Quantifizierung der Ineffizienz von Equilibria

Marcus | Juli 2010

INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK
KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT)

Motivation

Bisher

- Nichtkooperative Spiele: jeder für sich, rational
  $\rightarrow$ Nash-Gleichgewicht
- Zielfunktion: z.B. sozialer Nutzen
- Zielfuntion oft schlechter als optimale Lösung

Zentrale Frage jetzt

- Wie hoch ist der Preis für Eigennützigkeit der Spieler?

Oder

- Wie viel besser wäre es koordiniert vorzugehen?

Wieder das Gefangenen-Dilemma

- Ein NE kann beliebig schlecht sein
- Beispiel: Prisoner's Dilemma ($N \to \infty$)

$1\backslash 2$	G	S
Gestehen	N N	$N+1$ 1
Schweigen	1 $N+1$	2 2

Preis der Anarchie

- Sei OPT der Wert einer optimalen zentralen Zuweisung
- Preis der Anarchie (PDA, Koutsoupias und Papdimitriou 1999):
$$\text{PDA} = \frac{\text{Schlechteste NE}}{\text{OPT}}$$
(Verhältnis der Zielfunktionswerte)
- Maximierungsprobleme (Gewinn): PDA ≤ 1
- Minimierungsprobleme (Kosten): PDA ≥ 1
- PDA $\approx 1 \Rightarrow$ Eigennutzigkeit der Agenten schadet nicht viel

vgl. Approximationsverhältnis, Kompetitivitätsverhältnis,...

Preis der Stabilität

- Nur **ein** schlechtes Gleichgewicht $\Rightarrow$ PdA weit weg von 1 (fast 0, oder sehr hoch)
- Alternative: Preis der Stabilität (PdS, Schulz und Stier Moses 2003):

$$\text{PdS} = \frac{\text{Bestes NE}}{\text{OPT}}$$

- Maximierungsprobleme (Gewinn): PdS ≤ 1
- Minimierungsprobleme (Kosten): PdS ≥ 1
- PdS ≈ 1? Dann **existiert** ein gutes Gleichgewicht
- Eine zentrale Autorität kann dieses NE vorschlagen
- Kein Agent wird abweichen wollen!

Existenz

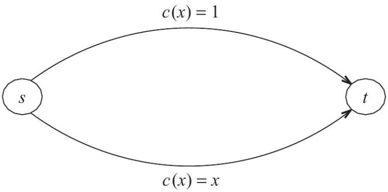
Bemerkung

- Bemerkung: bekanntlich gibt es nicht immer ein (pures) NE
- Wir betrachten hier nur Spiele mit puren NEs

Congestion Games

- Frage: in **welchen Spielen** ist der PdA fast 1?
- Selfish routing: sehr viele Spieler, Gesamtgröße 1
- (Jeder Spieler infinitesemal)
- Jede Kante hat eine Kostenfunktion $c(x)$ (x ist Gesamtgröße der Spieler auf der Kante)

Selfish Routing



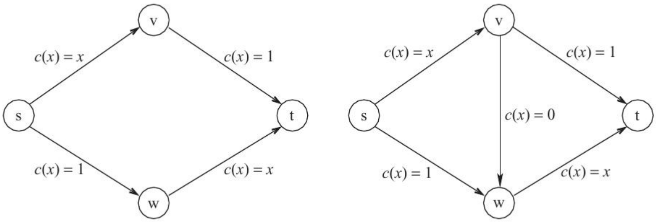
Pigou's Beispiel

- Für jeden Spieler ist die untere Kante günstiger $\Rightarrow$ Gesamtkosten 1
- Optimale Lösung: y oben, $1 - y$ unten, dann Kosten $y \cdot 1 + (1 - y)(1 - y) = y^2 - y + 1$, minimal wenn $2y - 1 = 0$, also $y = 1/2 \Rightarrow$ Kosten $= 4/3 \Rightarrow$ PDA $= 4/3$

PDA für Selfish Routing

- PDA für Selfish Routing ist 4/3
- Man kann zeigen: das gilt auch für allgemeine Netzwerke, so lange alle Kostenfunktionen **affin** sind ($ax + b$)
- PDA steigt also nicht, wenn der Graph größer wird
- Andere Kostenfunktionen: PDA $= \infty$ schon für ein Netzwerk mit zwei Kanten! (z.B. $c(x) = x^d$, d groß . . .)

Paradoxon von Braess



- Links: Spieler verteilen sich gleichmäßig oben und unten
- Rechts: alle durch die Mitte $\Rightarrow$ höhere Kosten!
- Eine Kante hinzufügen kann alle Agenten schaden
- Entdeckung (Braess) bei Sperrung der 42nd Street in NY

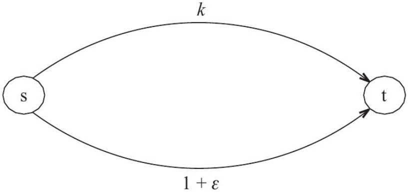
Bemerkungen

- Fluss im ursprünglichen Graphen ist immer noch eine mögliche Lösung wenn es neue Kanten gibt
- PDA gibt an, wie schlimm dieses Paradoxon sein kann (um wieviel sich die Congestion vermehrt)

Netzwerk-Entwurf

- Graph G hat Knoten und **mögliche** Kanten
- Jede Kante hat bestimmte Kosten
- k Spieler
- Jeder Spieler i hat Quelle s_i und Senke t_i
- Ziel von Spieler i: s_i mit t_i verbinden
- Spieler i wählt sich Pfad P_i aus ($i = 1, \ldots, k$)
- Netzwerk $\cup_i P_i$ wird gebaut
- Wenn j Spieler sich eine Kante teilen, teilen sie auch die Kosten!

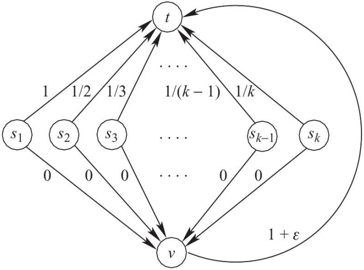
PdA für Netzwerkentwurf



- 2 NEs
- Es gibt ein NE wo alle Spieler die obere Kante benutzen
- Sie teilen sich die Kosten: jeder hat Kosten 1
- Kosten vom gebauten Netzwerk sind k
- Optimal ist, nur die untere Kante zu benutzen
- PdA $= k$ (für $\varepsilon \to 0$)
- optimale Lösung ist auch ein Nash-Gleichgewicht
  $\Rightarrow$ PdS $= 1$

PdS für Netzwerkentwurf

- Wie hoch ist der Preis der Stabilität?
- Wir betrachten zuerst gerichtete Graphen



- Untere Schranke: H_k, die k-te harmonische Zahl

$$H_k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k} \approx \log k$$

- Obere Schranke: auch H_k!

PdS für Netzwerkentwurf: ungerichtete Kanten

- Bei ungerichteten Kanten funktioniert die untere Schranke von vorher nicht mehr (wieso nicht?)
- Die obere Schranke gilt aber noch!
- Offene Frage: ist der PdS jetzt niedriger?
- Antwort JA bis jetzt nur für Sonderfälle (z.B. jeder Knoten ist eine Quelle oder Senke)
- Untere Schranken: 1.78 (Fiat et al. 2006), 1.83 (Christodoulou et al. 2009), 2.26 (Caragiannis et al. 2010!)