Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Prof. Dr. D. Wagner

Aufwärm-Übungsblatt 1

Algorithmen für Routenplanung, Sommer 2010

Ausgabe 12. April 2010
Abgabe keine

Problem 1: Eigenschaften kürzester Wege *

Gegeben sei ein einfacher, gewichteter und gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit einer nicht-negativen Gewichtsfunktion len : $E \to \mathbb{R}_0^+$. Weiterhin sei zu zwei beliebigen Knoten $s, t \in V$ ein kürzester Weg $\Pi(s, t) = (v_1, v_2, \ldots, v_k)$ mit $v_1 = s$ und $v_k = t$ gegeben.

(a) Zeigen Sie: Teilwege von kürzesten Wegen sind selbst kürzeste Wege. Das heißt für zwei $v_i, v_j \in \Pi(s, t)$ mit $i < j$ gibt es einen kürzesten Weg $\Pi(v_i, v_j)$ mit $\Pi(v_i, v_j) \subseteq \Pi(s, t)$.

(b) Zeigen Sie: Für zwei Knoten $s, t \in V$ gibt es immer einen *einfachen* kürzesten Weg $\Pi(s, t)$. Ein Weg $P = (v_1, \ldots, v_k)$ heißt einfach, wenn es keine zwei Indizes $1 \leq i, j \leq k$ in P mit $i \neq j$ gibt, so dass $v_i = v_j$.

Problem 2: Dijsktra's Algorithmus **

Gegeben sei ein einfacher, gewichteter und ungerichteter Graph $G = (V, E)$ mit einer nicht-negativen Gewichtsfunktion len : $E \to \mathbb{R}_0^+$.

(a) Beweisen Sie die Korrektheit das Stopkriteriums von Dijkstra's Algorithmus aus der Vorlesung.

Hinweis: Zeigen Sie dazu, dass zu einer s-t-Anfrage für jeden Knoten $v \in V$ nachdem er abgearbeitet wurde, das Distanzlabel $d[v]$ bei Dijkstra's Algorithmus die tatsächliche Distanz $d(s, v)$ enthält.

(b) Angenommen wir modifizieren Dijkstra's Algorithmus (ohne Stoppkriterium) so, dass zu einem Knoten $u \in V$ nicht länger alle Kanten $(u, v) \in E$ relaxiert werden, sondern lediglich eine geeignete Teilmenge der Kanten relaxiert wird.

Zeigen Sie: Zu jeder Anfrage gibt es eine Teilmenge $E' \subseteq E$ der zu relaxierenden Kanten, so dass Dijkstra's Algorithmus nur $|V| - 1$ Relaxierungsschritte durchführt, und trotzdem für alle Knoten $v \in V$ das Korrekte Ergebnis berechnet wird.

Sei nun len nicht länger nicht-negativ, das heißt es gilt len : $E \to \mathbb{R}$. Es gebe jedoch in G keine Kreise mit negativem Gewicht, das heißt für alle Wege $P = (v_1, \ldots, v_k)$ mit $v_1 = v_k$ ist $|P| \geq 0$.

(c) Geben Sie einen Graphen G und zwei ausgezeichnete Knoten $s, t \in V$ an, für die Dijkstra's Algorithmus nicht den kürzesten Weg findet.

Problem 3: Distanzmetrik in Graphen *

Gegeben sei ein ungerichteter, gewichteter Graph $G = (V, E)$ mit einer nicht-negativen Gewichtsfunktion $\text{len} : E \to \mathbb{R}_0^+$.

(a) Zeigen Sie, dass die durch len induzierte Distanzfunktion $d : V \times V \to \mathbb{R}$ auf G folgende Eigenschaften hat:

  (i) Nichtnegativität: $d(u, v) \geq 0$ für alle $u, v \in V$.

  (ii) Dreiecksungleichung: $d(u, v) + d(v, w) \geq d(u, w)$ für alle $u, v, w \in V$.

  (iii) Symmetrie: $d(u, v) = d(v, u)$ für alle $u, v \in V$ genau dann wenn G ungerichtet ist.

(b) Sei nun G ein *gerichteter* Graph. Konstruieren Sie basierend auf d eine neue Distanzfunktion $d' : V \times V \to \mathbb{R}$, die alle Eigenschaften aus Aufgabe (a) erfüllt.