

Übung Algorithmische Geometrie

Delaunay Triangulierungen

LEHRSTUHL FÜR ALGORITHMIK I · INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK · FAKULTÄT FÜR INFORMATIK

Andreas Gemsa
16.06.2011



Übungsblatt 9 - Delaunay Triangulierungen

Evaluation

Übungsblatt 9 - Delaunay Triangulierungen

Aufgabe 1

Problem:

Sei $P \subset \mathbb{R}^2$ eine Menge von n Punkten.

- a) Maximale Anzahl an verschiedenen Triangulierungen für P beschränkt durch $2^{\binom{n}{2}}$.
- b) Beispielmenge P bei der für jede Triangulierung ein Knoten ex. der Grad $n - 1$ hat?

Aufgabe 1

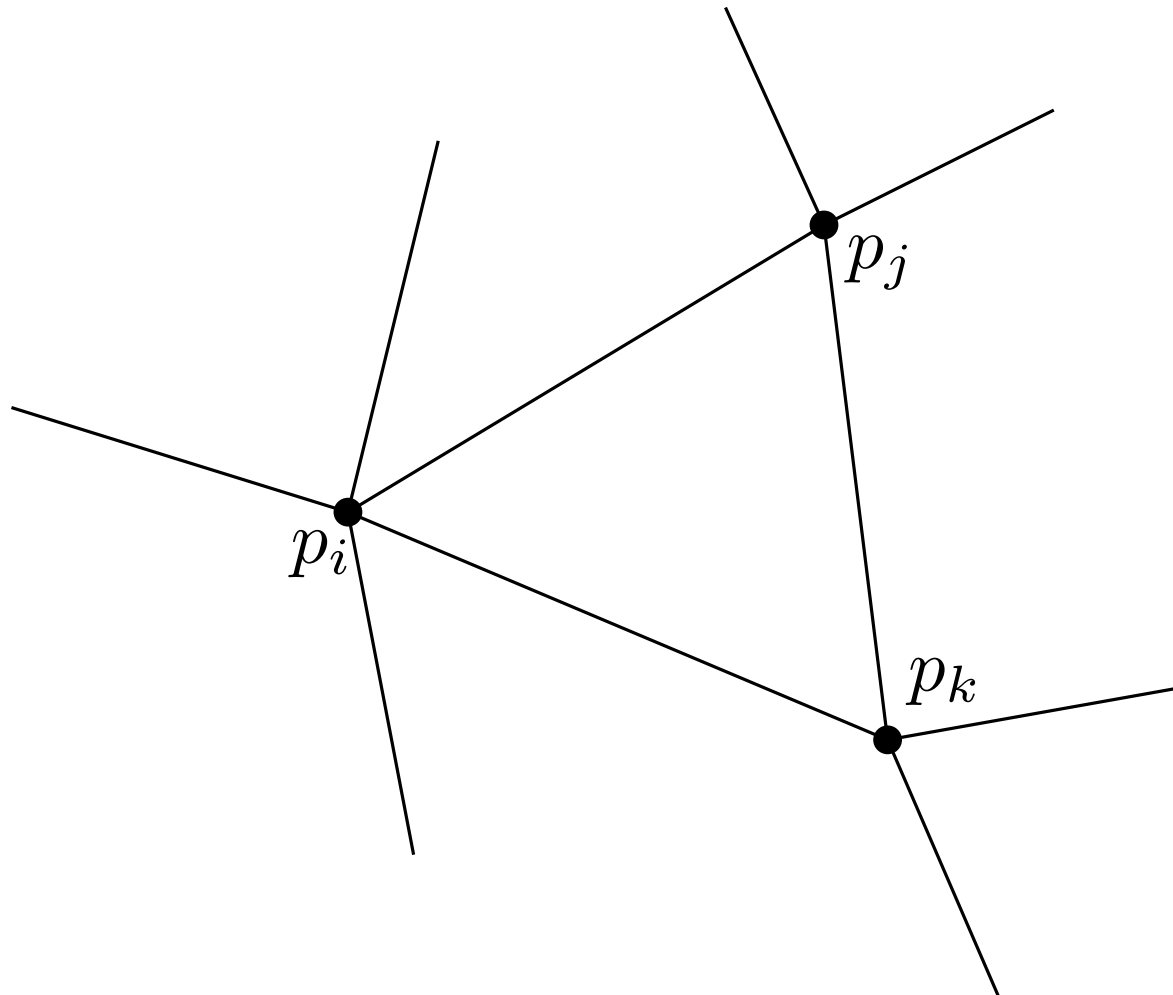
Problem:

Sei $P \subset \mathbb{R}^2$ eine Menge von n Punkten.

- a) Maximale Anzahl an verschiedenen Triangulierungen für P beschränkt durch $2^{\binom{n}{2}}$.
- b) Beispielmenge P bei der für jede Triangulierung ein Knoten ex. der Grad $n - 1$ hat?

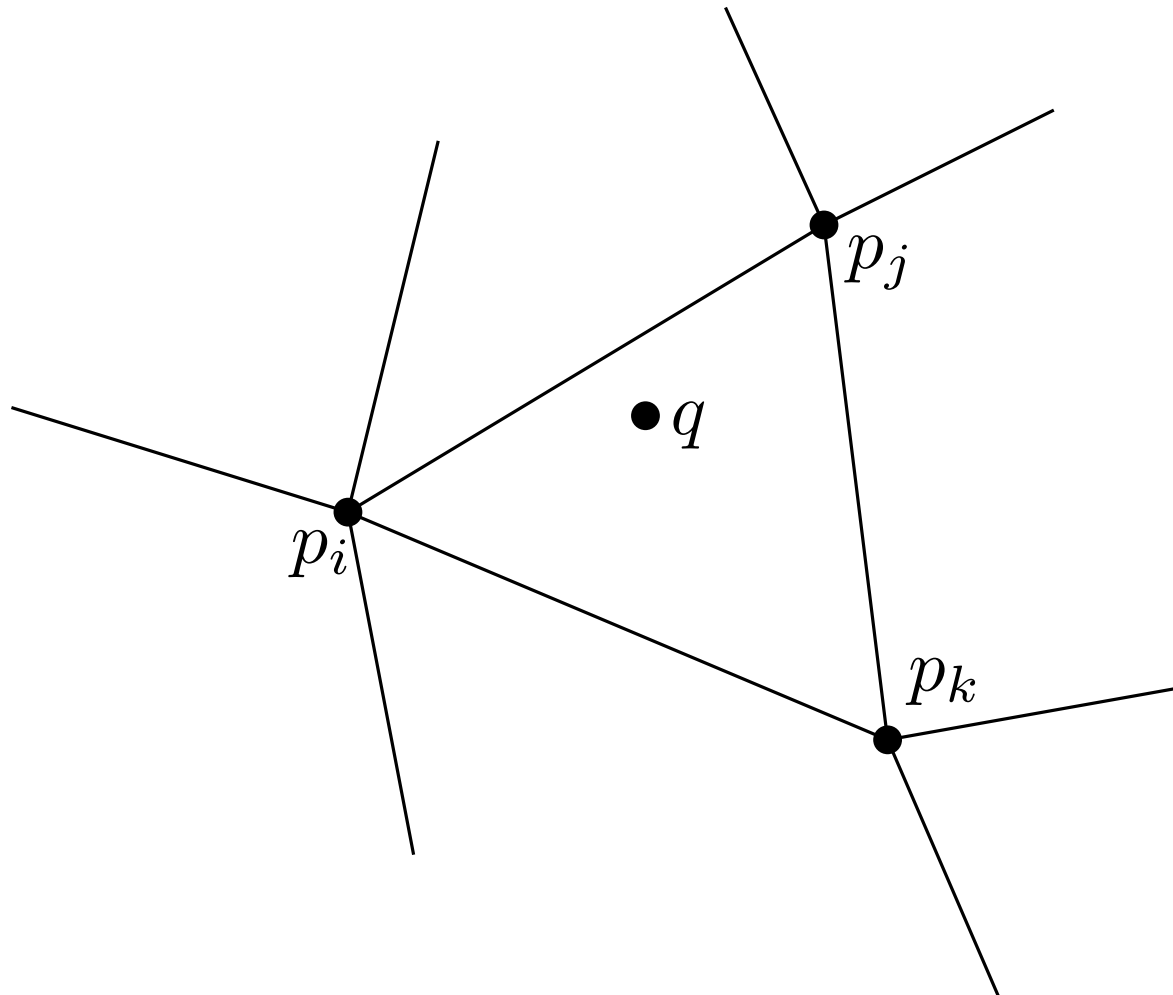
Aufgabe 2

- Punktmenge $P \subset \mathbb{R}^2$, alle Punkte in allgemeiner Lage.
- Außerdem $q \notin P$ aber in der konvexen Hülle von P .



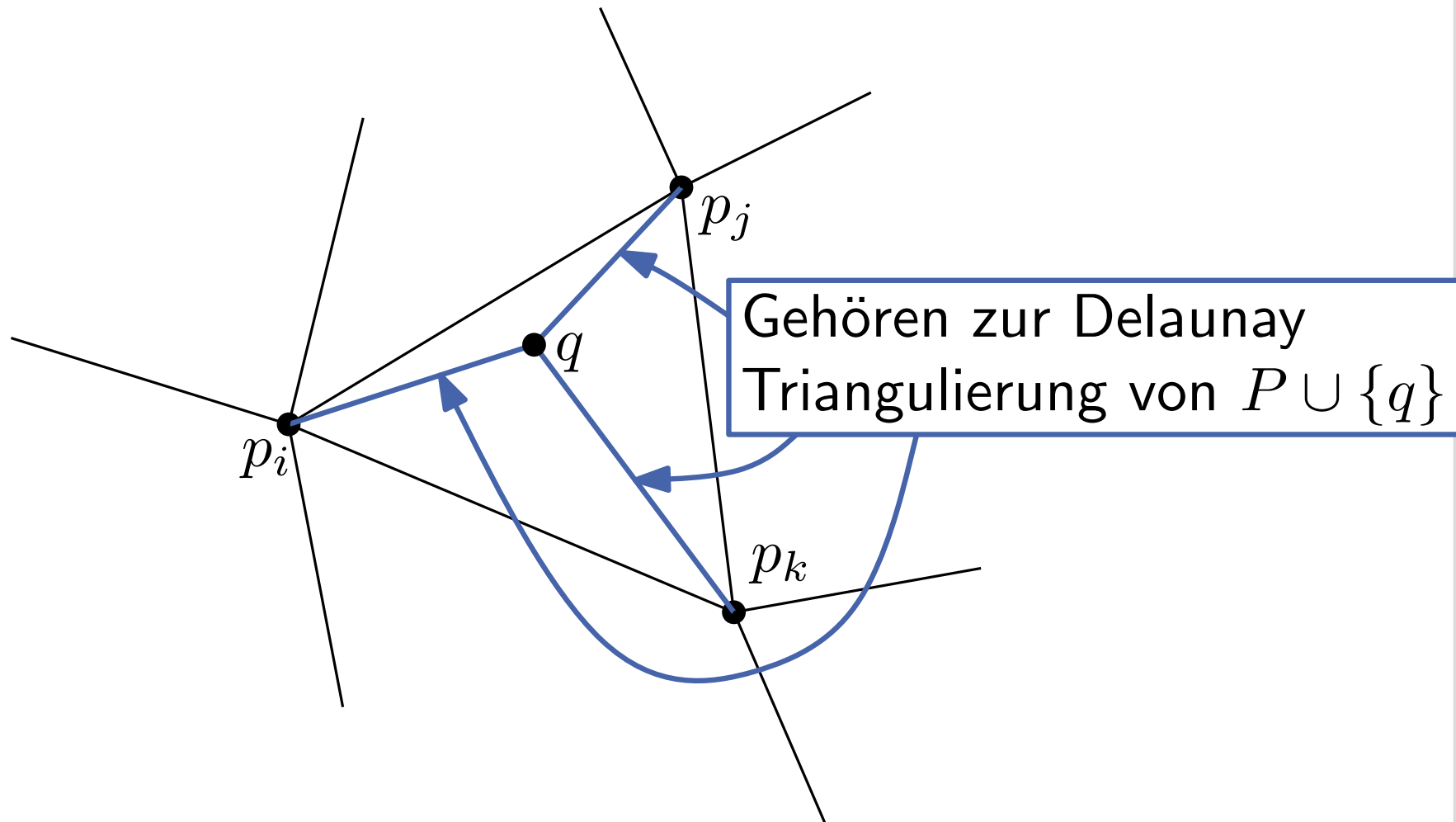
Aufgabe 2

- Punktmenge $P \subset \mathbb{R}^2$, alle Punkte in allgemeiner Lage.
- Außerdem $q \notin P$ aber in der konvexen Hülle von P .



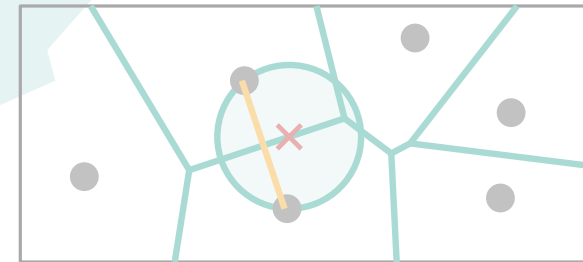
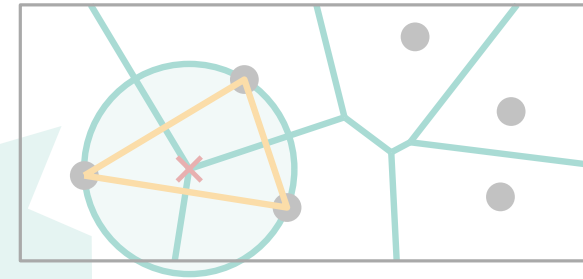
Aufgabe 2

- Punktmenge $P \subset \mathbb{R}^2$, alle Punkte in allgemeiner Lage.
- Außerdem $q \notin P$ aber in der konvexen Hülle von P .



Satz über Voronoi-Diagramme:

- Ein Punkt q ist ein Voronoi-Knoten
 $\Leftrightarrow |C_P(q) \cap P| \geq 3$,
- der Bisektor $b(p_i, p_j)$ definiert eine Voronoi-Kante
 $\Leftrightarrow \exists q \in b(p_i, p_j)$ mit $C_P(q) \cap P = \{p_i, p_j\}$.



Satz 4: Sei P eine Menge von Punkten.

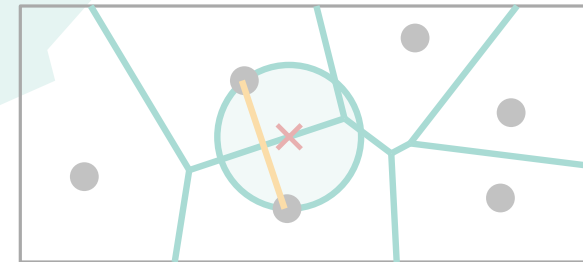
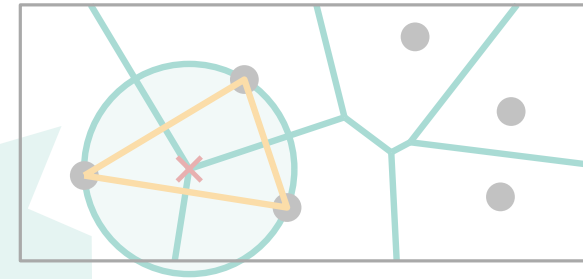
- Punkte p, q, r sind Knoten der gleichen Facette in $\mathcal{DG}(P) \Leftrightarrow$ Kreis durch p, q, r ist leer
- Kante pq ist in $\mathcal{DG}(P)$
 \Leftrightarrow es gibt einen leeren Kreis $C_{p,q}$ durch p und q

Satz 5: Sei P Punktmenge und \mathcal{T} eine Triangulierung von P .

- \mathcal{T} ist Delaunay-Triangulierung
 \Leftrightarrow Umkreis jedes Dreiecks ist im Inneren leer.

Satz über Voronoi-Diagramme:

- Ein Punkt q ist ein Voronoi-Knoten
 $\Leftrightarrow |C_P(q) \cap P| \geq 3$,
- der Bisektor $b(p_i, p_j)$ definiert eine Voronoi-Kante
 $\Leftrightarrow \exists q \in b(p_i, p_j)$ mit $C_P(q) \cap P = \{p_i, p_j\}$.



