Übung Algorithmische Geometrie
Point Location + Voronoi-Diagramme

LEHRSTUHL FÜR ALGORITHMIK I · INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK · FAKULTÄT FÜR INFORMATIK

Andreas Gemsa
09.06.2011

Übersicht

Übungsblatt 8 - Point Location

Übungsblatt 9 - Voronoi-Diagramme

Aufgabe 1

Problem:

Bestimme ob Punkt $q \in \mathbb{R}^2$ im Inneren eines Polygons P liegt.

Algorithmus:

1. Starte in q eine horizontal verlaufende Halbgerade ϱ.
2. Zähle Schnitte von Polygonkanten mit ϱ.
   - Anzahl Schnitte gerade: q nicht im Inneren von P
   - Anzahl Schnitte ungerade: q im Inneren von P

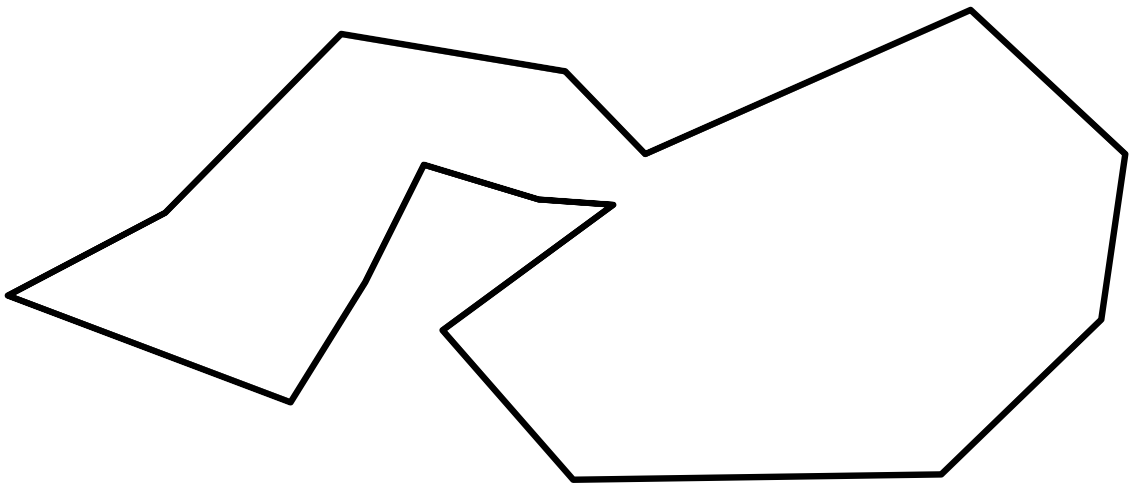
Aufgabe 1

Problem:

Bestimme ob Punkt $q \in \mathbb{R}^2$ im Inneren eines Polygons P liegt.

Algorithmus:

1. Starte in q eine horizontal verlaufende Halbgerade ϱ.
2. Zähle Schnitte von Polygonkanten mit ϱ.
   - Anzahl Schnitte gerade: q nicht im Inneren von P
   - Anzahl Schnitte ungerade: q im Inneren von P



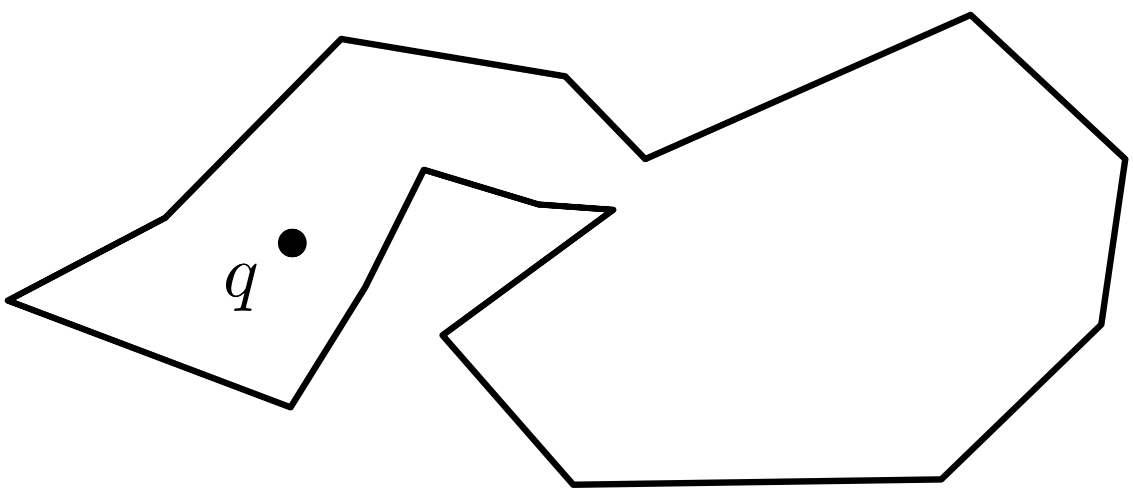
Aufgabe 1

Problem:

Bestimme ob Punkt $q \in \mathbb{R}^2$ im Inneren eines Polygons P liegt.

Algorithmus:

1. Starte in q eine horizontal verlaufende Halbgerade ϱ.
2. Zähle Schnitte von Polygonkanten mit ϱ.
   - Anzahl Schnitte gerade: q nicht im Inneren von P
   - Anzahl Schnitte ungerade: q im Inneren von P



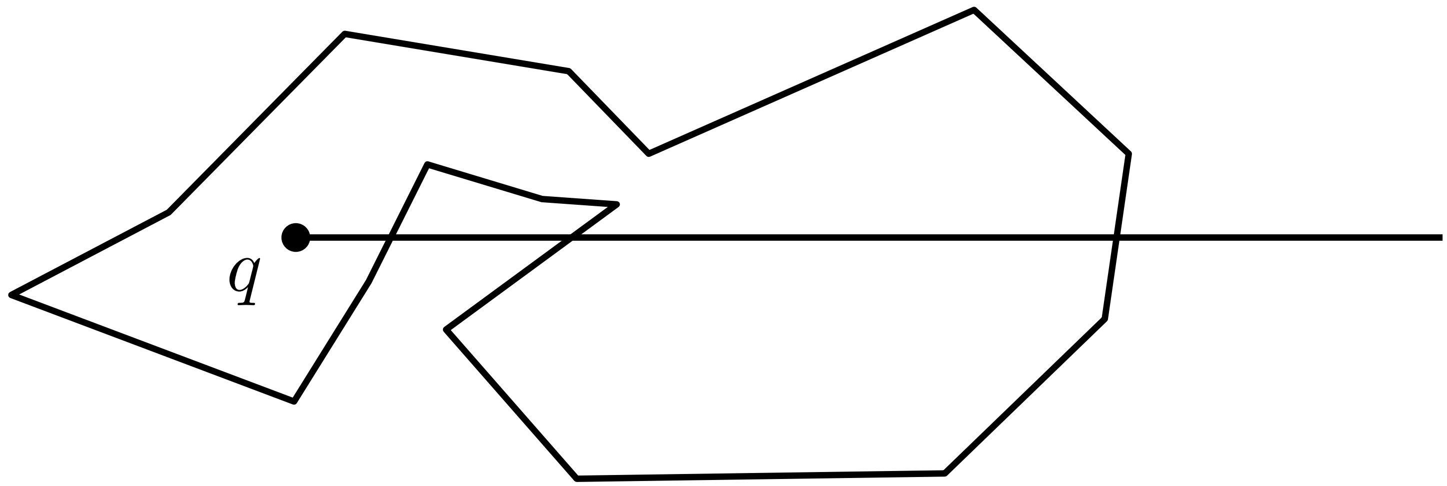
Aufgabe 1

Problem:

Bestimme ob Punkt $q \in \mathbb{R}^2$ im Inneren eines Polygons P liegt.

Algorithmus:

1. Starte in q eine horizontal verlaufende Halbgerade ϱ.
2. Zähle Schnitte von Polygonkanten mit ϱ.
   - Anzahl Schnitte gerade: q nicht im Inneren von P
   - Anzahl Schnitte ungerade: q im Inneren von P



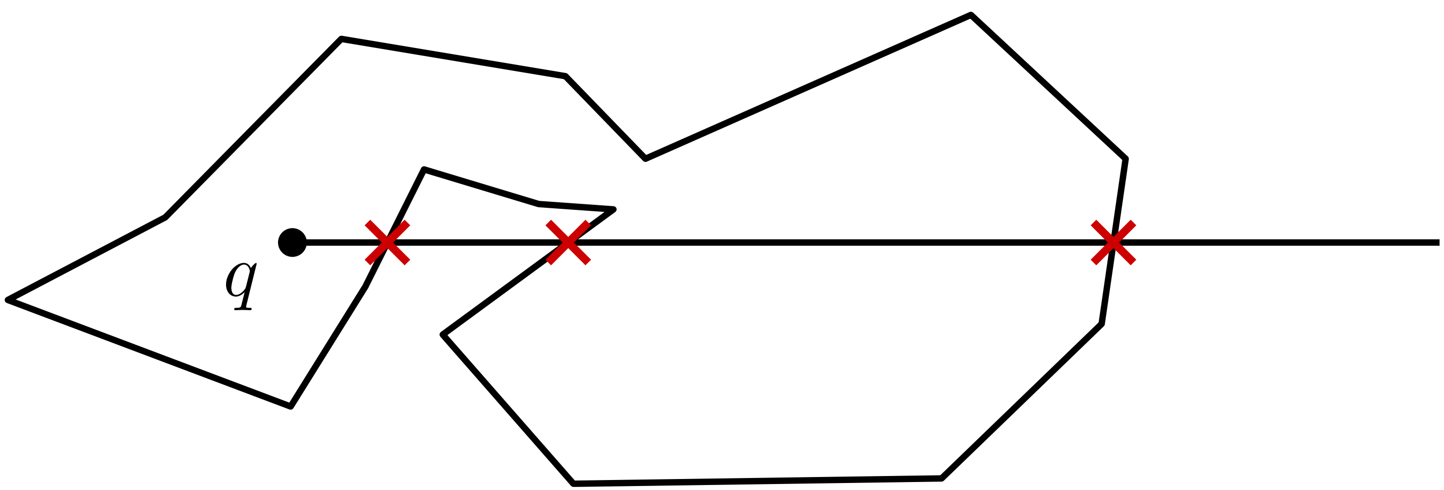
Aufgabe 1

Problem:

Bestimme ob Punkt $q \in \mathbb{R}^2$ im Inneren eines Polygons P liegt.

Algorithmus:

1. Starte in q eine horizontal verlaufende Halbgerade ϱ.
2. Zähle Schnitte von Polygonkanten mit ϱ.
   - Anzahl Schnitte gerade: q nicht im Inneren von P
   - Anzahl Schnitte ungerade: q im Inneren von P



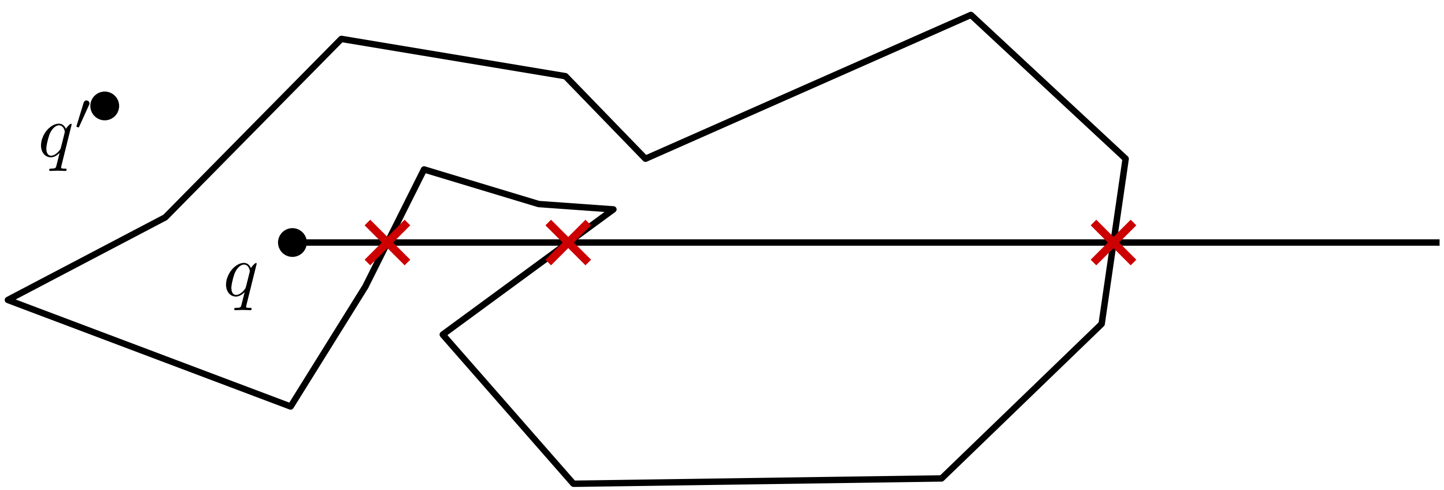
Aufgabe 1

Problem:

Bestimme ob Punkt $q \in \mathbb{R}^2$ im Inneren eines Polygons P liegt.

Algorithmus:

1. Starte in q eine horizontal verlaufende Halbgerade ϱ.
2. Zähle Schnitte von Polygonkanten mit ϱ.
   - Anzahl Schnitte gerade: q nicht im Inneren von P
   - Anzahl Schnitte ungerade: q im Inneren von P



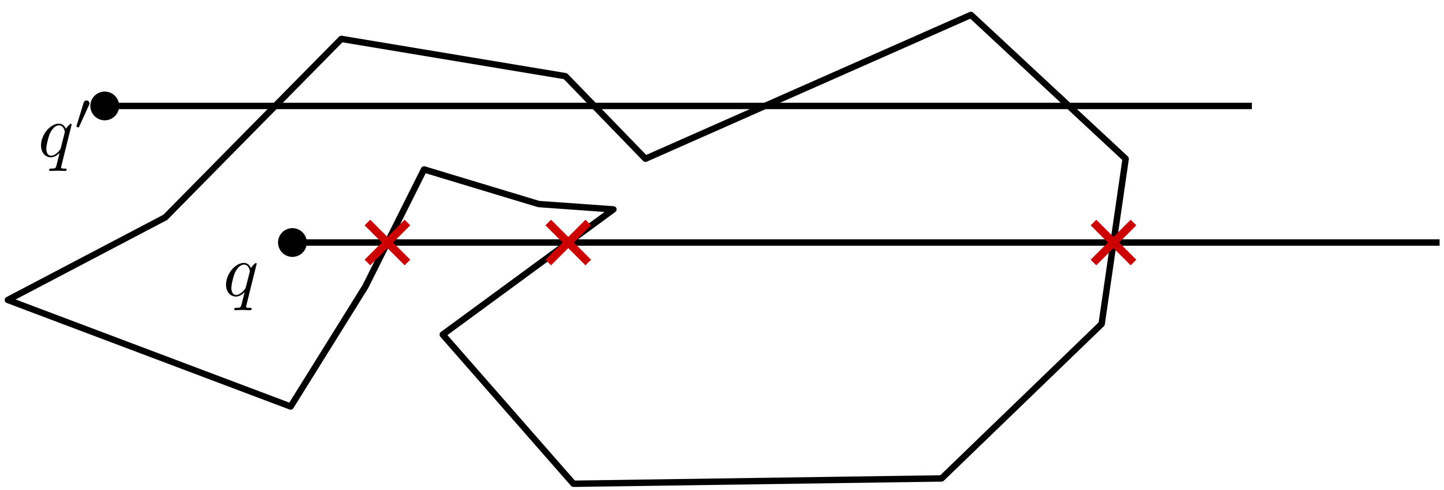
Aufgabe 1

Problem:

Bestimme ob Punkt $q \in \mathbb{R}^2$ im Inneren eines Polygons P liegt.

Algorithmus:

1. Starte in q eine horizontal verlaufende Halbgerade ϱ.
2. Zähle Schnitte von Polygonkanten mit ϱ.
   - Anzahl Schnitte gerade: q nicht im Inneren von P
   - Anzahl Schnitte ungerade: q im Inneren von P



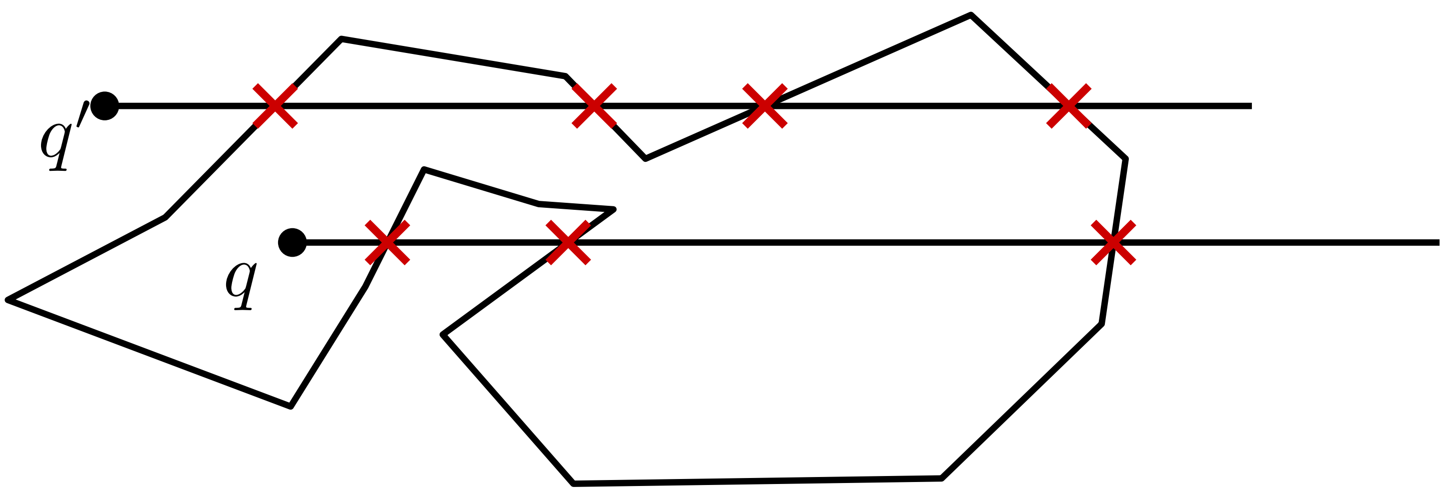
Aufgabe 1

Problem:

Bestimme ob Punkt $q \in \mathbb{R}^2$ im Inneren eines Polygons P liegt.

Algorithmus:

1. Starte in q eine horizontal verlaufende Halbgerade ϱ.
2. Zähle Schnitte von Polygonkanten mit ϱ.
   - Anzahl Schnitte gerade: q nicht im Inneren von P
   - Anzahl Schnitte ungerade: q im Inneren von P



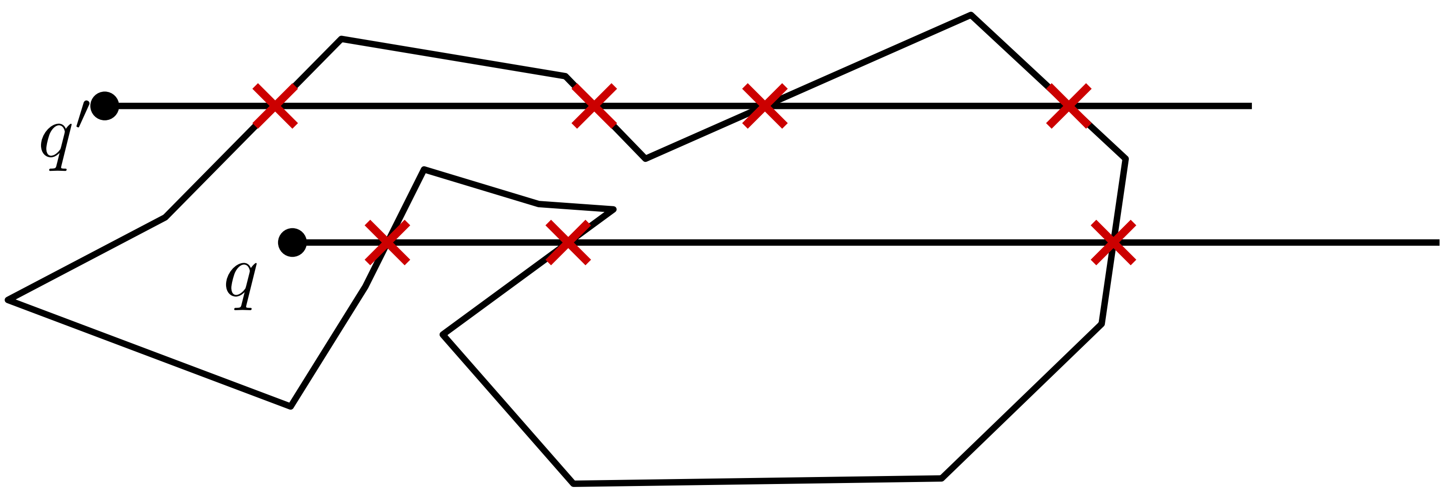
Aufgabe 1

Problem:

Bestimme ob Punkt $q \in \mathbb{R}^2$ im Inneren eines Polygons P liegt.

Algorithmus:

1. Starte in q eine horizontal verlaufende Halbgerade ϱ.
2. Zähle Schnitte von Polygonkanten mit ϱ.
   - Anzahl Schnitte gerade: q nicht im Inneren von P
   - Anzahl Schnitte ungerade: q im Inneren von P



a) Korrektheit

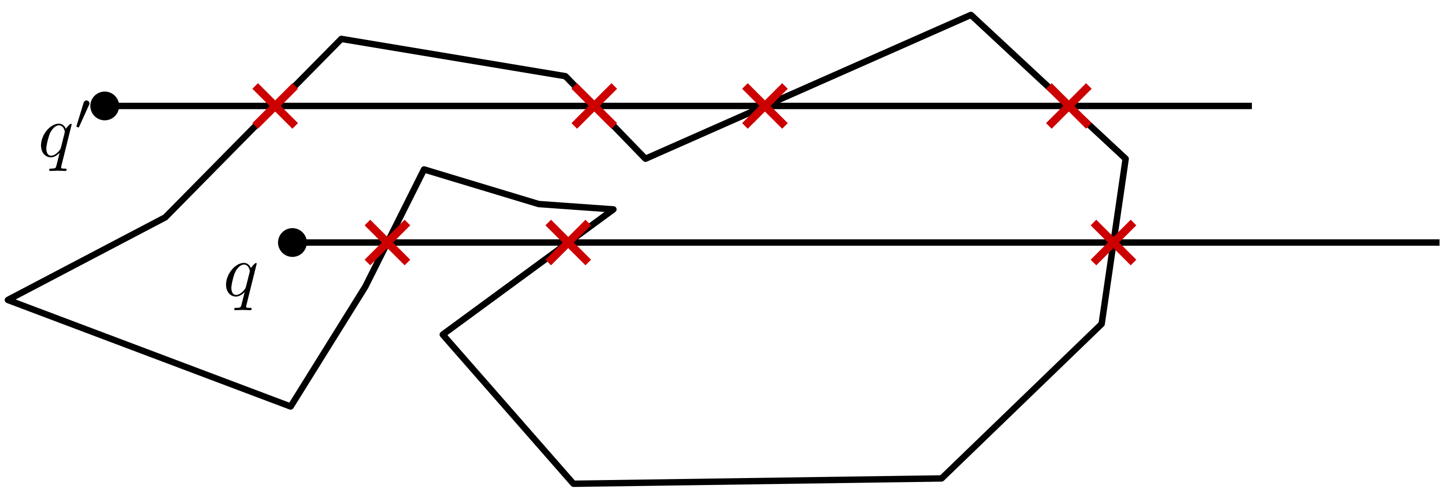
Aufgabe 1

Problem:

Bestimme ob Punkt $q \in \mathbb{R}^2$ im Inneren eines Polygons P liegt.

