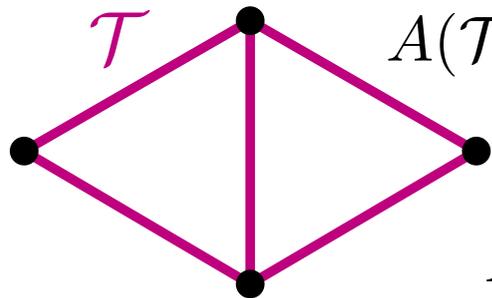
Oder: maximiere die kleinsten Dreieckswinkel!

# Winkeloptimale Triangulierungen

**Def.:** Sei  $P \subset \mathbb{R}^2$  eine Punktmenge,  $\mathcal{T}$  eine Triangulierung von  $P$  und  $m$  die Anzahl der Dreiecke. Dann ist  $A(\mathcal{T}) = (\alpha_1, \dots, \alpha_{3m})$  der **Winkelvektor** von  $\mathcal{T}$  mit den sortierten Dreieckswinkeln  $\alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_{3m}$ .

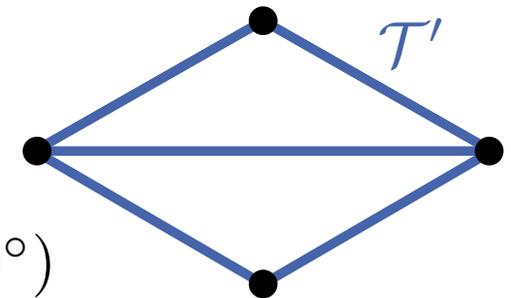
Für zwei Triangulierungen  $\mathcal{T}$  und  $\mathcal{T}'$  von  $P$  definiere die Ordnung  $A(\mathcal{T}) > A(\mathcal{T}')$  als lexikographische Ordnung.

$\mathcal{T}$  heißt **winkeloptimal**, falls  $A(\mathcal{T}) \geq A(\mathcal{T}')$  für alle Triangulierungen  $\mathcal{T}'$  von  $P$ .



$$A(\mathcal{T}) = (60^\circ, 60^\circ, 60^\circ, 60^\circ, 60^\circ, 60^\circ)$$

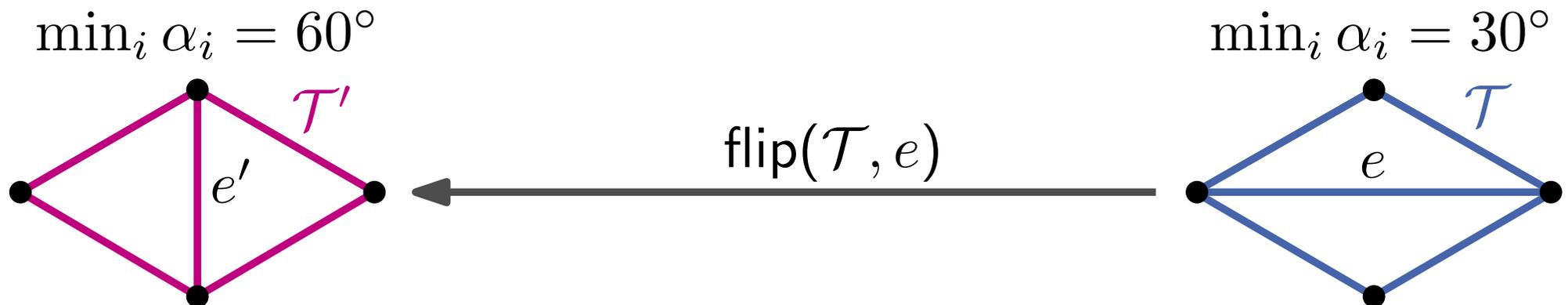
$$A(\mathcal{T}') = (30^\circ, 30^\circ, 30^\circ, 30^\circ, 120^\circ, 120^\circ)$$



# Kantenflips

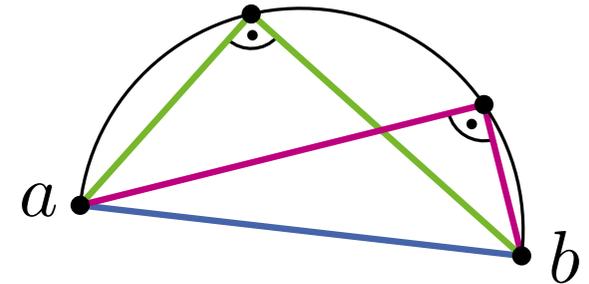
**Def.:** Sei  $\mathcal{T}$  eine Triangulierung. Eine Kante  $e$  von  $\mathcal{T}$  heißt **unzulässig**, wenn der kleinste Winkel der zu  $e$  inzidenten Dreiecke durch einen Kantenflip größer wird.