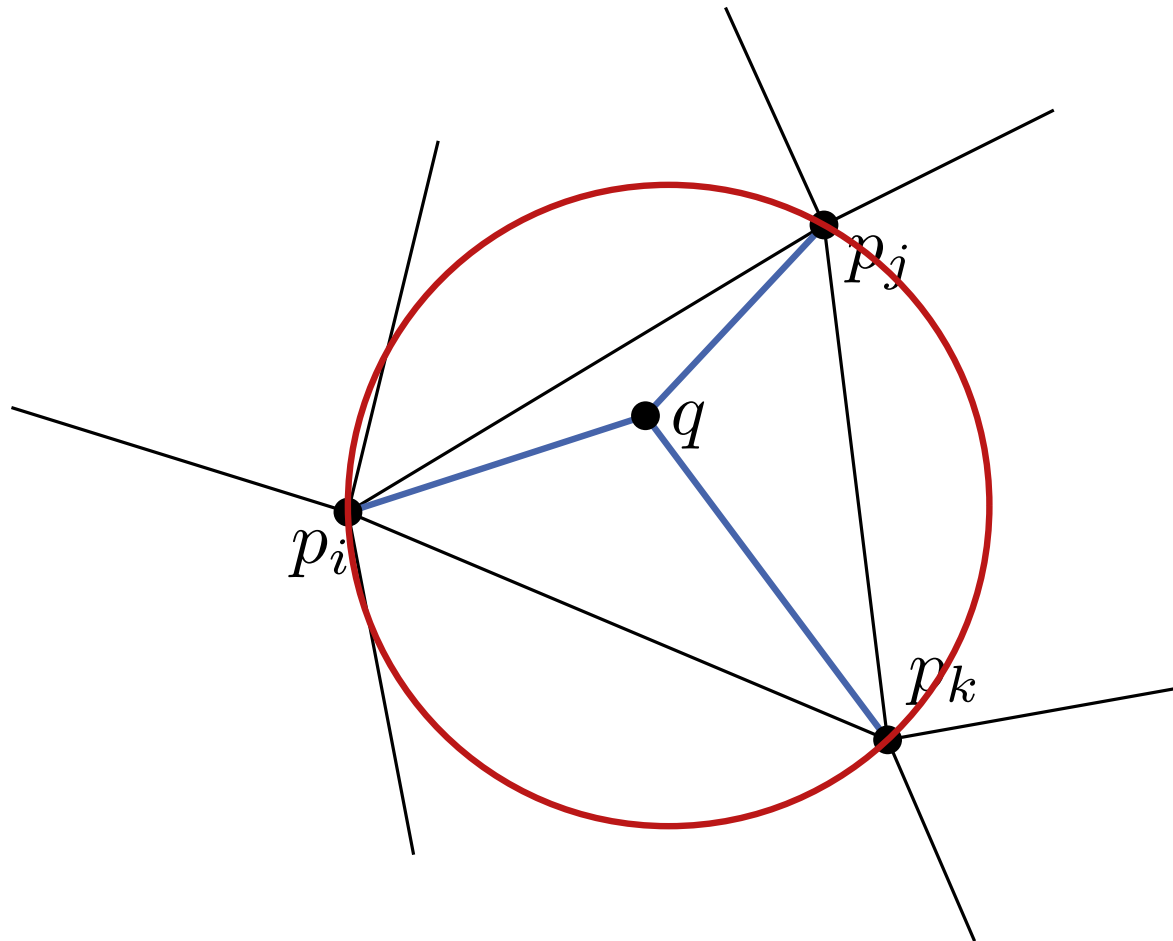
Satz 4: Sei P eine Menge von Punkten.

- Punkte p, q, r sind Knoten der gleichen Facette in $\mathcal{DG}(P) \Leftrightarrow$ Kreis durch p, q, r ist leer
- Kante pq ist in $\mathcal{DG}(P)$
 \Leftrightarrow es gibt einen leeren Kreis $C_{p,q}$ durch p und q

Satz 5: Sei P Punktmenge und \mathcal{T} eine Triangulierung von P . \mathcal{T} ist Delaunay-Triangulierung \Leftrightarrow Umkreis jedes Dreiecks ist im Inneren leer.

Aufgabe 2

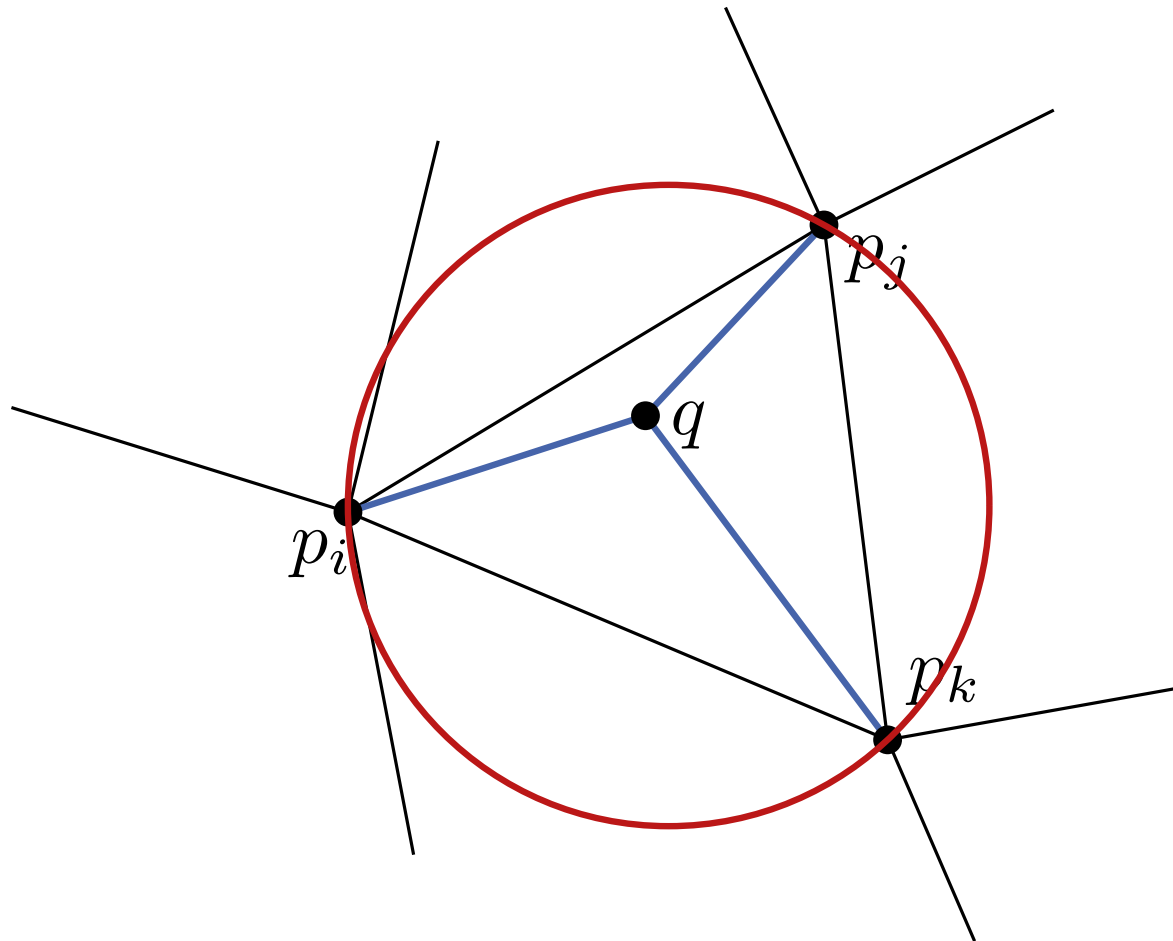
- Punktmenge $P \subset \mathbb{R}^2$, alle Punkte in allgemeiner Lage.
- Außerdem $q \notin P$ aber in der konvexen Hülle von P .



Kante pq ist in $\mathcal{DG}(P) \Leftrightarrow$ es gibt einen leeren Kreis $C_{p,q}$ durch p und q

Aufgabe 2

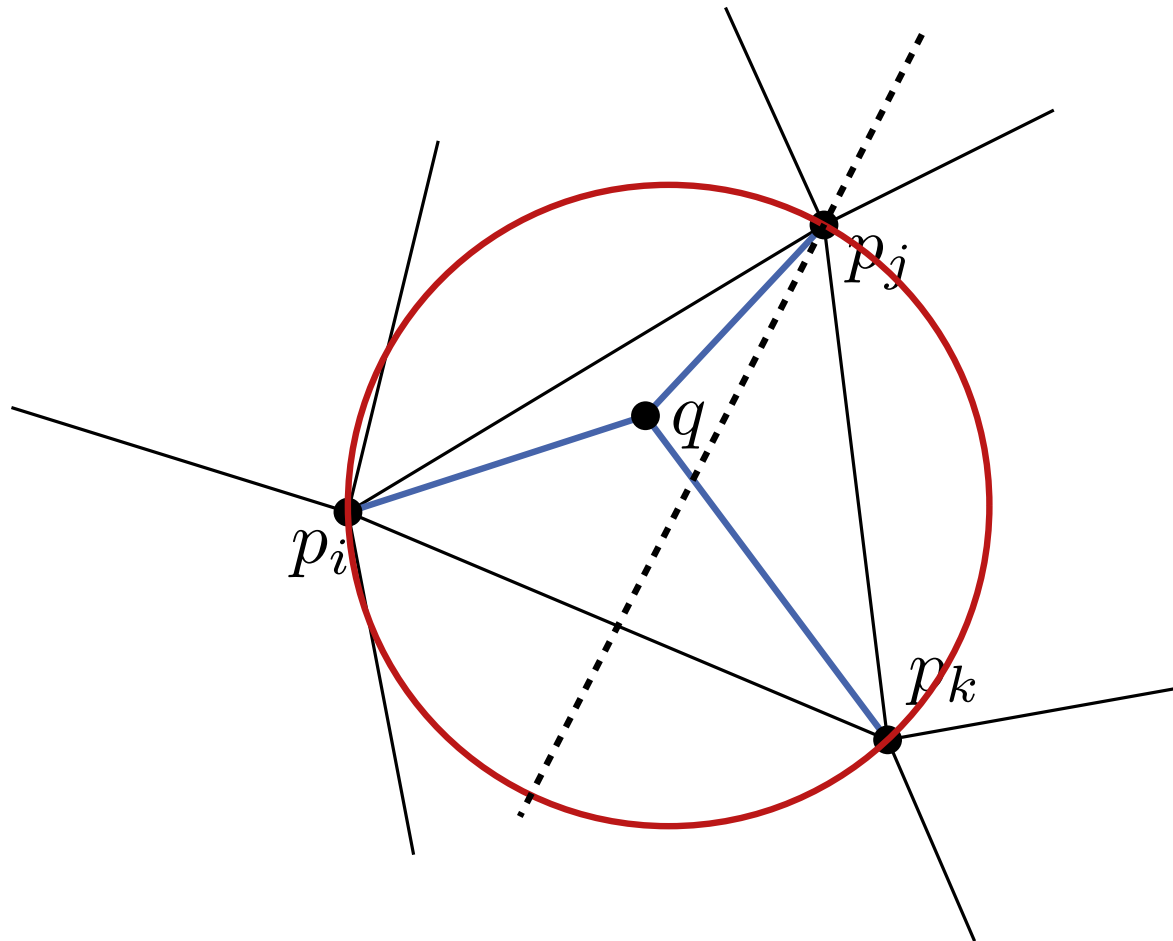
- Punktmenge $P \subset \mathbb{R}^2$, alle Punkte in allgemeiner Lage.
- Außerdem $q \notin P$ aber in der konvexen Hülle von P .



Kante pq ist in $\mathcal{DG}(P) \Leftrightarrow$ es gibt einen leeren Kreis $C_{p,q}$ durch p und q

Aufgabe 2

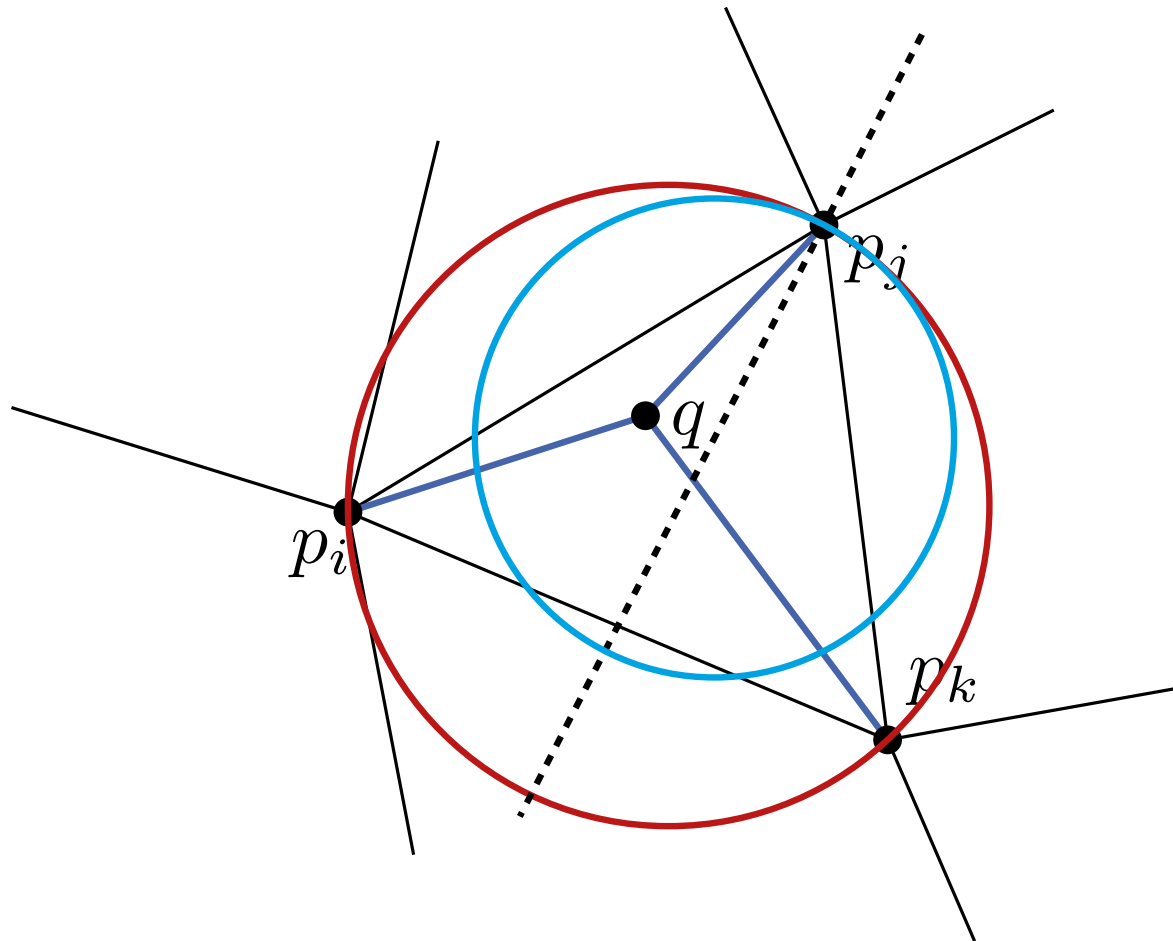
- Punktmenge $P \subset \mathbb{R}^2$, alle Punkte in allgemeiner Lage.
- Außerdem $q \notin P$ aber in der konvexen Hülle von P .



