Algorithmen für Ad-hoc- und Sensornetze

VL 04 – Topologiekontrolle

Dr. rer. nat. Bastian Katz

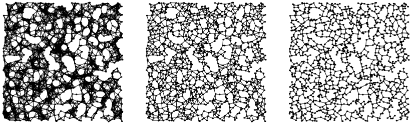
Lehrstuhl für Algorithmik I
Institut für theoretische Informatik
Universität Karlsruhe (TH)
Karlsruher Institut für Technologie

13. Mai 2009
(Version 2 vom 15. Mai 2009)

Organisatorisches / Erinnerung

- Vorlesung am 27. Mai fällt aus!
- Vorlesung vom 24. Juni findet statt am
  - Montag, 29. Juni, 11^{30} und am
  - Dienstag, 30. Juni 17^{30}

Topologiekontrolle



Was kann ich gewinnen, wenn Kommunikation einschränke?

Topologiekontrolle

Topologiekontrolle

Topologiekontrolle bezeichnet alle Techniken, die die Menge der aktiven Links zwischen Knoten verringern, um Eigenschaften des Kommunikationsnetzes herzustellen, ohne andere Eigenschaften zu zerstören.

- Zwei grundsätzliche Ansätze
  - Verringern der Sendeleistung der Knoten
  - Beschränkung auf ausgewählten Subgraphen

TK ist die Kunst, genug, aber nicht zu viel abzuschalten!

- In der Regel Balance zwischen mehreren Eigenschaften.

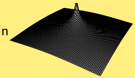
Heute

- Topologiekontrolle zur Sendeleistungsminimierung
- Lokale Topologiekontrolle & Spannereigenschaften
  - Geometrisch definierte Graphen und ihre Eigenschaften
  - XTC — Lokales Topologiekontrolle
- Topologiekontrolle zur Interferenzminimierung
  - Von leichten und schweren Problemen

Wiederholung: Sendeleistung

Erinnerung

Sendet ein Knoten mit Sendeleistung P, empfängt ein Knoten in Entfernung d das Signal mit einer Stärke P/d^α $(2 < \alpha \leq 6)$. Ein Knoten kann ein ungestörtes Signal dekodieren, wenn eine bestimmte Stärke überschritten wird.



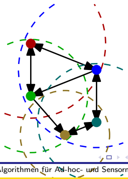
- Geeignet normiert heißt das: Knoten u erreicht Knoten v, genau dann, wenn $P_u \geq d(u,v)^\alpha$.

Kommunikationsgraph

Definition

Zu einer Menge von Knoten V in der Ebene ist eine *Reichweitenzuweisung* ist eine Abbildung $\mathrm{RA} : V \to \mathbb{R}_+$. Sie induziert einen gerichteten Kommunikationsgraphen $G_{\mathrm{RA}} = (V, E)$ mit $(u, v) \in E \Leftrightarrow d(u, v) \leq \mathrm{RA}(u)$

- entspricht Sende*leistungs*zuordnung $\mathrm{PA}(v) = \mathrm{RA}(v)^\alpha$
- eine Reichweitenzuordnung heißt *uniform*, wenn allen Knoten dieselbe Reichweite zugeordnet wird.
- Kommunikationsgraph dann symmetrisch!

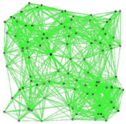


Maxpower-Graph

Definition

Der Maxpower-Graph ist der Graph der sich ergibt, wenn man jeden Knoten mit allen Knoten verbindet, mit denen er kommunizieren kann, wenn beide mit maximaler Sendeleistung $P_{\max}$ (d.h. maximaler Reichweite) senden.

- Maxpower-Graph ist Unit-Disk-Graph
- Topologiekontrolle macht nur dann Sinn, wenn man davon ausgeht, dass der Maxpower-Graph „zu dicht“ ist.



Sendeleistung vs Zusammenhang

Wie stark kann man die Reichweite der Knoten verringern, ohne dass der Kommunikationsgraph unzusammenhängend wird?