**Beob.:** Sei  $e$  eine unzulässige Kante von  $\mathcal{T}$  und  $\mathcal{T}' = \text{flip}(\mathcal{T}, e)$ . Dann gilt  $A(\mathcal{T}') > A(\mathcal{T})$ .

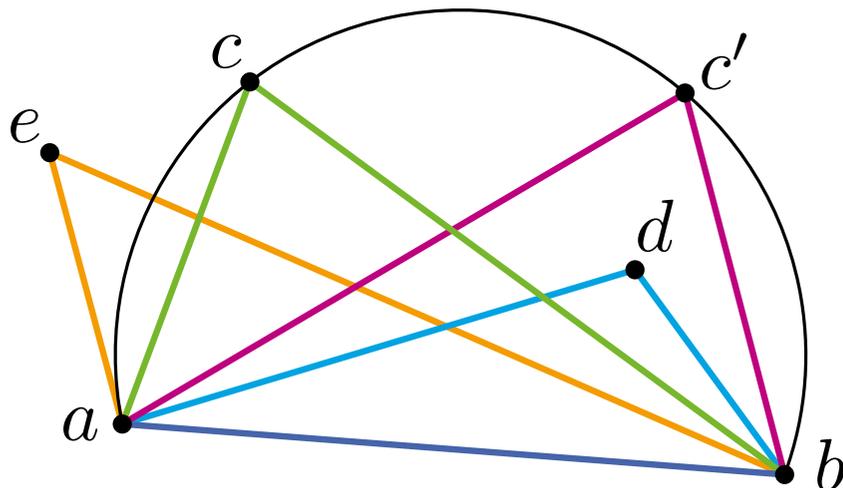


# Der Satz von Thales

**Satz 2:** Alle Dreiecke aus den Endpunkten des Kreisdurchmessers und eines Halbkreispunktes sind rechtwinklig.



**Satz 2':** Alle Dreiecke aus den Endpunkten einer Sekante  $\ell = \overline{ab}$  und eines Kreispunktes  $c$  auf der gleichen Seite von  $\ell$  haben den gleichen Winkel an  $c$ . Für Dreiecke  $\triangle abd$  mit  $d$  innerhalb des Kreises gilt  $\angle adb > \angle acd$ , für  $e$  außerhalb des Kreises gilt  $\angle aeb < \angle acd$ .



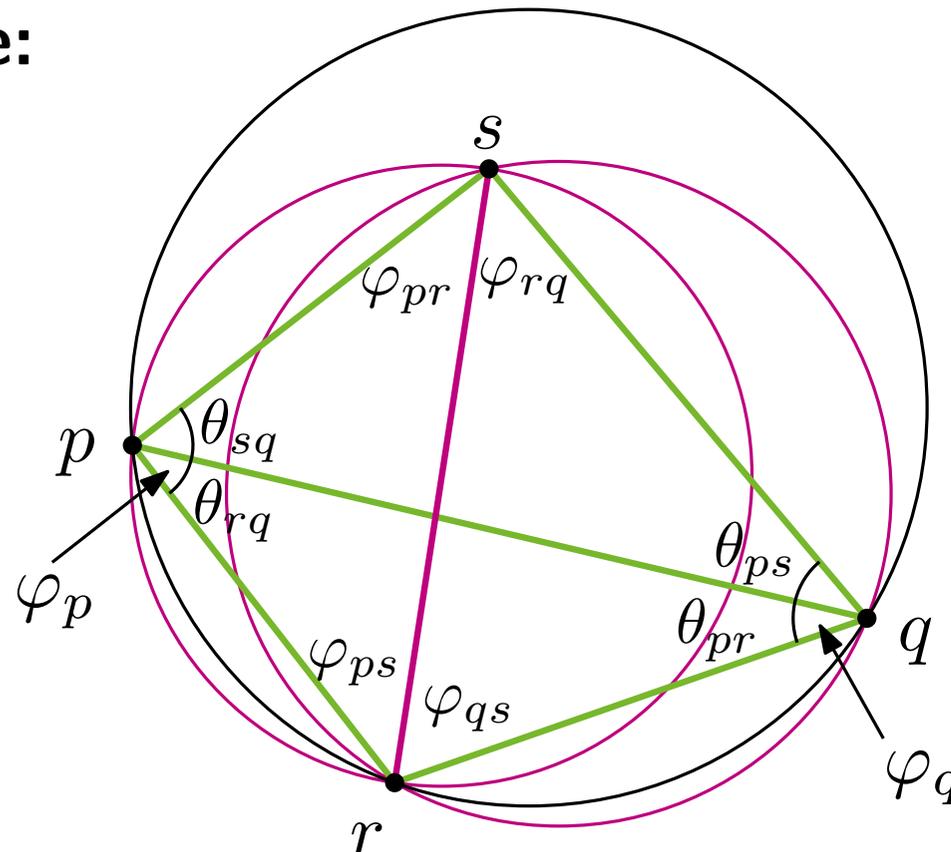
$$\angle aeb < \angle acb = \angle ac'b < \angle adb$$

