Algorithmen für Ad-hoc- und Sensornetze

Nachtrag zu VL 06 – Doubling Dimensions

Dr. rer. nat. Bastian Katz

Lehrstuhl für Algorithmik I
Institut für theoretische Informatik
Universität Karlsruhe (TH)
Karlsruher Institut für Technologie

10. Juni 2009

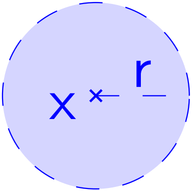
(Version 2 vom 12. Juni 2009)

Von Kreisen, Kugeln und Bällen

Definition

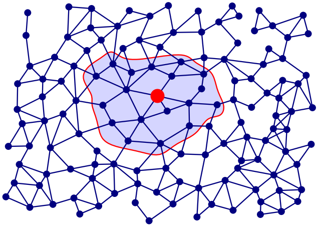
In einem metrischen Raum ist ein *Ball* $B(x, r)$ um ein Element x die Menge aller Elemente mit $d(x, y) \leq r$.

≫ $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ mit euklidischen Abständen



⇒ Kreise, Kugeln

≫ Graph G mit hop-Abständen $d_G(u, v)$



⇒ r-hop-Nachbarschaften

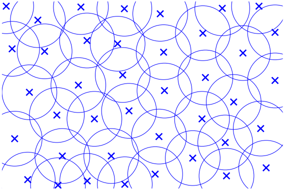
Von Netzen

Definition

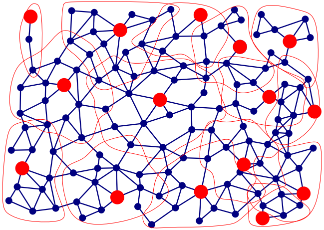
Ein ρ-Netz in einem metrischen Raum ist eine Teilmenge U von *Zentren* mit

- für jedes $v \in V$ gibt es ein $u \in U$ mit $v \in B(u, \rho)$
- alle $u, u' \in U$ gilt: $u' \notin B(u, \rho)$

- euklid. $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$



- Graphen



What is it good for?

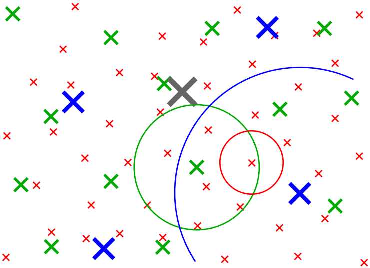
Angenommen, ich habe ρ-Netze für $\rho = 1, 2, 4, \ldots$, nämlich $U_1, U_2, U_4, \ldots$ und jedes x kennt jedes $u \in U_\rho$ mit $x \in B(u, \rho)$, wie hilft mir das?

Jedes $u' \in U_\rho$ kennt dichtestes $u \in U_{2\rho}$ ($u' \in B(u, 2\rho)$!)

- $\Rightarrow$ u' wird Kind von u!

Jedes Zentrum numeriert Kinder

- $\Rightarrow$ Eindeutige Adressen aller Zentren!



What is it good for?

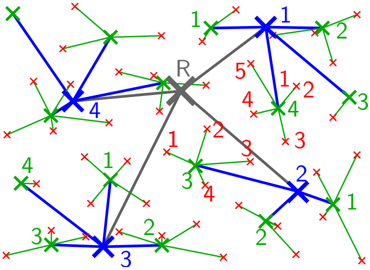
Angenommen, ich habe ρ-Netze für $\rho = 1, 2, 4, \ldots$, nämlich $U_1, U_2, U_4, \ldots$ und jedes x kennt jedes $u \in U_\rho$ mit $x \in B(u, \rho)$, wie hilft mir das?

Jedes $u' \in U_\rho$ kennt dichtestes $u \in U_{2\rho}$ ($u' \in B(u, 2\rho)$!)

$\Rightarrow$ u' wird Kind von u!

Jedes Zentrum numeriert Kinder

$\Rightarrow$ Eindeutige Adressen aller Zentren!

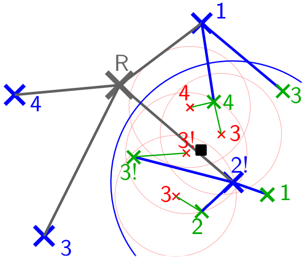


What is it good for? II

Angenommen, ich habe ρ-Netze für $\rho = 1, 2, 4, \ldots$, nämlich $U_1, U_2, U_4, \ldots$, eindeutige Adressen für jedes Zentrum und jedes x kennt jedes $u \in U_\rho$ mit $x \in B(u, 2\rho)$, wie hilft mir das?

