Potentialspiele

- Fuer Pigous Beispiel gilt: PDA $=$ PDS
- In jedem Gleichgewicht sind die Kosten gleich
- Congestion games haben eine *Potentialfunktion f*
- *f* bildet Spielergebnisse ab auf **R**
- Hier: Verteilung von Spielern auf Kanten$\rightarrow$ **R**
- Jeder Gleichgewicht ist ein lokales Minimum dieser Funktion
- Nicht alle Spiele haben eine Potentialfunktion
- Auch wenn sie eine haben, sind die lokale Minima nicht immer gleich

Potentialfunktion für Netzwerkentwurf

- Strategievektor $S = (P_1, \ldots, P_k)$
- $k(e) =$ Anzahl der Spieler auf Kante e in S
- $cost(S) =$ Kosten vom gebauten Netzerk in S
- $u_i(S) =$ Nutzen von Spieler i in S
- $H_k = k$-te harmonische Zahl, $1 + 1/2 + \cdots + 1/k$
- Definition der Potential:

$$\Psi_e(S) = c_e \cdot H_{k(e)} \tag{1}$$

$$\Psi(S) = \sum_e \Psi_e(S) \tag{2}$$

Eigenschaft von Ψ

Potentialeigenschaft: für $S' = (S_{-i}, P'_i)$ gilt

$$\Psi(S) - \Psi(S') = u_i(S') - u_i(S).$$

Beweis:

- $\forall e \in P_i \cap P'_i$ and $\forall e \notin P_i \cup P'_i$ gilt

$$\Psi_e(S) = c_e H_k(e) = \Psi_e(S')$$

- Änderungen in $\Psi = \sum_e \Psi_e$ gibt es nur für Kanten $e \in P_i$ und $e \in P'_i$

Eigenschaft von Ψ

- $\forall e \in P_i \backslash P_i'$, Spieler i spart

$$c_e/k_e = \Psi_e(S) - \Psi_e(S')$$

  in S'
- $\forall e \in P_i' \backslash P_i$, i zahlt

$$c_e/(k(e)+1) = \Psi_e(S') - \Psi_e(S)$$

  extra in S'
- $\Psi(S) = \sum_e \Psi_e(S)$: fertig

$\Psi(S)$ und $cost(S)$

e wird benutzt in Strategievektor S? Dann

$$\Psi_e(S) \geq c_e$$

weil jede Kante von mindestens 1 Spieler benutzt wird, und

$$\Psi_e(S) \leq H_k c_e$$

weil es insgesamt nur k Spieler gibt. Also gilt

$$cost(S) \leq \Psi(S) \leq H_k cost(S)$$

($\Psi_e(S) = 0$ für jede nicht benutzte Kante)

Gleichgewichte minimieren Potentialfunktion

Für jedes Potentialspiel gibt es mindestens ein reines NE, nämlich der Strategievektor S der $\Psi(S)$ minimiert, d.h., kein anderer reine Strategievektor ist besser

Beweis:

- Sei S ein reiner Strategievektor der $\Psi(S)$ minimiert
- Betrachte eine Abweichung eines Spielers i
- Neuer Strategievektor ist S', und $\Psi(S') \geq \Psi(S)$
- Weil $u_i(S') - u_i(S) = \Psi(S') - \Psi(S)$, nimmt u_i nicht zu
- Also ist S ein Nash-Gleichgewicht

Beste Antworte

- Betrachte irgendeinen Strategievektor S (mit nur reinen Strategien)
- Nehme an: ein Spieler der nicht zufrieden ist, ändert seine Strategie
- Er nimmt an, dass alle andere Spieler ihre Strategien nicht ändern
- Sucht die beste Antwort, die beste Strategie unter dieser Annahme
- Ψ wird abnehmen!
- Wir können das wiederholen, jedes Mal nimmt Ψ ab
- Am Ende finden wir ein **lokales Minimum** = ein NE

PDS für Potentialspiele

Falls in einem Potentialspiel $\exists A, B > 0$ sodass

$$\frac{cost(S)}{A} \leq \Psi(S) \leq B \cdot cost(S) \quad \forall S, \qquad \text{dann PDS} \leq AB$$

- Sei S ein reiner Strategievektor der $\Psi(S)$ minimiert
- Dann ist S ein NE
- Sei S^* ein Strategievektor mit optimalen Kosten, dann

$$\frac{cost(S)}{A} \leq \Psi(S) \leq \Psi(S^*) \leq B \cdot cost(S^*)$$

und deshalb $cost(S) \leq AB \cdot cost(S^*)$, qed.

PDS für Potentialspiele

Falls in einem Potentialspiel $\exists A, B > 0$ sodass

$$\frac{cost(S)}{A} \leq \Psi(S) \leq B \cdot cost(S) \quad \forall S, \qquad \text{dann PDS} \leq AB$$

Hier gilt:

$$cost(S) \leq \Psi(S) \leq H_k cost(S)$$

Also PDS $\leq H_k$ für Netzwerkentwurf
Untere Scranke ist auch H_k, also

$$\text{PDS} = H_k$$

PDS für Netzwerkentwurf: ungerichtete Kanten

- Bei ungerichteten Kanten funktioniert die untere Schranke von vorher nicht mehr (wieso nicht?)
- Die obere Schranke gilt aber noch! (Potentialfunktion ungeändert)
- Offene Frage: ist der PDS jetzt niedriger?
- Antwort JA bis jetzt nur für Sonderfälle (z.B. jeder Knoten ist eine Quelle oder Senke)
- Untere Schranken: 1.78 (Fiat et al. 2006), 1.83 (Christodoulou et al. 2009), 2.26 (Caragiannis et al. 2010!)