Kante pq ist in $\mathcal{DG}(P) \Leftrightarrow$ es gibt einen leeren Kreis $C_{p,q}$ durch p und q

Aufgabe 2

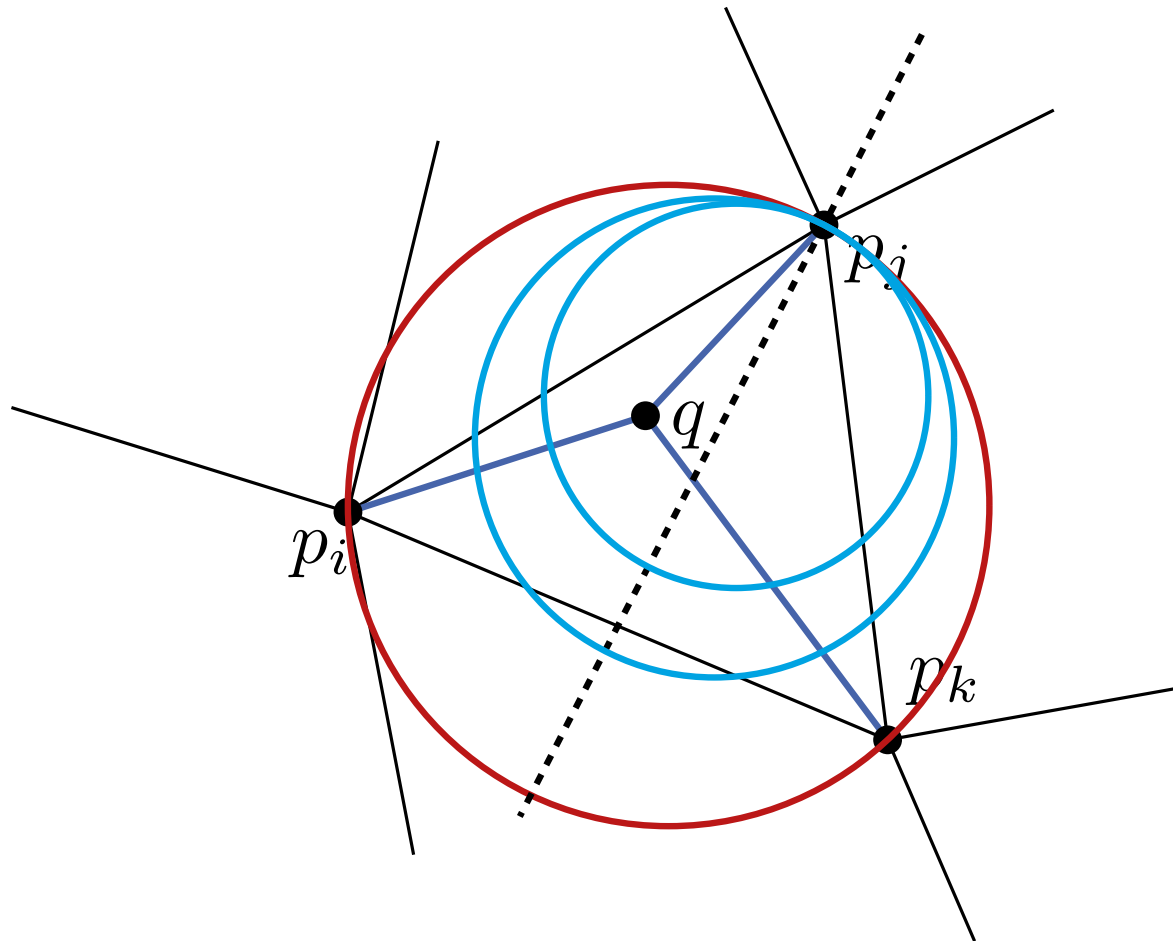
- Punktmenge $P \subset \mathbb{R}^2$, alle Punkte in allgemeiner Lage.
- Außerdem $q \notin P$ aber in der konvexen Hülle von P .



Kante pq ist in $\mathcal{DG}(P) \Leftrightarrow$ es gibt einen leeren Kreis $C_{p,q}$ durch p und q

Aufgabe 2

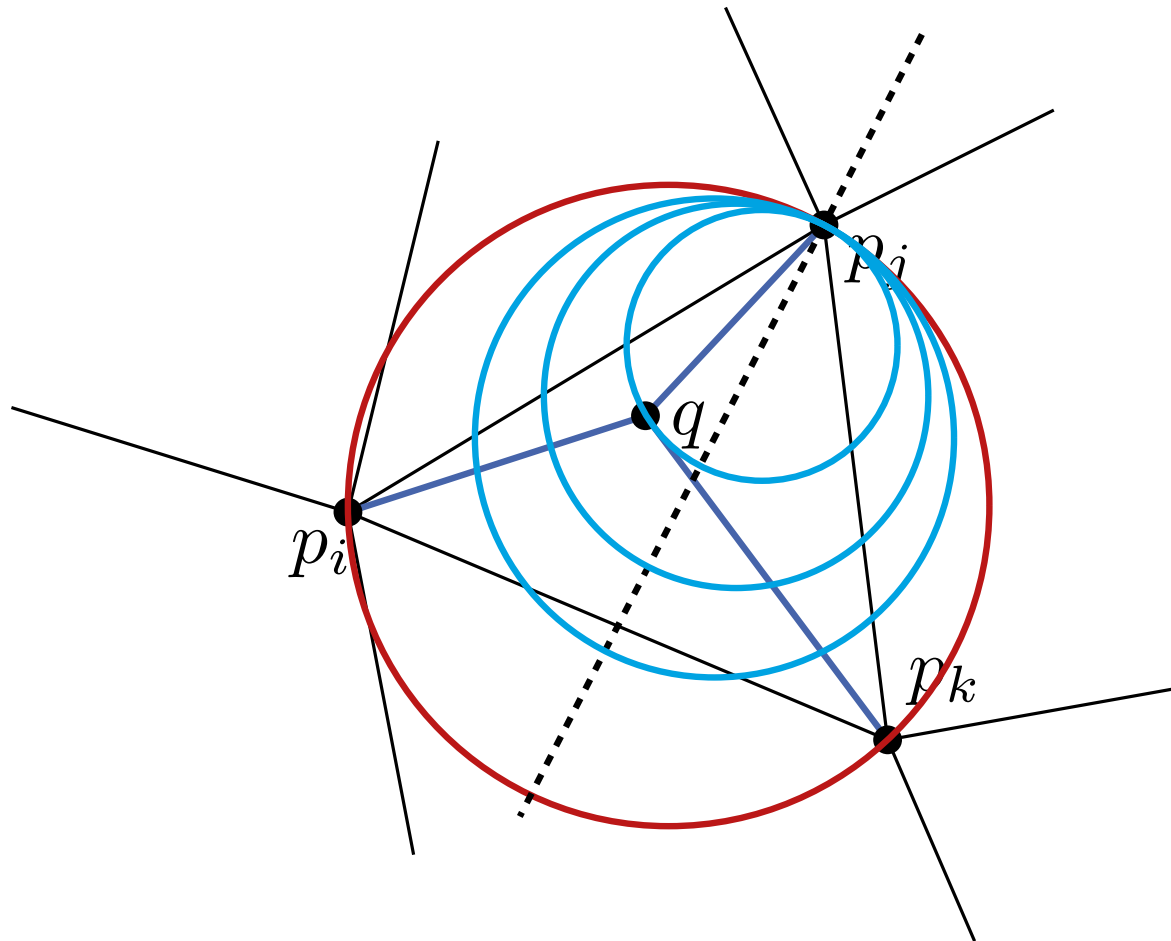
- Punktmenge $P \subset \mathbb{R}^2$, alle Punkte in allgemeiner Lage.
- Außerdem $q \notin P$ aber in der konvexen Hülle von P .



Kante pq ist in $\mathcal{DG}(P) \Leftrightarrow$ es gibt einen leeren Kreis $C_{p,q}$ durch p und q

Aufgabe 2

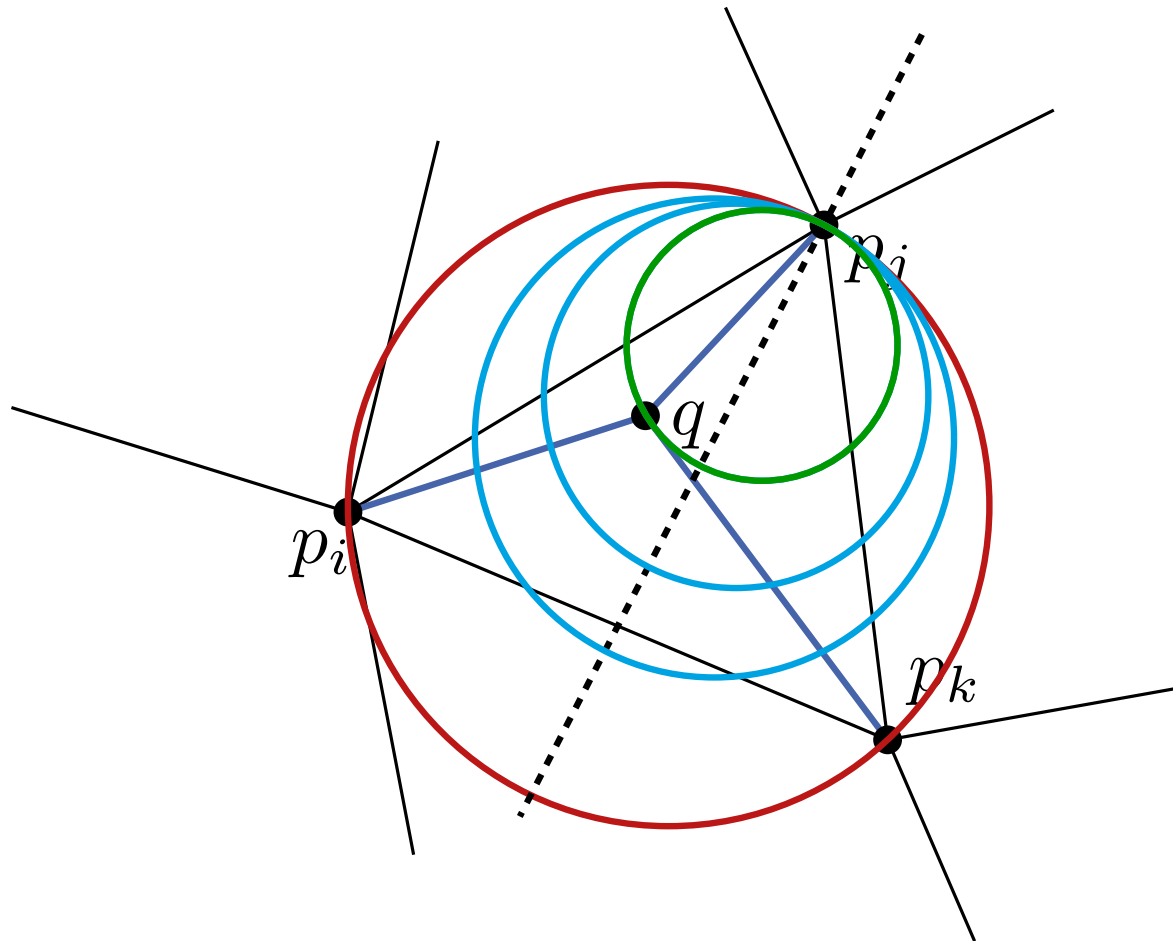
- Punktmenge $P \subset \mathbb{R}^2$, alle Punkte in allgemeiner Lage.
- Außerdem $q \notin P$ aber in der konvexen Hülle von P .



Kante pq ist in $\mathcal{DG}(P) \Leftrightarrow$ es gibt einen leeren Kreis $C_{p,q}$ durch p und q

Aufgabe 2

- Punktmenge $P \subset \mathbb{R}^2$, alle Punkte in allgemeiner Lage.
- Außerdem $q \notin P$ aber in der konvexen Hülle von P .



Kante pq ist in $\mathcal{DG}(P) \Leftrightarrow$ es gibt einen leeren Kreis $C_{p,q}$ durch p und q

Übungsblatt 9 - Delaunay Triangulierungen

Evaluation

Übungsblatt 9 - Delaunay Triangulierungen

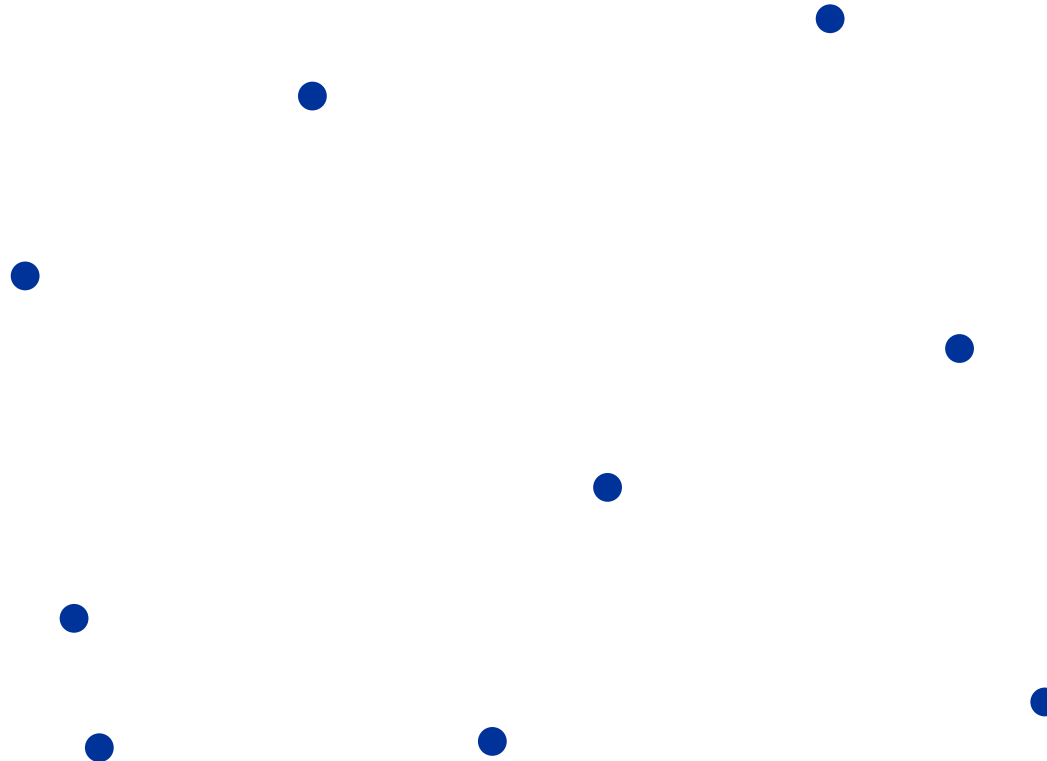
Übungsblatt 9 - Delaunay Triangulierungen