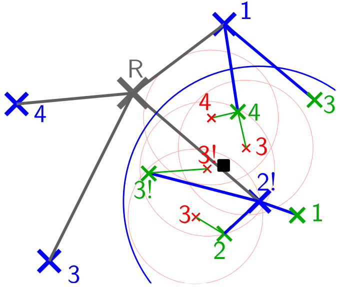
Jeder Knoten bezeichnet sich durch den Baum von Zentren, in deren *verdoppeltem Radius* er sich befindet!

≫ Die Namensgebenden Zentren werden markiert!



Beobachtung I

Haben zwei Elemente x, y kein gemeinsames Zentrum $u \in U_\rho$ in ihrem Baum, ist $d(x, y) > \rho$.

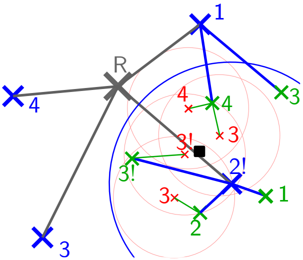


- Es gibt ein $u \in U_\rho$ mit $d(x, u) < \rho$.
- Wäre $d(x, y) < \rho$, wäre $y \in B(u, 2\rho)$, also u in beiden Bäumen.

Beobachtung II

Haben zwei Elemente x, y ein gemeinsames Zentrum $u \in U_\rho$ in ihren Bäumen, hat folgendes Routing von x zu y maximal Länge 7ρ

1. route ggf. zu gemeinsamem Zentrum u (2ρ)
2. route ggf. zu namensgebendem $u_y \in U_\rho$ (3ρ)
3. route zu namensgebenden $u'_y \in U_{\rho/2}$ (ρ)
4. route zu namensgebenden $u'_y \in U_{\rho/4} \ldots$ ($\rho/2, \ldots$)



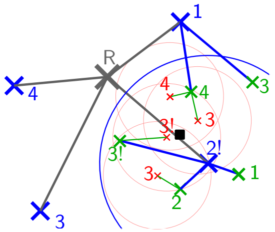
Erinnerung Doubling Dimension

Definition

Eine Metrik hat „Doubling Dimension“ α, wenn sich jeder ρ-Ball mit maximal 2^{α} $\rho/2$-Bällen abdecken lässt.

- Das impliziert, dass in jedem $B(\cdot, 2\rho)$ nur eine von α abhängige Zahl von Zentren eines ρ-Netzes liegen können (ohne Beweis)

Bei konstanter Doubling Dimension hat jeder Baum, durch den sich ein Knoten bezeichnet nur konstant viele Zentren auf jeder Ebene, und die Zahlen sind konstant beschränkt!
$\Rightarrow$ Labels mit $O(\log D)$ Bits,
Routingtabellen mit $O(\log D \log \Delta)$ Bits

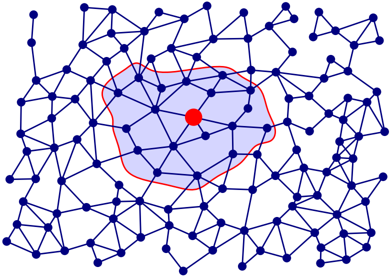


Doubling Dimension in UDG

Quizfrage

Hat jeder UDG konstant beschränkte Doubling Dimension?

≫ Nein, alle Knoten liegen in Entfernung $2k$ vom blauen Knoten, aber rote Knoten haben disjunkte k-Nachbarschaften!

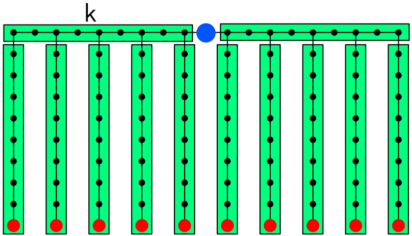


Doubling Dimension in UDG

Quizfrage

Hat jeder UDG konstant beschränkte Doubling Dimension?

- Nein, alle Knoten liegen in Entfernung $2k$ vom blauen Knoten, aber rote Knoten haben disjunkte k-Nachbarschaften!



$$\sum = (k+3) \cdot k + 1 \in \Theta(k^2)$$