Problem: Minimale Uniforme Sendeleistung für Zusammenhang

Gegeben: zusammenhängender Maxpower-Graph $G = (V, E)$

Gesucht: Minimale uniforme Reichweitenzuordnung RA so dass G_{RA} zusammenhängend ist.

Minimale Spannbäume

Minimaler Spannbaum

Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph und $w : E \to \mathbb{R}_+$ eine Gewichtsfunktion. Ein Minimaler Spannbaum (MST) ist ein Spannbaum $T \subseteq E$, der $\sum_E w(E)$ minimiert.

Lemma

Die minimale uniforme Reichweite für Zusammenhang entspricht der maximalen Länge einer Kante in einem minimalen Spannbaum T mit euklidischem Abstand als Gewichtsfunktion.

- Gibt es einen zusammenhängenden Graphen nur mit kürzeren Kanten, dann gibt es auch einen Spannbaum T' nur mit kürzeren Kanten. Entferne die längste Kante aus T und füge die Kante aus T' hinzu, die die beiden Teilbäume verbindet. Das verringert das Gesamtgewicht in T im Widerspruch zu „T ist MST".

MSTs verteilt berechnen

Satz (vorerst ohne Beweis...)

Es gibt einen verteilten Algorithmus zur Bestimmung eines Minimalen Spannbaums mit Laufzeit in $O(n)$ und Nachrichtenkomplexität $O(n \log n + m)$.

- Berechne MST, propagiere maximale Kantenlänge
- MSTs sind extrem wertvoll (im Hinterkopf behalten)

Das löst das Reichweitenzuordnungsproblem für uniforme Reichweiten, aber was ist, wenn wir unterschiedliche Sendeleistungen zulassen und Durchschnitt minimieren wollen?

Reichweitenzuordnung

Problem: Energieoptimale Reichweitenzuordnung

Gegeben: zusammenhängender Maxpower-Graph $G = (V, E)$

Gesucht: Reichweitenzuordnung RA mit minimaler Gesamtleistung $\sum_{v \in V} \mathrm{RA}(v)^\alpha$, bei der G_{RA} stark zusammenhängend ist.

- minimiert auch durchschnittliche Sendeleistung
- muss nicht unbedingt symmetrisch sein

Eine gute und eine schlechte Nachricht

Die schlechte zuerst...

Satz (ohne Beweis)

Die Bestimmung einer energieoptimalen Reichweitenzuordnung ist NP-schwer.

...und jetzt die gute:

Satz

Ist T ein minimaler Spannbaum in G für $w(\{u,v\}) = d(u,v)^\alpha$, dann approximiert

$$\mathrm{RA}_T(u) := \max_{\{u,v\}\in T} d(u,v)$$

eine optimale Lösung bis auf einen Faktor 2.

Beweis, Teil I

Lemma

Sei T ein MST und $\overline{\mathrm{RA}}$ eine optimale Lösung für die energieoptimale Reichweitenzuordnung. Es gilt

$$\sum_{v\in V} \overline{\mathrm{RA}}(v)^\alpha > \sum_{\{u,v\}\in T} d(u,v)^\alpha \ .$$

- Gewicht eines MSTs ist untere Schranke für optimale Lösung
- Beweis:
  - Betrachte gerichteten Graphen $G_{\overline{\mathrm{RA}}}$
  - wähle bel. Knoten u und zu u gerichteten Baum $T_{\overline{\mathrm{RA}}}$ in $G_{\overline{\mathrm{RA}}}$.
  - Für jede Kante in $(u,v) \in T_{\overline{\mathrm{RA}}}$ ist $\overline{\mathrm{RA}}(u) \geq d(u,v)$.
  - $\sum_{v\in V} \overline{\mathrm{RA}}(v)^\alpha > \sum_{(u,v)\in T_{\overline{\mathrm{RA}}}} d(u,v)^\alpha \geq \sum_{\{u,v\}\in T} d(u,v)^\alpha$
  - (ungerichtet ist $T_{\overline{\mathrm{RA}}}$ ein Spannbaum)

Beweis, Teil II

Lemma

Sei T ein (beliebiger) Baum in G für. Dann ist

$$\sum_{v\in V} \mathrm{RA}_T(u)^\alpha \leq 2 \sum_{\{u,v\}\in T} d(u,v)^\alpha$$