Evaluation

Übungsblatt 9 - Delaunay Triangulierungen

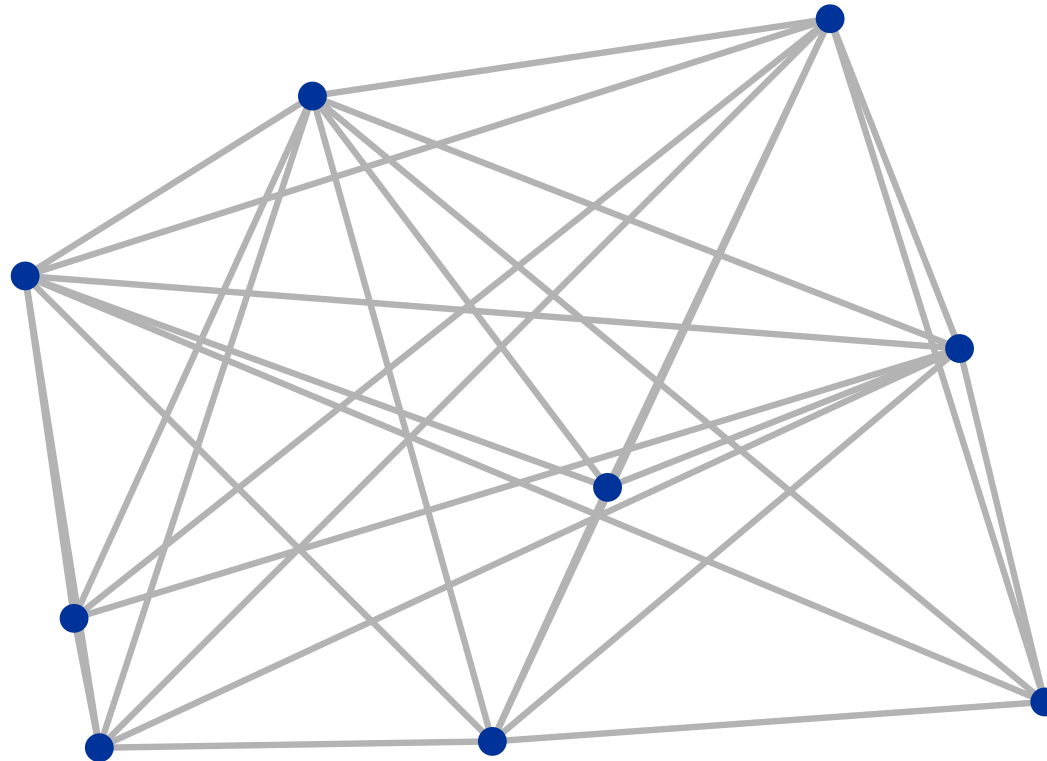
Aufgabe 3

Euklidischer Minimaler Spannbaum



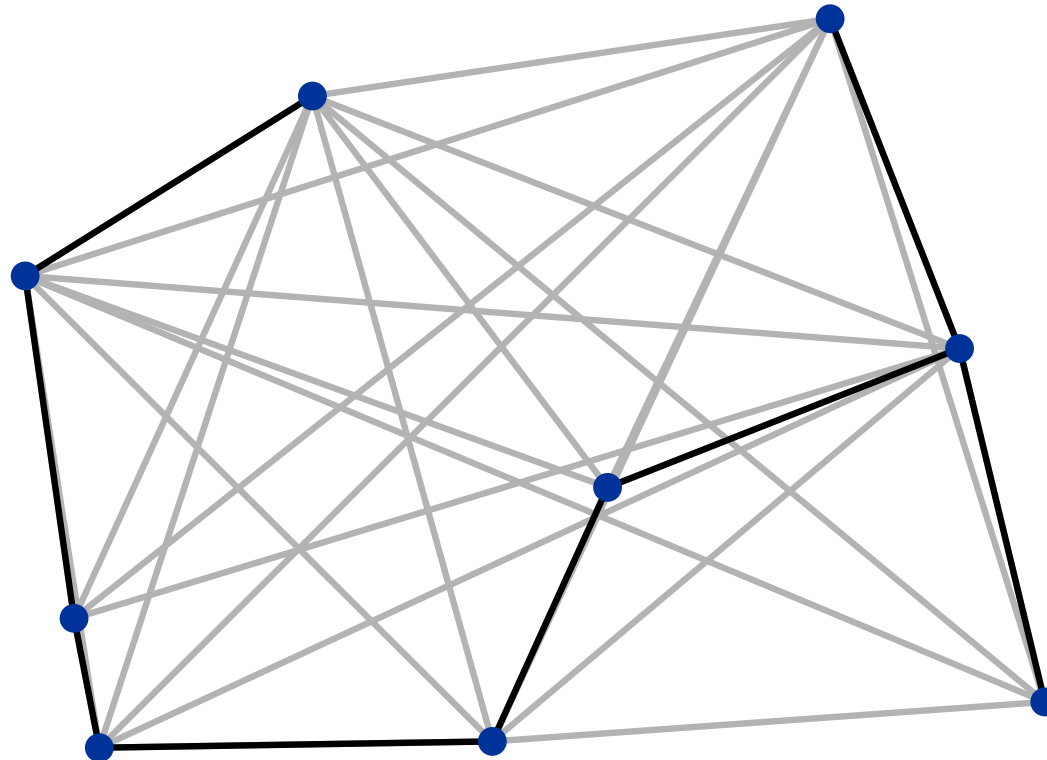
Aufgabe 3

Euklidischer Minimaler Spannbaum



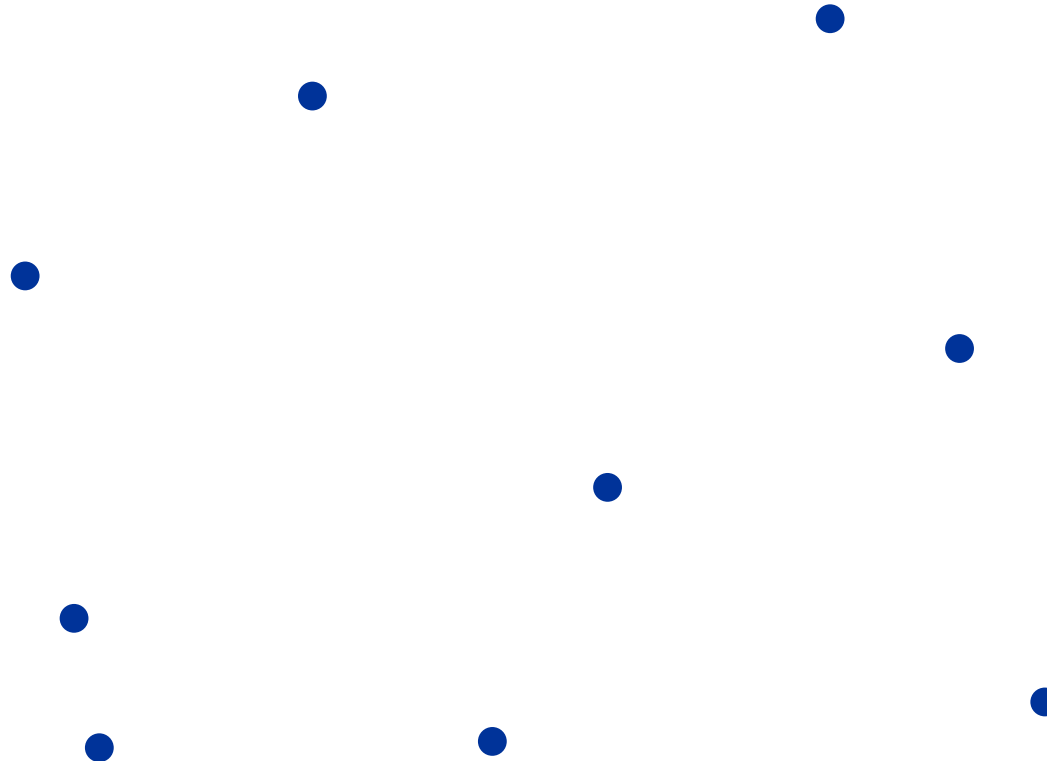
Aufgabe 3

Euklidischer Minimaler Spannbaum



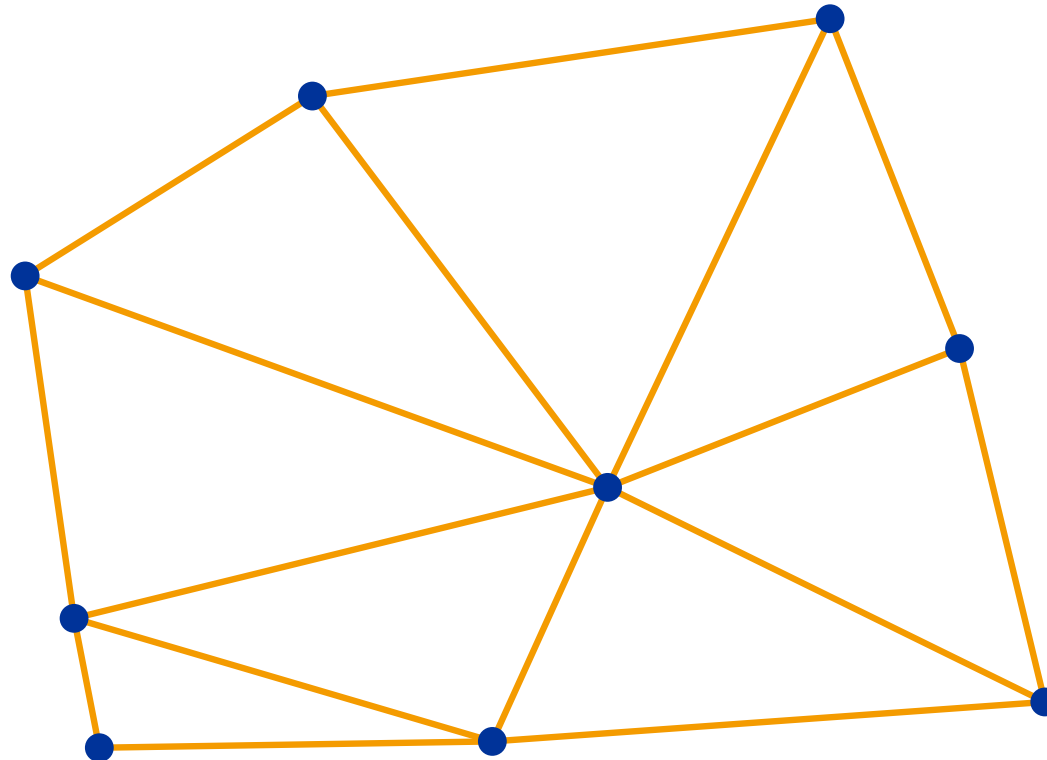
Aufgabe 3

Euklidischer Minimaler Spannbaum



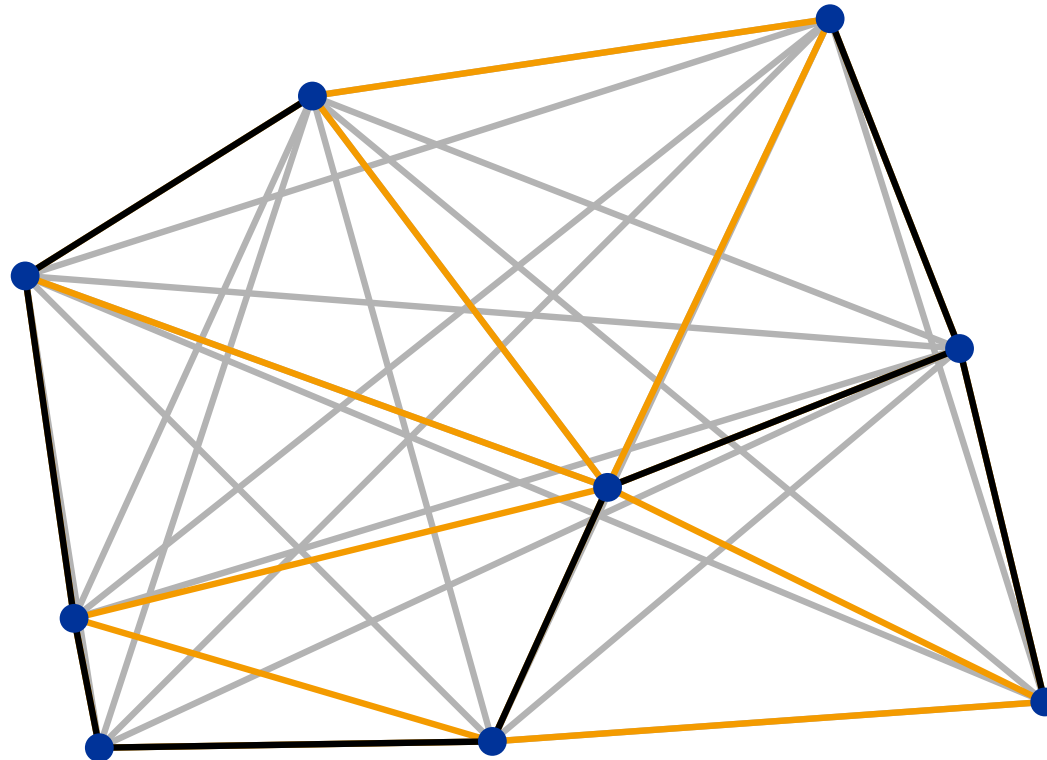
Aufgabe 3

Euklidischer Minimaler Spannbaum



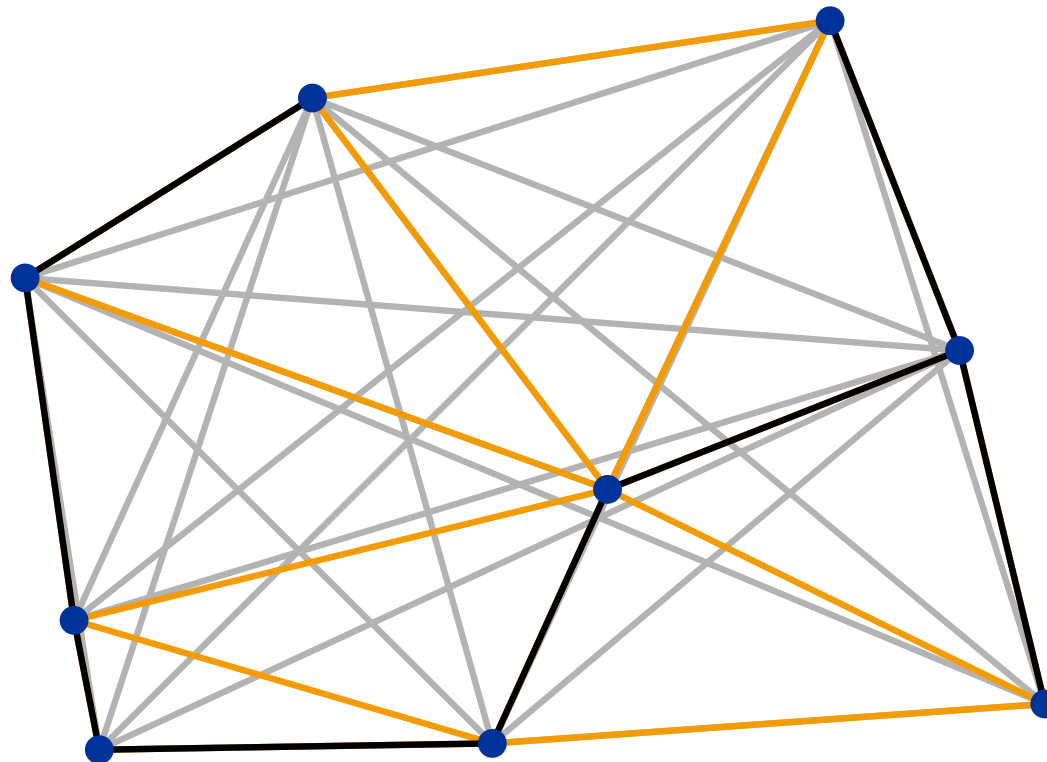
Aufgabe 3

Euklidischer Minimaler Spannbaum



Aufgabe 3

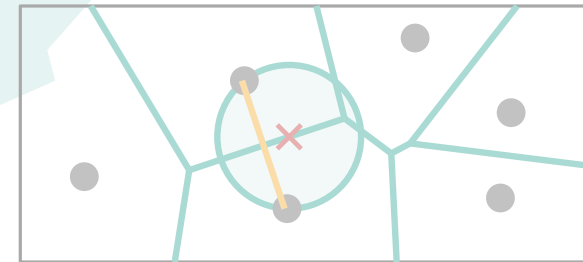
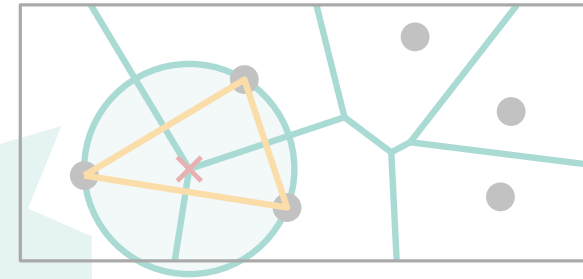
Euklidischer Minimaler Spannbaum



Zeige, dass Kanten aus EMST Teilmenge der Kanten aus Delaunay-Graph

Satz über Voronoi-Diagramme:

- Ein Punkt q ist ein Voronoi-Knoten
 $\Leftrightarrow |C_P(q) \cap P| \geq 3$,
- der Bisektor $b(p_i, p_j)$ definiert eine Voronoi-Kante
 $\Leftrightarrow \exists q \in b(p_i, p_j)$ mit $C_P(q) \cap P = \{p_i, p_j\}$.

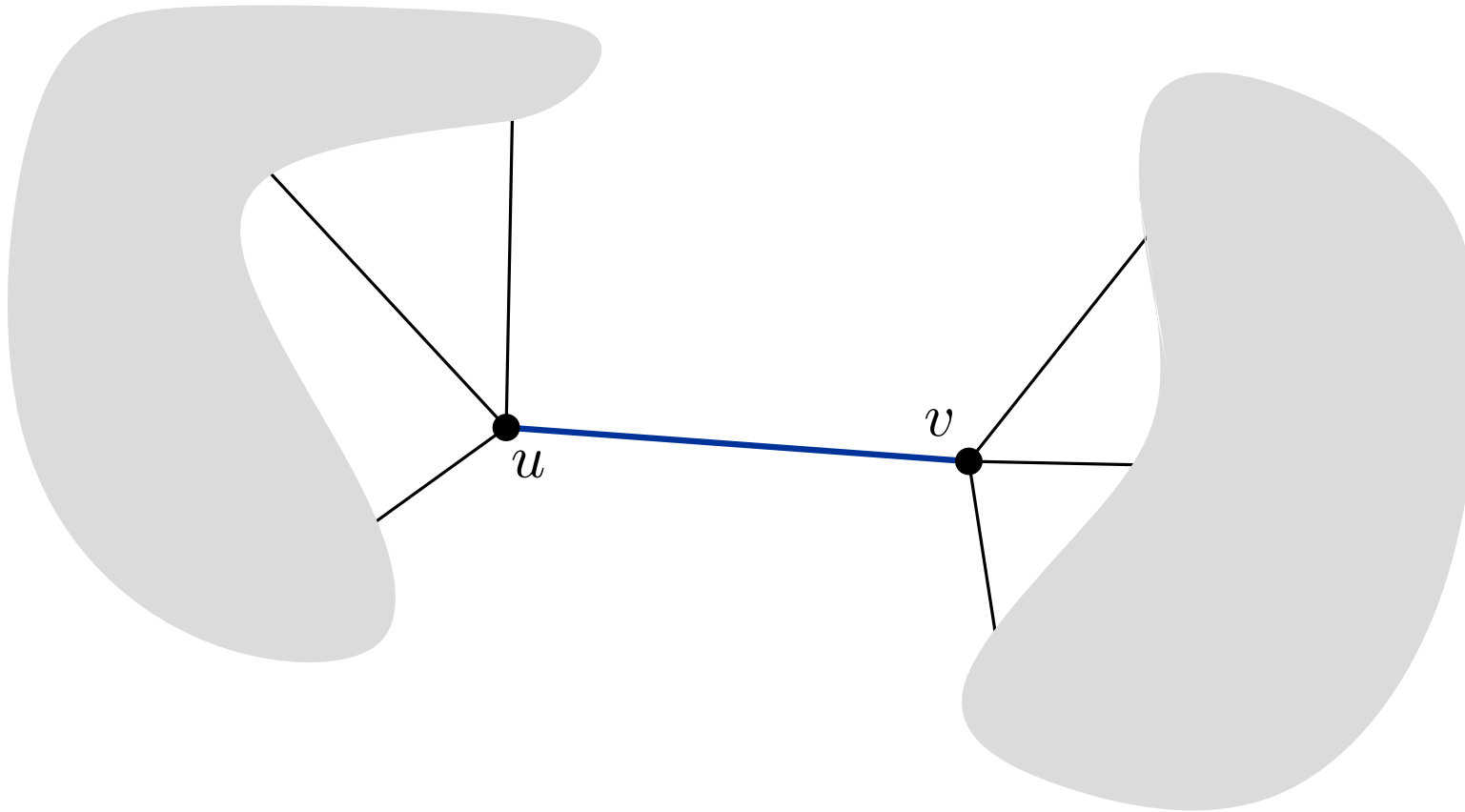


Satz 4: Sei P eine Menge von Punkten.