Algorithmus:

1. Starte in q eine horizontal verlaufende Halbgerade ϱ.
2. Zähle Schnitte von Polygonkanten mit ϱ.
    - Anzahl Schnitte gerade: q nicht im Inneren von P
    - Anzahl Schnitte ungerade: q im Inneren von P



b) **Degenerierte Fälle?**

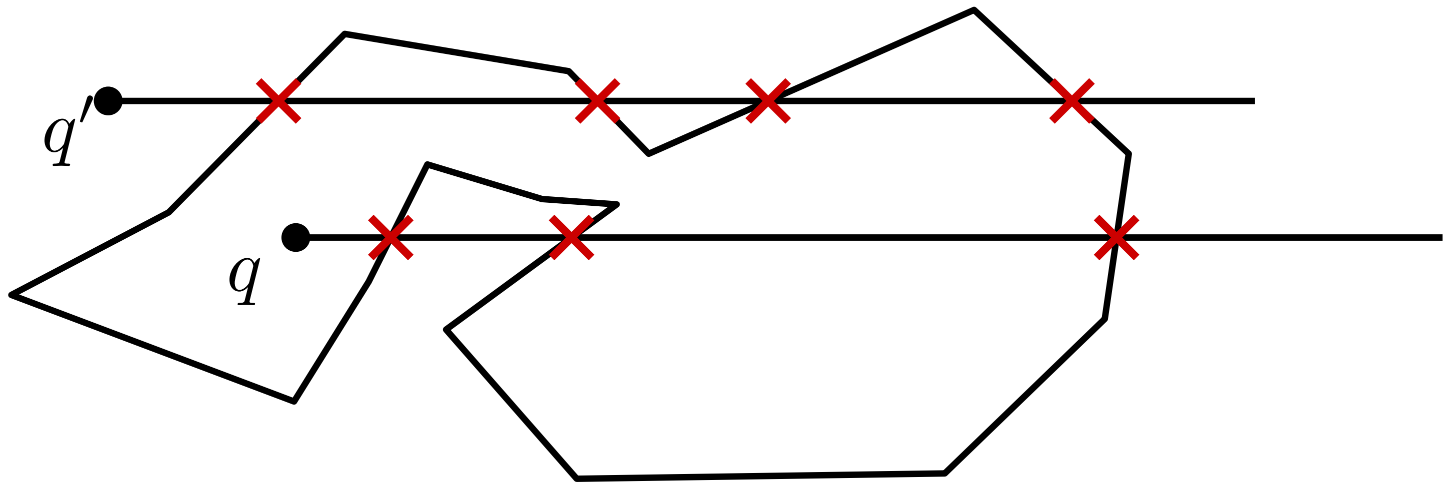
Aufgabe 1

Problem:

Bestimme ob Punkt $q \in \mathbb{R}^2$ im Inneren eines Polygons P liegt.

Algorithmus:

1. Starte in q eine horizontal verlaufende Halbgerade ϱ.
2. Zähle Schnitte von Polygonkanten mit ϱ.
   - Anzahl Schnitte gerade: q nicht im Inneren von P
   - Anzahl Schnitte ungerade: q im Inneren von P



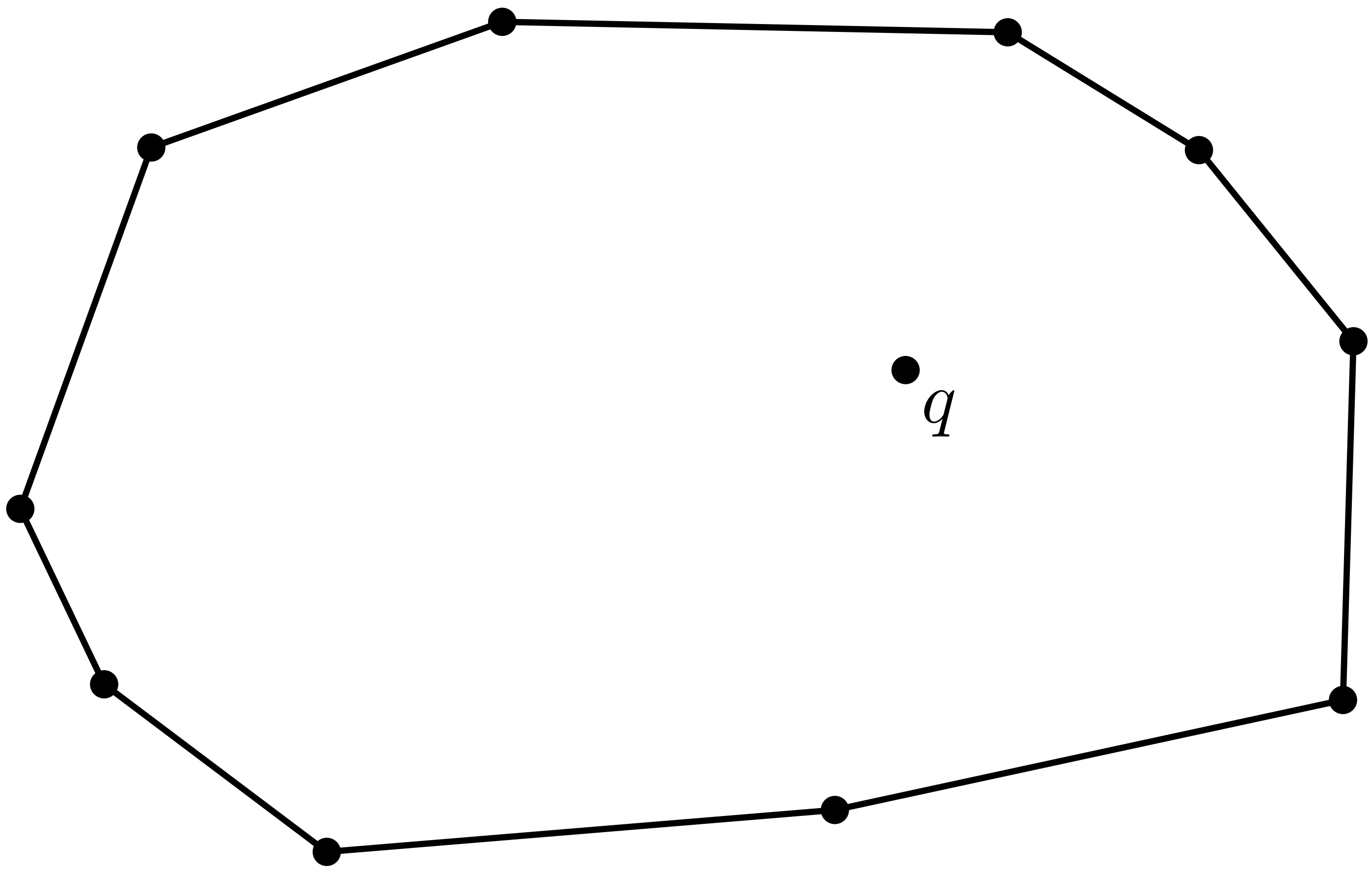
c) Laufzeit?

Aufgabe 2

Gegeben:

- Punkt q
- konvexes Polygon P bestehend aus n Punkten

a) Liegt q im Inneren von P? $\mathcal{O}(\log n)$

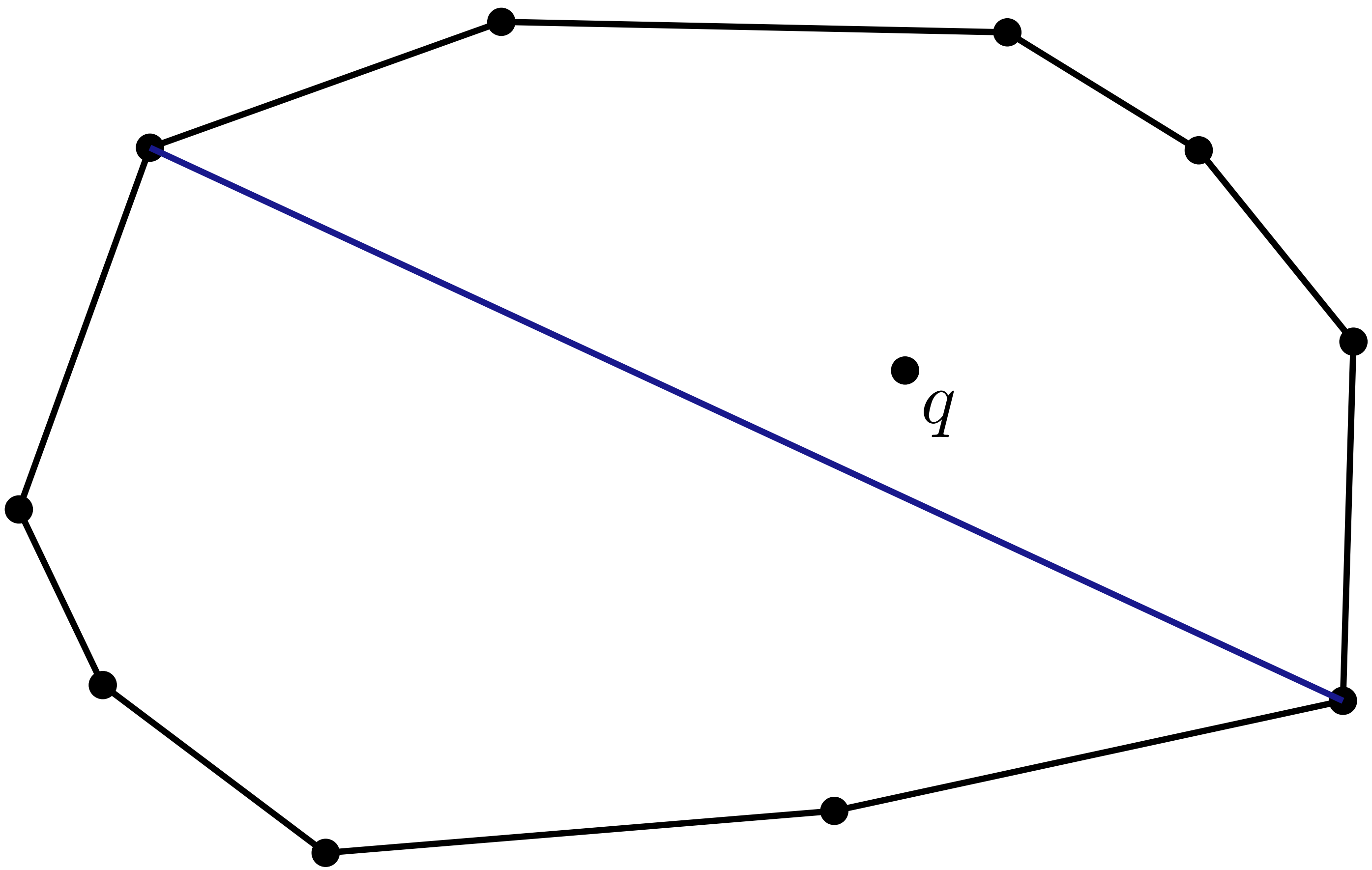


Aufgabe 2

Gegeben:

- Punkt q
- konvexes Polygon P bestehend aus n Punkten

a) Liegt q im Inneren von P? $\mathcal{O}(\log n)$

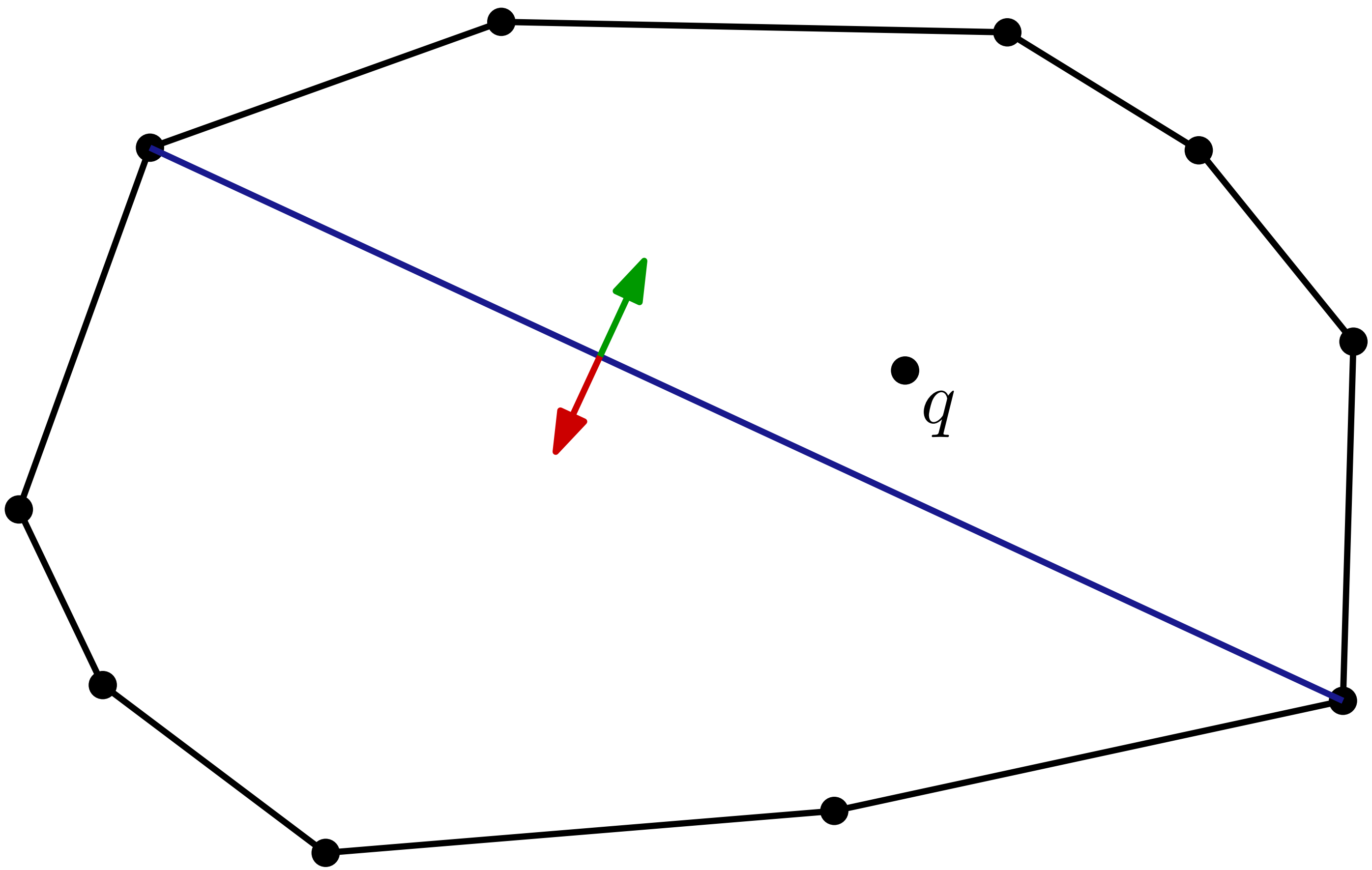


Aufgabe 2

Gegeben:

- Punkt q
- konvexes Polygon P bestehend aus n Punkten

a) Liegt q im Inneren von P? $\mathcal{O}(\log n)$

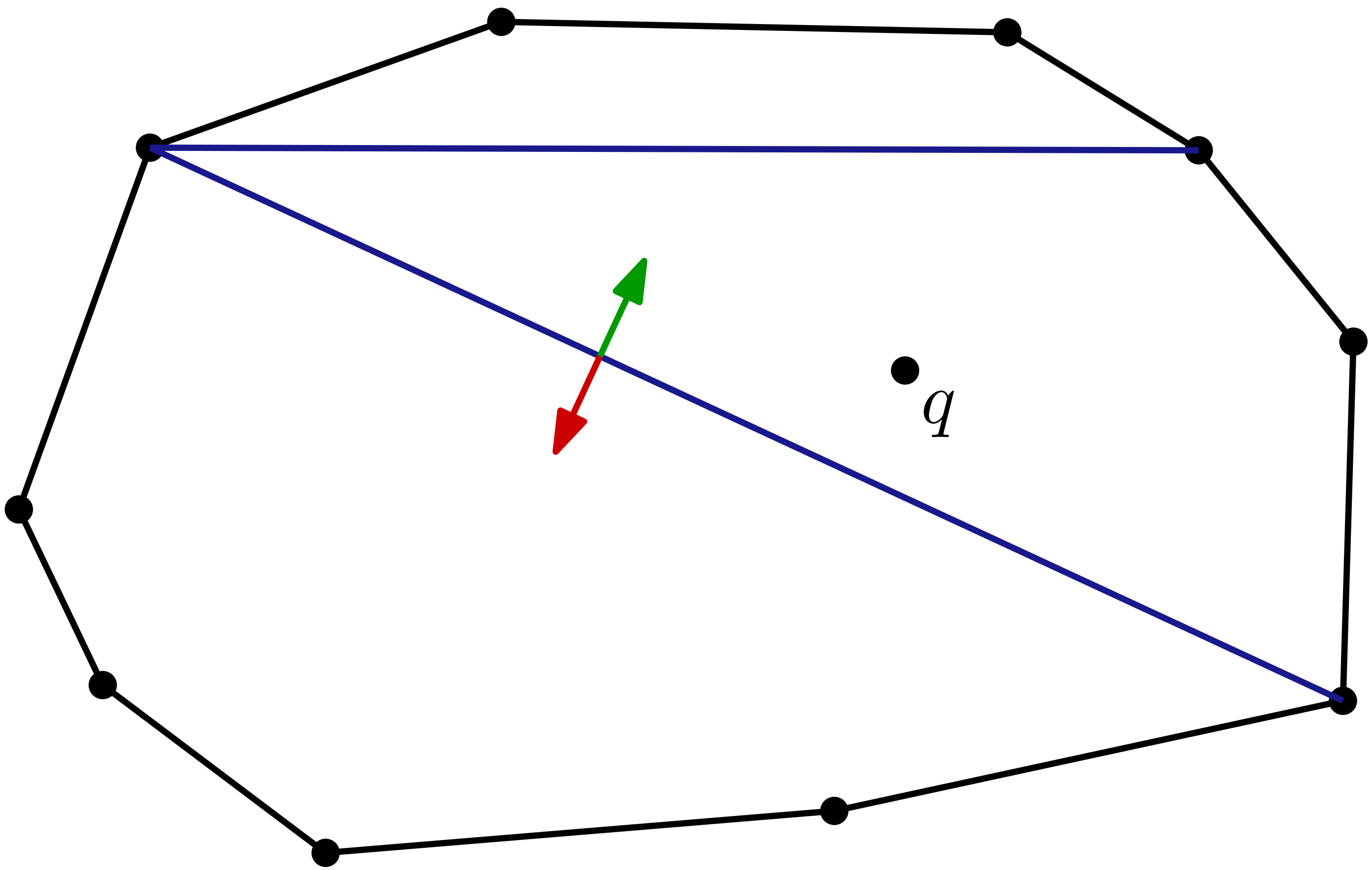


Aufgabe 2

Gegeben:

- Punkt q
- konvexes Polygon P bestehend aus n Punkten

a) Liegt q im Inneren von P? $\mathcal{O}(\log n)$

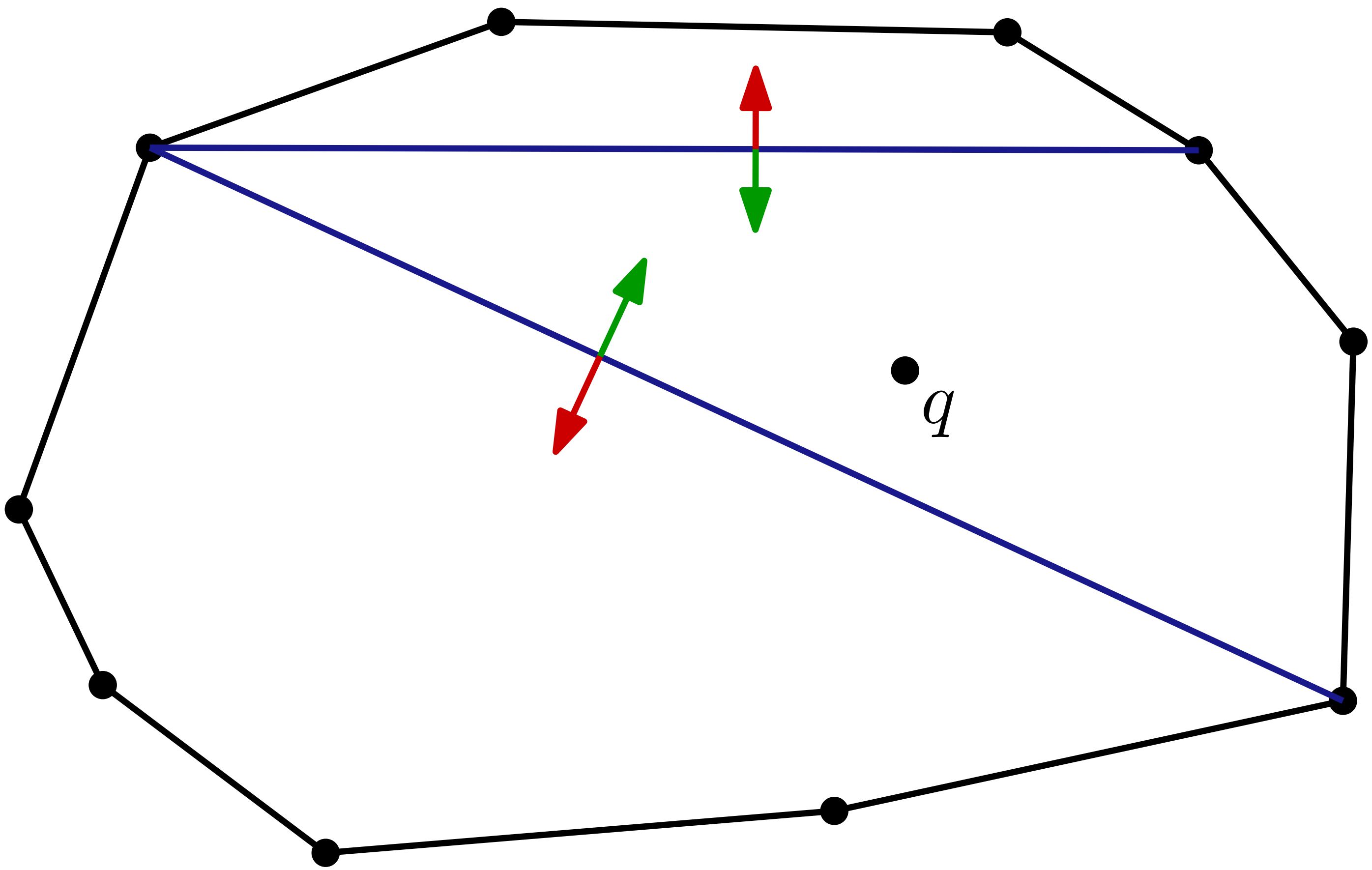


Aufgabe 2

Gegeben:

- Punkt q
- konvexes Polygon P bestehend aus n Punkten

a) Liegt q im Inneren von P? $\mathcal{O}(\log n)$

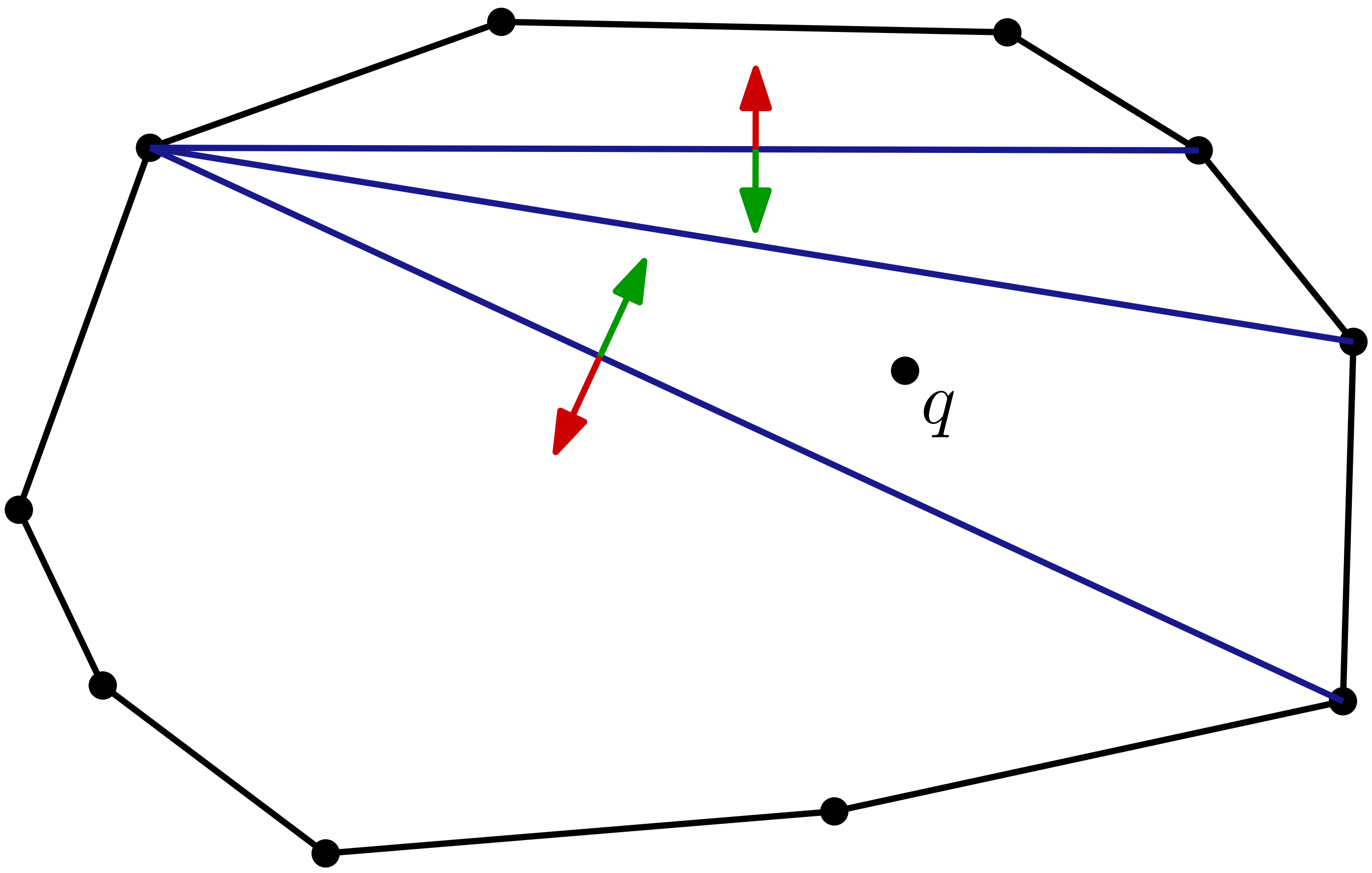


Aufgabe 2

Gegeben:

- Punkt q
- konvexes Polygon P bestehend aus n Punkten

a) Liegt q im Inneren von P? $\mathcal{O}(\log n)$

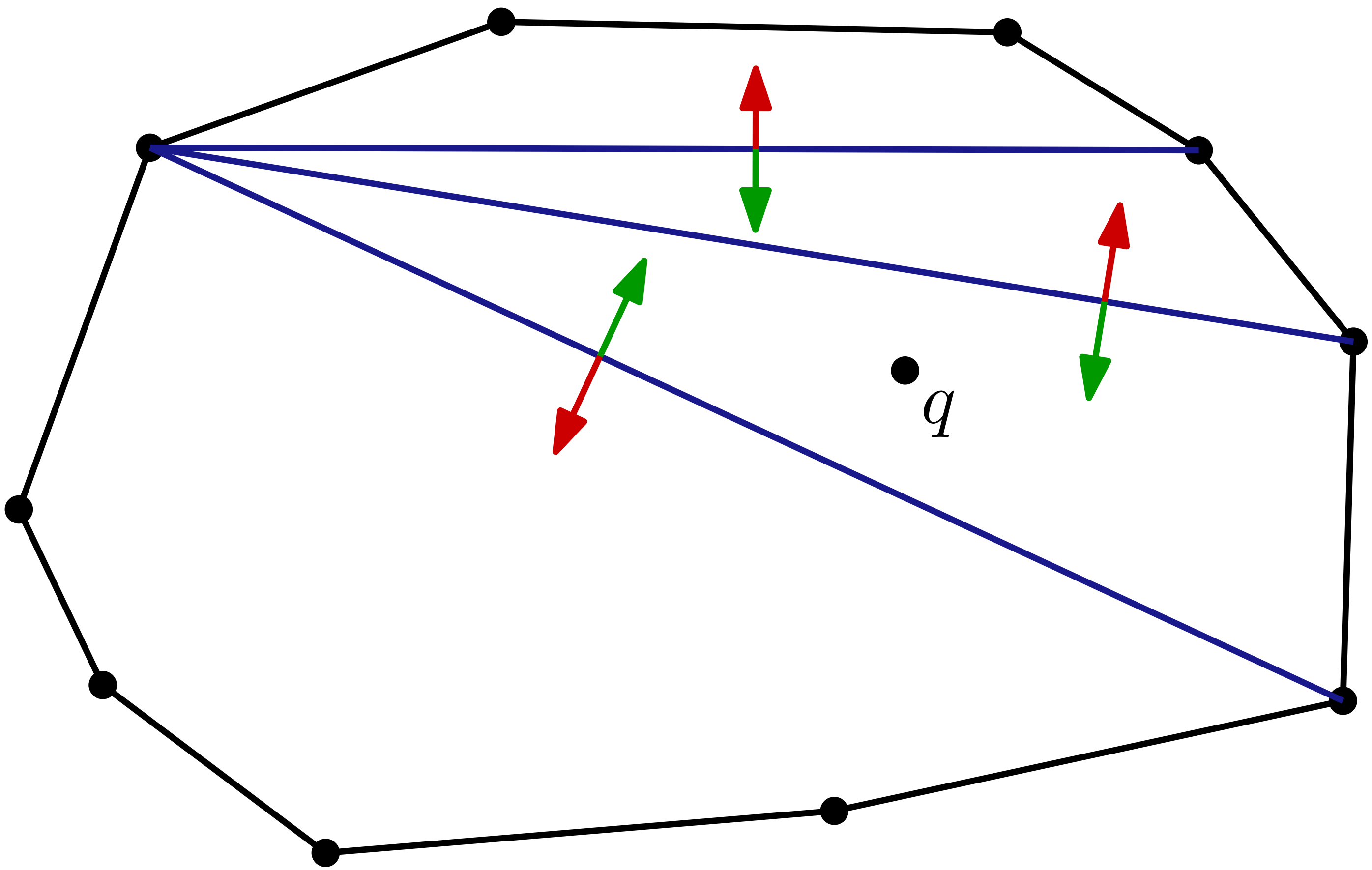


Aufgabe 2

Gegeben:

- Punkt q
- konvexes Polygon P bestehend aus n Punkten

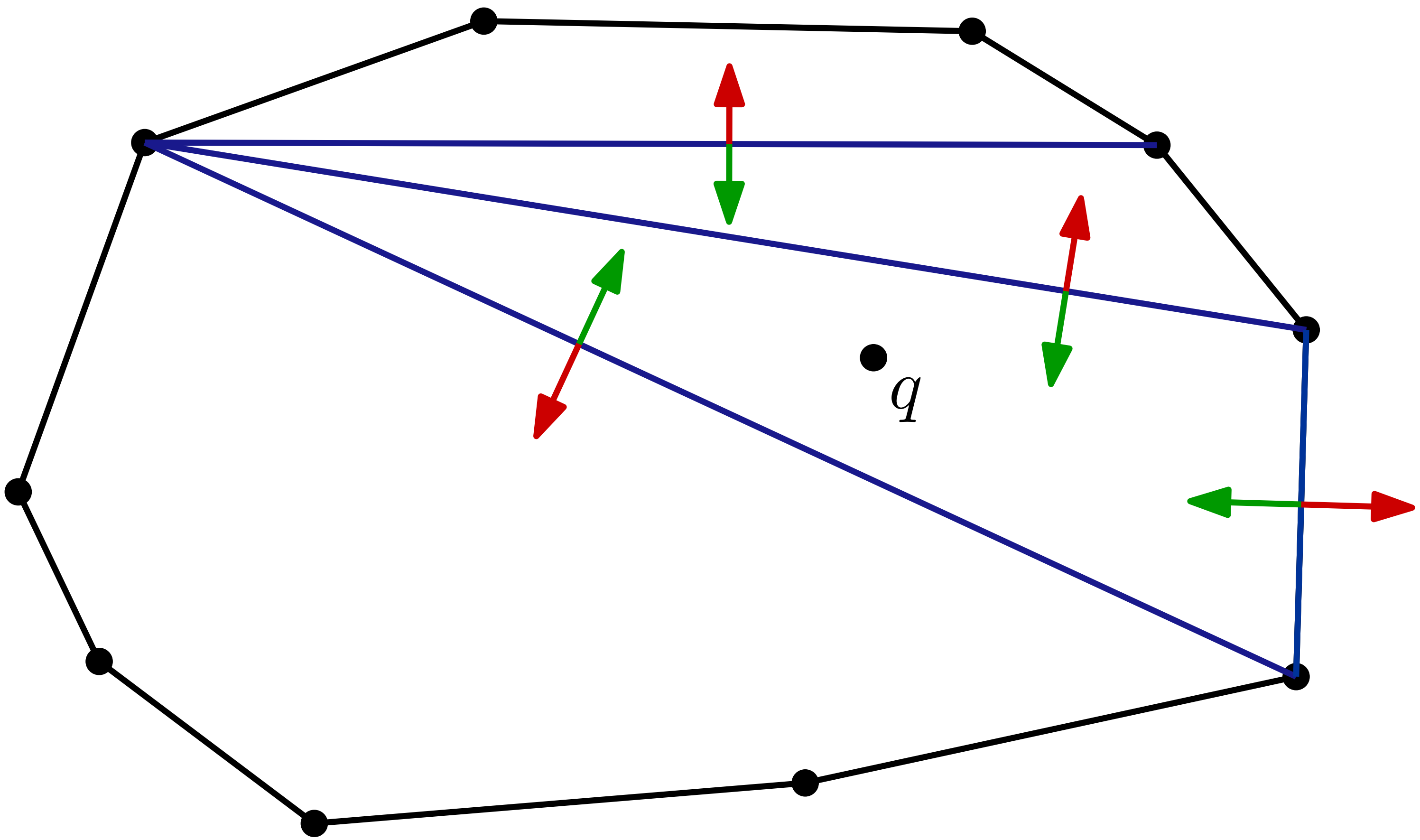
a) Liegt q im Inneren von P? $\mathcal{O}(\log n)$



Aufgabe 2

Gegeben:
- Punkt q
- konvexes Polygon P bestehend aus n Punkten

a) Liegt q im Inneren von P? $\mathcal{O}(\log n)$

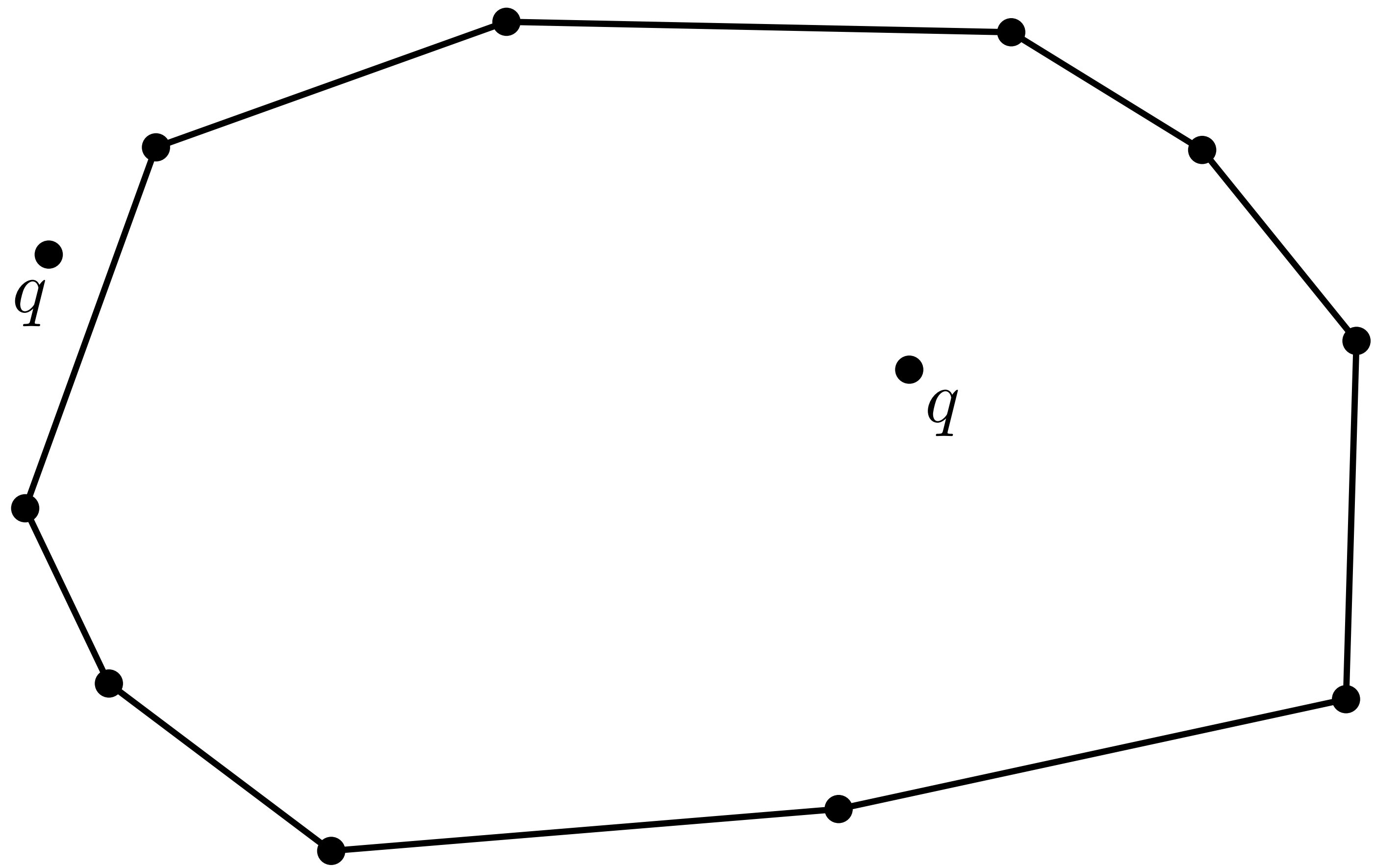


Aufgabe 2

Gegeben:

- Punkt q
- konvexes Polygon P bestehend aus n Punkten

a) Liegt q im Inneren von P? $\mathcal{O}(\log n)$

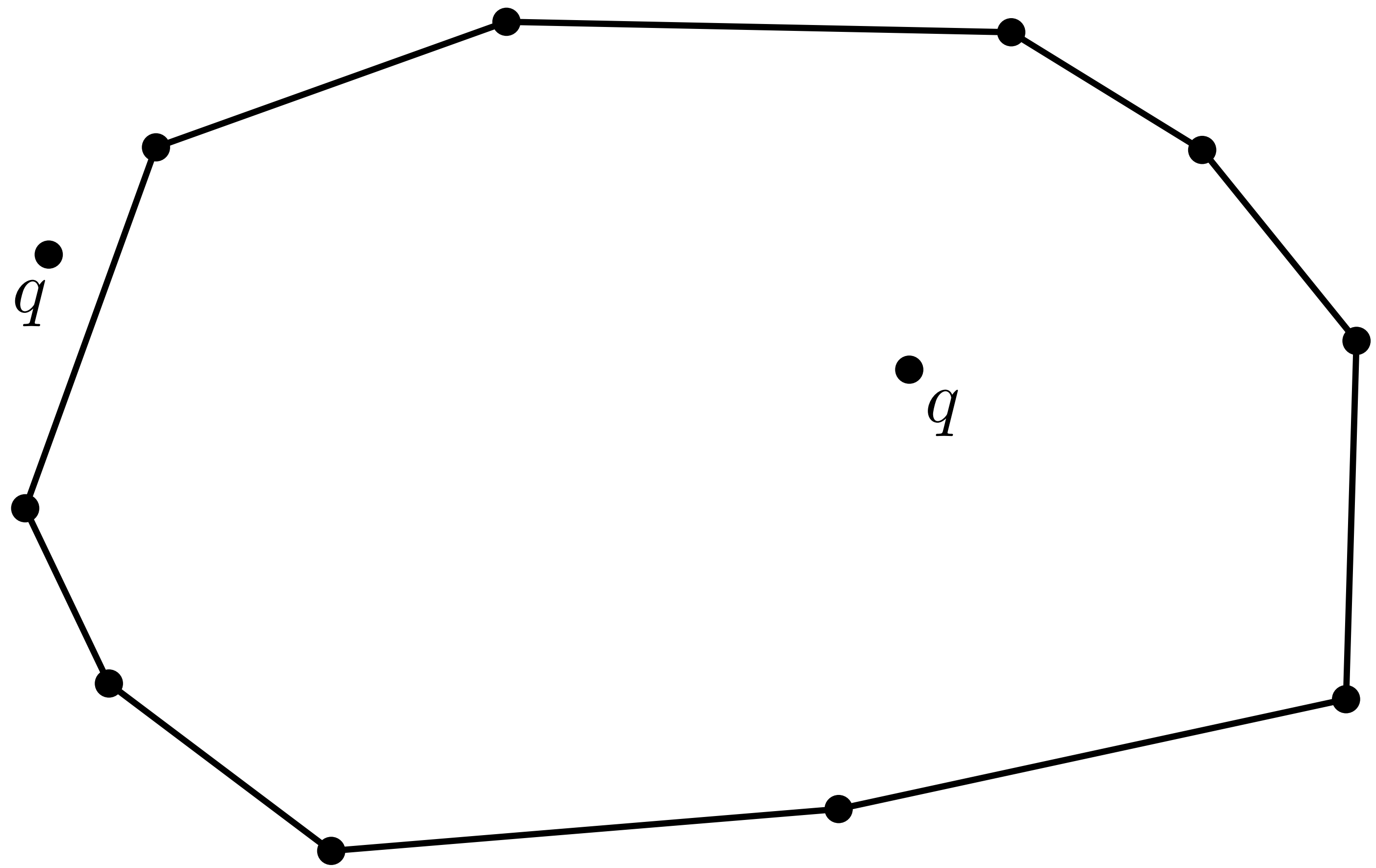


Aufgabe 2

Gegeben:

- Punkt q
- konvexes Polygon P bestehend aus n Punkten

a) Liegt q im Inneren von P? $\mathcal{O}(\log n)$

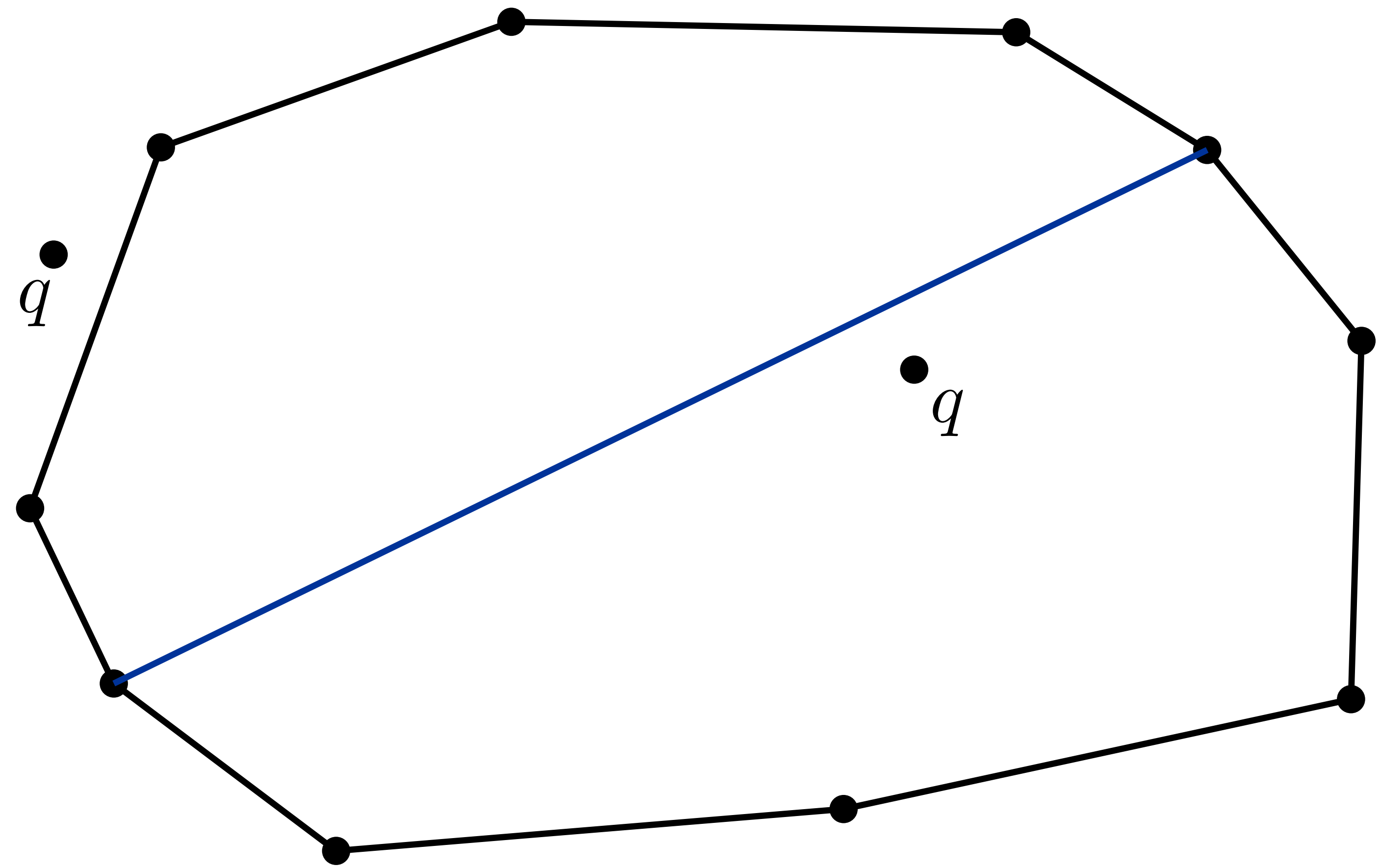


Aufgabe 2

Gegeben:

- Punkt q
- konvexes Polygon P bestehend aus n Punkten

a) Liegt q im Inneren von P? $\mathcal{O}(\log n)$

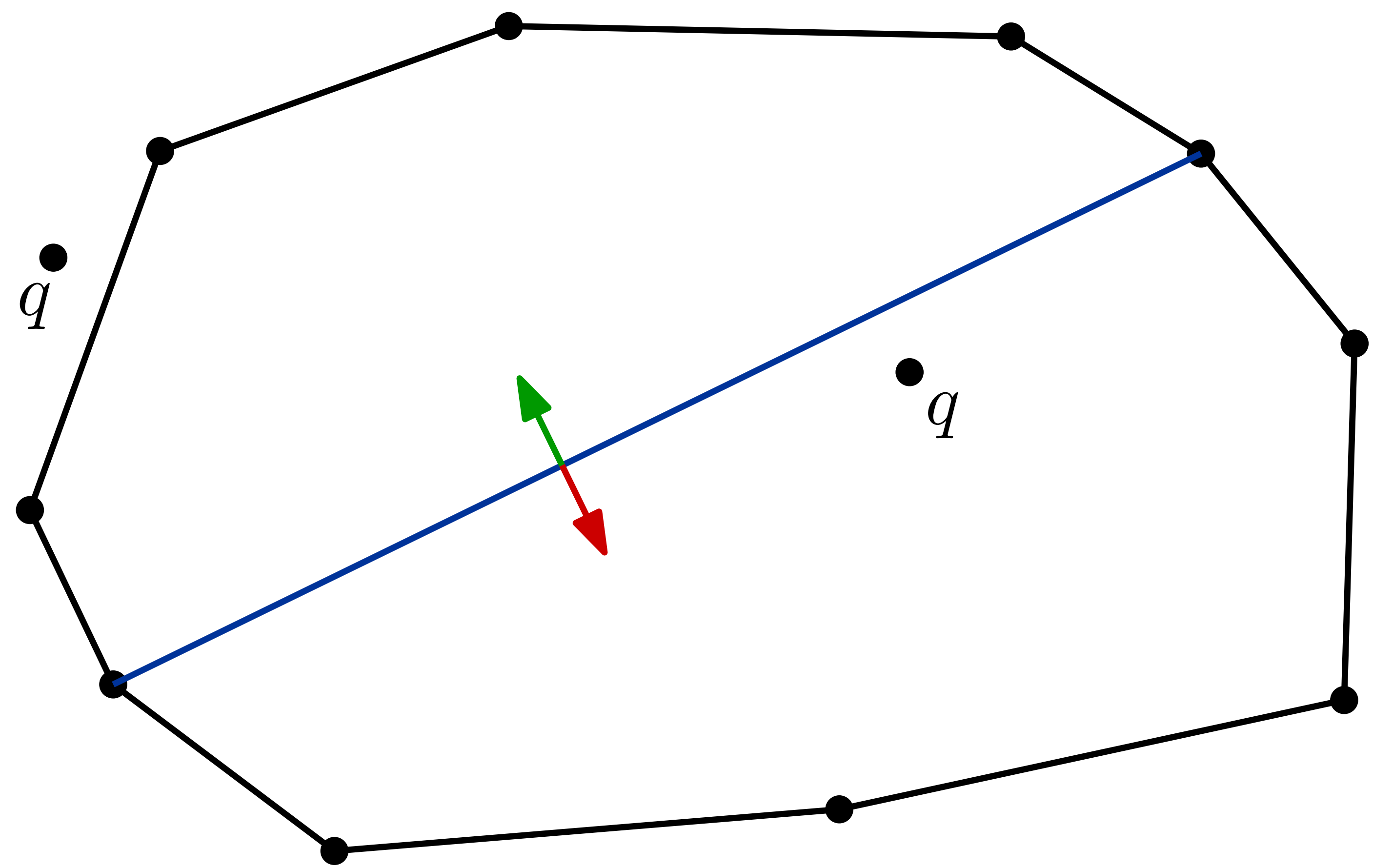


Aufgabe 2

Gegeben:

- Punkt q
- konvexes Polygon P bestehend aus n Punkten

a) Liegt q im Inneren von P? $\mathcal{O}(\log n)$

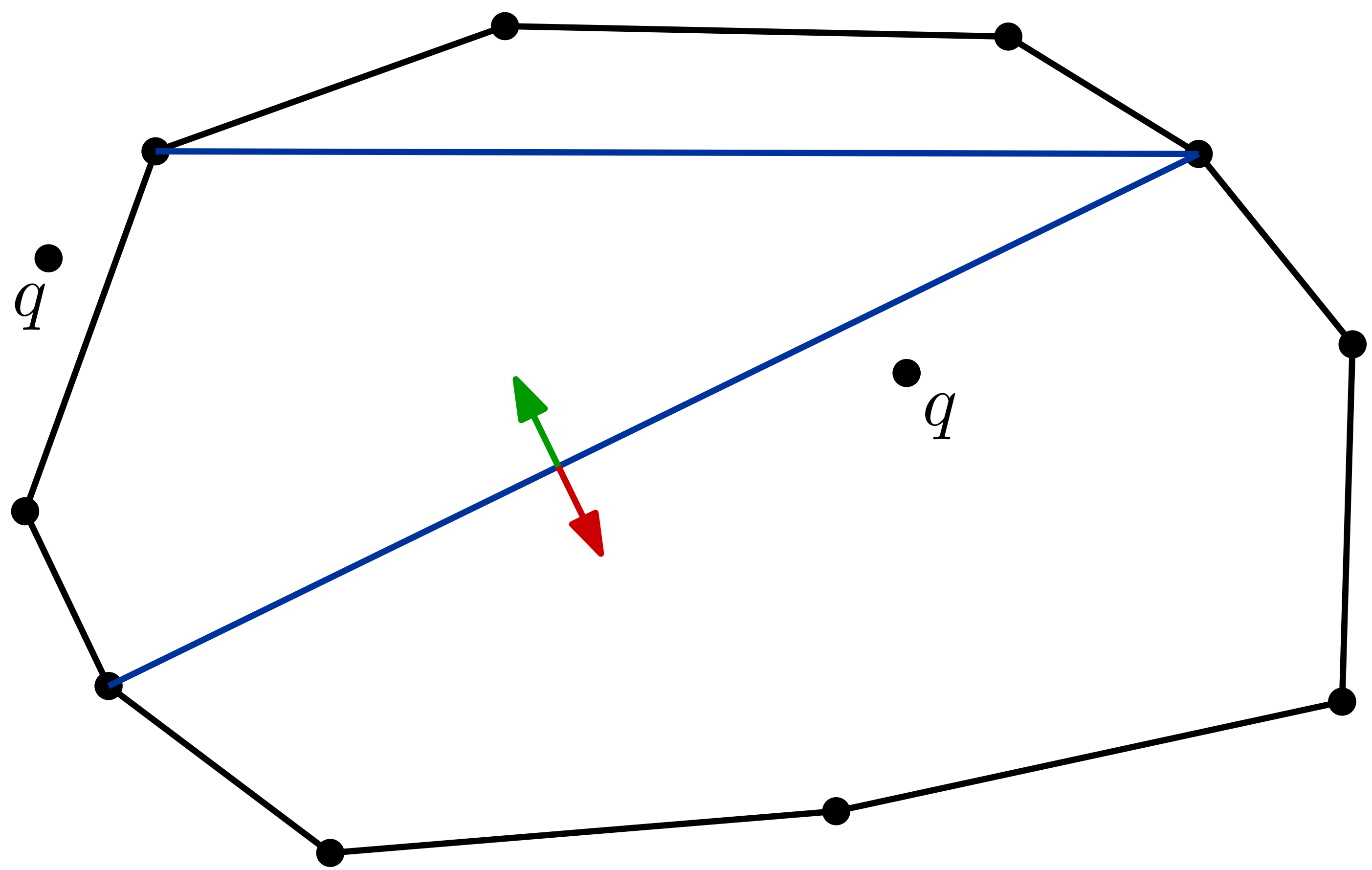


Aufgabe 2

Gegeben:

- Punkt q
- konvexes Polygon P bestehend aus n Punkten

a) Liegt q im Inneren von P? $\mathcal{O}(\log n)$

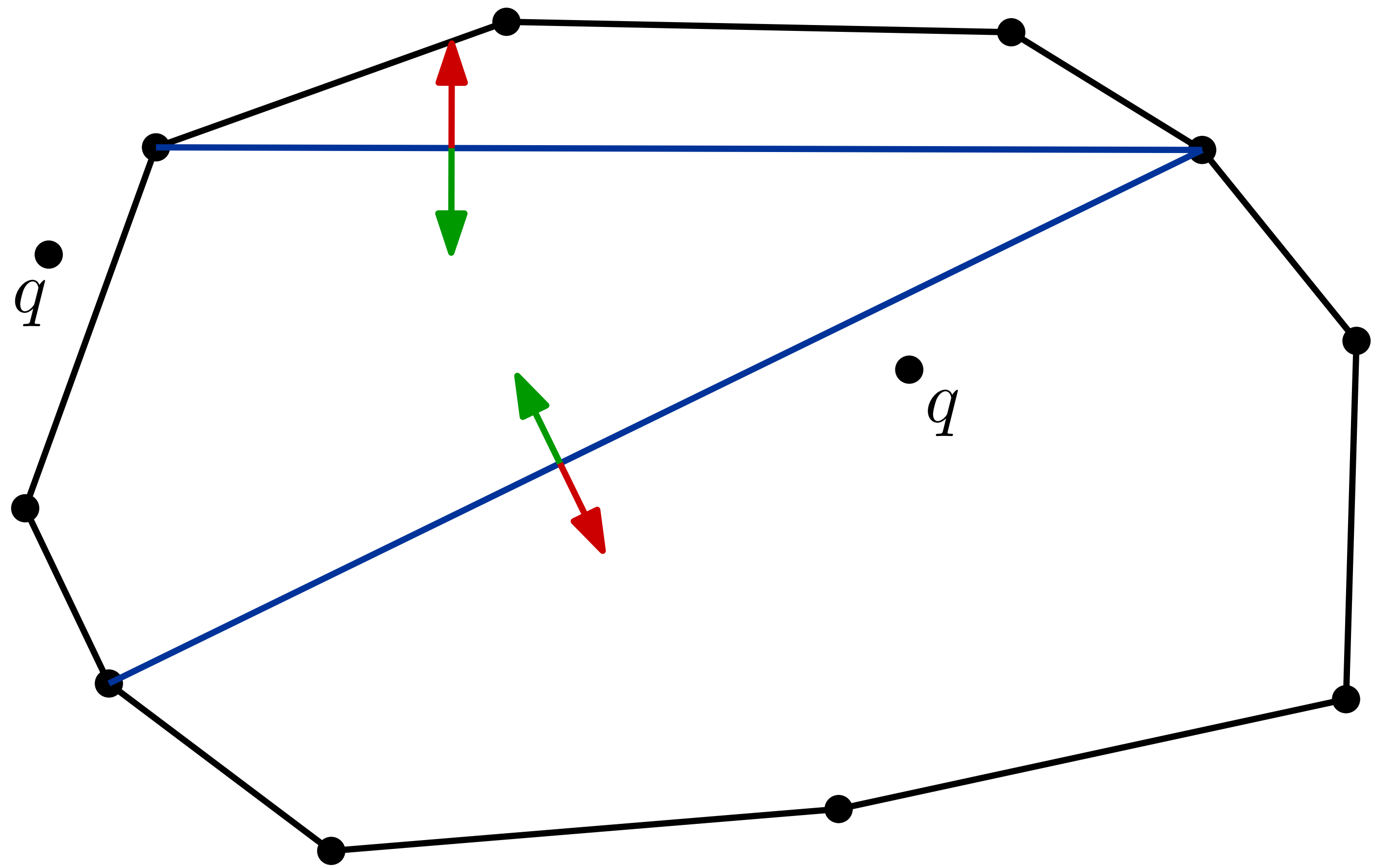


Aufgabe 2

Gegeben:

- Punkt q
- konvexes Polygon P bestehend aus n Punkten

a) Liegt q im Inneren von P? $\mathcal{O}(\log n)$

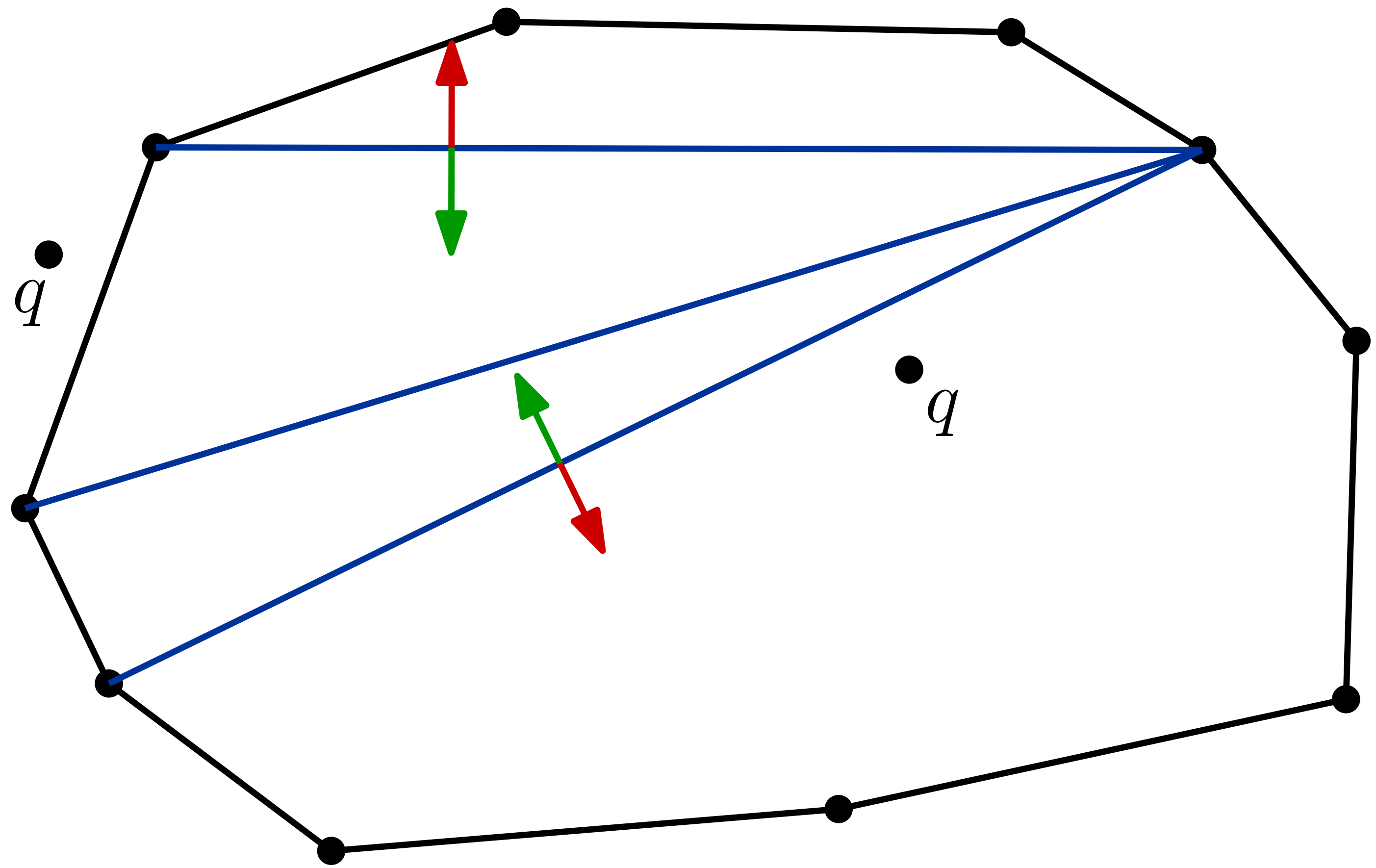


Aufgabe 2

Gegeben:

- Punkt q
- konvexes Polygon P bestehend aus n Punkten

a) Liegt q im Inneren von P? $\mathcal{O}(\log n)$

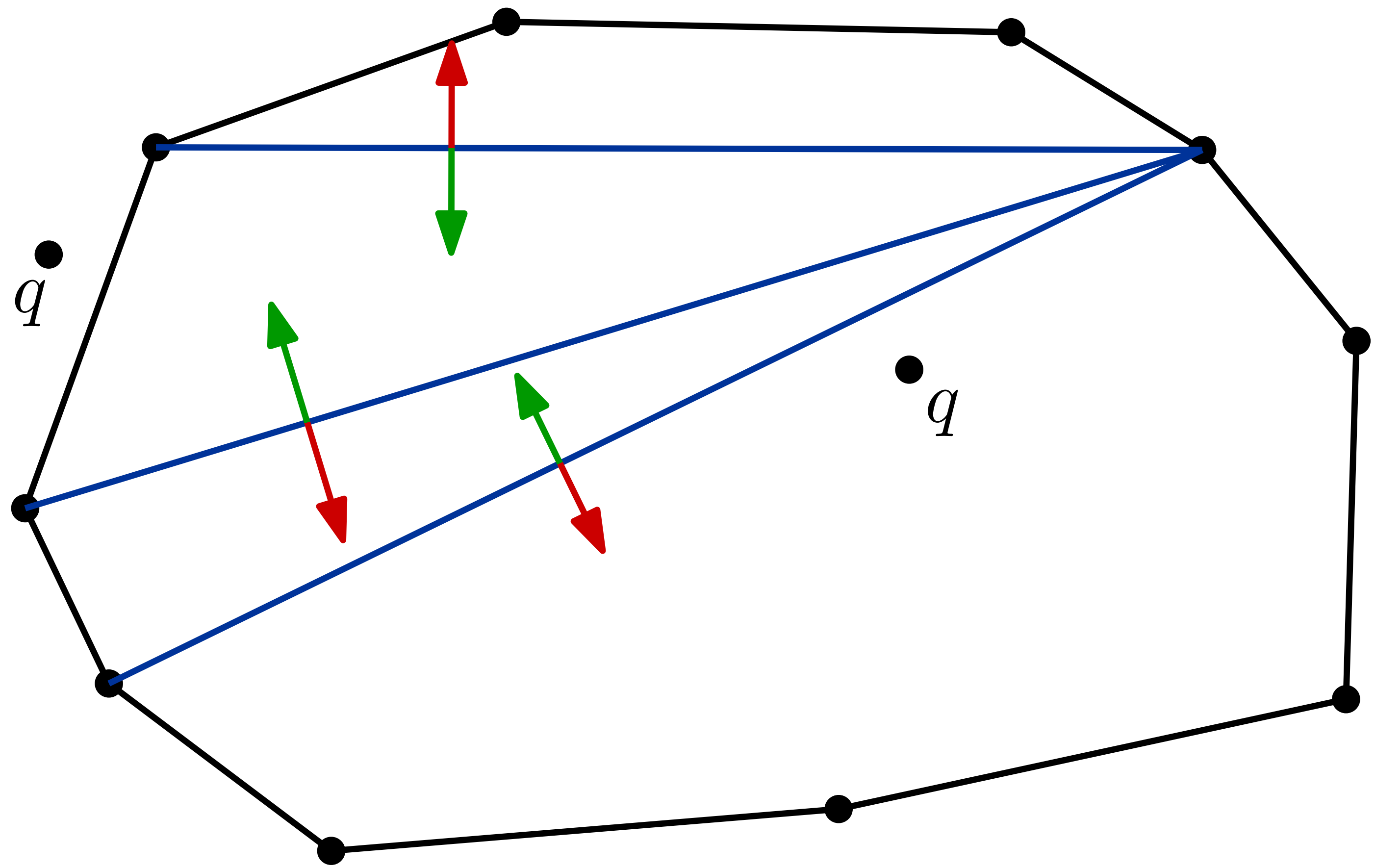


Aufgabe 2

Gegeben:

- Punkt q
- konvexes Polygon P bestehend aus n Punkten

a) Liegt q im Inneren von P? $\mathcal{O}(\log n)$

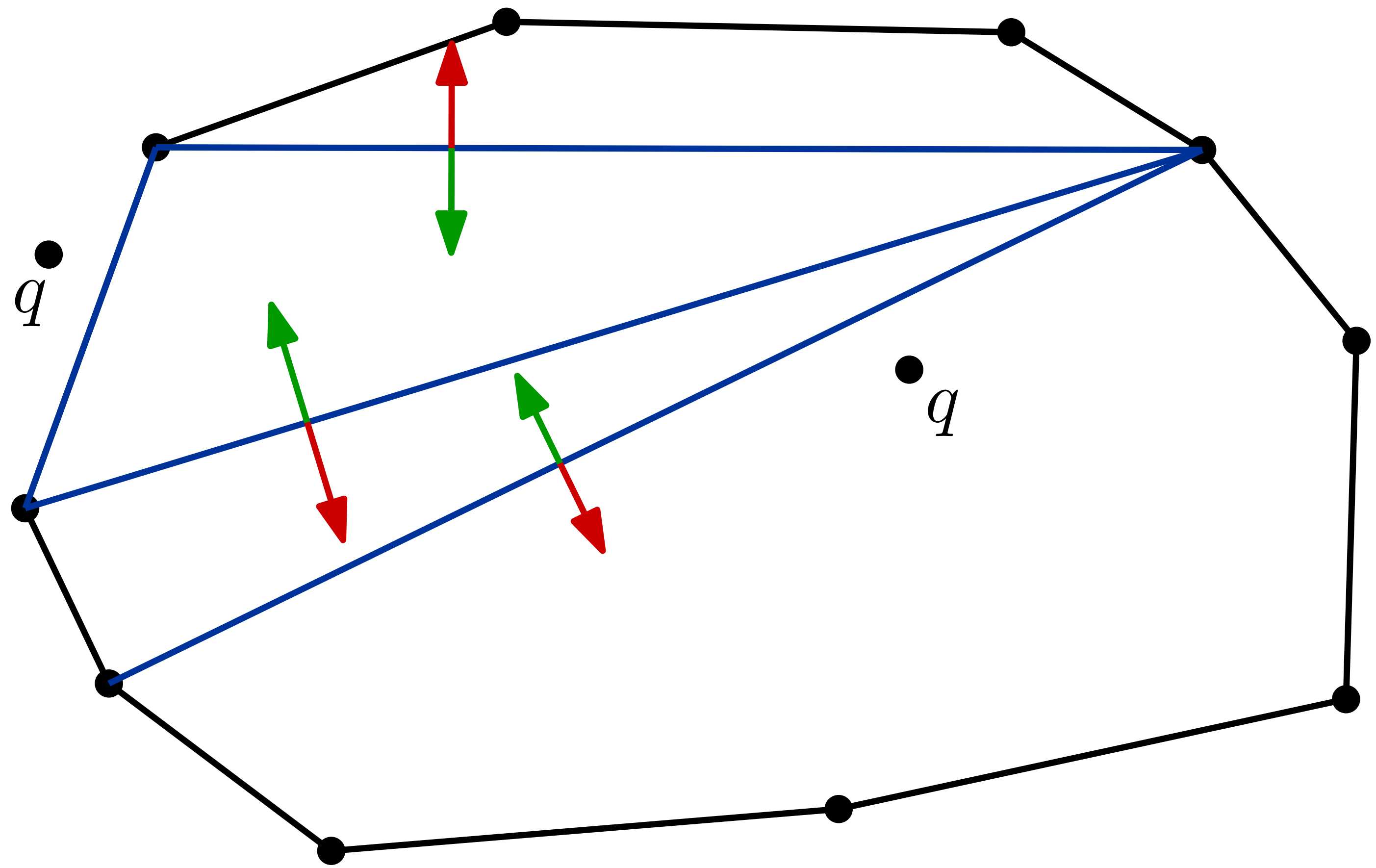


Aufgabe 2

Gegeben:

- Punkt q
- konvexes Polygon P bestehend aus n Punkten

a) Liegt q im Inneren von P? $\mathcal{O}(\log n)$

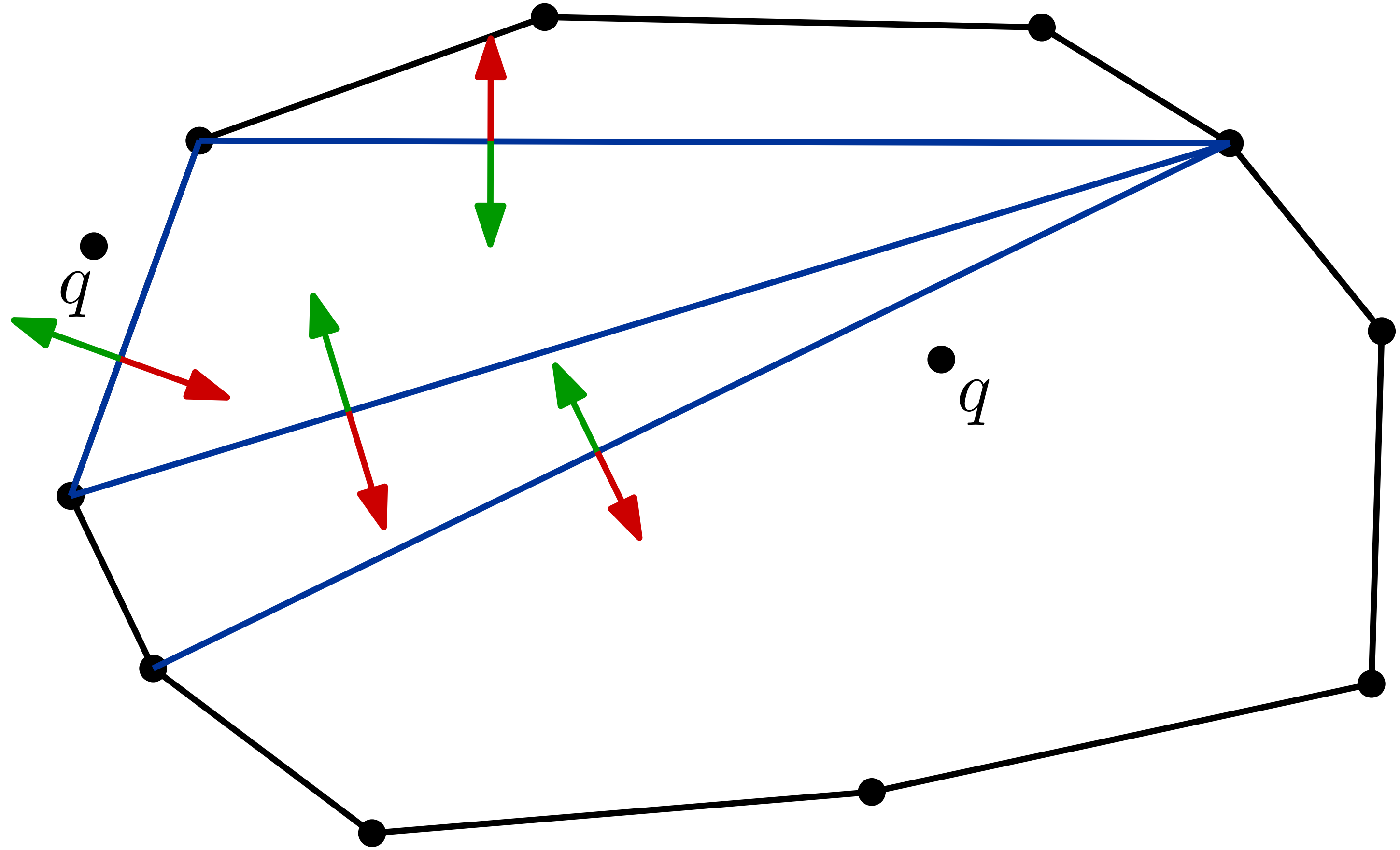


Aufgabe 2

Gegeben:

- Punkt q
- konvexes Polygon P bestehend aus n Punkten

a) Liegt q im Inneren von P? $\mathcal{O}(\log n)$

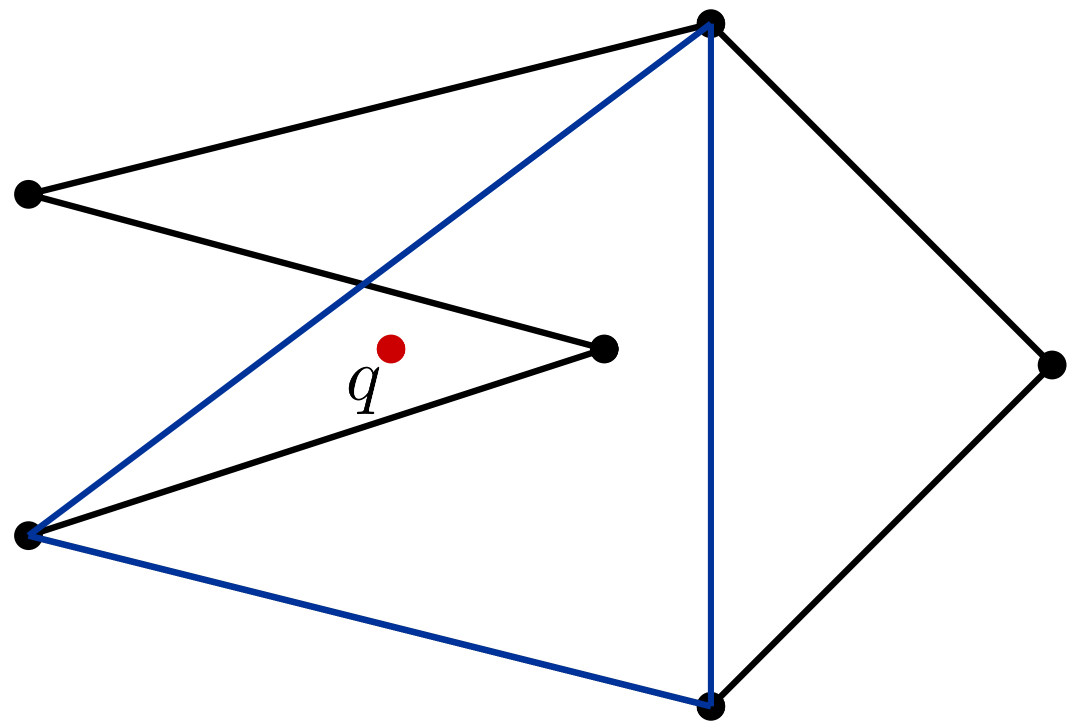


Aufgabe 2

Gegeben:

- Punkt q
- y-monotones Polygon P bestehend aus n Punkten

b) Kann man das Verfahren aus a) anpassen?

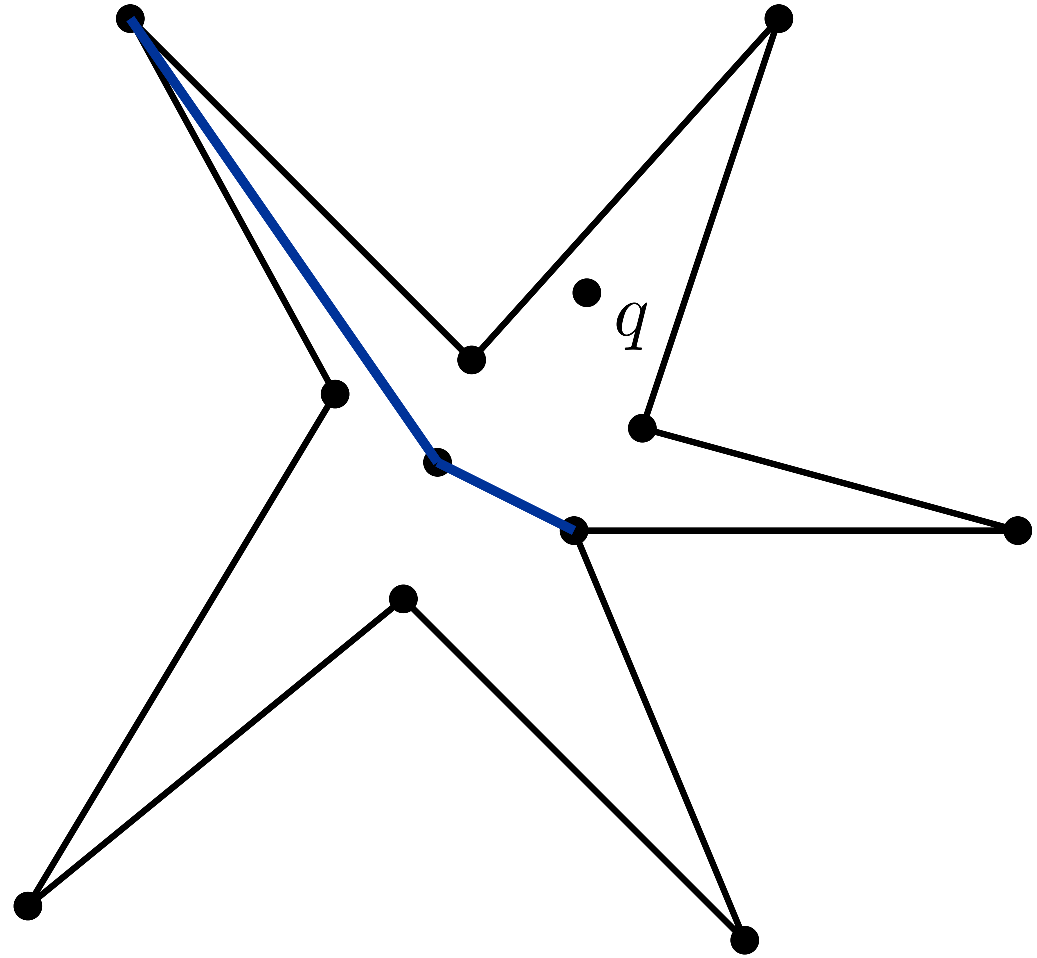


Aufgabe 3

Gegeben:

- Punkt q
- sternförmiges Polygon P bestehend aus n Punkten

a) q im Inneren von P in $\mathcal{O}(\log n)$?

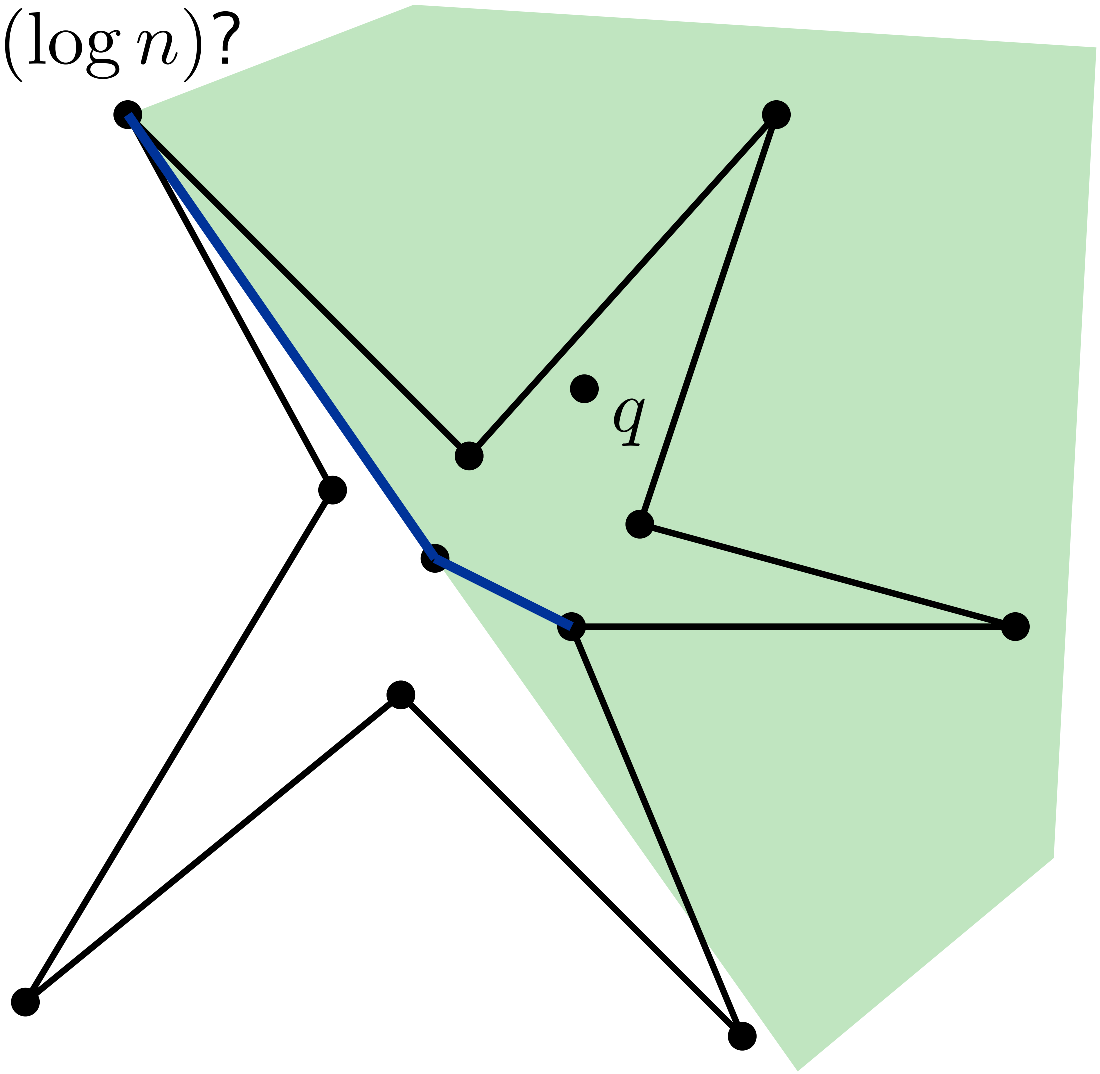


Aufgabe 3

Gegeben:

- Punkt q
- sternförmiges Polygon P bestehend aus n Punkten

a) q im Inneren von P in $\mathcal{O}(\log n)$?

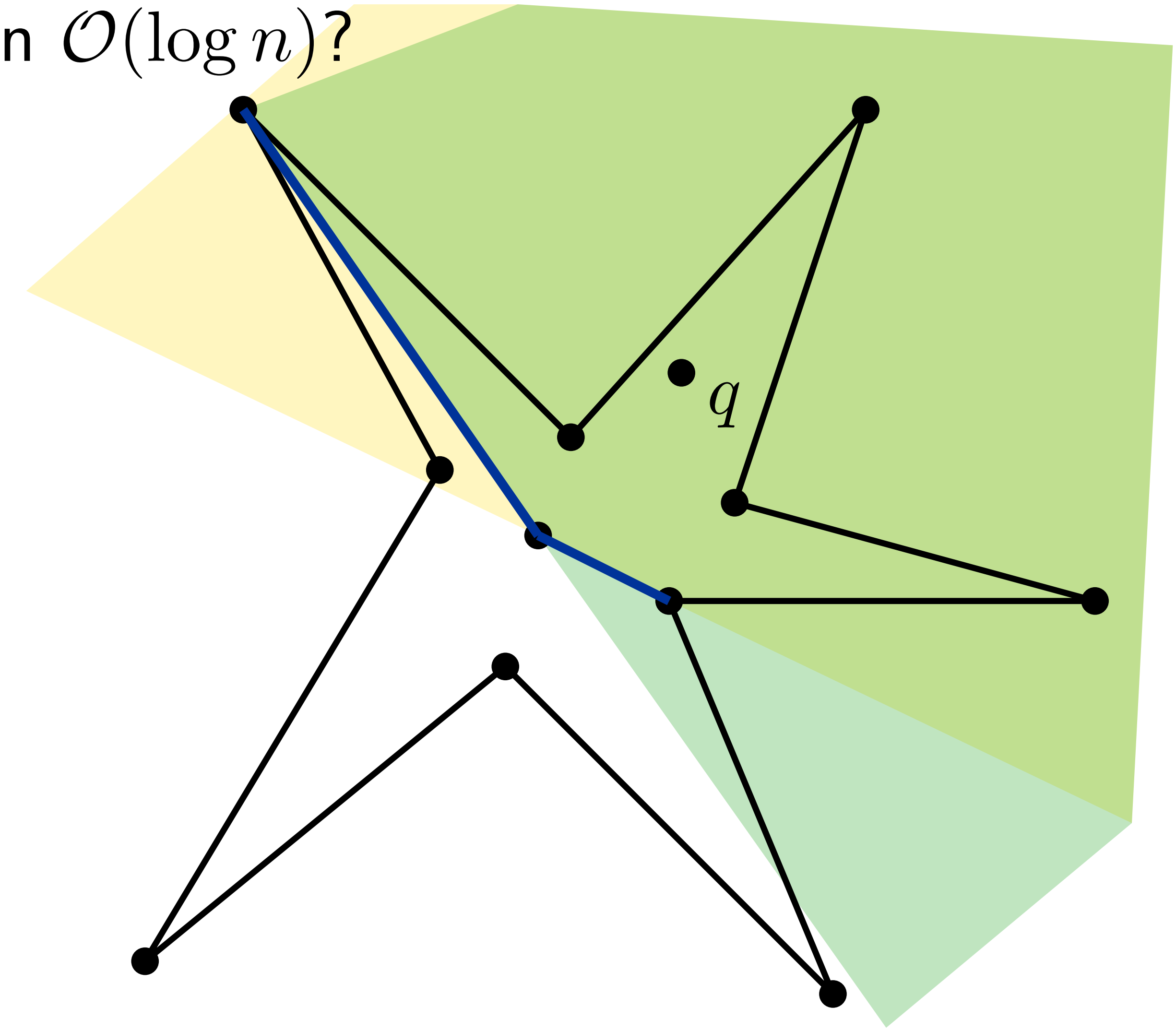


Aufgabe 3

Gegeben:

- Punkt q
- sternförmiges Polygon P bestehend aus n Punkten

a) q im Inneren von P in $\mathcal{O}(\log n)$?

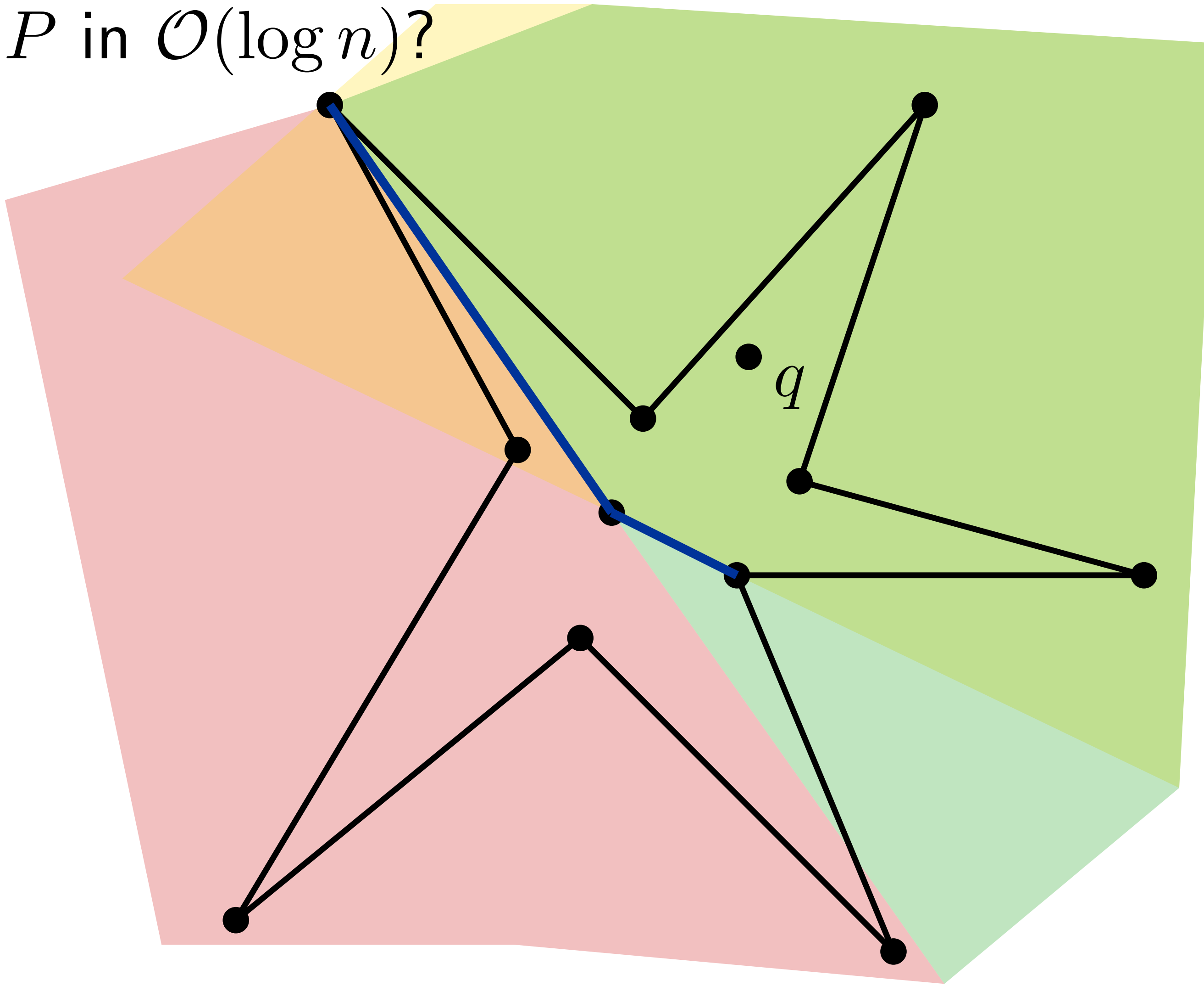


Aufgabe 3

Gegeben:

- Punkt q
- sternförmiges Polygon P bestehend aus n Punkten

a) q im Inneren von P in $\mathcal{O}(\log n)$?

