Algorithmen für Ad-hoc- und Sensornetze

Update zu VL 09 – VOm MIS zum CDS

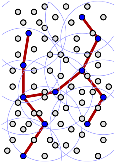
Dr. rer. nat. Bastian Katz

Lehrstuhl für Algorithmik I
Institut für theoretische Informatik
Universität Karlsruhe (TH)
Karlsruher Institut für Technologie

1. Juli 2009
(Version 2 vom 6. Juli 2009)

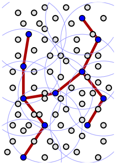
Erinnerung: Motivation (C)DS

- In dichten Sensornetzen sollen *Clusterheads* Koordination für abhängige Knoten übernehmen
- Clusterheads müssen alle Knoten abdecken (Dominating Set)
- Manchmal: Clusterheads müssen auch noch verbunden sein (Connected Dominating Set)
  - Bsp: Routing auf Backbone



Minimum (Connected) Dominating Set

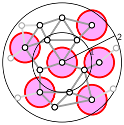
- (Zusammenhängende) Menge von Knoten, die
  - von jedem Knoten einen Nachbarn enthält
  - minimale Kardinalität hat
- NP-schwer zu berechnen
- Gute Approximation in allgemeinen Graphen verteilt sehr kompliziert, „greifbar“ war nur
  - eine schnelle & beliebig schlechte Approximation oder
  - eine beliebig langsame $(1 - \ln \Delta)$-Approximation



Bounded Independence Graphs

Beobachtung

In einem Unit-Disk-Graph können in der r-Hop-Nachbarschaft $N^r(u)$ jedes Knotens nur höchstens $12r^2$ Knoten liegen, die sich *paarweise* nicht sehen



- sowas heißt *Independent Set*
- Verallgemeinert: Bounded Independence Graphs (BIG
  - für andere (konstante) Werte von 12 & 2
  - bildet quasi alle denkbaren Sensornetze ab
  - wesentliches Merkmal: In konstanter Entfernung immer nur konstante Anzahl unabhängiger Knoten!

Maximal Independent Sets (MIS) vs. Minimum Dominating Sets (MDS)

- *Inklusionsmaximale* Independent Sets sind Dominating Sets
  - jeder Knoten muss einen Nachbarn im MIS haben
- wir wissen schon, dass MIS auch nicht „viel“ größer als ein Minimum Dominating Set sein können:

Erkenntnis

In BIGs (Sensornetzen) reicht es, ein inklusionsmaximales Independent Set zu finden, um ein kardinalitätsminimales Dominating Set bis auf einen konstanten Faktor zu approximieren!

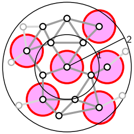
- Uns fehlt noch: Ein Algorithmus, der *inklusionsmaximale unabhängige Mengen (MIS)* schnell und verteilt berechnet!

Vom MIS zum CDS (Hausaufgabe)

Erinnerung: BIG

Ein Graph hat beschränkte Unabhängigkeit (BIG), wenn für konstantes c jede r-Hop-Nachbarschaft maximal $O(r^c)$ unabhängige Knoten liegen.

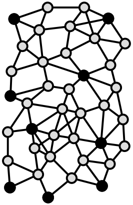
- bestes Beispiel: UDG
  - jede r-Hop-Nachbarschaft enthält maximal $12r^2$ unabhängige Knoten!



Vom MIS zum CDS (Hausaufgabe)

Erinnerung: BIG

Ein Graph hat beschränkte Unabhängigkeit (BIG), wenn für konstantes c jede r-Hop-Nachbarschaft maximal $O(r^c)$ unabhängige Knoten liegen.

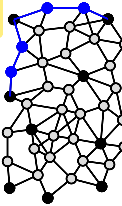


- bestes Beispiel: UDG
  - jede r-Hop-Nachbarschaft enthält maximal $12r^2$ unabhängige Knoten!
- jede konstante Nachbarschaft eines Knotens enthält nur konstante Anzahl von unabhängigen Knoten
- in BIG ist jedes MIS I eine konstante MDS-Approximation
- wie wird aus I eine konstante MCDS-Approximation?

Vom MIS zum CDS (Lösung)

MIS-Ergänzung

G ein BIG und I eine maximale unabhängige Menge. Für jedes Paar $u, v \in I$ mit $d_G(u, v) \leq 3$ wähle einen kürzesten Pfad und füge die Knoten zu I hinzu.