- Punkte p, q, r sind Knoten der gleichen Facette in $\mathcal{DG}(P) \Leftrightarrow$ Kreis durch p, q, r ist leer
- Kante pq ist in $\mathcal{DG}(P)$
 \Leftrightarrow es gibt einen leeren Kreis $C_{p,q}$ durch p und q

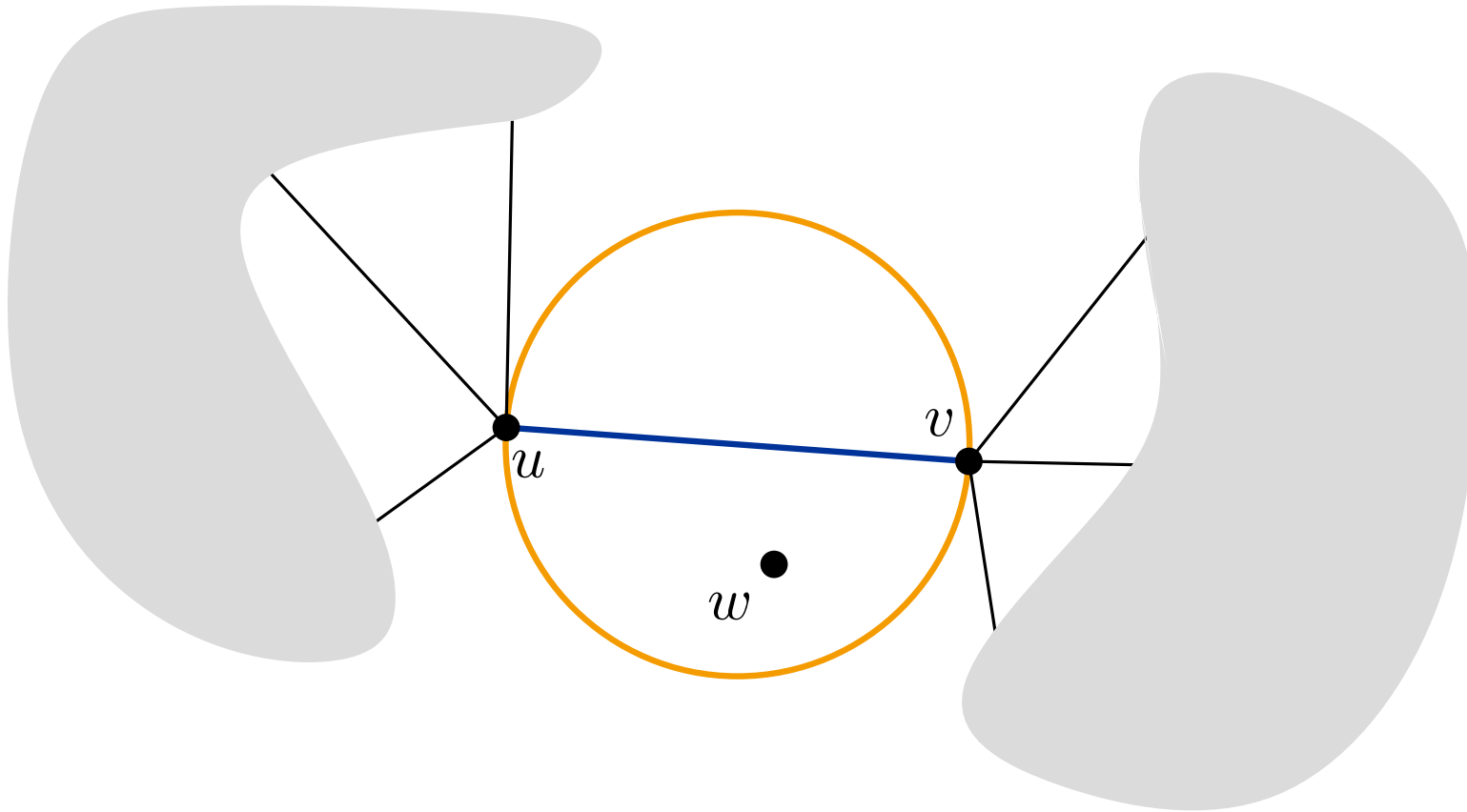
Satz 5: Sei P Punktmenge und \mathcal{T} eine Triangulierung von P .
 \mathcal{T} ist Delaunay-Triangulierung
 \Leftrightarrow Umkreis jedes Dreiecks ist im Inneren leer.

Aufgabe 3



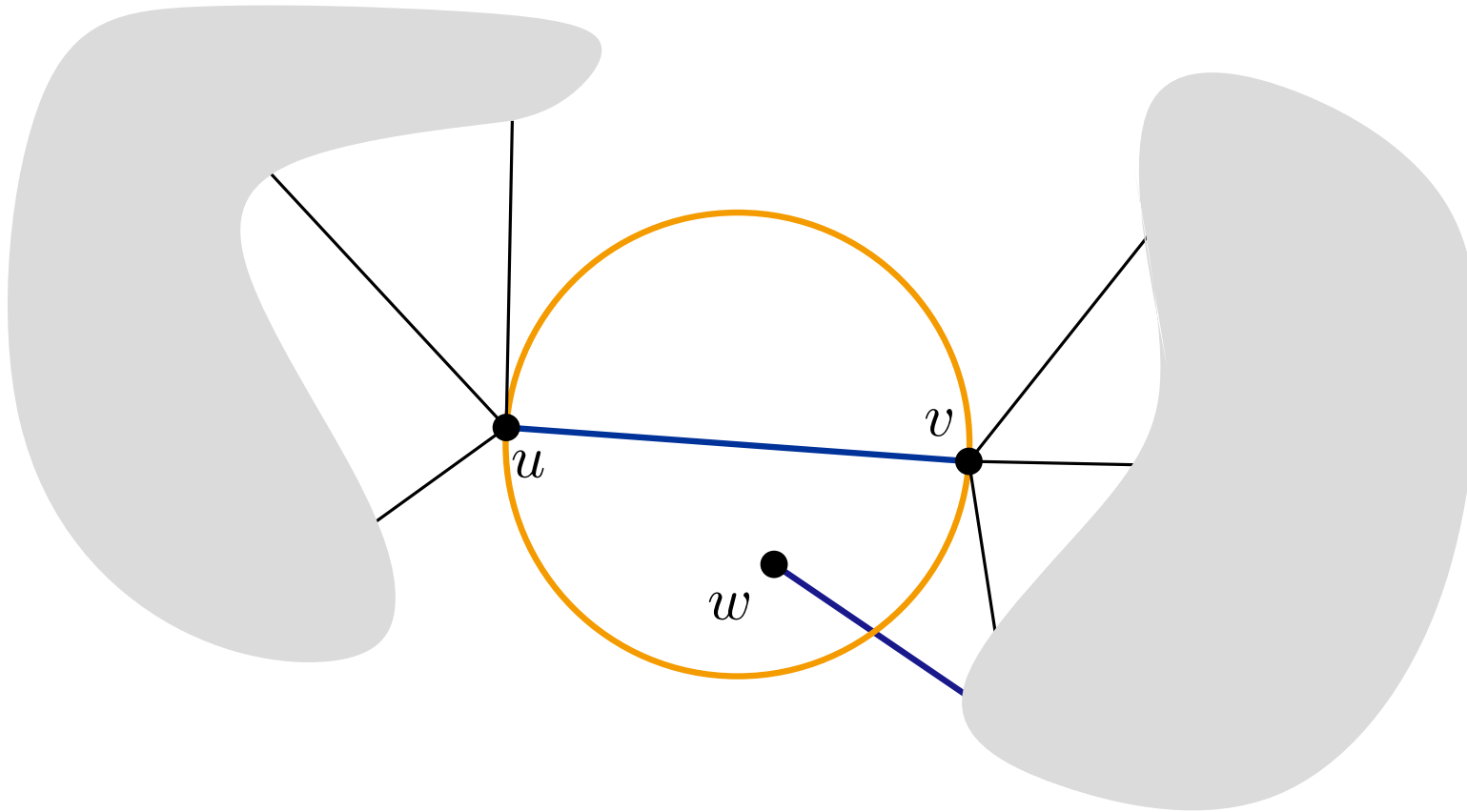
Kante pq ist in $\mathcal{DG}(P) \Leftrightarrow$ es gibt einen leeren Kreis $C_{p,q}$ durch p und q

Aufgabe 3



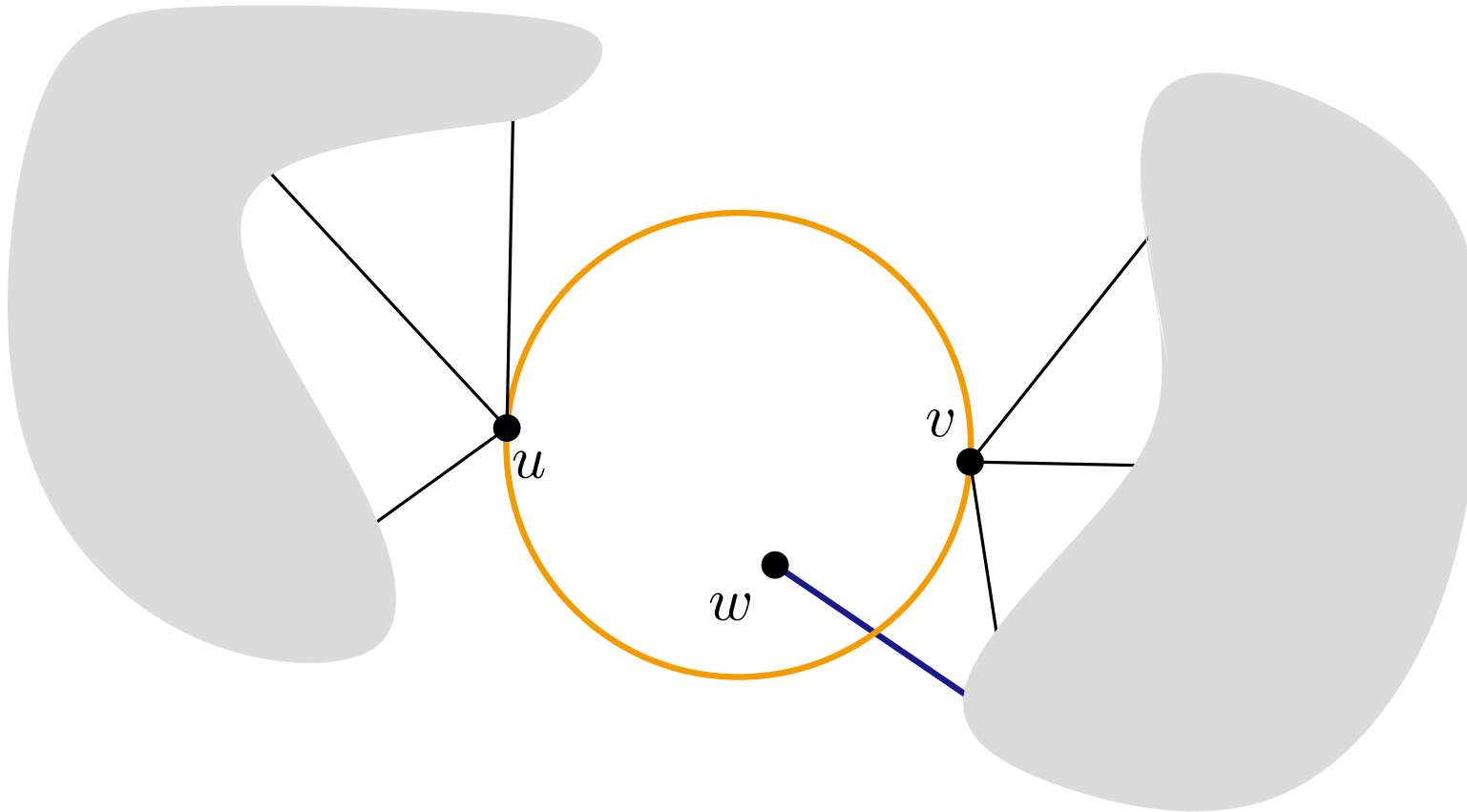
Kante pq ist in $\mathcal{DG}(P) \Leftrightarrow$ es gibt einen leeren Kreis $C_{p,q}$ durch p und q

Aufgabe 3



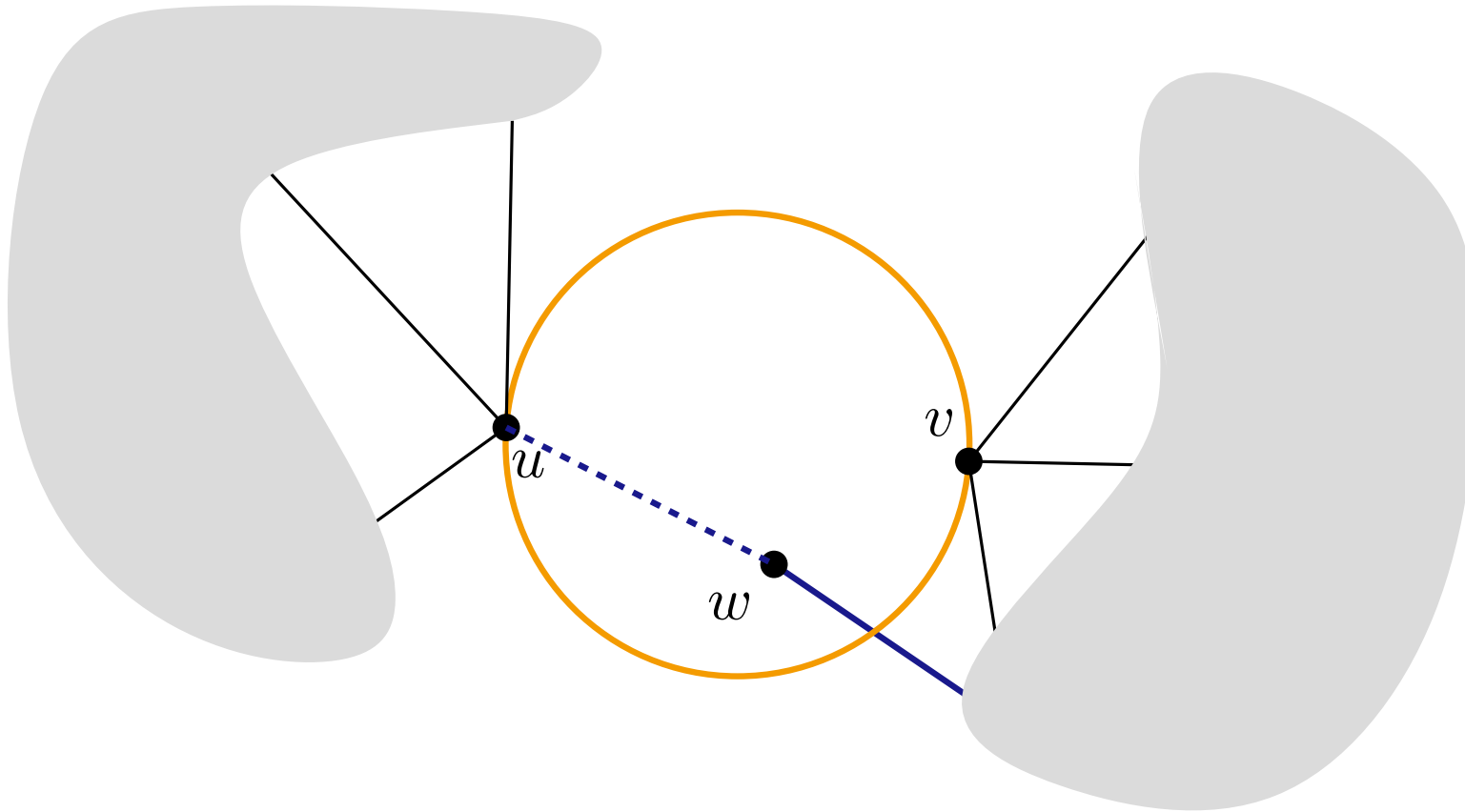
Kante pq ist in $\mathcal{DG}(P) \Leftrightarrow$ es gibt einen leeren Kreis $C_{p,q}$ durch p und q

