Algorithmen für Routenplanung

Übung 2

Thomas Pajor

Lehrstuhl für Algorithmik I
Institut für theoretische Informatik
Karlsruher Institut für Technologie
Universität Karlsruhe (TH)

25. Mai 2009

Aufgabe 1: Bidirektionale Suche

Gegeben: Graph $G = (V, E, \mathrm{len})$, kürzeste Wege eindeutig. Breche ab sobald Knoten v abgearbeitet wird der von der jeweils anderen Suche bereits abgearbeitet wurde. Ausgegebener Weg ist

$$P := [s, \dots, v, \dots, t]$$

Aufgabe 1: Bidirektionale Suche

Gegeben: Graph $G = (V, E, \text{len})$, kürzeste Wege eindeutig. Breche ab sobald Knoten v abgearbeitet wird der von der jeweils anderen Suche bereits abgearbeitet wurde. Ausgegebener Weg ist

$$P := [s, \ldots, v, \ldots, t]$$

Aufgabe:

(a) Zeigen Sie: P ist nicht notwendigerweise der kürzeste Weg.

Aufgabe 1: Bidirektionale Suche

Gegeben: Graph $G = (V, E, \text{len})$, kürzeste Wege eindeutig. Breche ab sobald Knoten v abgearbeitet wird der von der jeweils anderen Suche bereits abgearbeitet wurde. Ausgegebener Weg ist

$$P := [s, \ldots, v, \ldots, t]$$

Aufgabe:

(a) Zeigen Sie: P ist nicht notwendigerweise der kürzeste Weg.

(b) Der kürzeste Weg P' enthält ausschließlich Knoten aus $\overrightarrow{S} \cup \overleftarrow{S}$.

Aufgabe 1: Bidirektionale Suche

Gegeben: Graph $G = (V, E, \text{len})$, kürzeste Wege eindeutig. Breche ab sobald Knoten v abgearbeitet wird der von der jeweils anderen Suche bereits abgearbeitet wurde. Ausgegebener Weg ist

$$P := [s, \dots, v, \dots, t]$$

Aufgabe:

(a) Zeigen Sie: P ist nicht notwendigerweise der kürzeste Weg.

(b) Der kürzeste Weg P' enthält ausschließlich Knoten aus $\overrightarrow{S} \cup \overleftarrow{S}$.

(c) Geben Sie einen Algorithmus an der den kürzesten Weg findet.

Aufgabe 1: Bidirektionale Suche

Gegeben: Graph $G = (V, E, \text{len})$, kürzeste Wege eindeutig. Breche ab sobald Knoten v abgearbeitet wird der von der jeweils anderen Suche bereits abgearbeitet wurde. Ausgegebener Weg ist

$$P := [s, \ldots, v, \ldots, t]$$

Aufgabe:

(a) Zeigen Sie: P ist nicht notwendigerweise der kürzeste Weg.

(b) Der kürzeste Weg P' enthält ausschließlich Knoten aus $\overrightarrow{S} \cup \overleftarrow{S}$.

(c) Geben Sie einen Algorithmus an der den kürzesten Weg findet.

(d) Zeigen Sie, dass das Abbruchkriterium aus der Vorlesung $\mu \leq \text{minKey}(\overrightarrow{Q}) + \text{minKey}(\overleftarrow{Q})$ sogar stärker ist.

Aufgabe: A^*, Aufwärmübung

Gegeben: Graph $G = (V, E, \mathrm{len})$ und eine Potentialfunktion $\pi : V \to \mathbb{R}$.
Weiterhin sei $G_\pi := (V, E, \mathrm{len}_\pi)$ mit

$$\mathrm{len}_\pi(u, v) := \mathrm{len}(u, v) - \pi(u) + \pi(v).$$

Aufgabe: A^*, Aufwärmübung

Gegeben: Graph $G = (V, E, \mathrm{len})$ und eine Potentialfunktion $\pi : V \to \mathbb{R}$.
Weiterhin sei $G_\pi := (V, E, \mathrm{len}_\pi)$ mit

$$\mathrm{len}_\pi(u, v) := \mathrm{len}(u, v) - \pi(u) + \pi(v).$$

Aufgabe:

(a) Zeigen Sie: DIJKSTRA's Algorithmus auf G_π entspricht A^* mit Potentialen π.