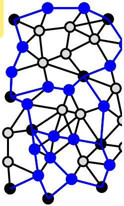


Vom MIS zum CDS (Lösung)

MIS-Ergänzung

G ein BIG und I eine maximale unabhängige Menge.
Für jedes Paar $u, v \in I$ mit $d_G(u, v) \leq 3$ wähle einen kürzesten Pfad und füge die Knoten zu I hinzu.

- das ist immer noch ein DS (klar)

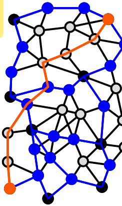


Vom MIS zum CDS (Lösung)

MIS-Ergänzung

G ein BIG und I eine maximale unabhängige Menge.
Für jedes Paar $u, v \in I$ mit $d_G(u, v) \leq 3$ wähle einen kürzesten Pfad und füge die Knoten zu I hinzu.

- das ist immer noch ein DS (klar)
- das ist ein *Connected* Dominating Set
  - betrachte beliebige Knoten $a, b \in I$ und beliebigen Pfad von $a = v_1, \dots, v_k = b$ in G

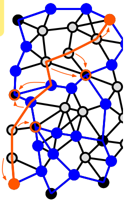


Vom MIS zum CDS (Lösung)

MIS-Ergänzung

G ein BIG und I eine maximale unabhängige Menge.
Für jedes Paar $u, v \in I$ mit $d_G(u, v) \leq 3$ wähle einen kürzesten Pfad und füge die Knoten zu I hinzu.

- das ist immer noch ein DS (klar)
- das ist ein *Connected* Dominating Set
  - betrachte beliebige Knoten $a, b \in I$ und beliebigen Pfad von $a = v_1, \dots, v_k = b$ in G
  - jeder Knoten v_i hat einen Knoten $u_i \in I$ in Abstand 1
  - betrachte Folge $a = u_0, \dots, u_k = b$ dieser Knoten

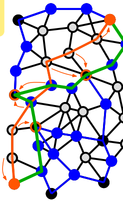


Vom MIS zum CDS (Lösung)

MIS-Ergänzung

G ein BIG und I eine maximale unabhängige Menge.
Für jedes Paar $u, v \in I$ mit $d_G(u, v) \leq 3$ wähle einen kürzesten Pfad und füge die Knoten zu I hinzu.

- das ist immer noch ein DS (klar)
- das ist ein *Connected* Dominating Set
  - betrachte beliebige Knoten $a, b \in I$ und beliebigen Pfad von $a = v_1, \dots, v_k = b$ in G
  - jeder Knoten v_i hat einen Knoten $u_i \in I$ in Abstand 1
  - betrachte Folge $a = u_0, \dots, u_k = b$ dieser Knoten
  - zwei aufeinanderfolgende u_i, u_{i+1} haben höchstens Abstand 3
  - $\Rightarrow$ Ergänzung enthält einen Pfad

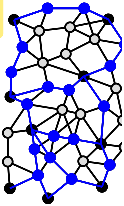


Vom MIS zum CDS (Lösung)

MIS-Ergänzung

G ein BIG und I eine maximale unabhängige Menge. Für jedes Paar $u, v \in I$ mit $d_G(u, v) \leq 3$ wähle einen kürzesten Pfad und füge die Knoten zu I hinzu.

- das ist immer noch ein DS (klar)
- das ist ein *Connected* Dominating Set
- das fügt nur $O(|I|)$ Knoten hinzu
  - jeder Knoten $u \in I$ verbindet sich zu maximal $12r^2$ anderen (in UDG, $c' \cdot 3^c$) mit Konstanten c', c in BIG)
  - für jede Verbindung werden höchstens 2 Knoten eingefügt



Vom MIS zum CDS (Lösung)

MIS-Ergänzung

G ein BIG und I eine maximale unabhängige Menge. Für jedes Paar $u, v \in I$ mit $d_G(u, v) \leq 3$ wähle einen kürzesten Pfad und füge die Knoten zu I hinzu.

- das ist immer noch ein DS (klar)
- das ist ein *Connected* Dominating Set
- das fügt nur $O(|I|)$ Knoten hinzu
- damit sind wir nach Ergänzung immer noch nur um konstanten Faktor von $|\mathrm{DS}_{\mathrm{OPT}}|$ entfernt, also sicher auch von $|\mathrm{CDS}_{\mathrm{OPT}}|$!