Aufgabe 3



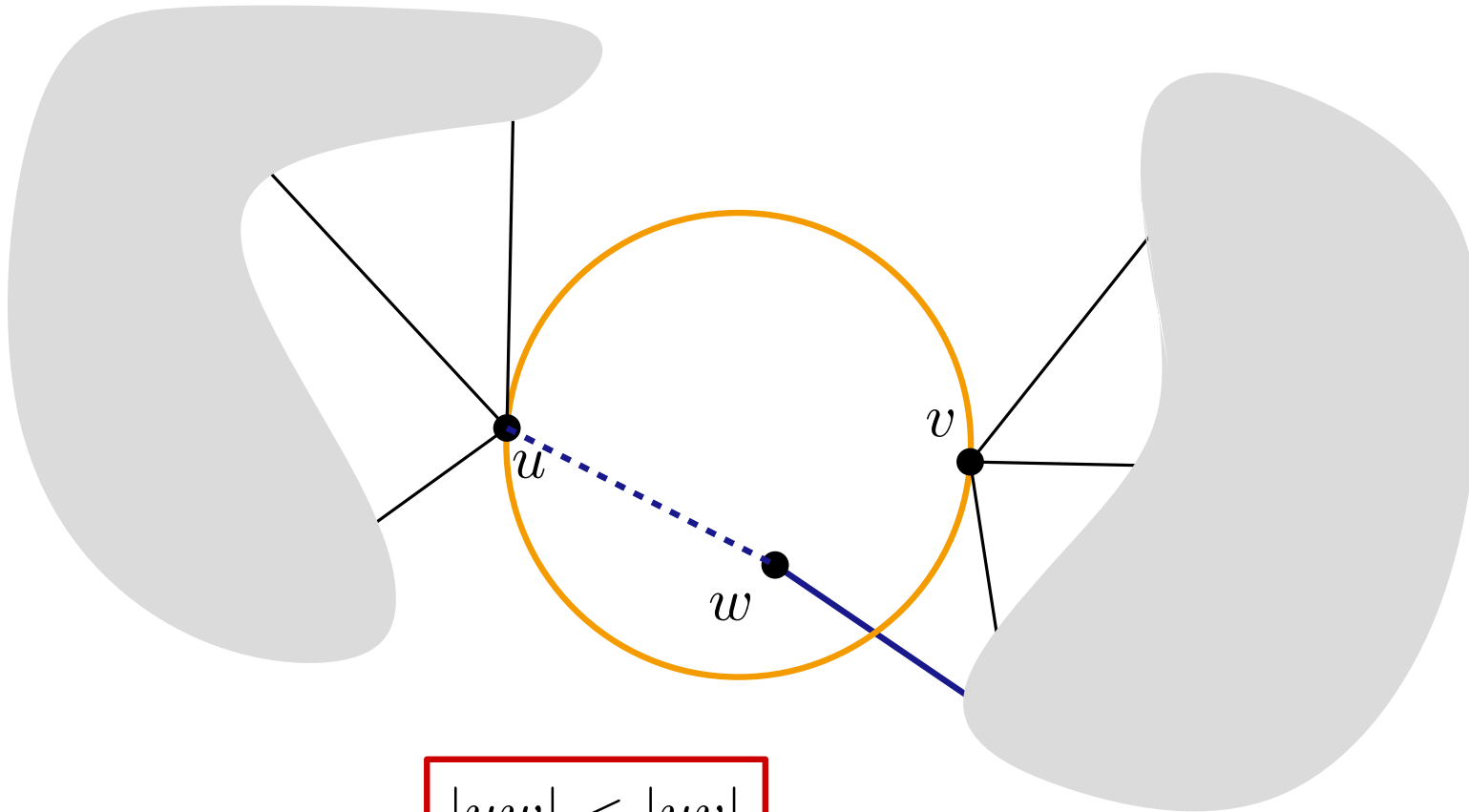
Kante pq ist in $\mathcal{DG}(P) \Leftrightarrow$ es gibt einen leeren Kreis $C_{p,q}$ durch p und q

Aufgabe 3



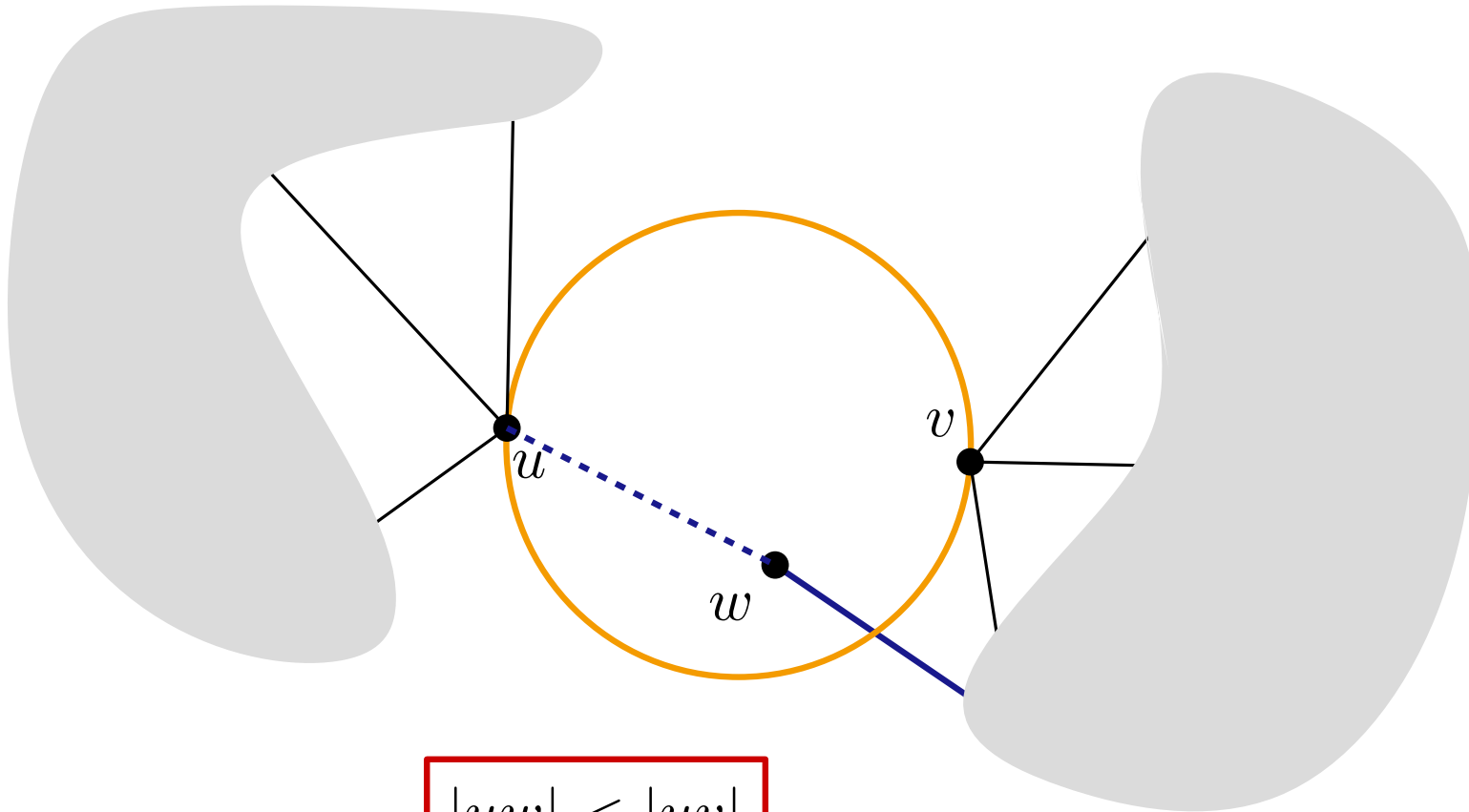
Kante pq ist in $\mathcal{DG}(P) \Leftrightarrow$ es gibt einen leeren Kreis $C_{p,q}$ durch p und q

Aufgabe 3



Kante pq ist in $\mathcal{DG}(P) \Leftrightarrow$ es gibt einen leeren Kreis $C_{p,q}$ durch p und q

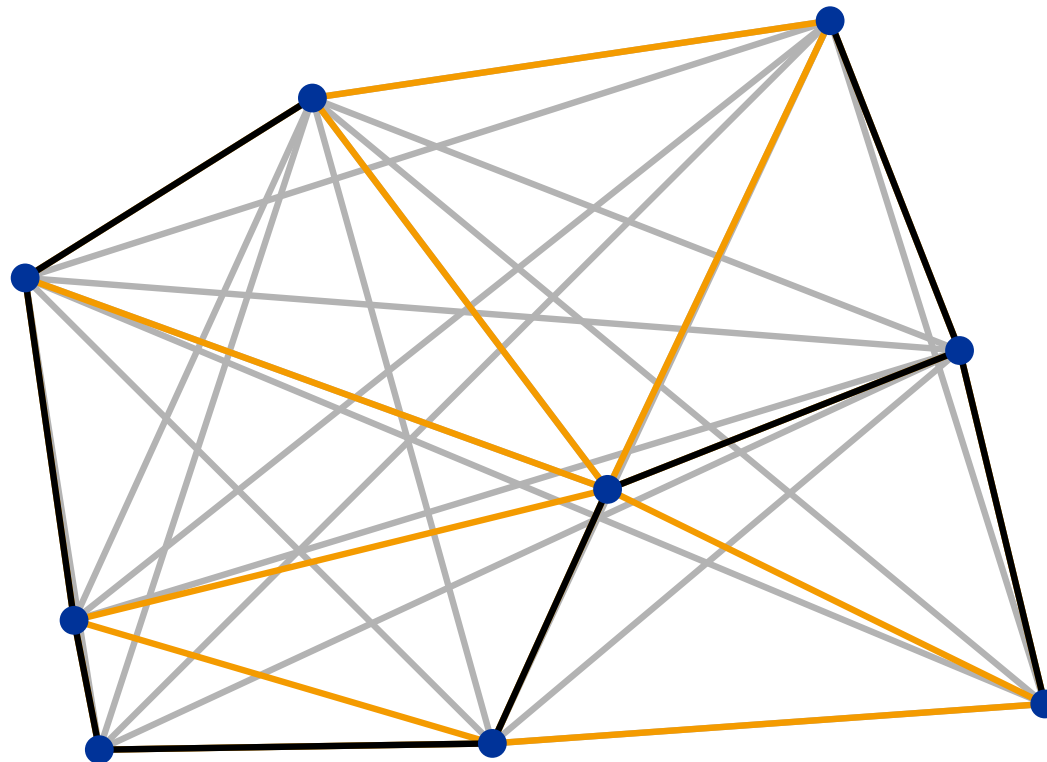
Aufgabe 3



Kante pq ist in $\mathcal{DG}(P) \Leftrightarrow$ es gibt einen leeren Kreis $C_{p,q}$ durch p und q

Aufgabe 3

Euklidischer Minimaler Spannbaum



Berechnung von EMST in $\mathcal{O}(n \log n)$?

Aufgabe 4

- Gabriel Graph: p, q mit Kante verbunden, wenn Kreis $C_{p,q}$ leer ist.

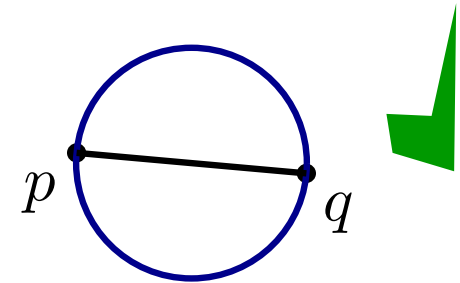
Aufgabe 4

- Gabriel Graph: p, q mit Kante verbunden, wenn Kreis $C_{p,q}$ leer ist.



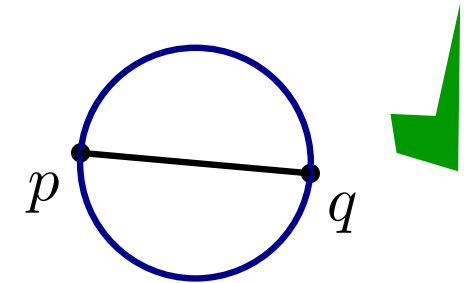
Aufgabe 4

- Gabriel Graph: p, q mit Kante verbunden, wenn Kreis $C_{p,q}$ leer ist.



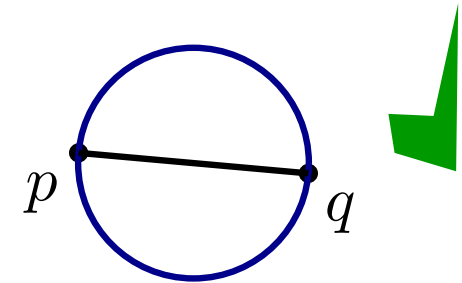
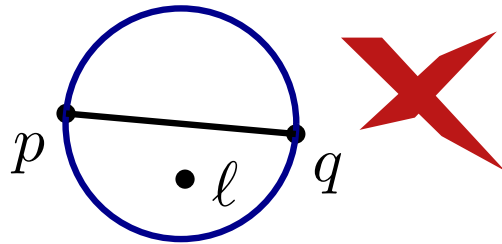
Aufgabe 4

- Gabriel Graph: p, q mit Kante verbunden, wenn Kreis $C_{p,q}$ leer ist.



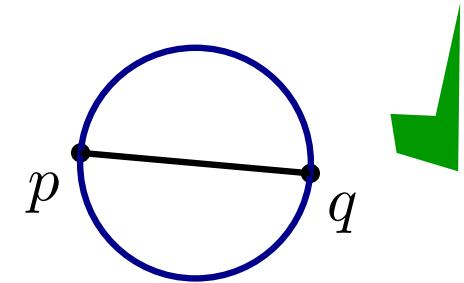
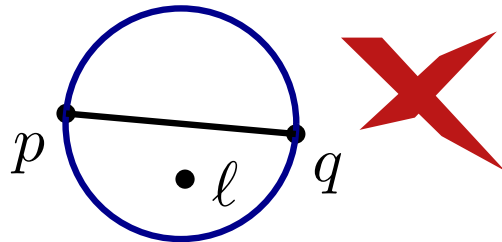
Aufgabe 4

- Gabriel Graph: p, q mit Kante verbunden, wenn Kreis $C_{p,q}$ leer ist.



Aufgabe 4

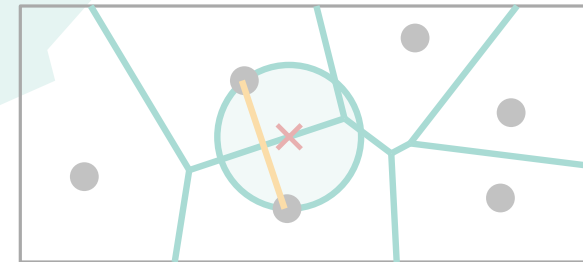
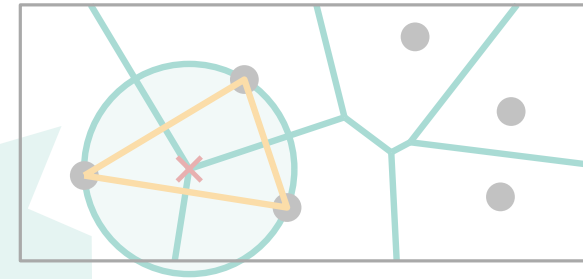
- Gabriel Graph: p, q mit Kante verbunden, wenn Kreis $C_{p,q}$ leer ist.



a) Zeige, dass Delaunay Triangulierung von P den Gabriel Graph von P enthält.

Satz über Voronoi-Diagramme:

- Ein Punkt q ist ein Voronoi-Knoten
 $\Leftrightarrow |C_P(q) \cap P| \geq 3$,
- der Bisektor $b(p_i, p_j)$ definiert eine Voronoi-Kante
 $\Leftrightarrow \exists q \in b(p_i, p_j)$ mit $C_P(q) \cap P = \{p_i, p_j\}$.



Satz 4: Sei P eine Menge von Punkten.