# Zulässige Triangulierungen

**Lemma 1:** Seien  $\Delta prq$  und  $\Delta pqs$  zwei Dreiecke in  $\mathcal{T}$  und  $C$  der Umkreis von  $\Delta prq$ . Dann ist  $\overline{pq}$  unzulässig genau dann wenn  $s \in \text{int}(C)$ .

Bilden  $p, q, r, s$  ein konvexes Viereck ( $s \notin \partial C$ ) so ist entweder  $\overline{pq}$  oder  $\overline{rs}$  unzulässig.

**Beweisskizze:**



$$\varphi_{pr} > \theta_{pr}$$

$$\varphi_{ps} > \theta_{ps}$$

$$\varphi_{rq} > \theta_{rq}$$

$$\varphi_{qs} > \theta_{qs}$$

$$\varphi_p > \theta_{rq}$$

$$\varphi_q > \theta_{pr}$$

# Zulässige Triangulierungen

**Lemma 1:** Seien  $\Delta prq$  und  $\Delta pqs$  zwei Dreiecke in  $\mathcal{T}$  und  $C$  der Umkreis von  $\Delta prq$ . Dann ist  $\overline{pq}$  unzulässig genau dann wenn  $s \in \text{int}(C)$ .

Bilden  $p, q, r, s$  ein konvexes Viereck ( $s \notin \partial C$ ) so ist entweder  $\overline{pq}$  oder  $\overline{rs}$  unzulässig.

**Bem.:**

- Charakterisierung symmetrisch bzgl.  $r$  und  $s$
- $s \in \partial C \Rightarrow \overline{pq}$  und  $\overline{rs}$  zulässig
- Kante unzulässig  $\Rightarrow$  Viereck konvex

**Def.:** Triangulierung ohne unzulässige Kanten heißt **zulässig**.

Gibt es immer eine zulässige Triangulierung?

# Zulässige Triangulierungen

**Lemma 1:** Seien  $\Delta prq$  und  $\Delta pqs$  zwei Dreiecke in  $\mathcal{T}$  und  $C$  der Umkreis von  $\Delta prq$ . Dann ist  $\overline{pq}$  unzulässig genau dann wenn  $s \in \text{int}(C)$ .

Bilden  $p, q, r, s$  ein konvexes Viereck ( $s \notin \partial C$ ) so ist entweder  $\overline{pq}$  oder  $\overline{rs}$  unzulässig.

**Bem.:**

- Charakterisierung symmetrisch bzgl.  $r$  und  $s$
- $s \in \partial C \Rightarrow \overline{pq}$  und  $\overline{rs}$  zulässig
- Kante unzulässig  $\Rightarrow$  Viereck konvex

**Def.:** Triangulierung ohne unzulässige Kanten heißt **zulässig**.

**while**  $\mathcal{T}$  hat unzulässige Kante  $e$  **do**

$\lfloor$  flip( $\mathcal{T}, e$ )

**return**  $\mathcal{T}$

terminiert, da  $A(\mathcal{T})$  wächst und

#Triangulierungen endlich ( $< 30^n$ , [Sharir, Sheffer 2011])

**Es gilt:** Jede winkeloptimale Triangulierung ist zulässig.

Aber ist jede zulässige Triangulierung auch winkeloptimal?