- Erinnerung: $\mathrm{RA}_T(u) = \max_{\{u,v\}\in T} d(u,v)$
- Beweis:
  - für jedes $v \in V$ ist

$$\begin{aligned}\mathrm{RA}_T(v)^\alpha &= \Big(\max_{\{u,v\}\in T} d(u,v)\Big)^\alpha \\ &= \max_{\{u,v\}\in T} d(u,v)^\alpha \leq \sum_{\{u,v\}\in T} d(u,v)^\alpha\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ $\sum_{v\in V} \mathrm{RA}_T(v)^\alpha \leq \sum_{v\in V, \{u,v\}\in T} d(u,v)^\alpha = 2\sum_{\{u,v\}\in T} d(u,v)^\alpha$

Beweis (Zusammenbau)

Satz

Ist T ein minimaler Spannbaum in G für $w(\{u,v\}) = d(u,v)^\alpha$, dann approximiert

$$\mathrm{RA}_T(u) := \max_{\{u,v\}\in T} d(u,v)$$

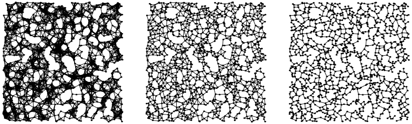
eine optimale Lösung bis auf einen Faktor 2.

- Aus Teil I: $\sum_{v\in V} \overline{\mathrm{RA}}(v)^\alpha > \sum_{\{u,v\}\in T} d(u,v)^\alpha$
- Aus Teil II: $\sum_{v\in V} \mathrm{RA}_T(u)^\alpha \leq 2\sum_{\{u,v\}\in T} d(u,v)^\alpha$

$\Rightarrow$

$$\sum_{v\in V} \mathrm{RA}_T(u)^\alpha < 2\sum_{v\in V} \overline{\mathrm{RA}}(v)^\alpha$$

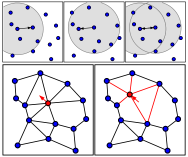
TK durch Auswahl von aktiven Links



Topologiekontrolle durch Beschränkung auf Kommunikationsteilgraphen G'

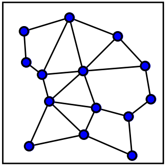
Gegeben einen Maxpower-Graph, was spricht dafür, was kann man gewinnen, wenn man bestimmte Kanten ignoriert? Was spricht dagegen?

„Neutrale Anforderungen“



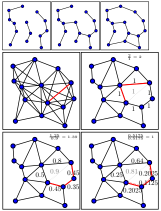
- Symmetrie
  - Voraussetzung für viele Protokolle
  - Einfach herzustellen?
- Lokale Definition
  - Verteilte Berechnung
  - schnelle Anpassung bei Mobilität

Gründe für Einschränkungen



- Planarität
  - Vereinfacht Routing
- Geringer Knotengrad
  - Senkt Overhead
  - durchschnittlich oder im Maximum

Gründe gegen Einschränkungen



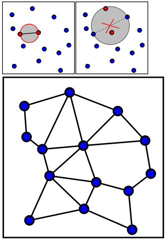
- Erhalt von Zusammenhang
- Wege können sich verlängern

Definition

Der Spannfaktor eines Teilgraphen G' ist maximale Verhältnis der Längen der kürzesten Wege zwischen zwei Knoten a, b in G' und G.

- Nachbarn in G zu betrachten reicht
- *Länge* eines Pfades P dabei
  - Anzahl der Kanten $\sum_P 1$
  - Euklidische Länge $\sum_P d(u, v)$
  - Kosten (Energie) $\sum_P d(u, v)^\alpha$

Erinnerung: Gabriel Graph



Gabriel Graph

Eine Kante ist im GG gdw. der Umkreis der Kante keine weiteren Knoten enthält.