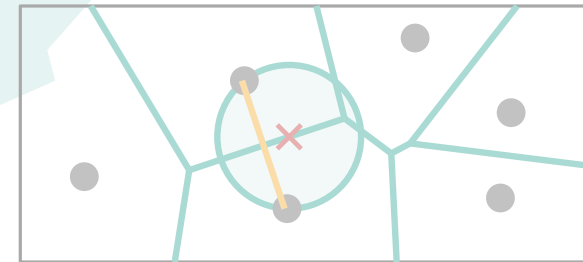
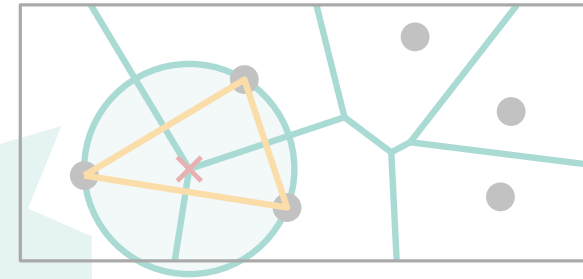
- Punkte p, q, r sind Knoten der gleichen Facette in $\mathcal{DG}(P) \Leftrightarrow$ Kreis durch p, q, r ist leer
- Kante pq ist in $\mathcal{DG}(P)$
 \Leftrightarrow es gibt einen leeren Kreis $C_{p,q}$ durch p und q

Satz 5: Sei P Punktmenge und \mathcal{T} eine Triangulierung von P .

- \mathcal{T} ist Delaunay-Triangulierung
 \Leftrightarrow Umkreis jedes Dreiecks ist im Inneren leer.

Satz über Voronoi-Diagramme:

- Ein Punkt q ist ein Voronoi-Knoten
 $\Leftrightarrow |C_P(q) \cap P| \geq 3$,
- der Bisektor $b(p_i, p_j)$ definiert eine Voronoi-Kante
 $\Leftrightarrow \exists q \in b(p_i, p_j)$ mit $C_P(q) \cap P = \{p_i, p_j\}$.



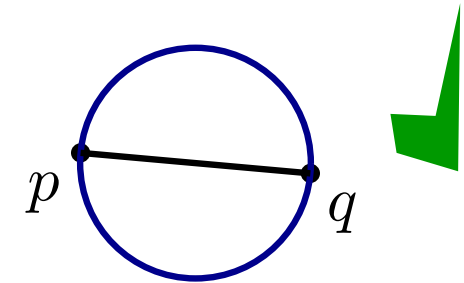
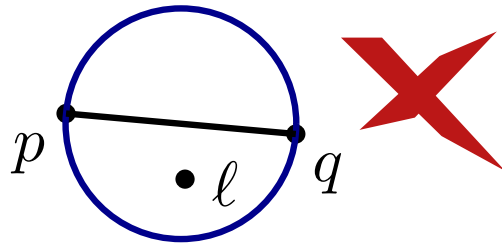
Satz 4: Sei P eine Menge von Punkten.

- Punkte p, q, r sind Knoten der gleichen Facette in $\mathcal{DG}(P) \Leftrightarrow$ Kreis durch p, q, r ist leer
- Kante pq ist in $\mathcal{DG}(P)$
 \Leftrightarrow es gibt einen leeren Kreis $C_{p,q}$ durch p und q

Satz 5: Sei P Punktmenge und \mathcal{T} eine Triangulierung von P . \mathcal{T} ist Delaunay-Triangulierung \Leftrightarrow Umkreis jedes Dreiecks ist im Inneren leer.

Aufgabe 4

- Gabriel Graph: p, q mit Kante verbunden, wenn Kreis $C_{p,q}$ leer ist.

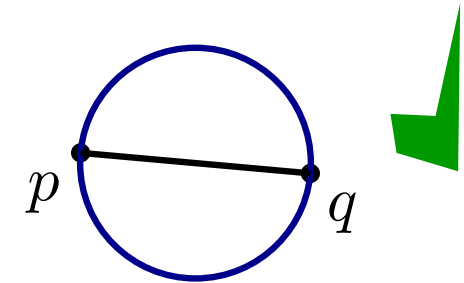
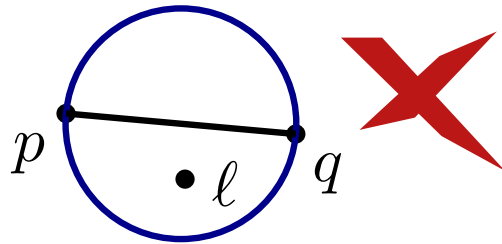


a) Zeige, dass Delaunay Triangulierung von P den Gabriel Graph von P enthält.

Kante pq ist in $\mathcal{DG}(P) \Leftrightarrow$ es gibt einen leeren Kreis $C_{p,q}$ durch p und q

Aufgabe 4

- Gabriel Graph: p, q mit Kante verbunden, wenn Kreis $C_{p,q}$ leer ist.



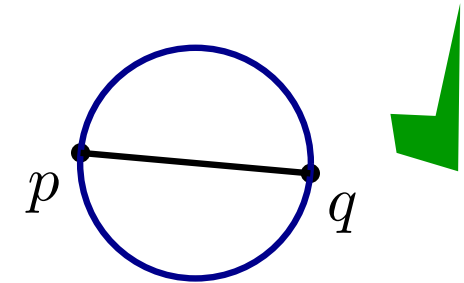
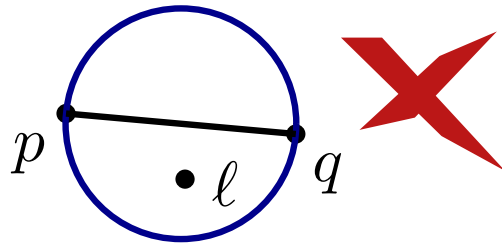
a) Zeige, dass Delaunay Triangulierung von P den Gabriel Graph von P enthält.

b) Zeige, dass p und q genau dann im Gabriel-Graph von P adjazent sind, wenn die Delaunay Kante zwischen p und q die zu ihr duale Voronoi-Kante schneidet.

Kante pq ist in $\mathcal{DG}(P) \Leftrightarrow$ es gibt einen leeren Kreis $C_{p,q}$ durch p und q

Aufgabe 4

- Gabriel Graph: p, q mit Kante verbunden, wenn Kreis $C_{p,q}$ leer ist.

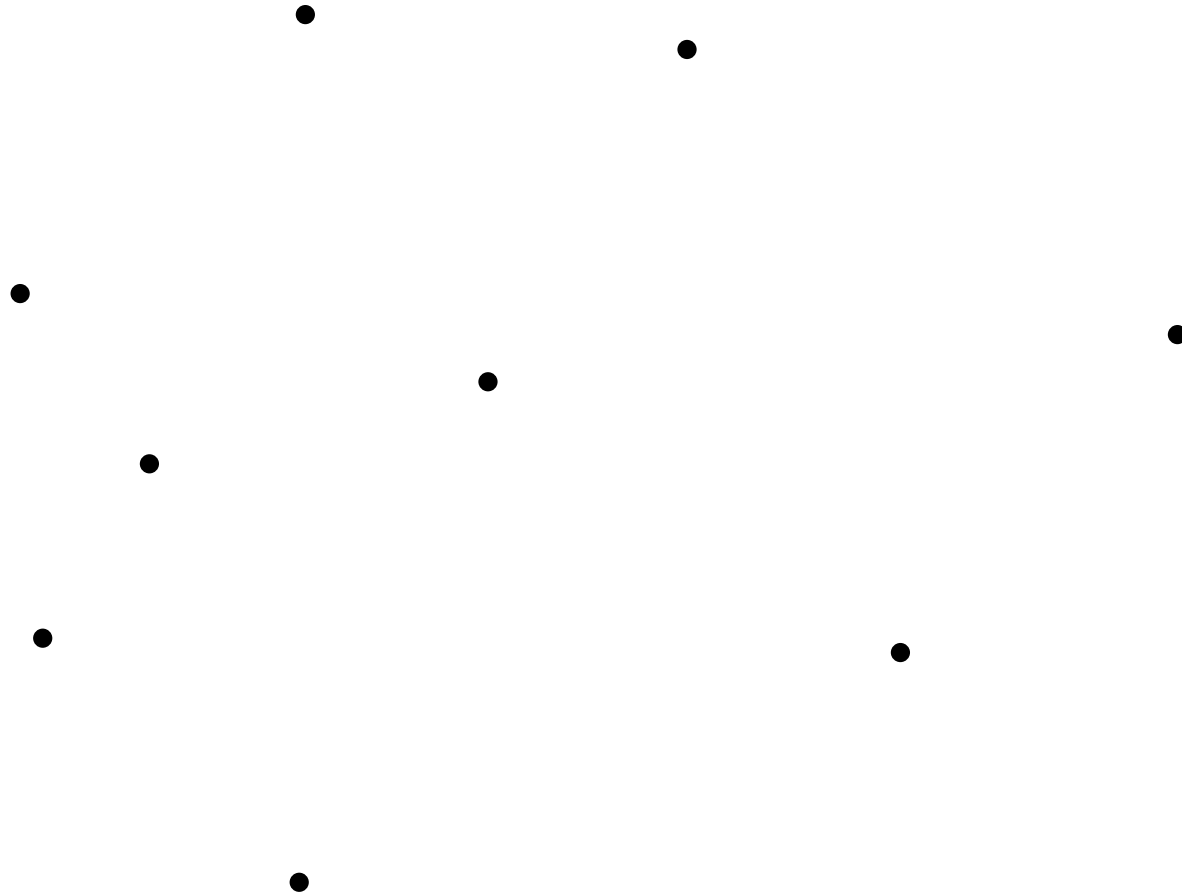


a) Zeige, dass Delaunay Triangulierung von P den Gabriel Graph von P enthält.

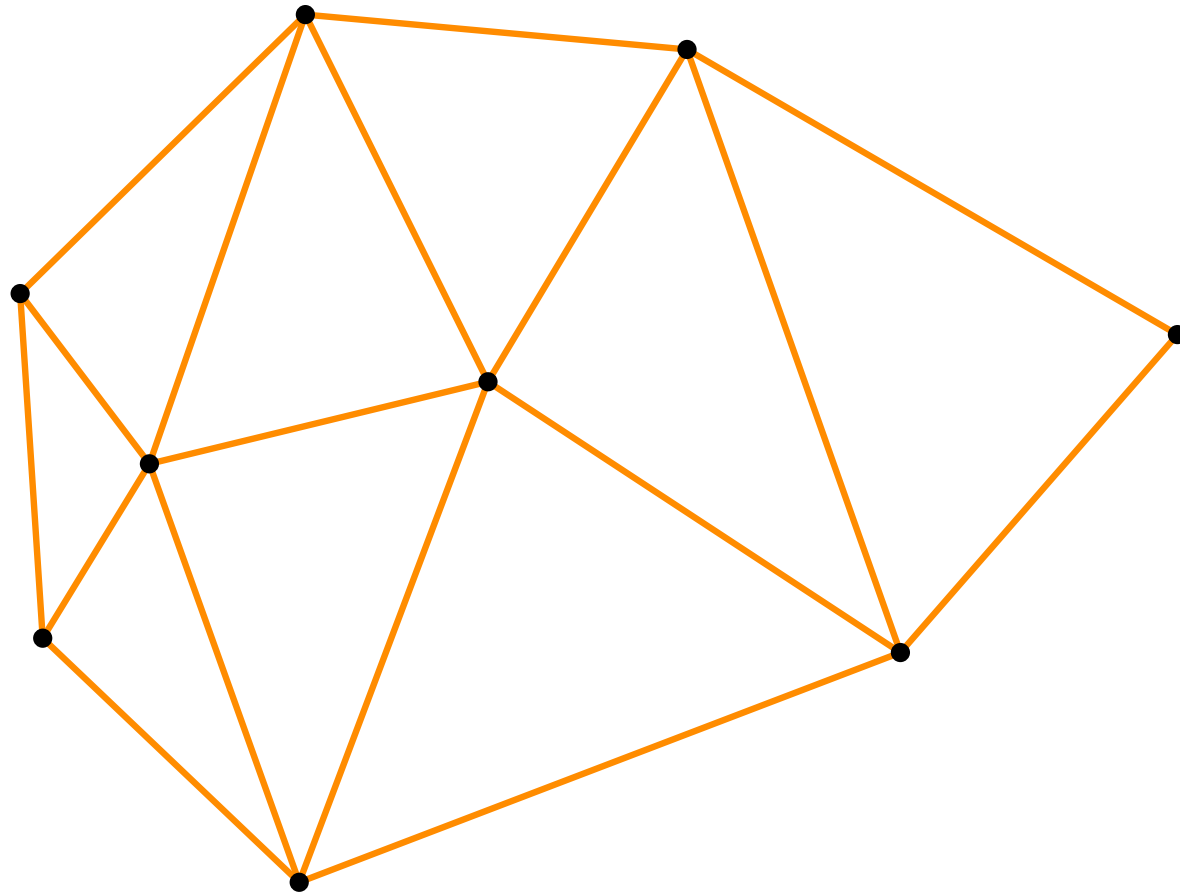
b) Zeige, dass p und q genau dann im Gabriel-Graph von P adjazent sind, wenn die Delaunay Kante zwischen p und q die zu ihr duale Voronoi-Kante schneidet.

Kante pq ist in $\mathcal{DG}(P) \Leftrightarrow$ es gibt einen leeren Kreis $C_{p,q}$ durch p und q