# Die Delaunay-Triangulierung

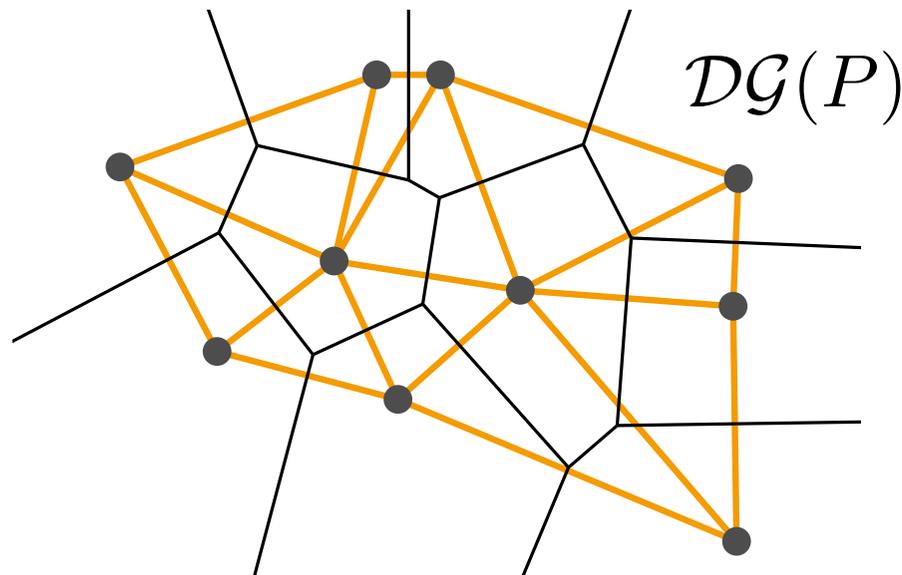
Sei  $\text{Vor}(P)$  das Voronoi-Diagramm einer Punktmenge  $P$ .

**Def.:** Der Graph  $\mathcal{G} = (P, E)$  mit  
 $E = \{pq \mid \mathcal{V}(p) \text{ und } \mathcal{V}(q) \text{ sind benachbart}\}$   
heißt **Dualgraph** von  $\text{Vor}(P)$ .

**Def.:** Die geradlinige Zeichnung von  $\mathcal{G}$  heißt **Delaunay-Graph**  $\mathcal{DG}(P)$ .



Georgy Voronoy  
(1868–1908)



Boris Delone  
(1890–1980)

**Satz 3:**  $\mathcal{DG}(P)$  ist kreuzungsfrei.

**Beweisskizze:**

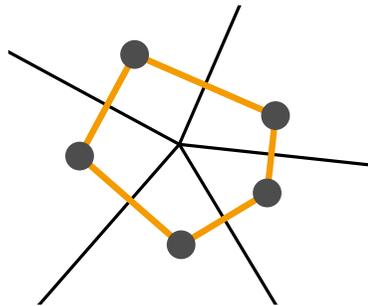
Der Bisektor  $b(p, q)$  definiert eine Voronoi-Kante  
 $\Leftrightarrow \exists r \in b(p, q)$  mit  $C_P(r) \cap P = \{p, q\}$ .

bzw.

Die Kante  $pq$  ist in  $\mathcal{DG}(P)$

$\Leftrightarrow$  es gibt einen leeren Kreis  $C_{p,q}$  mit  $p$  und  $q$  auf dem Rand.

**Beob.:** Ein Voronoi-Knoten  $v$  in  $\text{Vor}(P)$  mit Grad  $k$  entspricht einem konvexen  $k$ -Eck in  $\mathcal{DG}(P)$ .

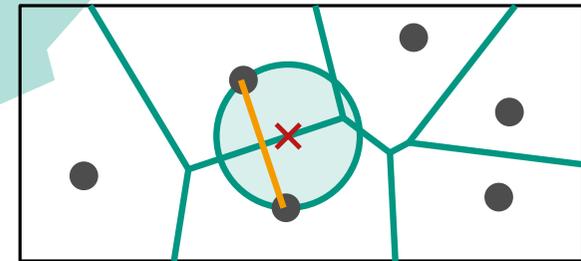
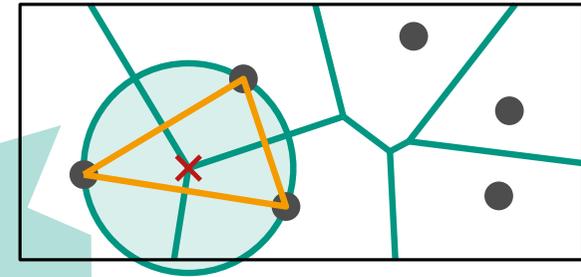


Ist  $P$  in allgemeiner Lage (keine 4 Punkte auf eine Kreis), so sind alle Facetten in  $\mathcal{DG}(P)$  Dreiecke  $\rightarrow$

**Delaunay-Triangulierung**

## Satz über Voronoi-Diagramme:

- Ein Punkt  $q$  ist ein Voronoi-Knoten  
 $\Leftrightarrow |C_P(q) \cap P| \geq 3$ ,
- der Bisektor  $b(p_i, p_j)$  definiert eine Voronoi-Kante  
 $\Leftrightarrow \exists q \in b(p_i, p_j)$  mit  $C_P(q) \cap P = \{p_i, p_j\}$ .



