Algorithmen zur Visualisierung von Graphen

Aufwärtsplanare Zeichnungen Teil 2
Winkelauflösung in geradlinigen Zeichnungen

Vorlesung im Sommersemester 2009

Martin Nöllenburg

18.06.2009

Wiederholung

Für Facette f betrachte Winkel an lokalen Senken (Knoten mit zwei eingehende Kanten auf dem Rand von f) und an lokalen Quellen (Knoten mit zwei ausgehenden Kanten)

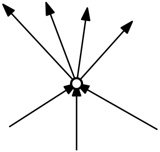
- $L(f)$ ist Anzahl großer Winkel
- $S(f)$ ist Anzahl kleiner Winkel
- $A(f)$ ist Anzahl lokaler Quellen ($=$ Anzahl lokaler Senken)

Es gilt

$$2A(f) = L(f) + S(f)$$

$$L(f) - S(f) = \begin{cases} -2 & f \neq f_0 \\ 2 & f = f_0 \end{cases} \qquad L(f) = \begin{cases} A(f) - 1 & f \neq f_0 \\ A(f) + 1 & f = f_0 \end{cases}$$

Wiederholung



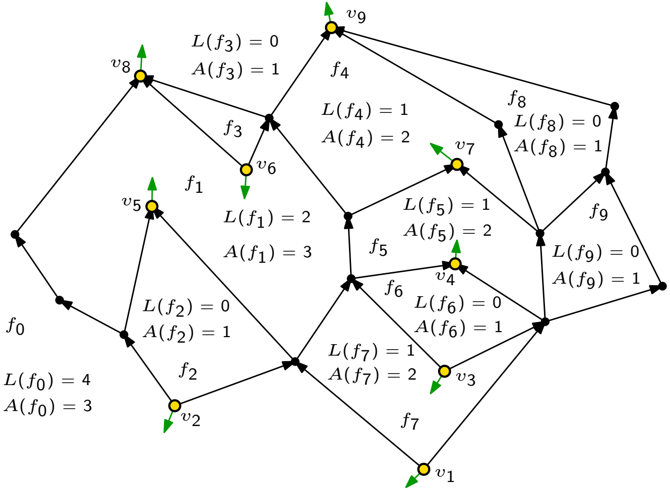
bimodaler Knoten

Definition

Eine Abbildung Φ, die jeder Quelle und jeder Senke eine inzidente Facette zuordnet heißt *konsistent* bzgl. der äußeren Facette f_0, falls

$$|\Phi^{-1}(f)| = \begin{cases} A(f) - 1 & \text{für } f \neq f_0 \\ A(f) + 1 & f = f_0 \end{cases}$$

Beispiel konsistente Facettenzuordnung



$\Phi(v_1) = f_0$
$\Phi(v_2) = f_0$
$\Phi(v_3) = f_7$
$\Phi(v_4) = f_5$
$\Phi(v_5) = f_1$
$\Phi(v_6) = f_1$
$\Phi(v_7) = f_4$
$\Phi(v_8) = f_0$
$\Phi(v_9) = f_0$

Flussnetzwerk zur Konstruktion von Φ

Definition Flussnetzwerk $N_{\mathcal{F},f_0}(D) = ((W, A_N); l; u; b)$

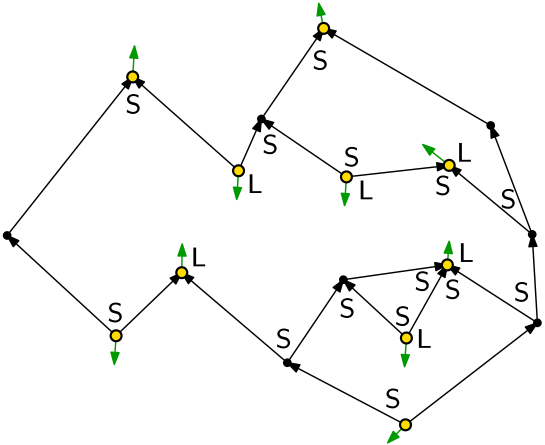
- $W = \{v \in V \mid v \text{ ist Quelle oder Senke}\} \cup \mathcal{F}$
- $A_N = \{(v, f) \mid v \text{ inzident zu } f\}$
- $l(a) = 0 \quad \forall a \in A_N$
- $u(a) = 1 \quad \forall a \in A_N$
- $b(q) = \begin{cases} 1 & \forall q \in W \cap V \\ -(A(q) - 1) & \forall q \in \mathcal{F} \setminus \{f_0\} \\ -(A(q) + 1) & q = f_0 \end{cases}$