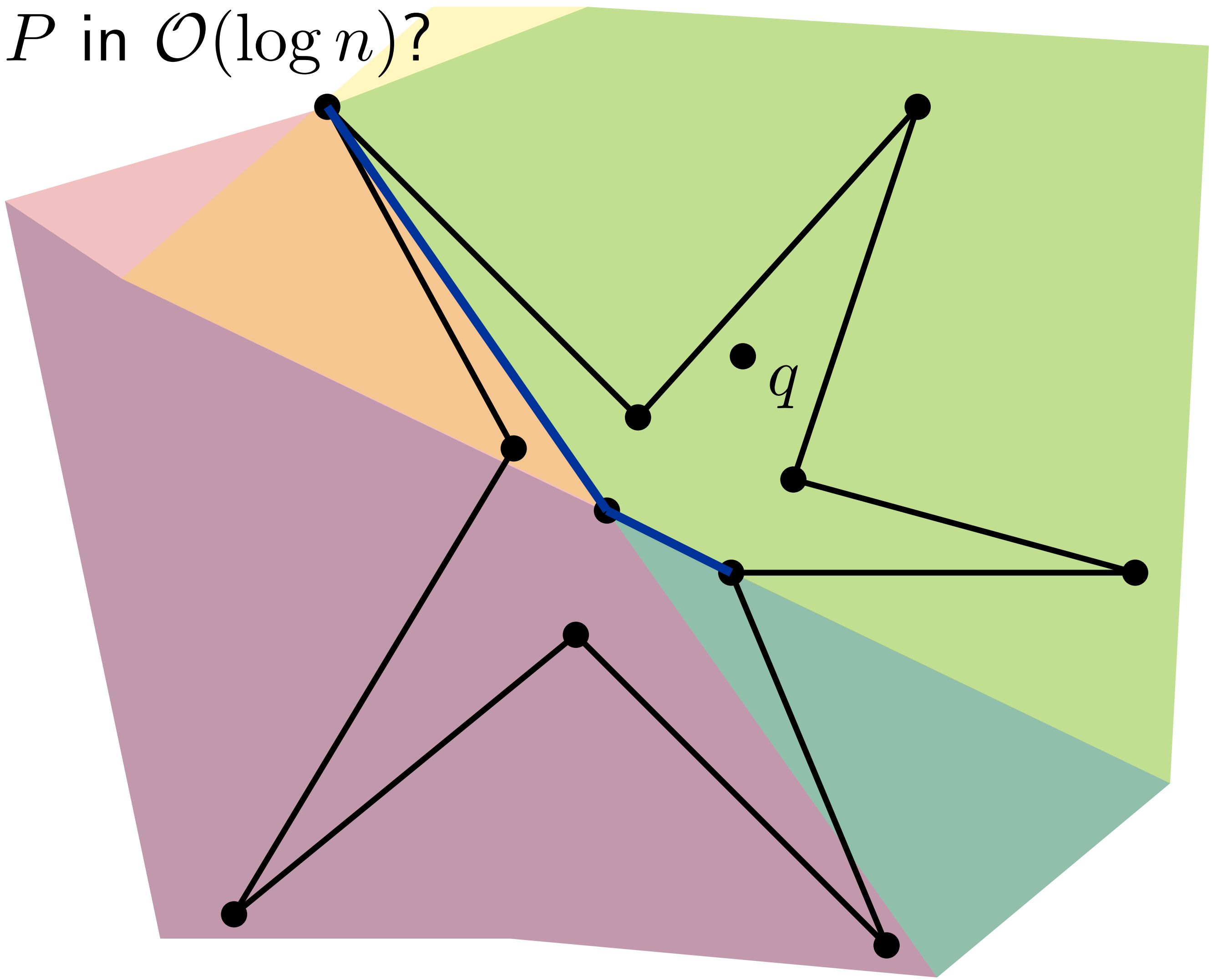


Aufgabe 3

Gegeben:

- Punkt q
- sternförmiges Polygon P bestehend aus n Punkten

a) q im Inneren von P in $\mathcal{O}(\log n)$?

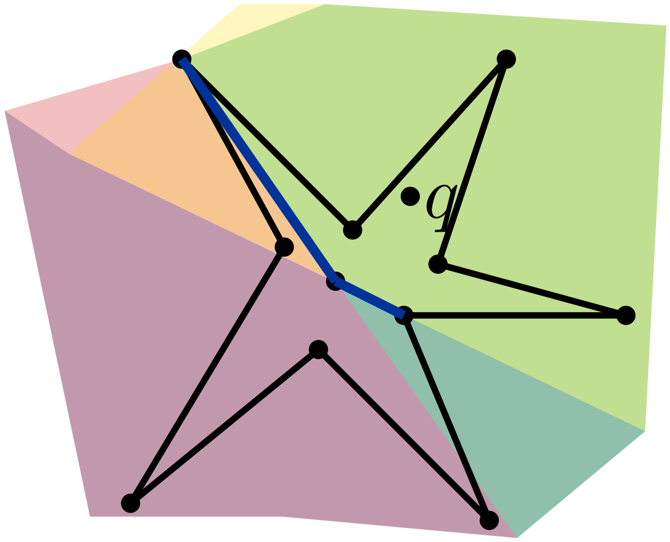


Aufgabe 3

Gegeben:

- Punkt q
- sternförmiges Polygon P bestehend aus n Punkten

a) q im Inneren von P in $\mathcal{O}(\log n)$?



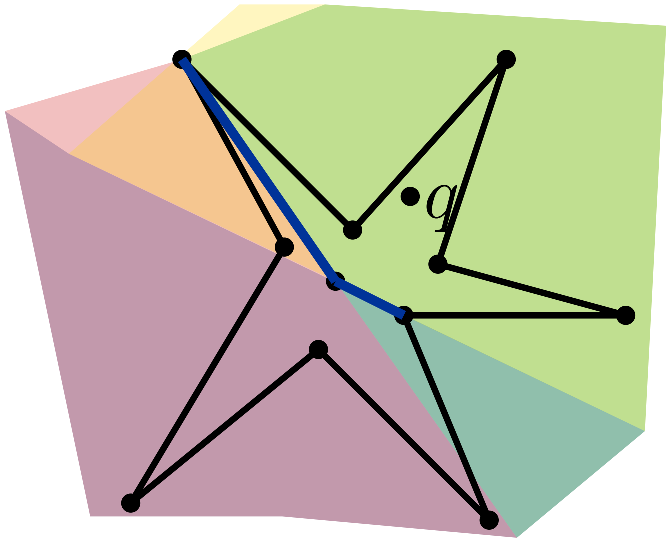
Aufgabe 3

Gegeben:

- Punkt q
- sternförmiges Polygon P bestehend aus n Punkten

a) q im Inneren von P in $\mathcal{O}(\log n)$?

s. Tafel



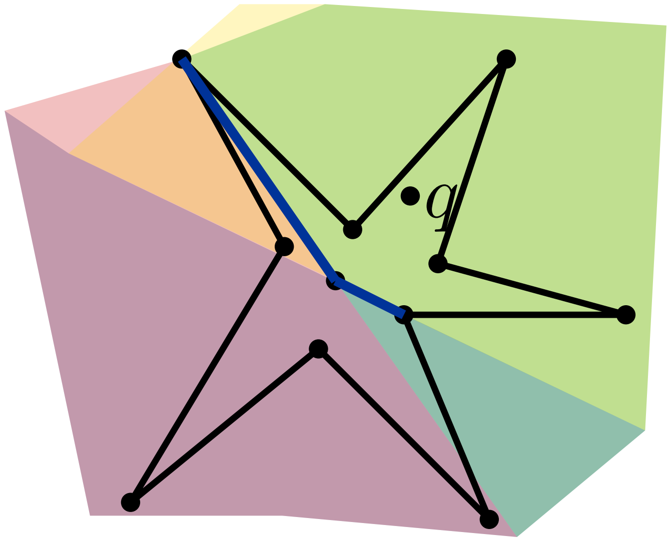
Aufgabe 3

Gegeben:

- Punkt q
- sternförmiges Polygon P bestehend aus n Punkten

b) Was ist, wenn p nicht bekannt ist?

s. Tafel



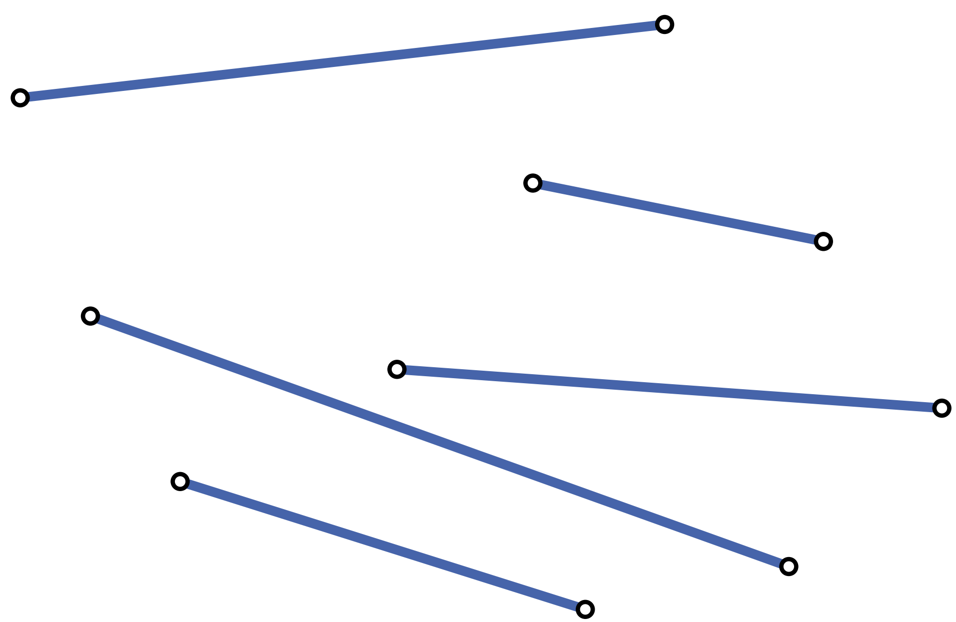
Aufgabe 4

Ray-Shooting Problem

Hier: Vereinfachte Version

Punkt $q \in \mathbb{R}^2$ gegeben und n sich nicht schneidende Streckensegmente.
Sei ϱ vertikale Halbgerade die von q aus nach oben 'schießt'.

Finde 'erstes' Streckensegment das ϱ schneidet.



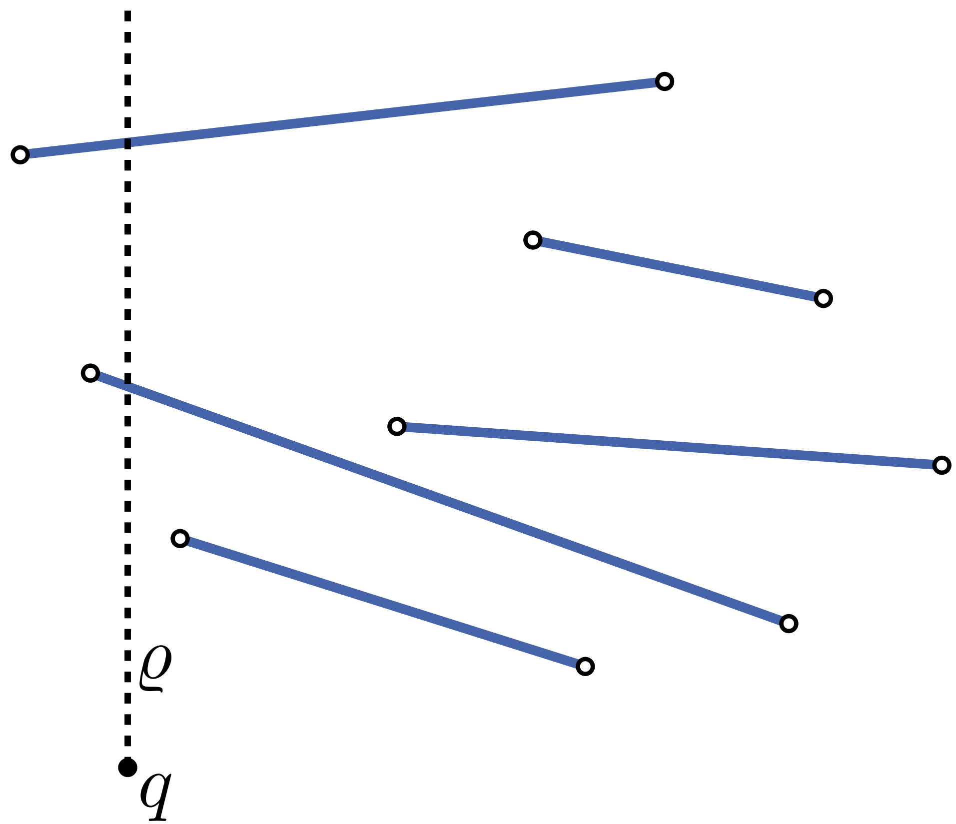
Aufgabe 4

Ray-Shooting Problem

Hier: Vereinfachte Version

Punkt $q \in \mathbb{R}^2$ gegeben und n sich nicht schneidende Streckensegmente.
Sei ϱ vertikale Halbgerade die von q aus nach oben 'schießt'.

Finde 'erstes' Streckensegment das ϱ schneidet.



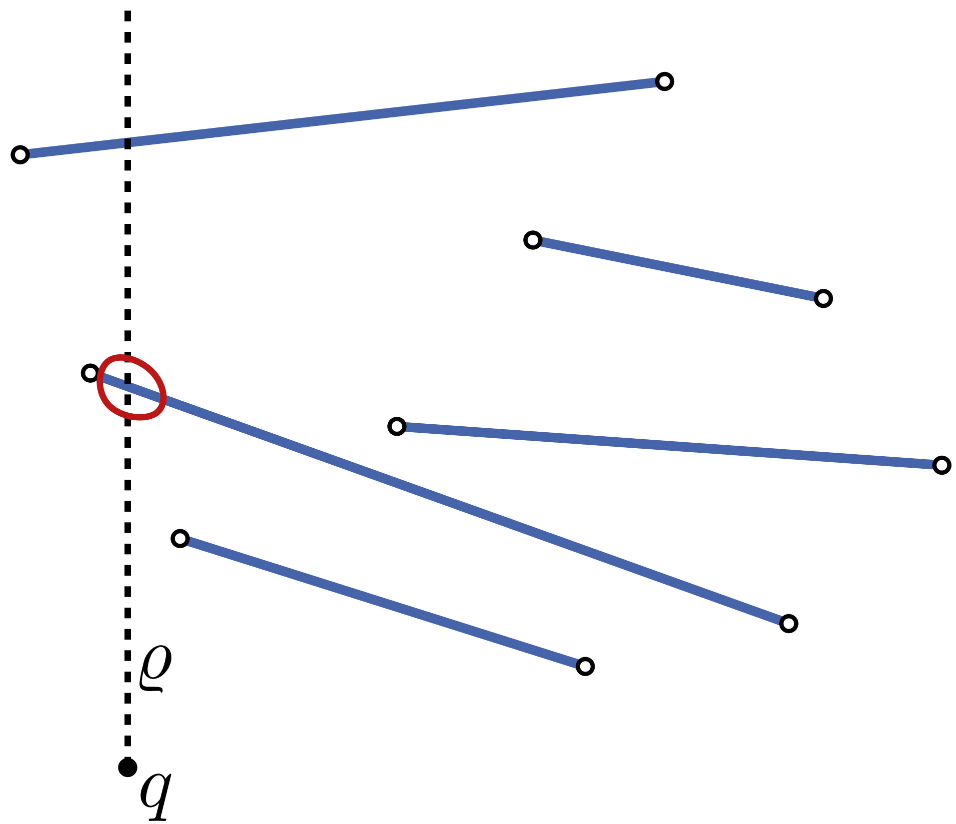
Aufgabe 4

Ray-Shooting Problem

Hier: Vereinfachte Version

Punkt $q \in \mathbb{R}^2$ gegeben und n sich nicht schneidende Streckensegmente.
Sei ϱ vertikale Halbgerade die von q aus nach oben 'schießt'.

Finde 'erstes' Streckensegment das ϱ schneidet.



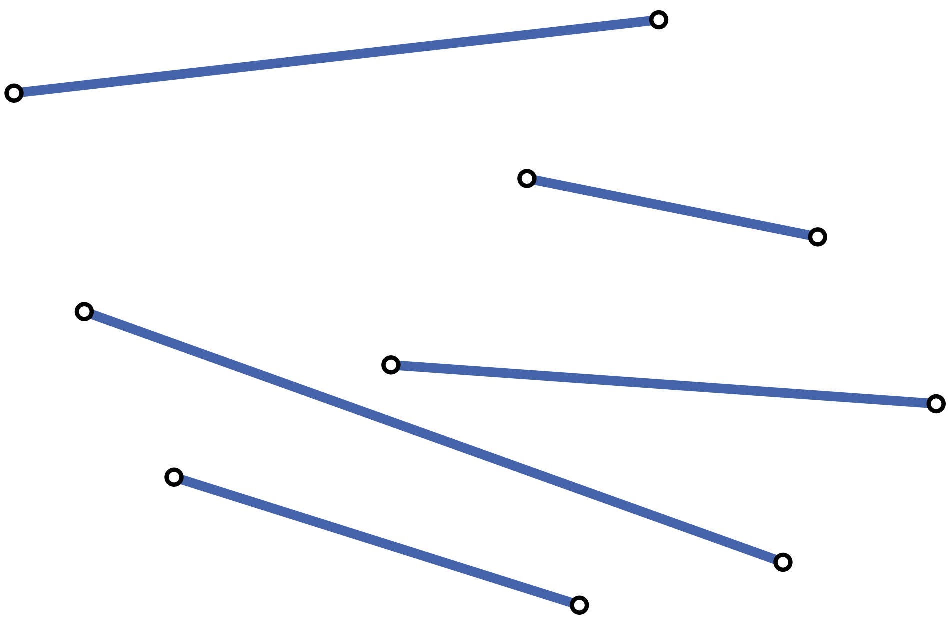
Aufgabe 4

Ray-Shooting Problem

Hier: Vereinfachte Version

Punkt $q \in \mathbb{R}^2$ gegeben und n sich nicht schneidende Streckensegmente.
Sei ϱ vertikale Halbgerade die von q aus nach oben 'schießt'.

Finde 'erstes' Streckensegment das ϱ schneidet.



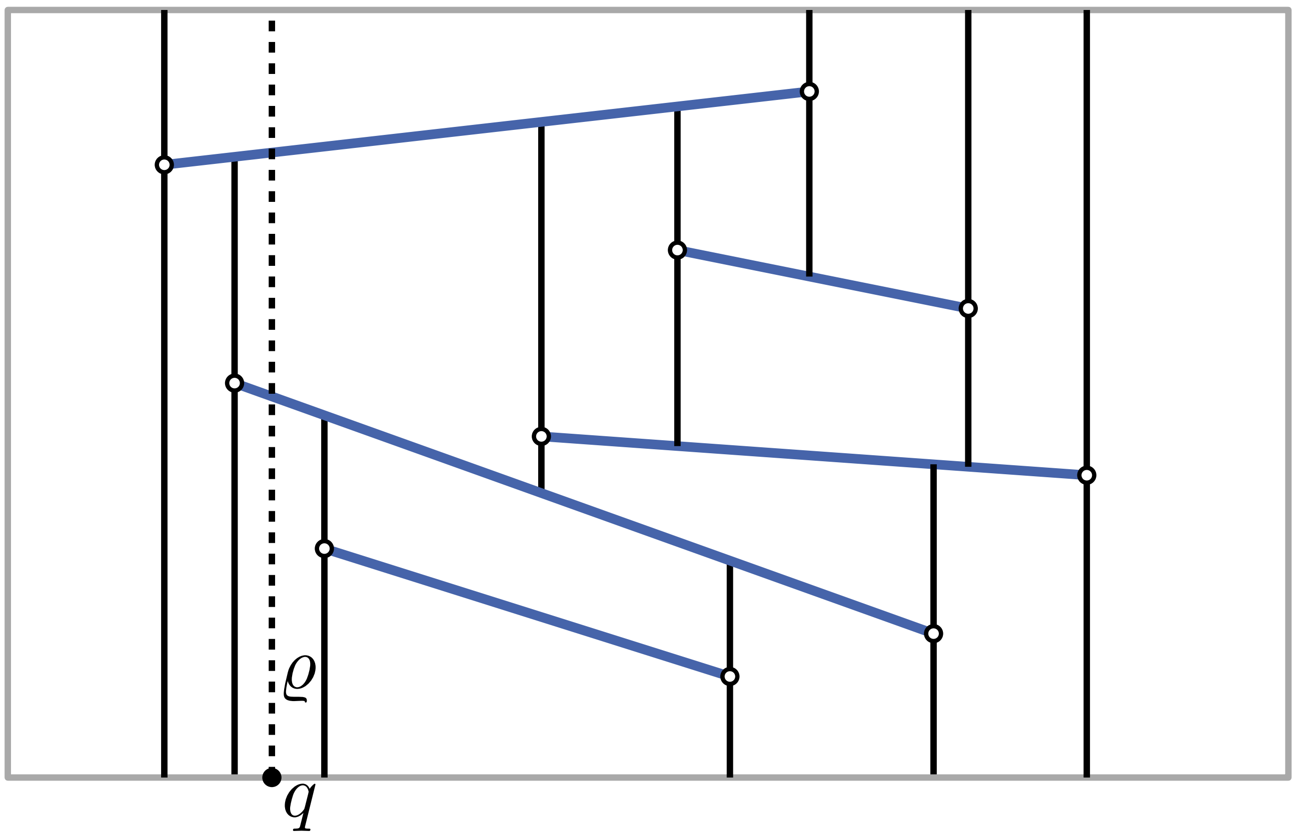
Aufgabe 4

Ray-Shooting Problem

Hier: Vereinfachte Version

Punkt $q \in \mathbb{R}^2$ gegeben und n sich nicht schneidende Streckensegmente.
Sei ϱ vertikale Halbgerade die von q aus nach oben 'schießt'.

Finde 'erstes' Streckensegment das ϱ schneidet.



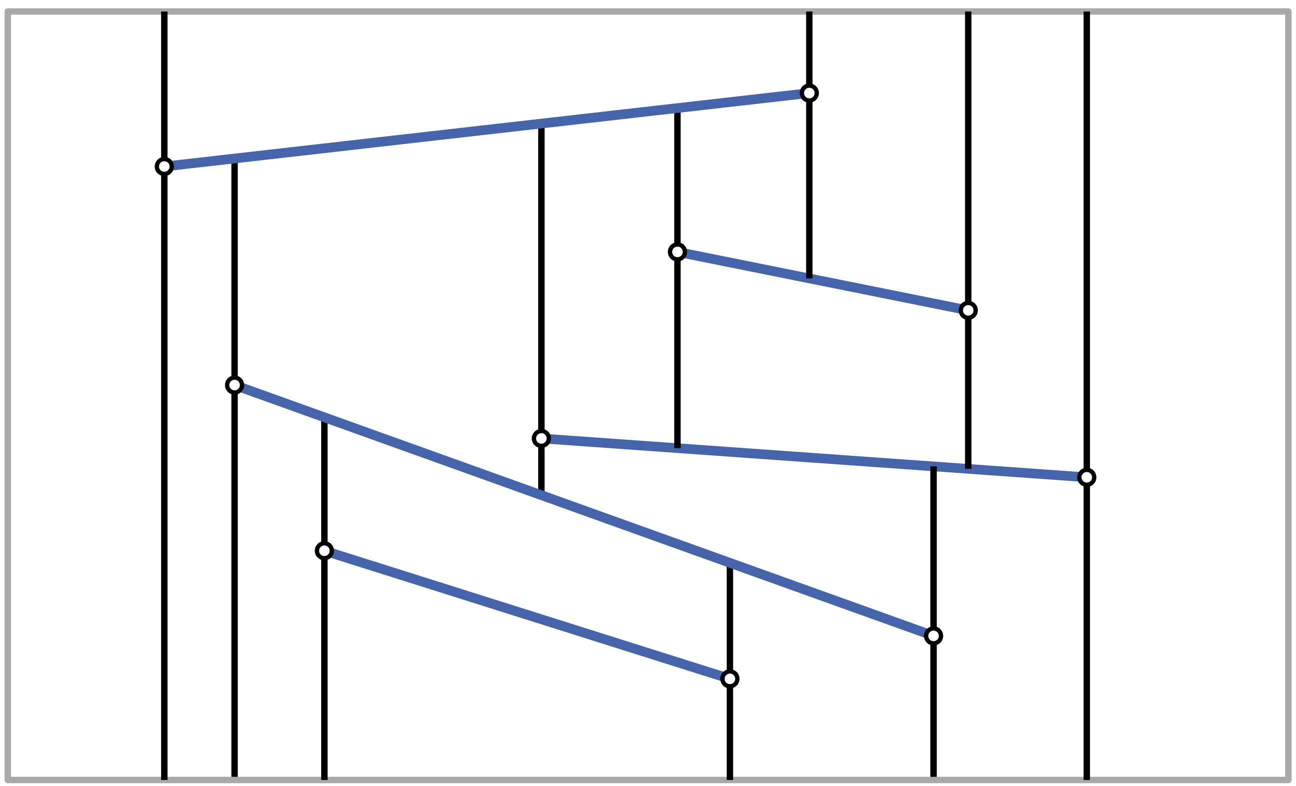
Aufgabe 4

Ray-Shooting Problem

Hier: Vereinfachte Version

Punkt $q \in \mathbb{R}^2$ gegeben und n sich nicht schneidende Streckensegmente.
Sei ϱ vertikale Halbgerade die von q aus nach oben 'schießt'.