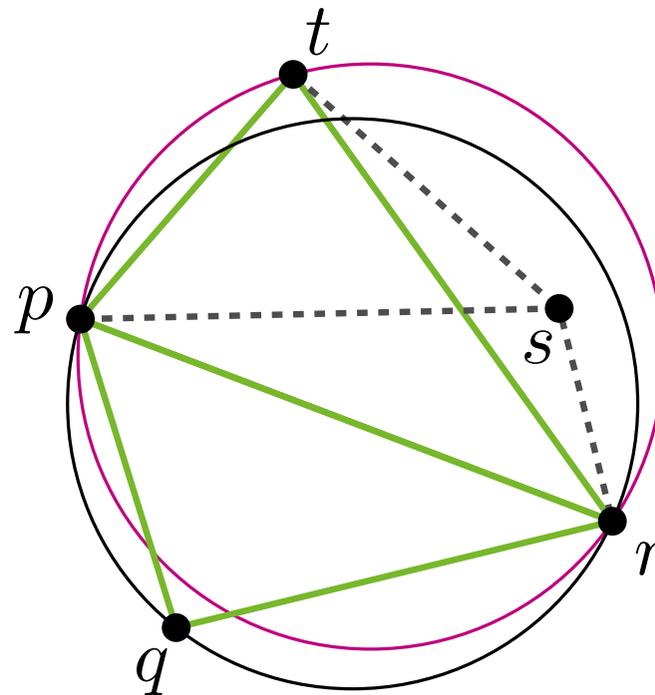
## Satz 4: Sei $P$ eine Menge von Punkten.

- Punkte  $p, q, r$  sind Knoten der gleichen Facette in  $\mathcal{DG}(P) \Leftrightarrow$  Kreis durch  $p, q, r$  ist leer
- Kante  $pq$  ist in  $\mathcal{DG}(P)$   
 $\Leftrightarrow$  es gibt einen leeren Kreis  $C_{p,q}$  durch  $p$  und  $q$

## Satz 5: Sei $P$ Punktmenge und $\mathcal{T}$ eine Triangulierung von $P$ . $\mathcal{T}$ ist Delaunay-Triangulierung $\Leftrightarrow$ Umkreis jedes Dreiecks ist im Inneren leer.

**Satz 6:** Sei  $P$  Punktmenge und  $\mathcal{T}$  eine Triangulierung von  $P$ .  
 $\mathcal{T}$  ist zulässig  $\Leftrightarrow \mathcal{T}$  ist Delaunay-Triangulierung.

**Beweisskizze:**



**Satz 6:** Sei  $P$  Punktmenge und  $\mathcal{T}$  eine Triangulierung von  $P$ .  
 $\mathcal{T}$  ist zulässig  $\Leftrightarrow \mathcal{T}$  ist Delaunay-Triangulierung.

**Beob.:** Ist  $P$  in allgemeiner Lage ist  $DG(P)$  eindeutig  
 $\Rightarrow$  zulässige Triangulierung ist eindeutig  
*wissen:*  $\mathcal{T}$  winkeloptymal  $\Rightarrow \mathcal{T}$  zulässig  
 $\Rightarrow DG(P)$  winkeloptymal!

Ist  $P$  *nicht* in allgemeiner Lage, so ist zumindest für jede Triangulierung einer „großen“ Facette von  $DG(P)$  der minimale Winkel gleich (Übung!).

**Satz 7:** Für  $n$  beliebige Punkte kann in  $O(n \log n)$  Zeit eine Delaunay-Triangulierung berechnet werden.  
(Voronoi-Diag. + Triangulierung „großer“ Facetten)

**Korollar:** Für  $n$  Punkte in allgemeiner Lage kann in  $O(n \log n)$  Zeit eine winkeloptimale Triangulierung berechnet werden.

Sind die Punkte nicht in allgemeiner Lage, lässt sich zumindest eine Triangulierung mit maximalem kleinsten Winkel in  $O(n \log n)$  Zeit berechnen.