Charakterisierung von Aufwärtsplanarität

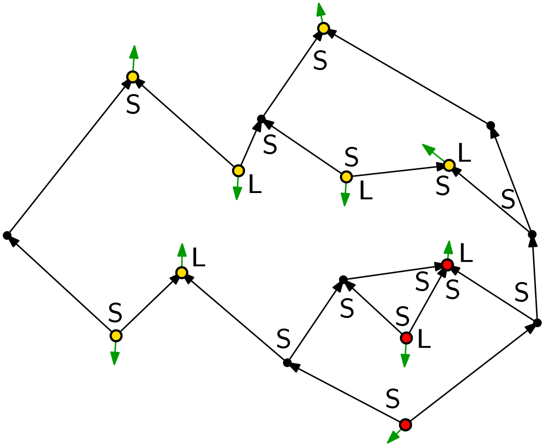
Satz 1:

Ein DAG $D = (V, A)$ mit kombinatorischer Einbettung $(\mathcal{F}, f_0)$ ist genau dann aufwärtsplanar, wenn er bimodal ist und eine f_0-konsistente Abbildung Φ von Quellen und Senken auf die Facetten besitzt.

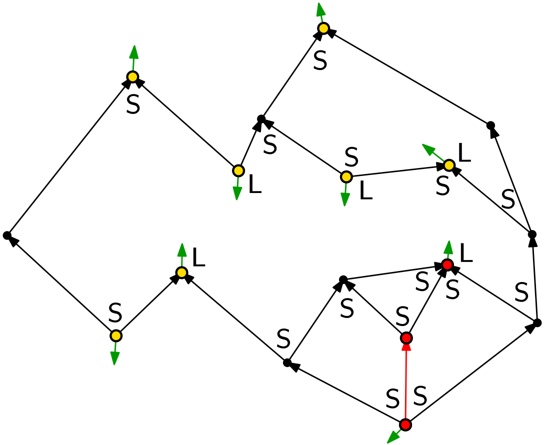
Beispiel Verfeinerung



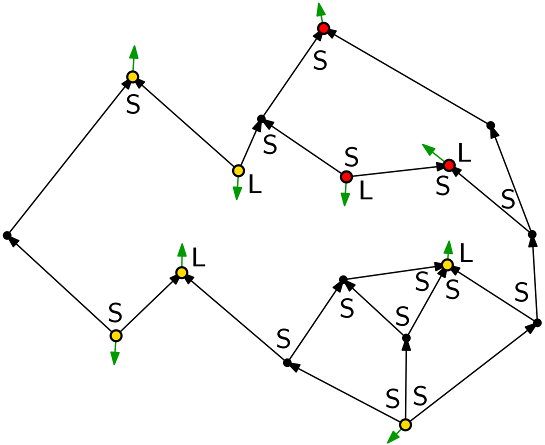
Beispiel Verfeinerung



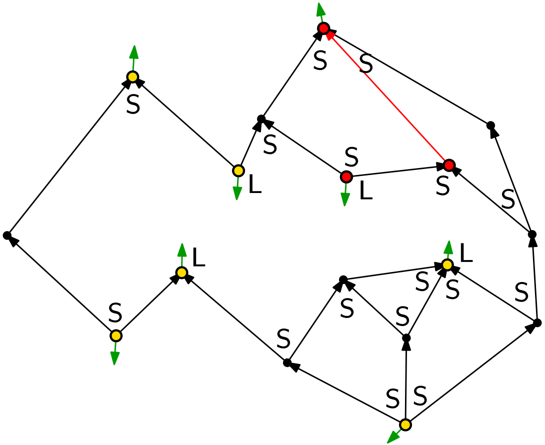