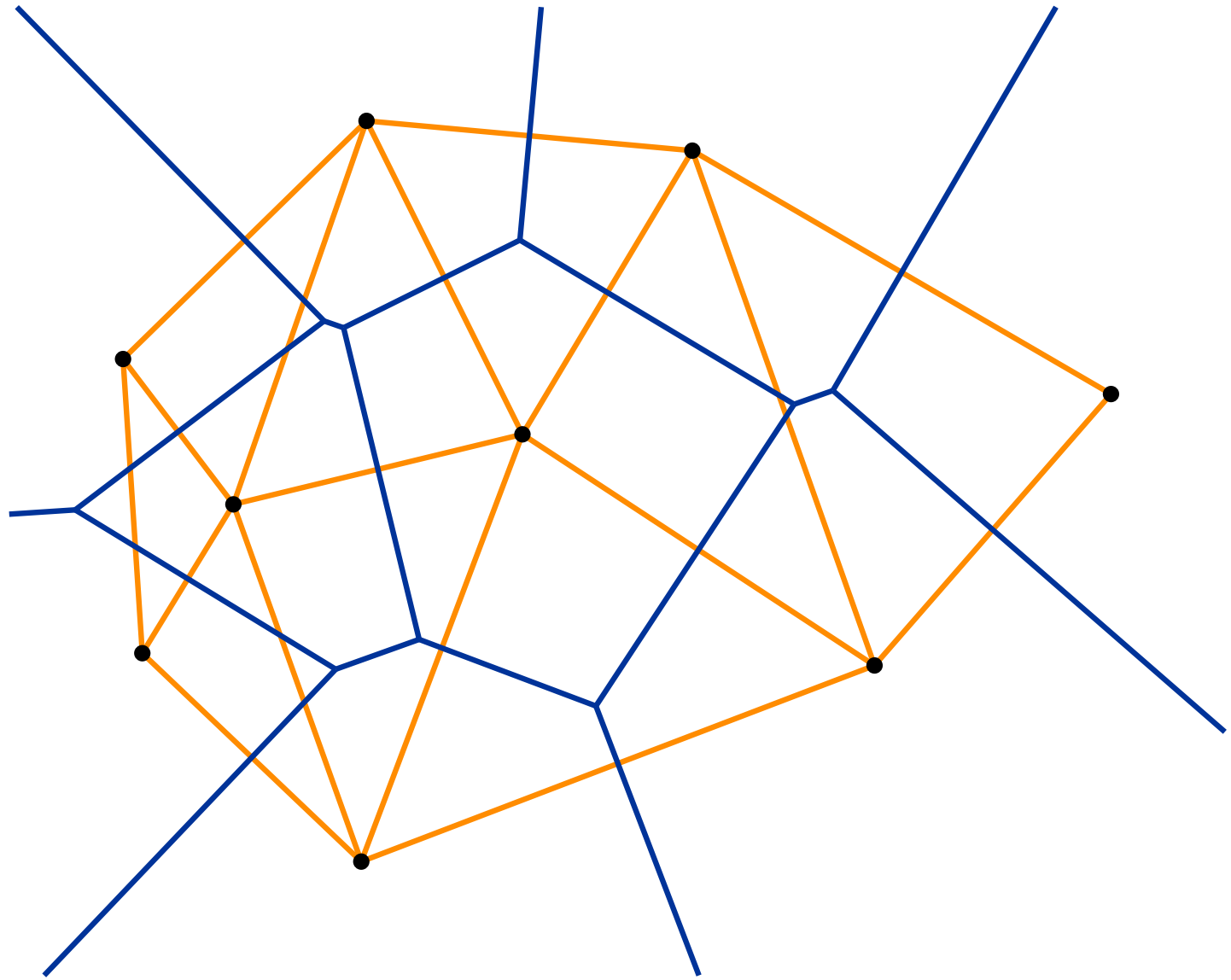
Aufgabe 4



Aufgabe 4

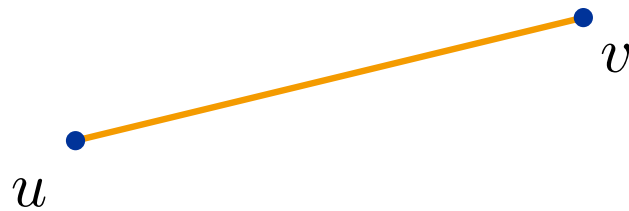


Aufgabe 4



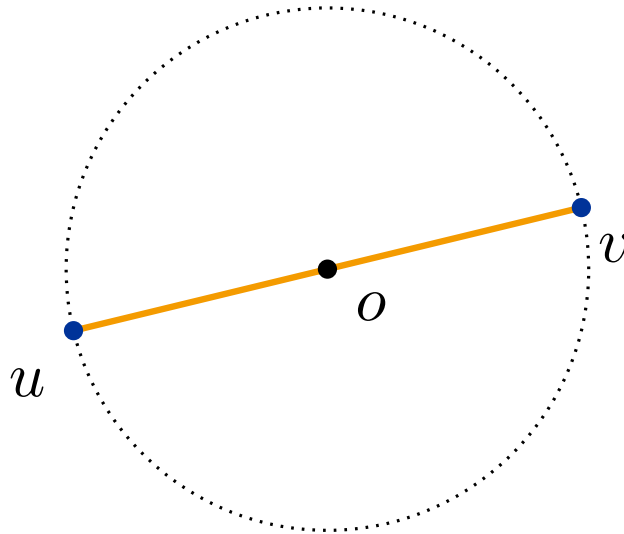
Aufgabe 4

- uv im Gabriel Graph



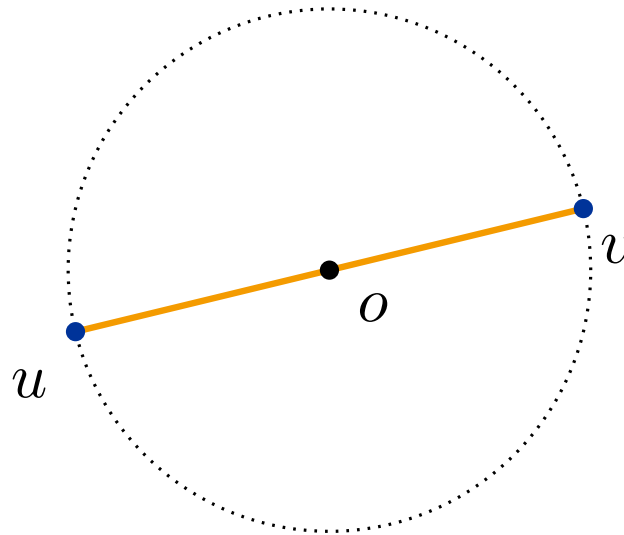
Aufgabe 4

- uv im Gabriel Graph



Aufgabe 4

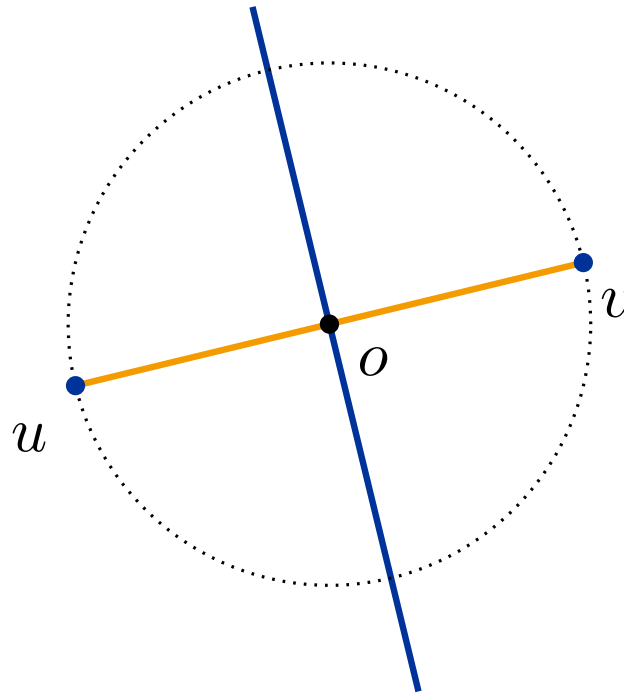
- uv im Gabriel Graph



- o näher zu u, v als zu den anderen Punkten aus P

Aufgabe 4

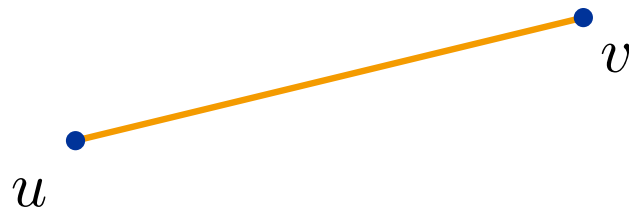
- uv im Gabriel Graph



- o näher zu u, v als zu den anderen Punkten aus P
 $\Rightarrow o$ liegt auf Voronoi-Kante welche Voronoi-Zellen von q und p begrenzt

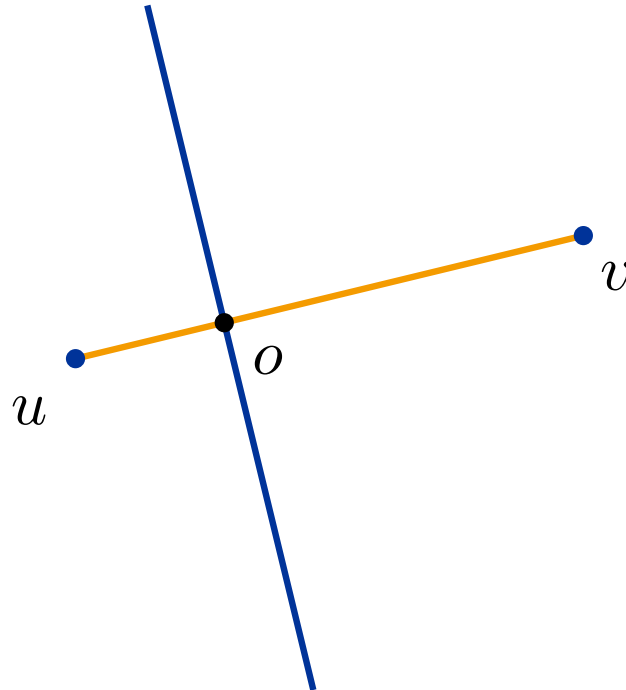
Aufgabe 4

- uv schneidet duale Voronoi-Kante



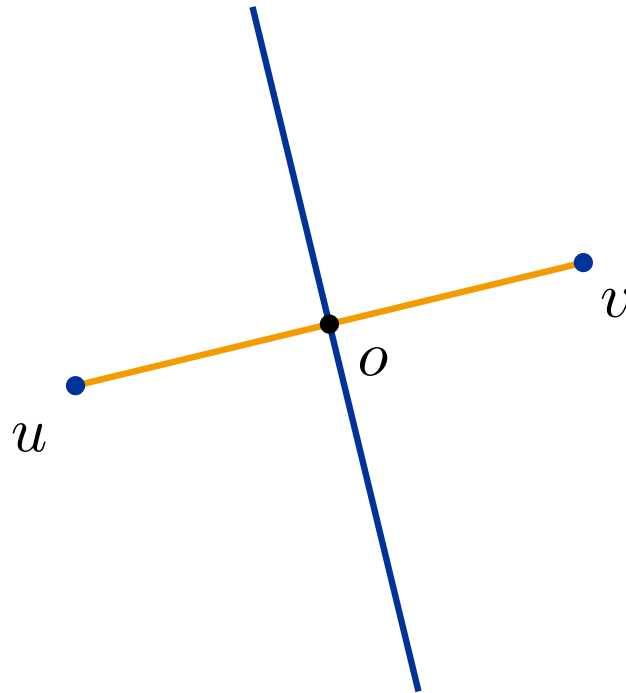
Aufgabe 4

- uv schneidet duale Voronoi-Kante



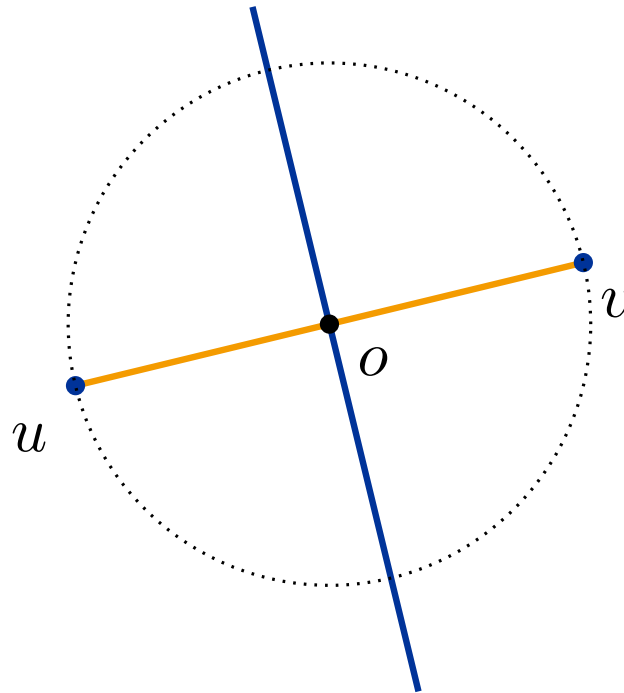
Aufgabe 4

- uv schneidet duale Voronoi-Kante



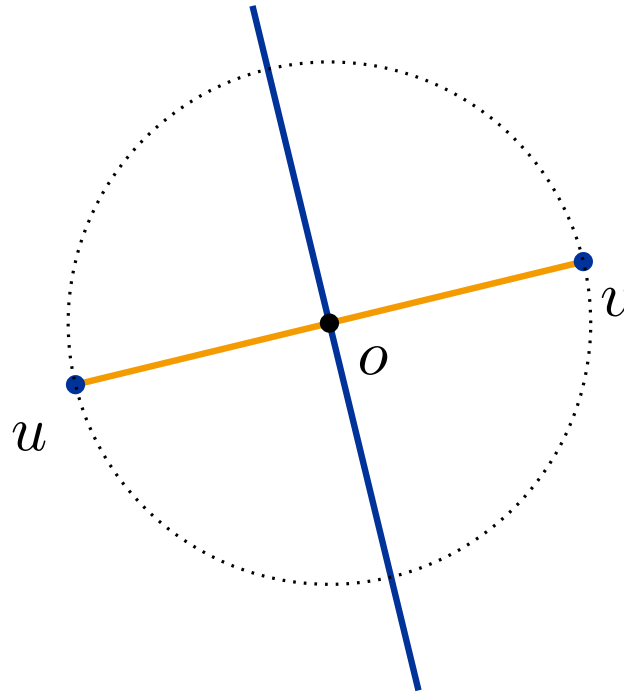
Aufgabe 4

- uv schneidet duale Voronoi-Kante



Aufgabe 4

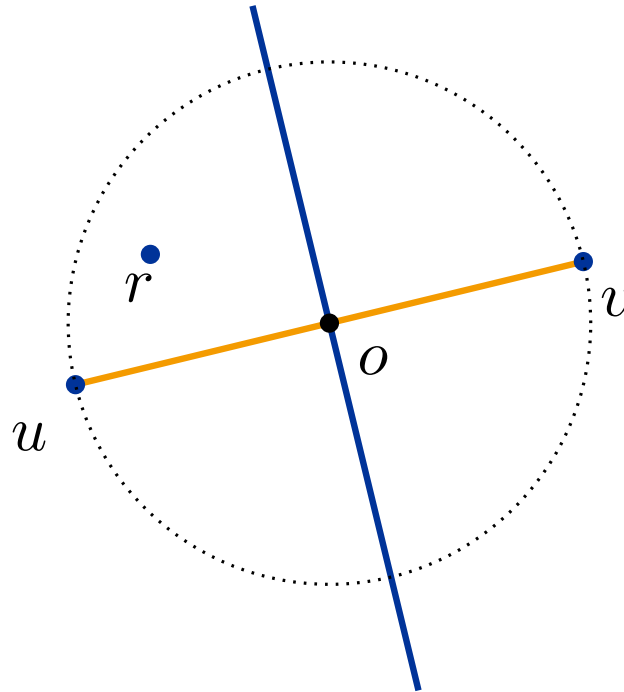
- uv schneidet duale Voronoi-Kante



- Angenommen Punkt r in C .

Aufgabe 4

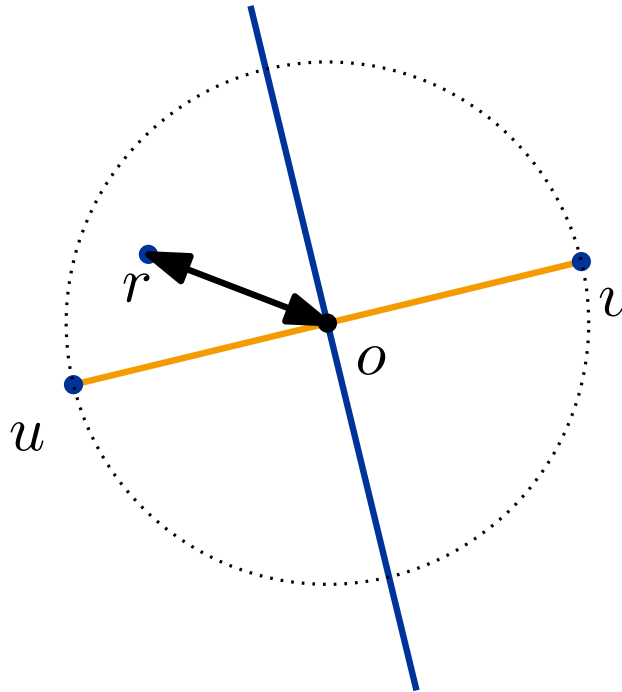
- uv schneidet duale Voronoi-Kante



- Angenommen Punkt r in C .

Aufgabe 4

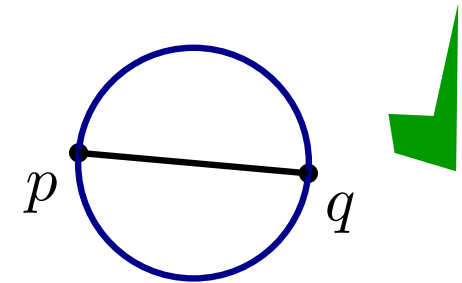
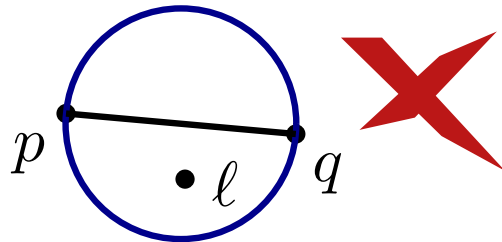
- uv schneidet duale Voronoi-Kante



- Angenommen Punkt r in C .
 - ⇒ Distanz zw. o und r kleiner als $|ou|$ ($|ov|$)
 - ⇒ Widerspruch zur Annahme, dass o auf Voronoi-Kante

Aufgabe 4

- Gabriel Graph: p, q mit Kante verbunden, wenn Kreis $C_{p,q}$ leer ist.

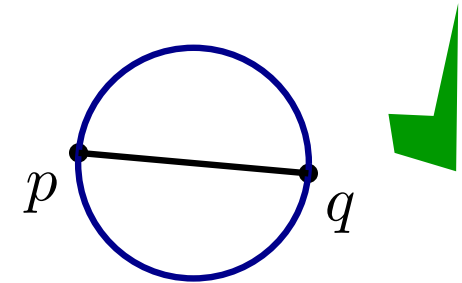
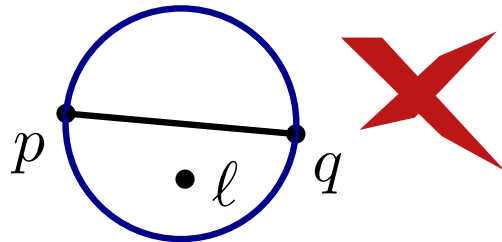


a) Zeige, dass Delaunay Triangulierung von P den Gabriel Graph von P enthält.

b) Zeige, dass p und q genau dann im Gabriel-Graph von P adjazent sind, wenn die Delaunay Kante zwischen p und q die zu ihr duale Voronoi-Kante schneidet.

Aufgabe 4

- Gabriel Graph: p, q mit Kante verbunden, wenn Kreis $C_{p,q}$ leer ist.



a) Zeige, dass Delaunay Triangulierung von P den Gabriel Graph von P enthält.

b) Zeige, dass p und q genau dann im Gabriel-Graph von P adjazent sind, wenn die Delaunay Kante zwischen p und q die zu ihr duale Voronoi-Kante schneidet.

c) $\mathcal{O}(n \log n)$ Algorithmus der Gabriel-Graph berechnet?

Das war's!

Achtung!

Nächster Termin:
Donnertag, 30.06, 09:45 Uhr
Raum 131, Gebäude 50.34