Algorithmen zur Visualisierung von Graphen

Aufwärtsplanare Zeichnungen

Vorlesung im Sommersemester 2009

Martin Nöllenburg

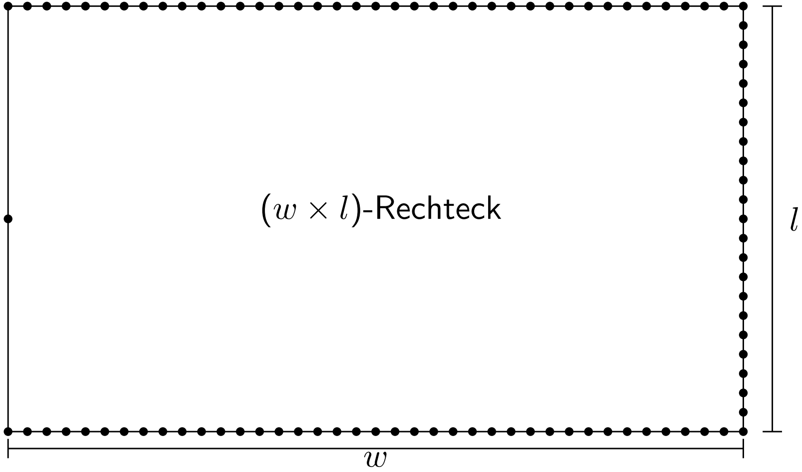
04.06.2009

Nachtrag Kompaktierung

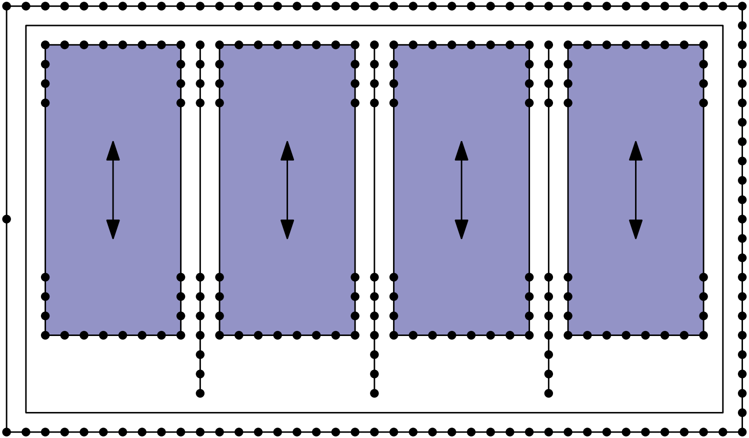
Satz: (Patrignani '01)

Es ist NP-schwer einen gegebenen Graphen G mit orthogonaler Beschreibung $H(G)$ zu kompaktieren, d.h. eine Zeichnung Γ mit minimaler Fläche (oder Gesamtkantenlänge) zu finden. Formuliert als Entscheidungsproblem: Gegeben $(G, H(G))$ und $K \in \mathbb{N}$ ist es NP-schwer zu entscheiden, ob es eine Zeichnung von $(G, H(G))$ mit Fläche $\leq K$ gibt.