Finde 'erstes' Streckensegment das ϱ schneidet.



Aufgabe 4

Ray-Shooting Problem

Hier: Vereinfachte Version

Punkt $q \in \mathbb{R}^2$ gegeben und n sich mögl. schneidende Streckensegmente.
Sei ϱ vertikale Halbgerade die von q aus nach oben 'schießt'.

Finde 'erstes' Streckensegment das ϱ schneidet.

b) Verfahren aus a) adaptierbar? Wenn ja, wie aufwändig?

Aufgabe 4

Ray-Shooting Problem

Hier: Vereinfachte Version

Punkt $q \in \mathbb{R}^2$ gegeben und n sich mögl. schneidende Streckensegmente.
Sei ϱ vertikale Halbgerade die von q aus nach oben 'schießt'.

Finde 'erstes' Streckensegment das ϱ schneidet.

b) Verfahren aus a) adaptierbar? Wenn ja, wie aufwändig?

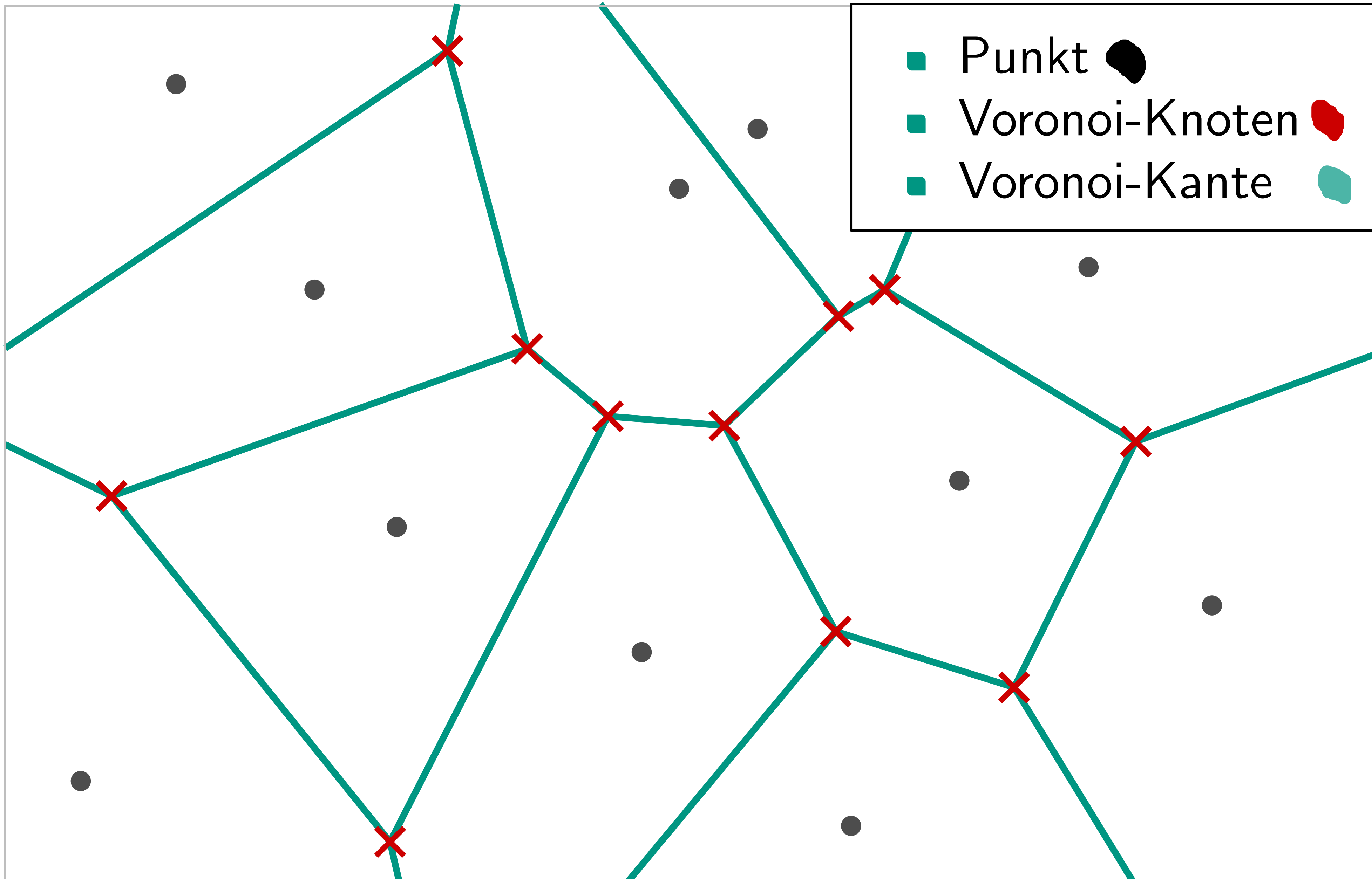
Behauptung:
Anfrage-Zeit $\mathcal{O}(\log n)$ und Konstruktionszeit $\mathcal{O}((n + I) \log n)$

Übersicht

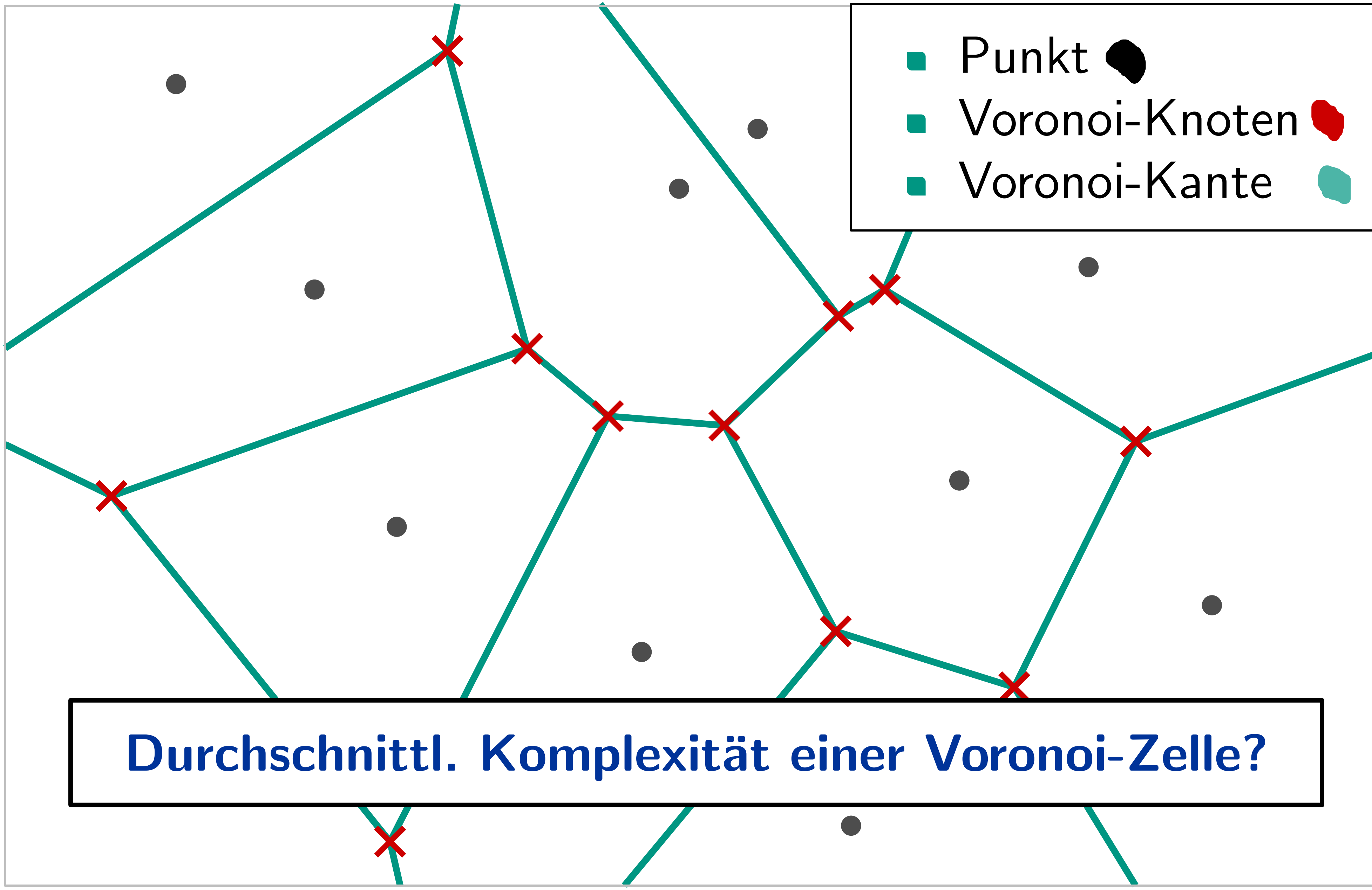
Übungsblatt 8 - Point Location

Übungsblatt 9 - Voronoi-Diagramme

Aufgabe 1



Aufgabe 1



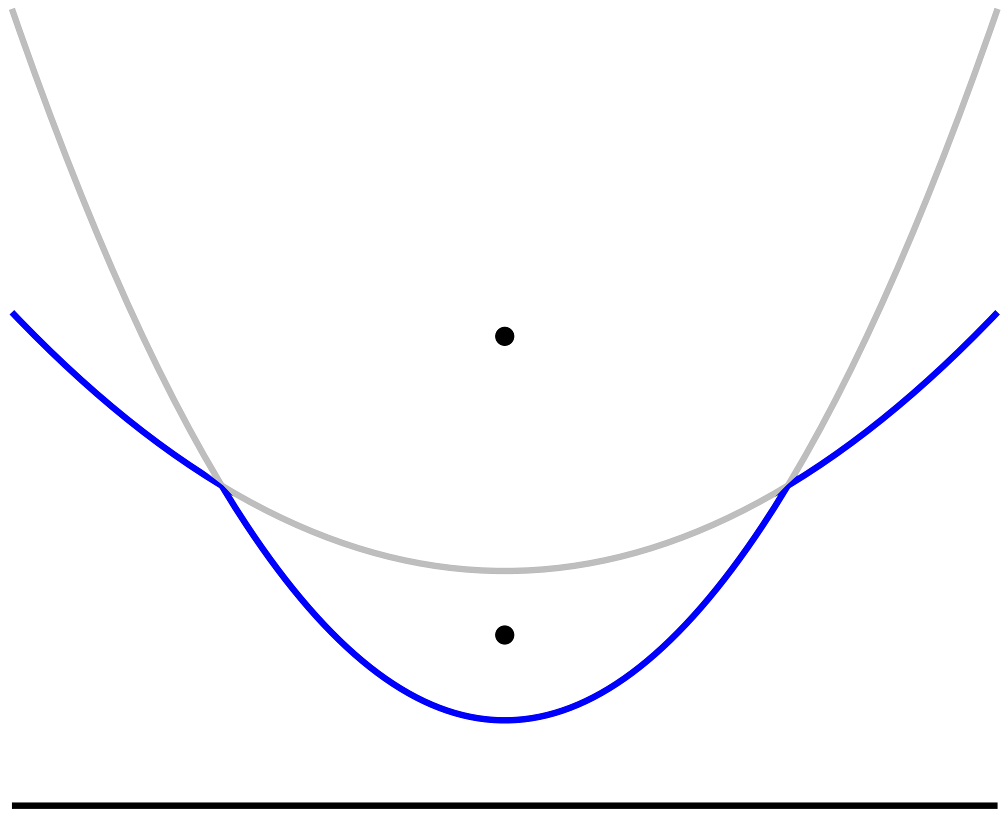
Durchschnittl. Komplexität einer Voronoi-Zelle?

Aufgabe 2

Beispiel: Eine Parabel mehr als einen Parabelbogen zu einer 'Beach-Line' beisteuert.

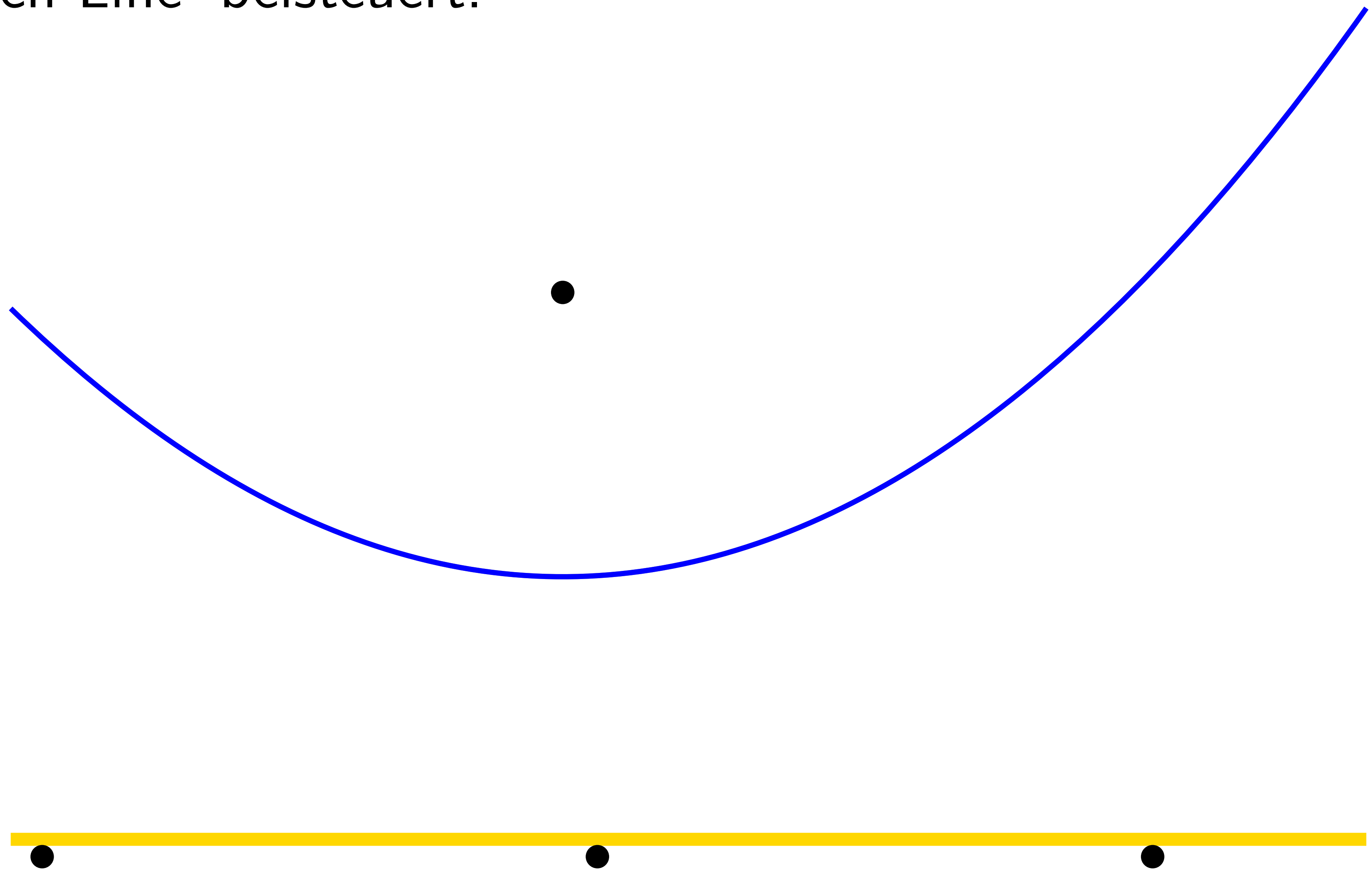
Aufgabe 2

Beispiel: Eine Parabel mehr als einen Parabelbogen zu einer 'Beach-Line' beisteuert.



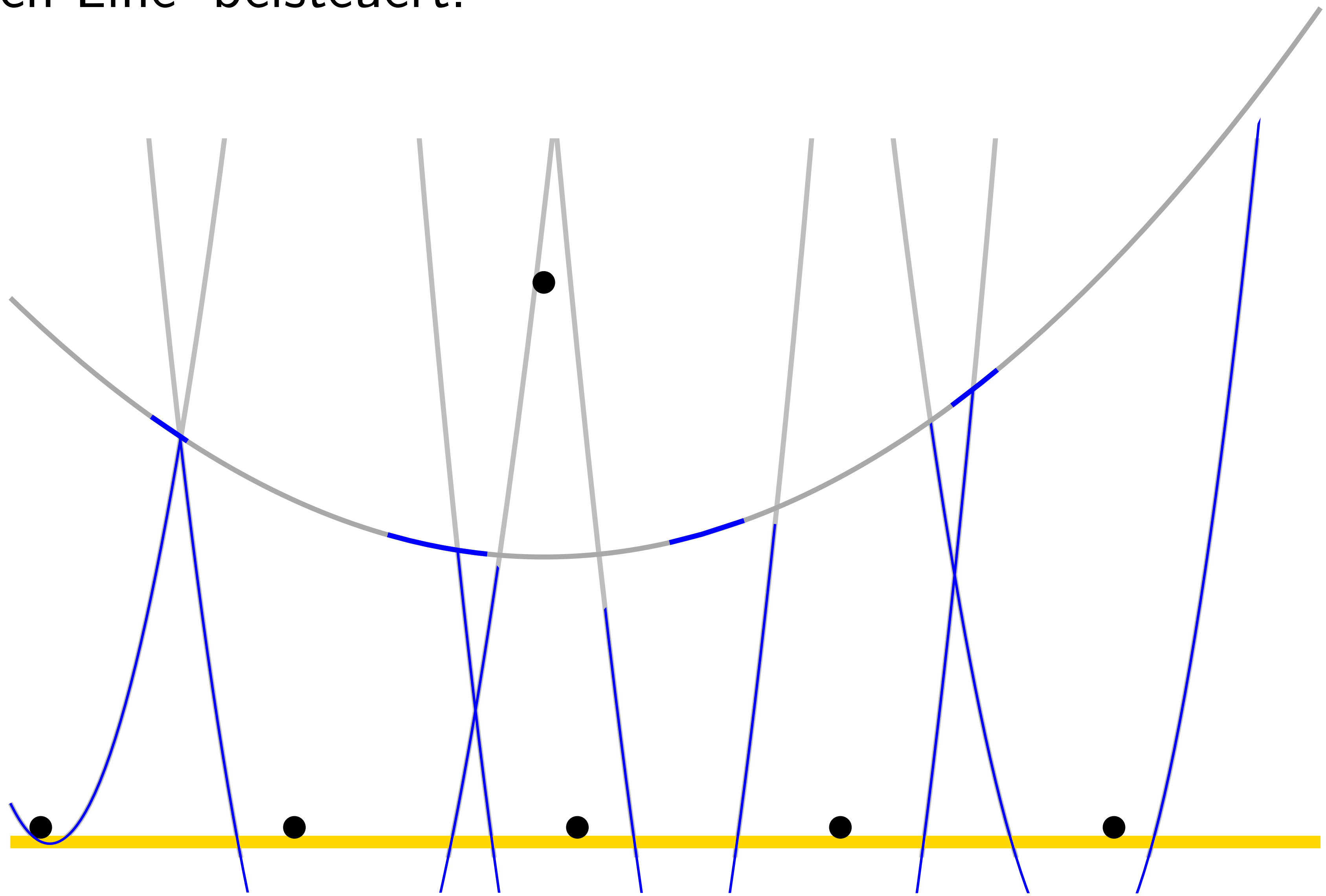
Aufgabe 2

Beispiel: Eine Parabel linear viele Parabelbögen zu einer 'Beach-Line' beisteuert.



Aufgabe 2

Beispiel: Eine Parabel linear viele Parabelbögen zu einer 'Beach-Line' beisteuert.



Aufgabe 3

Nächster Nachbar

Gegeben:

- Punktmenge P, $|P| = n$
- Voronoi-Diagramm zu P

Finde in $\mathcal{O}(n)$ zu jedem Punkt $p \in P$ seinen nächsten Nachbarn $a(p) \in P$.

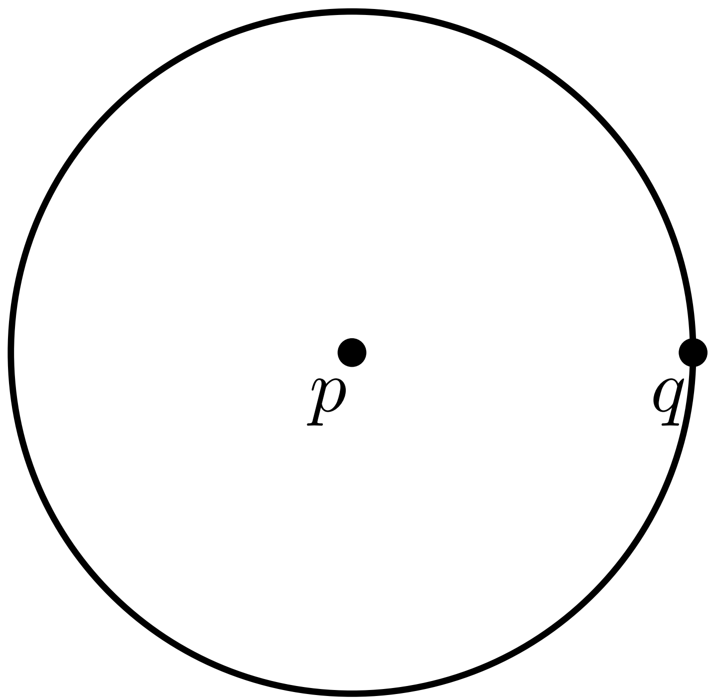
Aufgabe 3

Nächster Nachbar

Gegeben:

- Punktmenge P, $|P| = n$
- Voronoi-Diagramm zu P

Finde in $\mathcal{O}(n)$ zu jedem Punkt $p \in P$ seinen nächsten Nachbarn $a(p) \in P$.



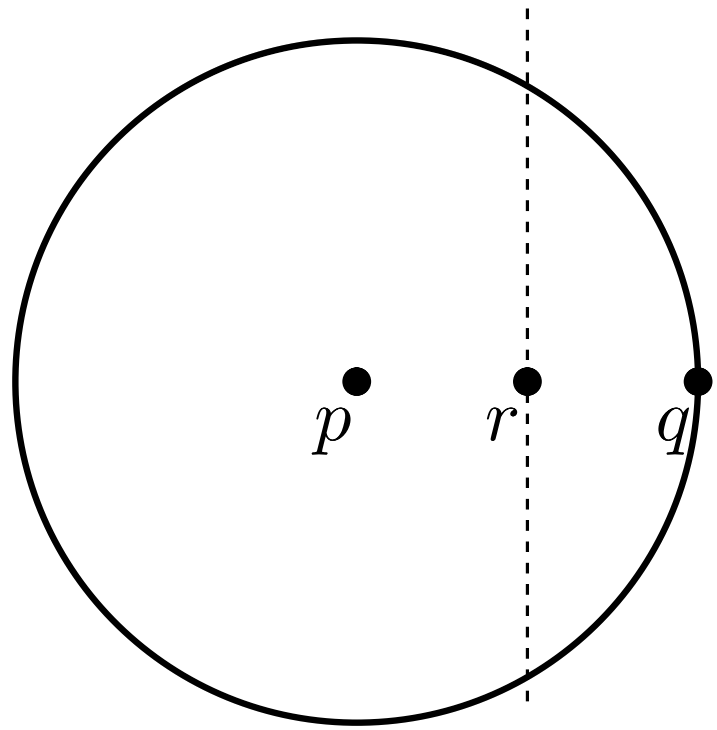
Aufgabe 3

Nächster Nachbar

Gegeben:

- Punktmenge P, $|P| = n$
- Voronoi-Diagramm zu P

Finde in $\mathcal{O}(n)$ zu jedem Punkt $p \in P$ seinen nächsten Nachbarn $a(p) \in P$.