Beispiel Verfeinerung



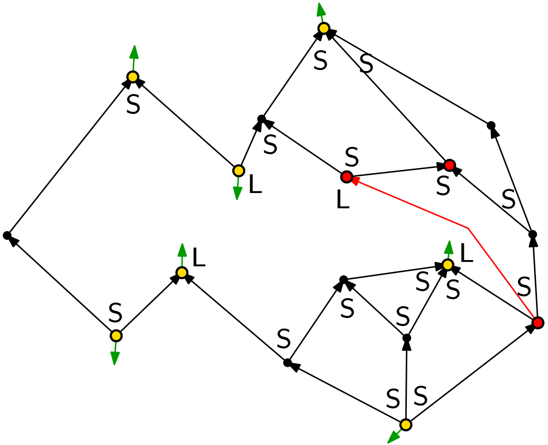
Beispiel Verfeinerung



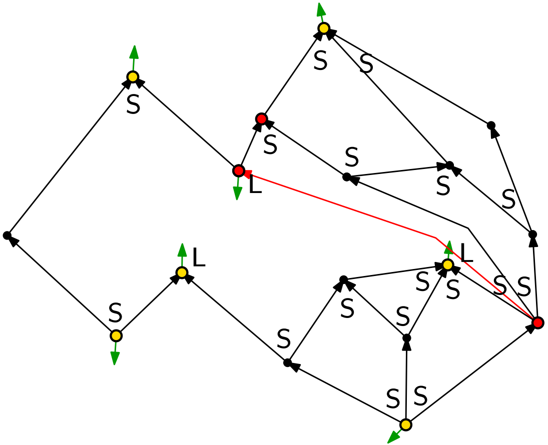
Beispiel Verfeinerung



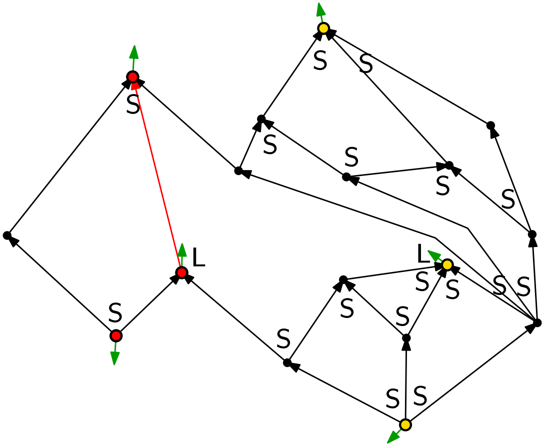
Beispiel Verfeinerung



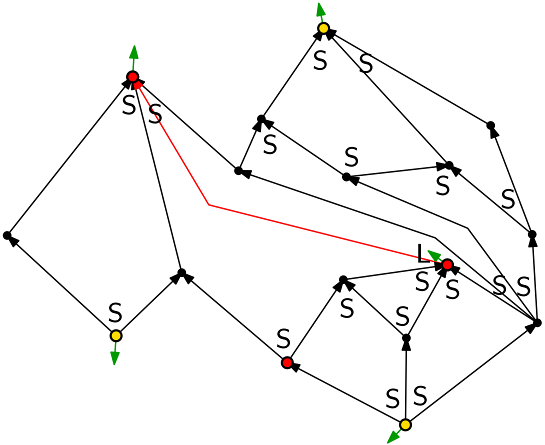
Beispiel Verfeinerung



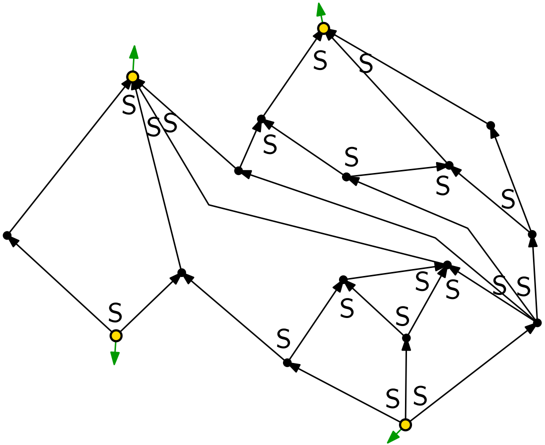
Beispiel Verfeinerung



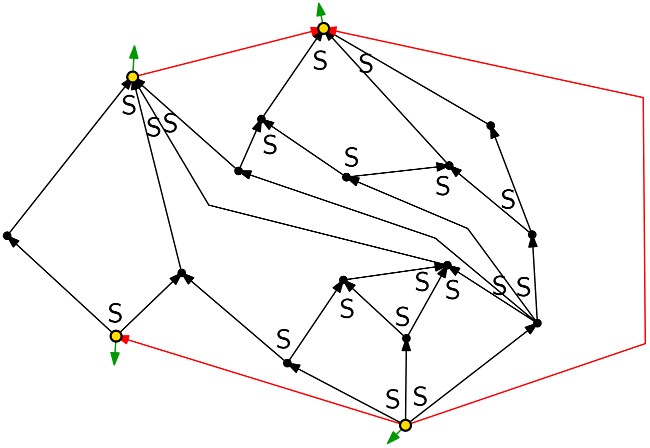
Beispiel Verfeinerung



Beispiel Verfeinerung



Beispiel Verfeinerung



Gegenbeispiel Lokalkonsistenz