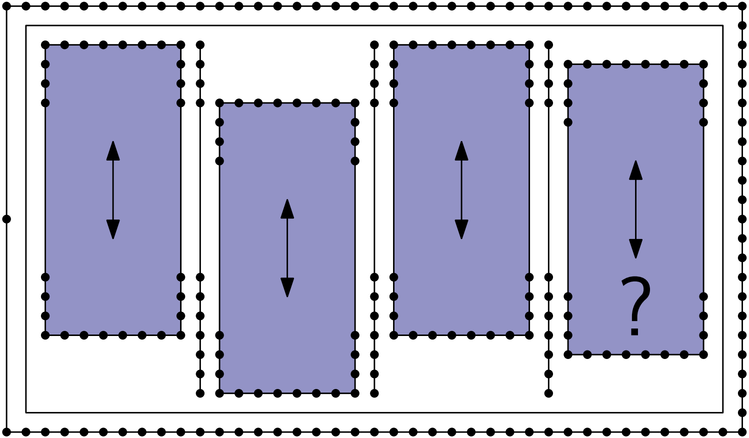
Begrenzung, Gürtel, Kolbengadget



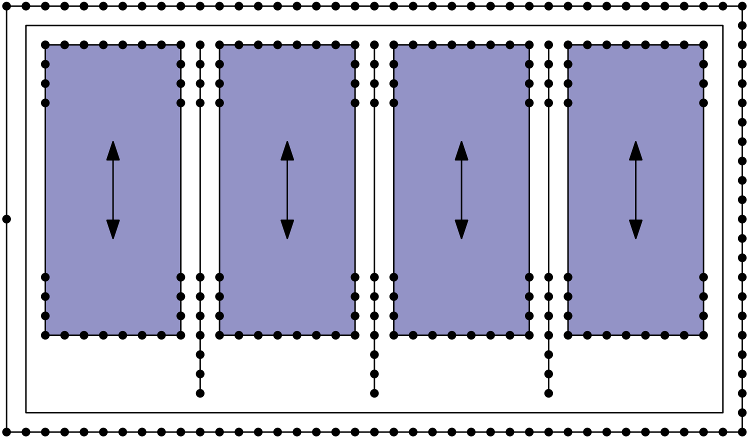
Begrenzung, Gürtel, Kolbengadget



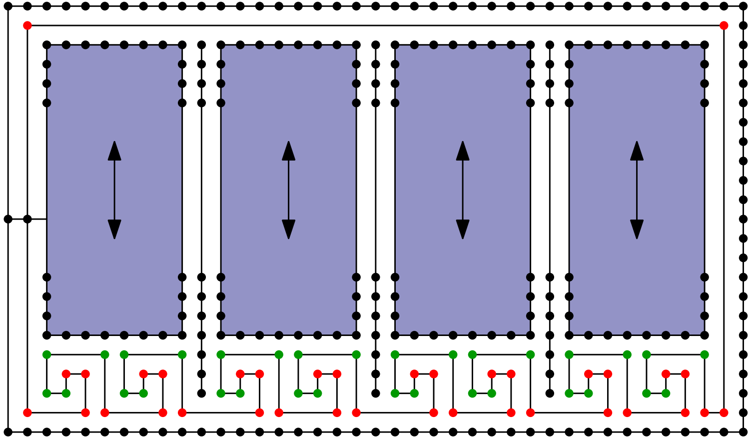
Begrenzung, Gürtel, Kolbengadget



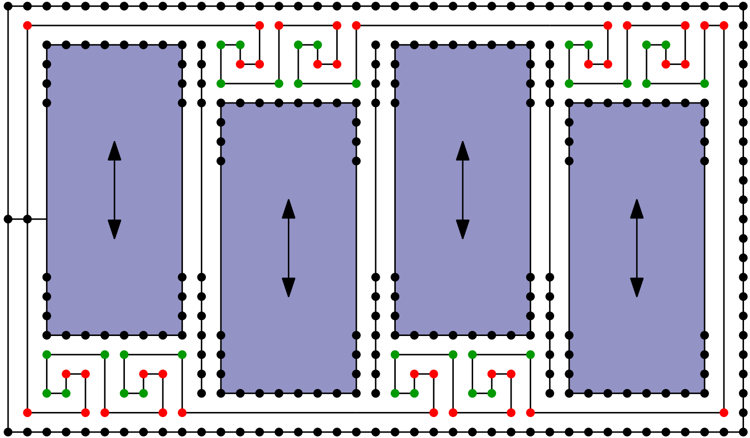
Begrenzung, Gürtel, Kolbengadget



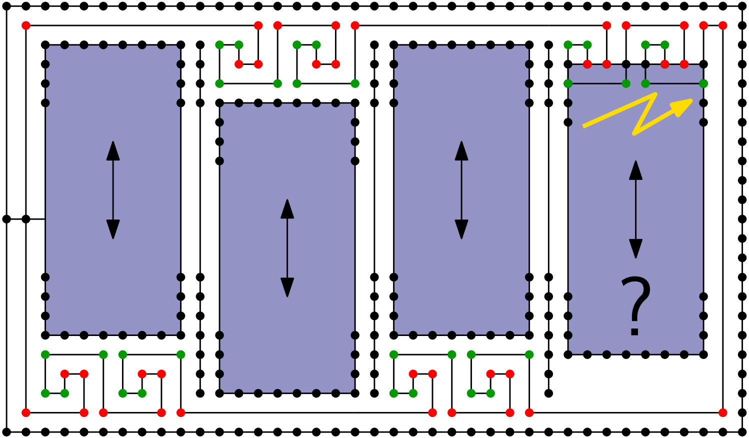