Aufgabe: A^*, Aufwärmübung

Gegeben: Graph $G = (V, E, \text{len})$ und eine Potentialfunktion $\pi : V \to \mathbb{R}$.
Weiterhin sei $G_\pi := (V, E, \text{len}_\pi)$ mit

$$\text{len}_\pi(u, v) := \text{len}(u, v) - \pi(u) + \pi(v).$$

Aufgabe:

(a) Zeigen Sie: DIJKSTRA's Algorithmus auf G_π entspricht A^* mit Potentialen π.

(b) Welche Anforderung(en) müssen an π gestellt werden, damit beide Algorithmen den kürzesten Weg finden?

*Bidirektionaler A**

Gegegeben: Graph $G = (V, E, \text{len})$ und $\overrightarrow{\pi}$ auf G, bzw. $\overleftarrow{\pi}$ auf $\overleftarrow{G}$. Das Abbruchkriterium sei

$$\mu \leq \text{minKey}(\overrightarrow{Q}) + \text{minKey}(\overleftarrow{Q}).$$

Bidirektionaler A^*

Gegegeben: Graph $G = (V, E, \text{len})$ und $\overrightarrow{\pi}$ auf G, bzw. $\overleftarrow{\pi}$ auf $\overleftarrow{G}$. Das Abbruchkriterium sei

$$\mu \leq \text{minKey}(\overrightarrow{Q}) + \text{minKey}(\overleftarrow{Q}).$$

Aufgabe:

(a) Zeigen Sie dass i.A. nicht der KW gefunden wird, wenn $\overrightarrow{\pi}$ und $\overleftarrow{\pi}$ unabhängig gewählt werden.

Bidirektionaler A^*

Gegegeben: Graph $G = (V, E, \text{len})$ und $\overrightarrow{\pi}$ auf G, bzw. $\overleftarrow{\pi}$ auf $\overleftarrow{G}$. Das Abbruchkriterium sei

$$\mu \leq \text{minKey}(\overrightarrow{Q}) + \text{minKey}(\overleftarrow{Q}).$$

Aufgabe:

(a) Zeigen Sie dass i.A. nicht der KW gefunden wird, wenn $\overrightarrow{\pi}$ und $\overleftarrow{\pi}$ unabhängig gewählt werden.

(b) Beweisen Sie die Korrektheit des Abbruchkriteriums wenn $\overrightarrow{\pi} + \overleftarrow{\pi} = \text{const}$ gilt.

Der ALT-Algorithmus

Gegegeben: Graph $G = (V, E, \text{len})$, $|V| = n$ und $\ell \in V$ eine Landmarke.
Kürzeste Wege seien eindeutig.

Der ALT-Algorithmus

Gegegeben: Graph $G = (V, E, \text{len})$, $|V| = n$ und $\ell \in V$ eine Landmarke. Kürzeste Wege seien eindeutig.

Aufgabe:

(a) Zeigen Sie dass bei s-t-Anfragen, wobei t auf dem KW von s nach ℓ liegt, ALT ausschließlich Knoten auf dem kürzesten s-t-Weg abarbeitet.

Der ALT-Algorithmus

Gegegeben: Graph $G = (V, E, \text{len})$, $|V| = n$ und $\ell \in V$ eine Landmarke. Kürzeste Wege seien eindeutig.

Aufgabe:

(a) Zeigen Sie dass bei s-t-Anfragen, wobei t auf dem KW von s nach ℓ liegt, ALT ausschließlich Knoten auf dem kürzesten s-t-Weg abarbeitet.

(b) Geben Sie ein Gegenbeispiel zu (a) an, falls die KW nicht eindeutig sind.

Der ALT-Algorithmus

Gegegeben: Graph $G = (V, E, \text{len})$, $|V| = n$ und $\ell \in V$ eine Landmarke. Kürzeste Wege seien eindeutig.

Aufgabe:

(a) Zeigen Sie dass bei s-t-Anfragen, wobei t auf dem KW von s nach ℓ liegt, ALT ausschließlich Knoten auf dem kürzesten s-t-Weg abarbeitet.

(b) Geben Sie ein Gegenbeispiel zu (a) an, falls die KW nicht eindeutig sind.

(c) Zeigen Sie, der Suchraum von ALT kann sich um einen Faktor $\mathcal{O}(n)$ gegenüber DIJKSTRA's Algorithmus verschlechtern.