GG von *UDG*:

- ≫ einfach lokal zu entscheiden
- ≫ planar, zshg., Durchschnittsgrad?
- ≫ Maximalgrad $n-1$! (Warum?)
- ≫ Entfernungsspannfaktor $O(\sqrt{n})$ (o.B.)
- ≫ Energiespannfaktor? 1! (für $\alpha \geq 2$)

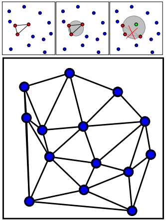
Energiespannfaktor GG-Einschränkung

Satz

Schränkt man einen zusammenhängenden UDG (V, E) auf Kanten des GG ein, bleiben (für $\alpha \geq 2$) alle energieoptimalen Pfade erhalten.

- ≫ Annahme: Es gibt $\{u, v\} \in E$, so dass günstigster Pfad wegfällt
- ≫ wähle solches Paar mit minimalem Abstand
- ≫ günstigster Pfad muss direkte Verbindung gewesen sein
  - ≫ günstigster Pfad kann keine längere Kante enhalten haben
  - ⇒ alle Paare auf dem Pfad haben ihre optimalen Wege behalten
- ⇒ $\{u, v\}$ ist Weggefallen wegen eines Knotens im Umkreis
- ≫ dann war die direkte Verbindung nicht günstigster Weg

Delaunay-Triangulierung



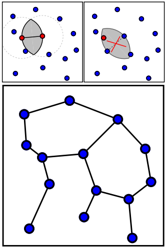
Delaunay-Triangulierung

Ein Dreieck ist in DT gdw. der Umkreis keine weiteren Knoten enthält.

DT von *UDG*:

- ≫ nicht lokal konstruierbar
- ≫ planar und trianguliert (ohne Beweis)
- ⇒ Durchschnittsgrad konstant
- ≫ *GG* ist Teilgraph von *DT* (o.B.)
- ≫ Entfernungsspannfaktor $O(1)$ (o.B.)

Relative-Neighborhood-Graphen



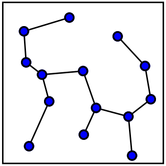
Relative-Neighborhood-Graphen

Eine Kante $\{u, v\}$ ist in RNG gdw. beide Knoten keinen gemeinsamen, näheren Nachbarn haben.

RNG von *UDG*:

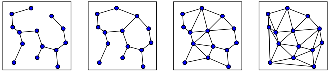
- ≫ einfach lokal zu entscheiden
- ≫ Maximalgrad 6 (in allg. Lage)
- ≫ Entfernungs- und Energiespannfaktor $n-1$
- ≫ *RNG* ist Teilgraph von *GG*

Euklidischer MST



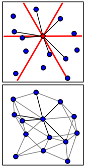
- EMST: MST mit euklidischen Abständen
  - zusammenhängend
  - Teilgraph von *RNG*: Kanten, die nicht in *RNG* sind, sind auch nicht in *MST*

Geometrische Graphen und Inklusionen



	MST	RNG	GG	DT
	planar	planar	planar	planar
	zshg	zshg	zshg	zshg
DurGrad	2	$O(1)$	$O(1)$	6
MaxGrad	6	6	$n-1$	$n-1$
Entf.	n-1	n-1	$O(\sqrt{n})$	$O(1)$
Energ.	n-1	n-1	1	1
lokal	—	✓	✓	—

(Noch mehr Graphen: Yao-Graph)



Yao-Graph

Jeder Knoten partitioniert Nachbarn in k Segmente und wählt dichtesten in jedem Segment. Kantenrichtungen werden dann symmetrisch ergänzt.

- lokal konstruierbar
- Maximalgrad $n-1$
- Konstante Spannfaktoren

Lokale Protokolle

Braucht man unbedingt Knotenpositionen, um von diesen Überlegungen zu profitieren? Was, wenn Knoten nur *irgendein symmetrisches* Maß für die Güte ihrer Nachbarn kennen?

- Entfernung (dicht=gut)
- Energie (billig=gut)
- Verbindungsqualität (gut=gut)

Was, wenn die Kosten nicht nur von den Positionen abhängen, sondern es Hindernisse gibt?

- MST gehen immer noch (aber nicht schnell), was geht sonst?