Begrenzung, Gürtel, Kolbengadget



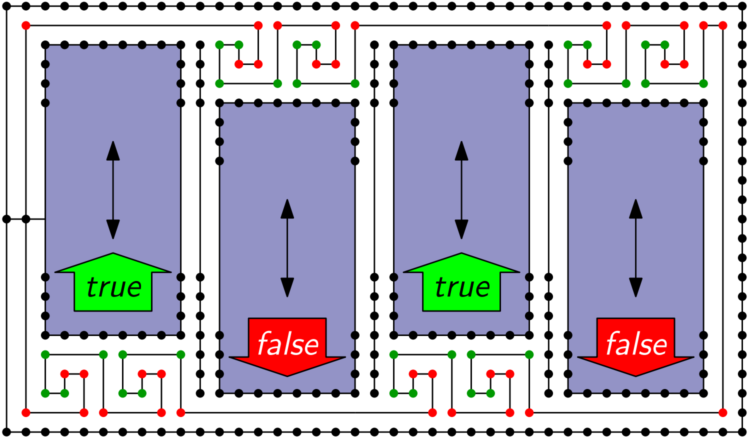
Begrenzung, Gürtel, Kolbengadget



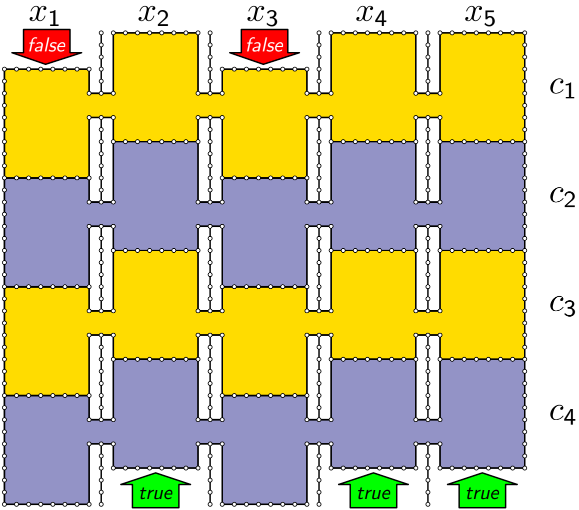
Begrenzung, Gürtel, Kolbengadget



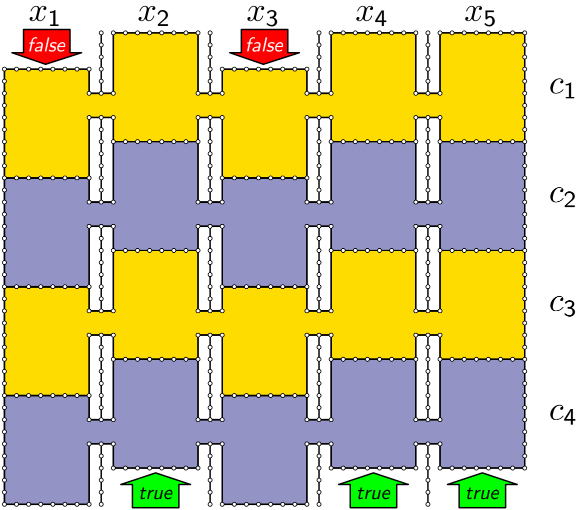
Begrenzung, Gürtel, Kolbengadget



Klauselgadgets



Klauselgadgets



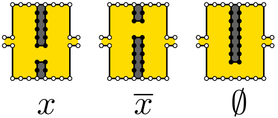
Beispiel:

$c_1 = x_2 \vee \overline{x_4}$

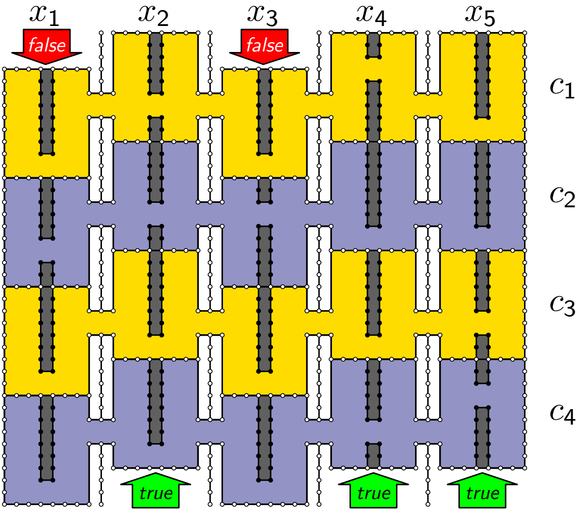
$c_2 = x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}$

$c_3 = x_5$

$c_4 = x_4 \vee \overline{x_5}$



Klauselgadgets



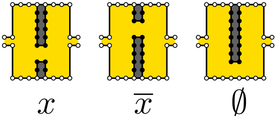
Beispiel:

$c_1 = x_2 \vee \overline{x_4}$

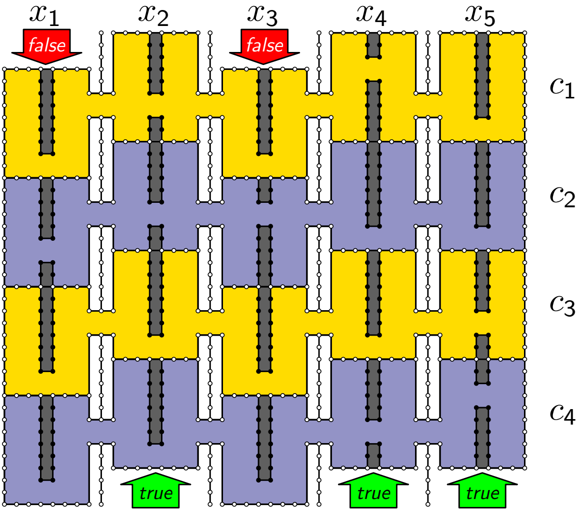
$c_2 = x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}$

$c_3 = x_5$

$c_4 = x_4 \vee \overline{x_5}$



Klauselgadgets



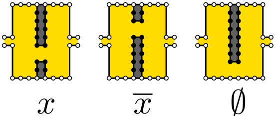
Beispiel:

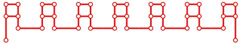
$c_1 = x_2 \vee \overline{x_4}$

$c_2 = x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}$

$c_3 = x_5$

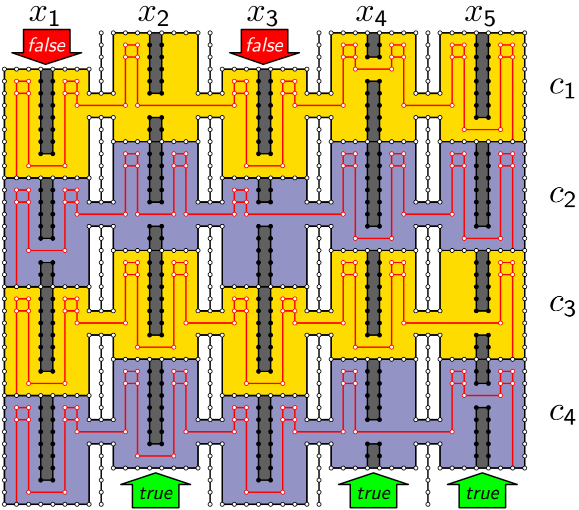
$c_4 = x_4 \vee \overline{x_5}$





lege $(2n-1)$-A-Kette durch jede Klausel

Klauselgadgets



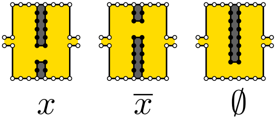
Beispiel:

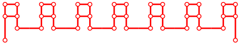
$c_1 = x_2 \vee \overline{x_4}$

$c_2 = x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}$

$c_3 = x_5$

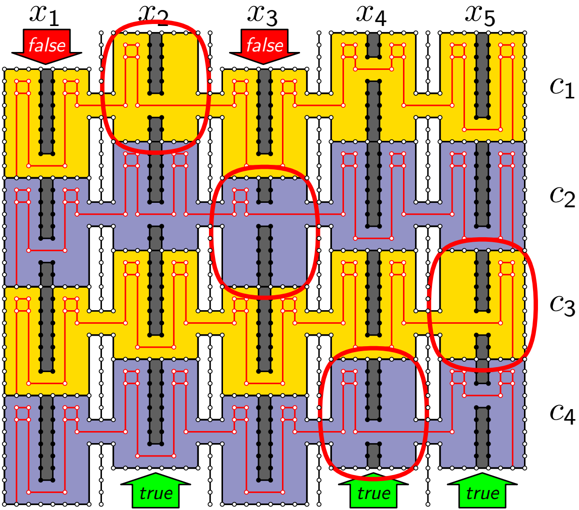
$c_4 = x_4 \vee \overline{x_5}$





lege $(2n-1)$-A-Kette durch jede Klausel

Klauselgadgets



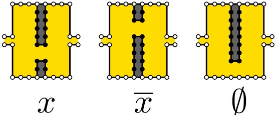
Beispiel:

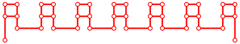
$c_1 = x_2 \vee \overline{x_4}$

$c_2 = x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}$

$c_3 = x_5$

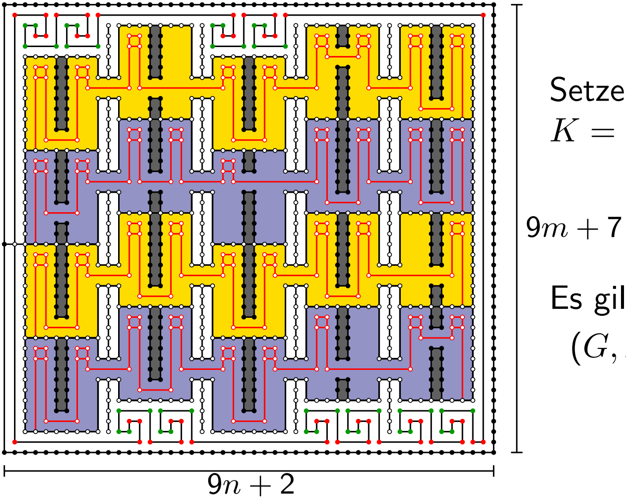
$c_4 = x_4 \vee \overline{x_5}$





lege $(2n-1)$-A-Kette durch jede Klausel

Komplette Reduktion



Setze

$K = (9n + 2) \cdot (9m + 7)$

Es gilt:

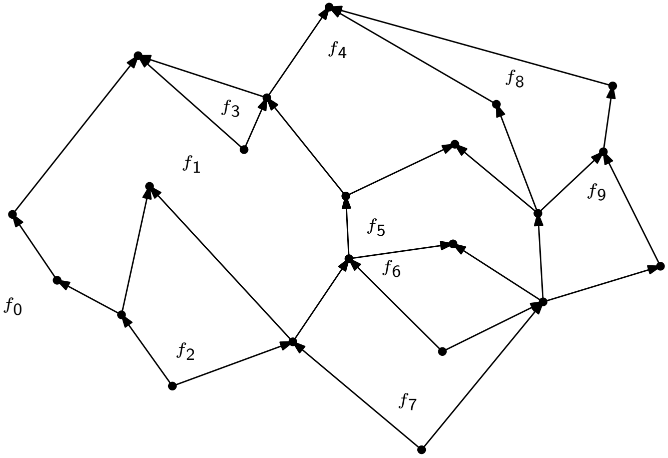
(G, H) auf Fläche K zeichenbar

$\Leftrightarrow$

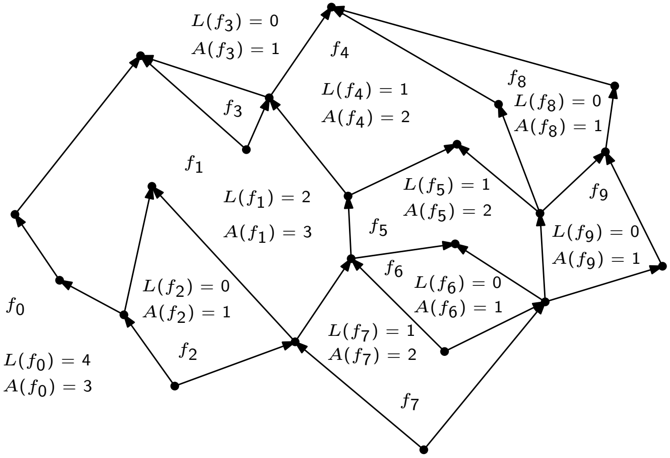
Φ erfüllbar

Aufwärtsplanare Zeichnungen

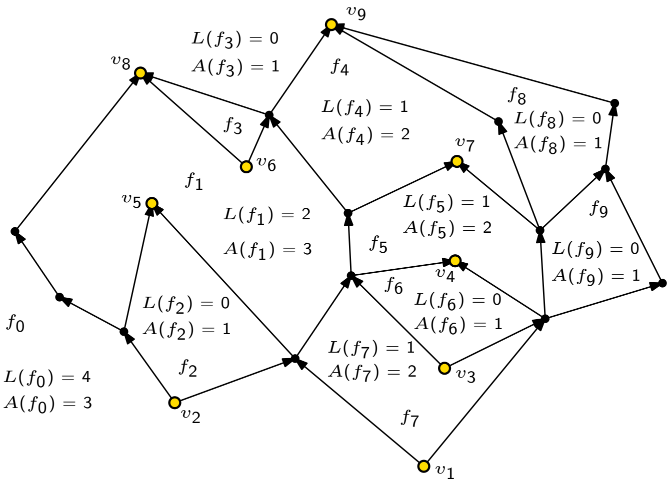
Beispiel Facettenzuordnung



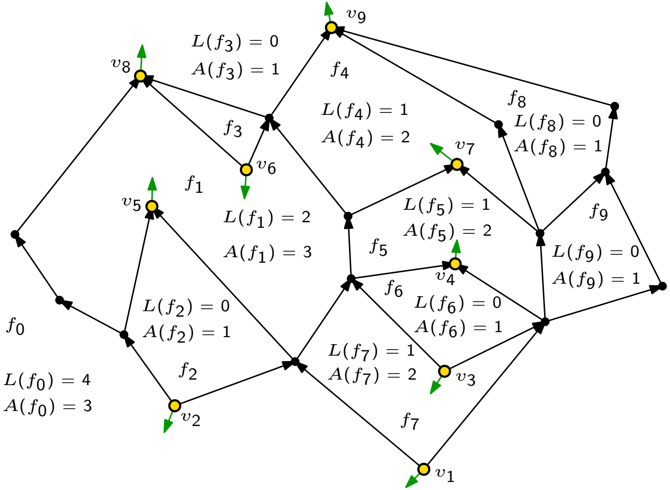
Beispiel Facettenzuordnung



Beispiel Facettenzuordnung



Beispiel Facettenzuordnung



$$\Phi(v_1) = f_0$$
$$\Phi(v_2) = f_0$$
$$\Phi(v_3) = f_7$$
$$\Phi(v_4) = f_5$$
$$\Phi(v_5) = f_1$$
$$\Phi(v_6) = f_1$$
$$\Phi(v_7) = f_4$$
$$\Phi(v_8) = f_0$$
$$\Phi(v_9) = f_0$$

Flussnetzwerk zur Konstruktion von Φ

Definition Flussnetzwerk $N_{\mathcal{F},f_0}(D) = ((W, A_N); l; u; b)$

- $W = \{v \in V \mid v \text{ ist Quelle oder Senke}\} \cup \mathcal{F}$
- $A_N = \{(v, f) \mid v \text{ inzident zu } f$
- $l(a) = 0 \quad \forall a \in A_N$
- $u(a) = 1 \quad \forall a \in A_N$
- $b(q) = \begin{cases} 1 & \forall q \in W \cap V \\ -(A(q) - 1) & \forall q \in \mathcal{F} \setminus \{f_0\} \\ -(A(q) + 1) & q = f_0 \end{cases}$

Charakterisierung von Aufwärtsplanarität

Satz 1:

Ein DAG $D = (V, A)$ mit kombinatorischer Einbettung $(\mathcal{F}, f_0)$ ist genau dann aufwärtsplanar, wenn er bimodal ist und eine f_0-konsistente Abbildung Φ von Quellen und Senken auf die Facetten besitzt.