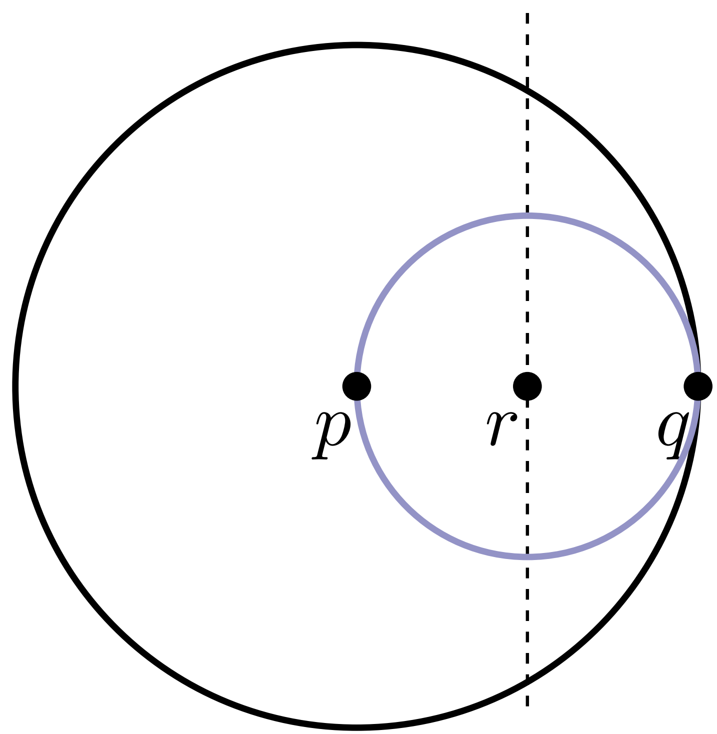
Aufgabe 3

Nächster Nachbar

Gegeben:

- Punktmenge P, $|P| = n$
- Voronoi-Diagramm zu P

Finde in $\mathcal{O}(n)$ zu jedem Punkt $p \in P$ seinen nächsten Nachbarn $a(p) \in P$.



Aufgabe 4

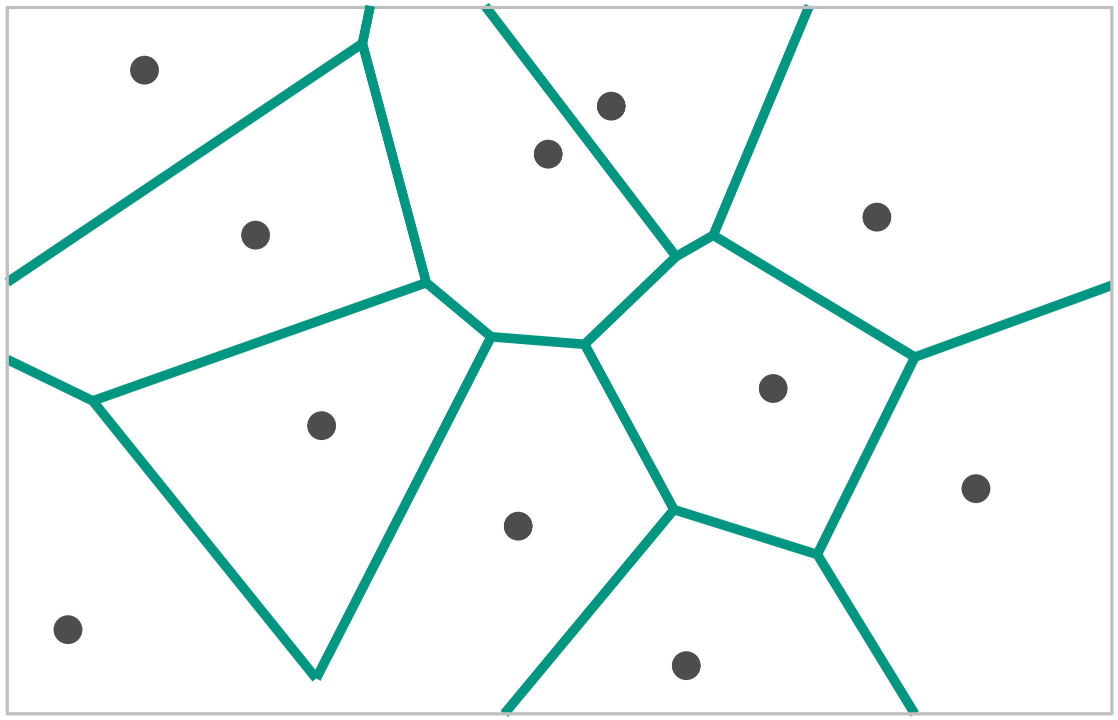
Atom-Kraftwerke

Finde Punkt der am Weitesten von allen AKWs entfernt ist.

Aufgabe 4

Atom-Kraftwerke

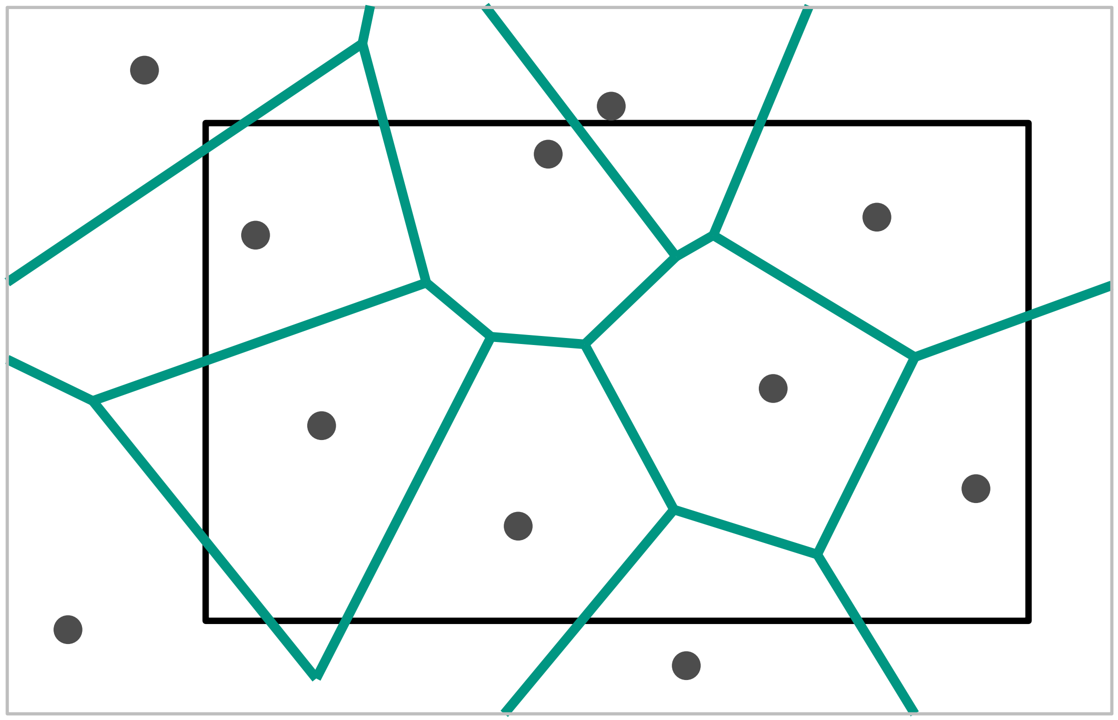
Finde Punkt der am Weitesten von allen AKWs entfernt ist.



Aufgabe 4

Atom-Kraftwerke

Finde Punkt der am Weitesten von allen AKWs entfernt ist.

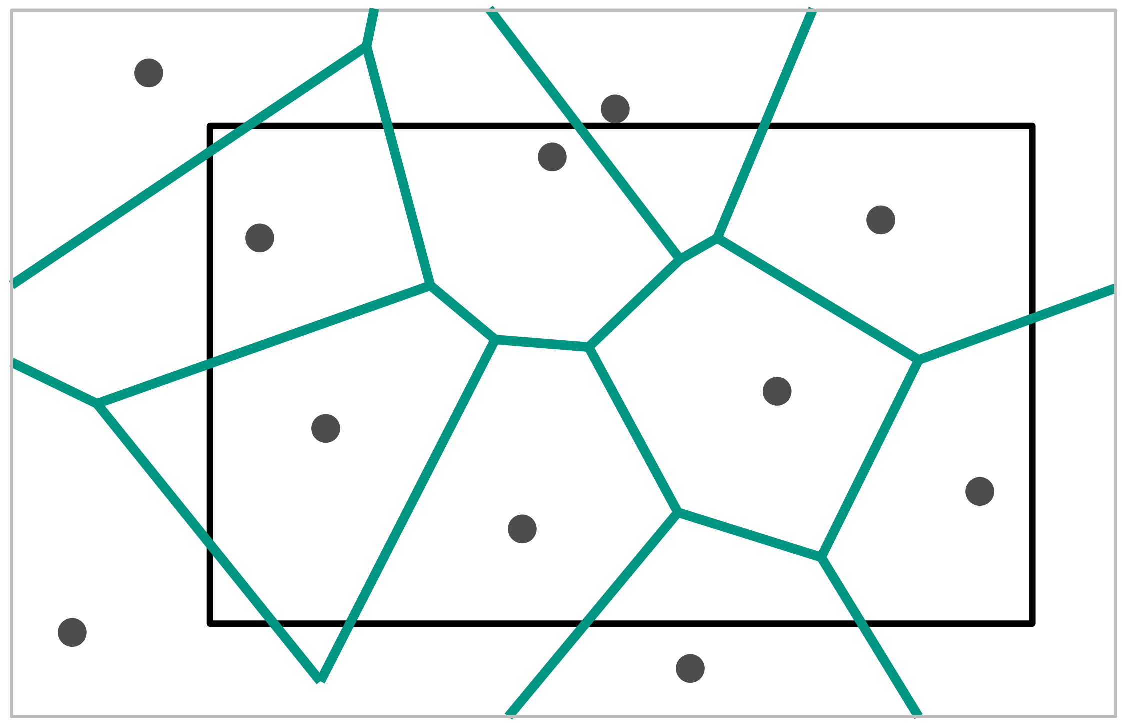


Aufgabe 4

Atom-Kraftwerke

Finde Punkt der am Weitesten von allen AKWs entfernt ist.

- Voronoi-Knoten
- Ecken des Rechtecks R
- Schnittpunkt R & Voronoi-Kanten



a) Kandidaten reichen aus

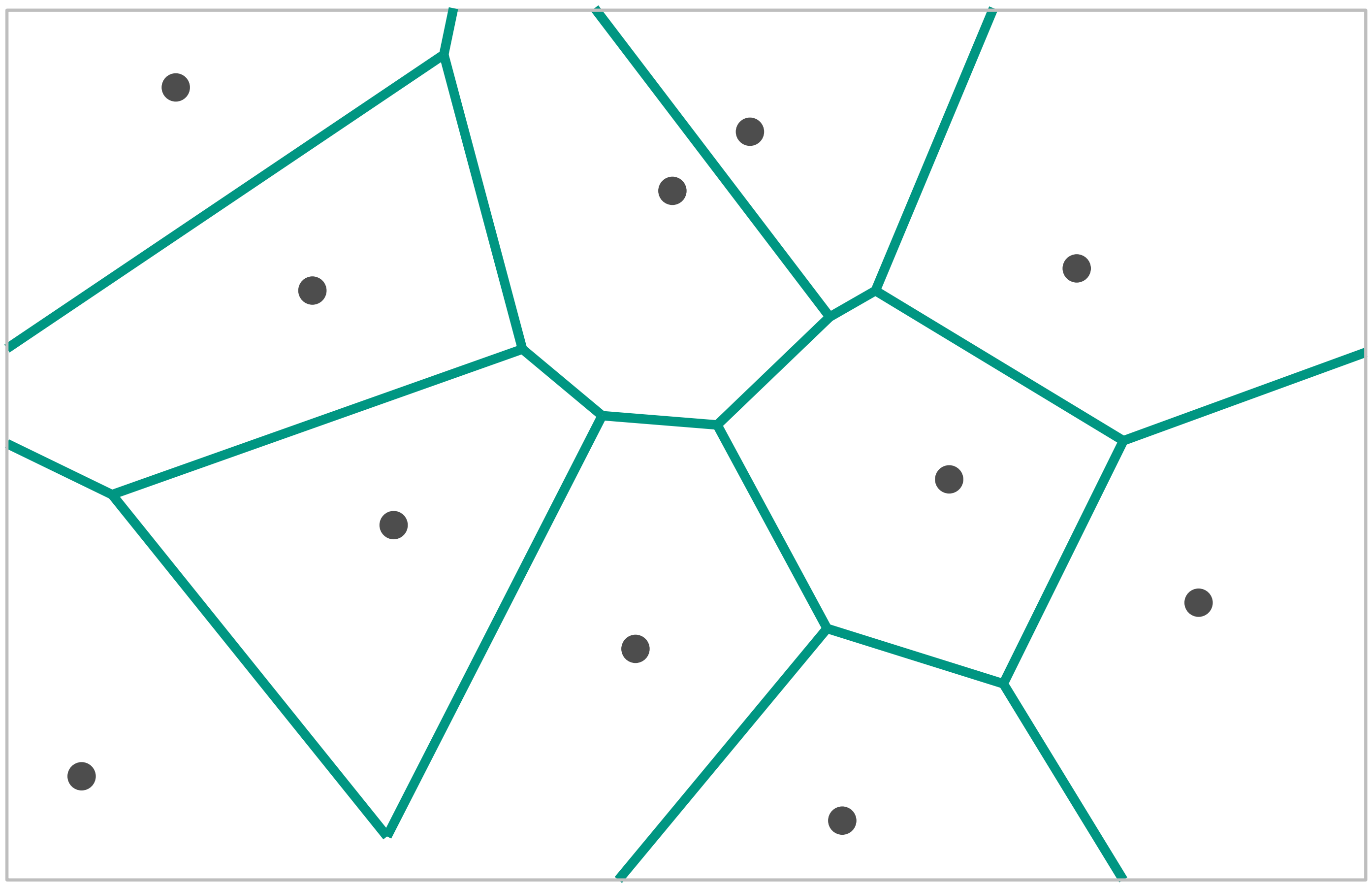
b) Algorithmus zur Lösung in $\mathcal{O}(n)$

Aufgabe 4

Atom-Kraftwerke

Finde Punkt der am Weitesten von allen AKWs entfernt ist.

Dieses mal: Statt Rechteck konvexes Polygon P mit m Knoten.

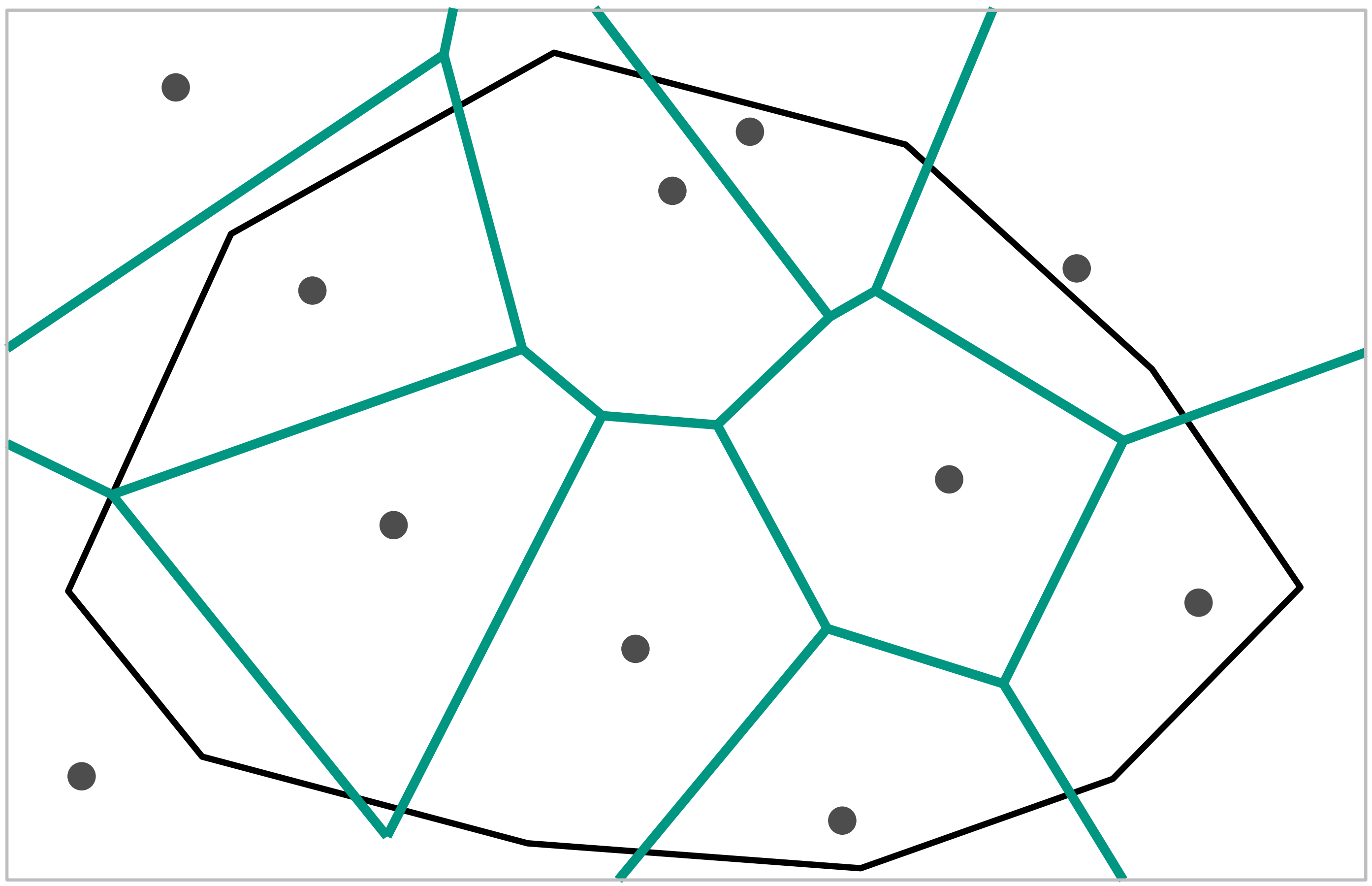


Aufgabe 4

Atom-Kraftwerke

Finde Punkt der am Weitesten von allen AKWs entfernt ist.

Dieses mal: Statt Rechteck konvexes Polygon P mit m Knoten.

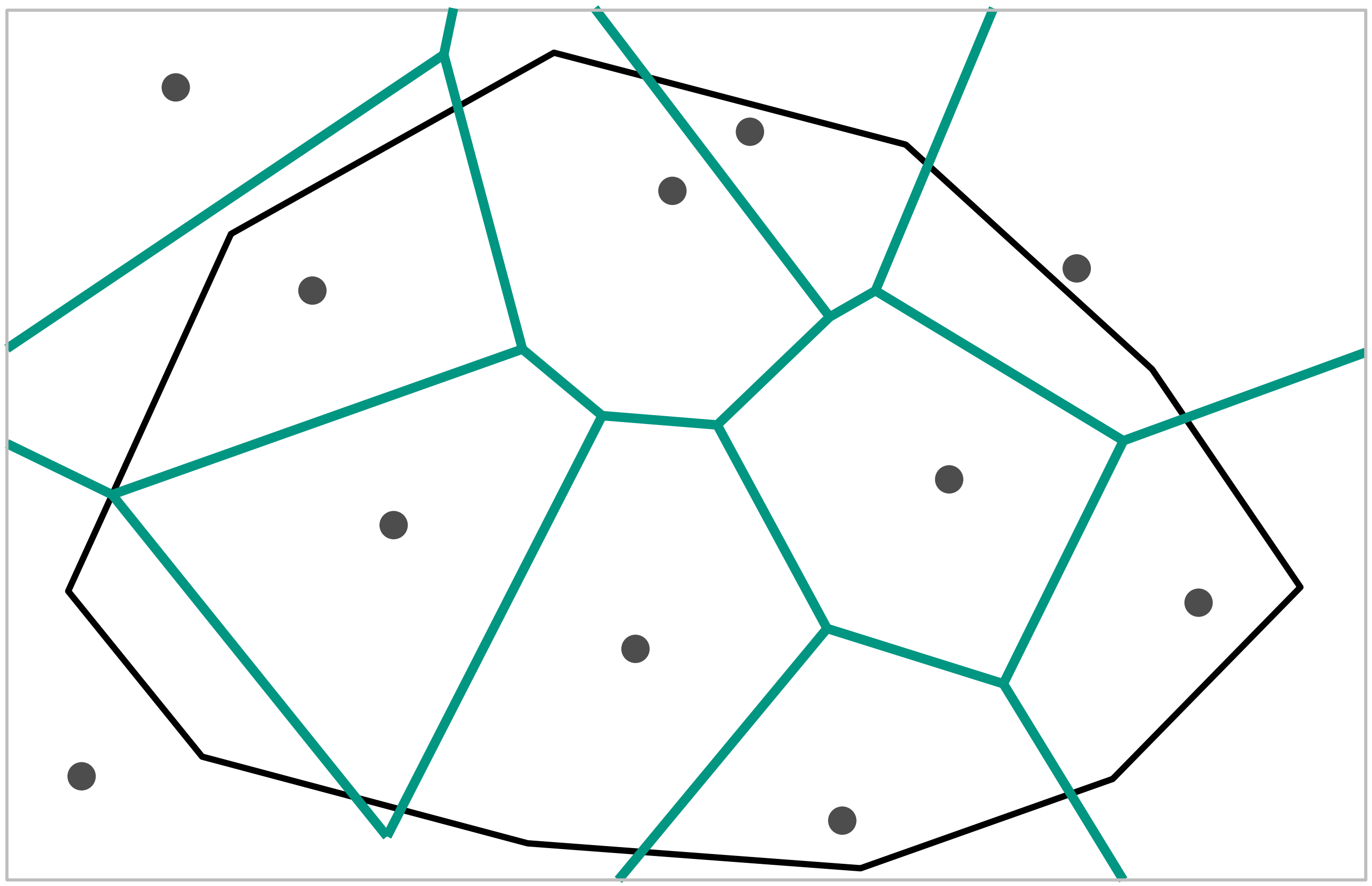


Aufgabe 4

Atom-Kraftwerke

Finde Punkt der am Weitesten von allen AKWs entfernt ist.

Dieses mal: Statt Rechteck konvexes Polygon P mit m Knoten.



Gesucht:
Algorithmus in $\mathcal{O}(n+m)$

Das war's!

Alles wie gehabt!

Nächster Termin:
Donnertag, 16.06, 10:15 Uhr
Raum 131, Gebäude 50.34