XTC: RNG ohne Geometrie

XTC-Algorithmus

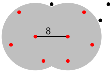
1. Jeder Knoten erstellt ein Ranking seiner Nachbarn nach Güte
2. Knoten teilen ihre Rankings den Nachbarn mit
3. ein Link $\{u, v\}$ wird ignoriert, wenn es einen Knoten w gibt, den u besser rankt als v und umgekehrt.

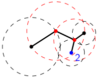
- für euklidische Abstände: RNG (planar, Maximalgrad,...)
- sonst immer noch symmetrisch und zusammenhängend
- sehr einfach umzusetzen
  - aus symmetrische Gewichte können sich Nachbarn einigen

Interferenz vs Zusammenhang

Erinnerung Interferenz

Wenn Knoten senden, dann stören sie den Empfang anderer Knoten. Ziel von Topologiekontrolle kann auch sein, *interferenzminimale* Teilgraphen zu identifizieren.



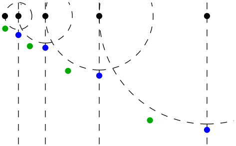


- Wie viele Knoten „stört" eine Kante?
- Wieviele Senderadien überdecken einen Knoten?

Welcher symmetrische, zusammenhängende Graph minimiert die maximale Interferenz?

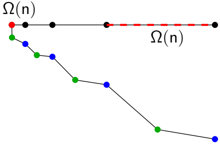
Ein böses Beispiel

- Alle bisherigen Topologien enthalten Verbindungen zu dichtesten Nachbarn, wie schlecht kann das sein?



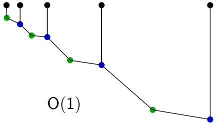
Ein böses Beispiel

- Alle bisherigen Topologien enthalten Verbindungen zu dichtesten Nachbarn, wie schlecht kann das sein?



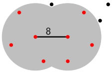
Ein böses Beispiel

≫ Alle bisherigen Topologien enthalten Verbindungen zu dichtesten Nachbarn, wie schlecht kann das sein?



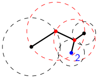
Place your bets!

Gesucht ist ein ungerichteter zusammenhängender Graph auf einer Menge von Punkten, der die maximale Interferenz / Summe der Interferenz minimiert. Wo ist das leicht, wo ist das NP-schwer? Bei Kanten- oder Knoteninterferenz?



≫ Wie viele Knoten „stört“ eine Kante?

≫ Leicht! MST mit Interferenz als Kantengewicht!



≫ Wieviele Senderadien überdecken einen Knoten?

≫ NP-schwer! (ohne Beweis)

Wrap-up

- ≫ Topologiekontrolle ist Kompromiss widersprüchlicher Ziele
  - ≫ manchmal sind die Ziele noch nicht einmal klar formuliert!
- ≫ TK zum Energiesparen
  - ≫ Wahl minimaler Sendeleistungen, ohne Zusammenhang zu verlieren
- ≫ TK durch lokale Entscheidungen gegen unnötige Links
  - ≫ Spanner-Eigenschaften vs Grad, Planarität, ..
  - ≫ Schnitt Geometrischer Graphen mit MaxPower-Graph
  - ≫ RNG/XTC: auch ohne Geometrie noch hilfreich
- ≫ TK zur Minimierung der Interferenz
  - ≫ selbst bei einfachen Modellen überraschend schwer

Literatur

1. Paolo Santi: *Topology Control in Wireless Ad Hoc and Sensor Networks*, Wiley, 2005
2. L. Kirouses, E. Kranakis, D. Krizanc, A. Pelc: *POwer consumption in packet radio networks*. In: Theoretical Computer Science **243**, 289–305, 2000
3. R. Wattenhofer, A. Zollinger: *XTC: A practical topology control algorithm for ad-hoc networks*. In: 18th IEEE Int'l Parallel and Distributed Processing Symposium (IPDPS'04), IEEE Press, 2004
4. M. Burhart, P. von Rickenbach, R. Wattenhofer, A. Zollinger: *Does Topology Control Reduce Interference?*. In Proceedings of the 5th ACM international symposium on Mobile ad hoc networking and computing (MobiHoc'04)