Algorithmen zur Visualisierung von Graphen

Flussmethoden –
Knickminimierung in orthogonalen Layouts

Vorlesung im Sommersemester 2009

Martin Nöllenburg

14.05.2009

Wiederholung: Problemstellung

Problem 2: Knickminimierung mit fester Einbettung

Gegeben ein Graph $G = (V, E)$ mit Maximalgrad $\mathrm{deg}_{\mathrm{max}} \leq 4$, kombinatorischer Einbettung $\mathcal{F}$ und äußerer Facette f_0, finde eine orthogonale Gitterzeichnung, die $(\mathcal{F},\ f_0)$ erhält und minimale Anzahl von Knicken hat.

Wiederholung: Orthogonale Beschreibung

Eingabe: planarer Graph $G = (V, E)$, Facettenmenge $\mathcal{F}$, äußere Facette f_0
Ausgabe: orthogonale Beschreibung $H(G) = \{H(f) \mid f \in \mathcal{F}\}$

Facettenbeschreibung $H(f)$**:** im UZS geordnete Folge von Kantenbeschreibungen (e, δ, α) mit

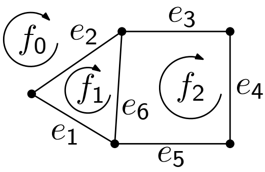
- e ist Randkante von f
- δ ist 0-1-Folge (0 = Rechtsknick, 1 = Linksknick)
- α ist Winkel $\in \{\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi\}$ zwischen e und Nachfolger e'

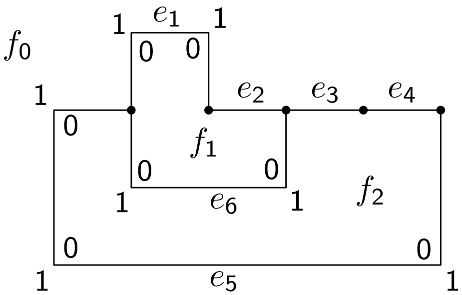
Wiederholung: Beispiel

$$H(f_0) = ((e_1, 11, \tfrac{\pi}{2}), (e_5, 111, \tfrac{3\pi}{2}), (e_4, \emptyset, \pi), (e_3, \emptyset, \pi), (e_2, \emptyset, \tfrac{\pi}{2}))$$

$$H(f_1) = ((e_1, 00, \tfrac{3\pi}{2}), (e_2, \emptyset, \tfrac{\pi}{2}), (e_6, 00, \pi))$$

$$H(f_2) = ((e_5, 000, \tfrac{\pi}{2}), (e_6, 11, \tfrac{\pi}{2}), (e_3, \emptyset, \pi), (e_4, \emptyset, \tfrac{\pi}{2}))$$





Problem: Orthogonale Beschreibung

Problem 2: Knickminimierung mit fester Einbettung

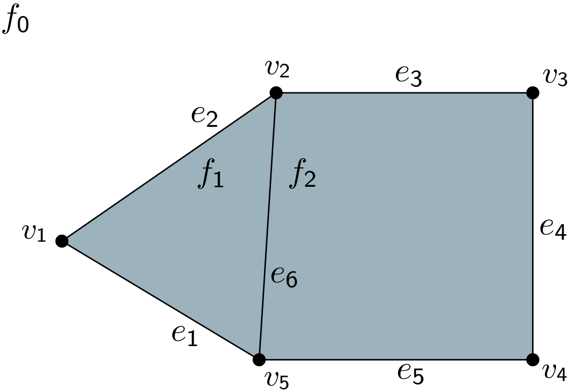
Gegeben ein Graph $G = (V, E)$ mit Maximalgrad $\deg_{\mathrm{max}} \leq 4$, kombinatorischer Einbettung $\mathcal{F}$ und äußerer Facette f_0, finde eine orthogonale Gitterzeichnung, die $(\mathcal{F},\ f_0)$ erhält und minimale Anzahl von Knicken hat.

Problem: Orthogonale Beschreibung

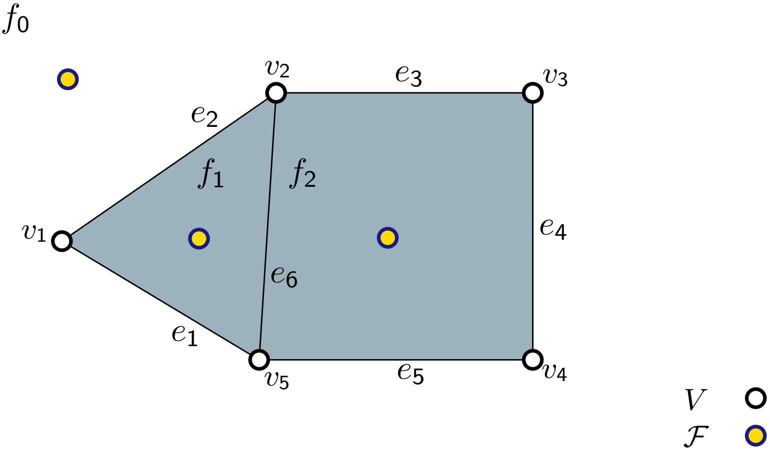
Problem 2': Orthogonale Beschreibung

Gegeben ein Graph $G = (V, E)$ mit Maximalgrad $\text{deg}_{\text{max}} \leq 4$, kombinatorischer Einbettung $\mathcal{F}$ und äußerer Facette f_0, finde eine gültige orthogonale Beschreibung $H(G)$, die $(\mathcal{F}, f_0)$ erhält und die Knickanzahl minimiert.

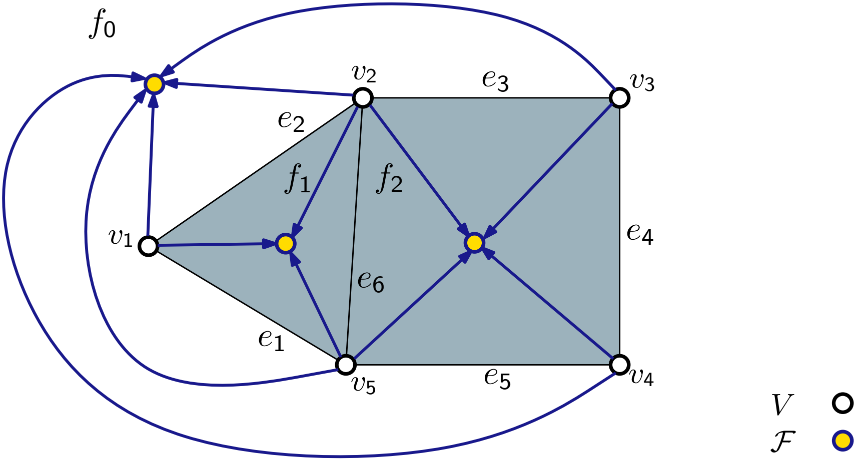
Beispiel Flussnetzwerk



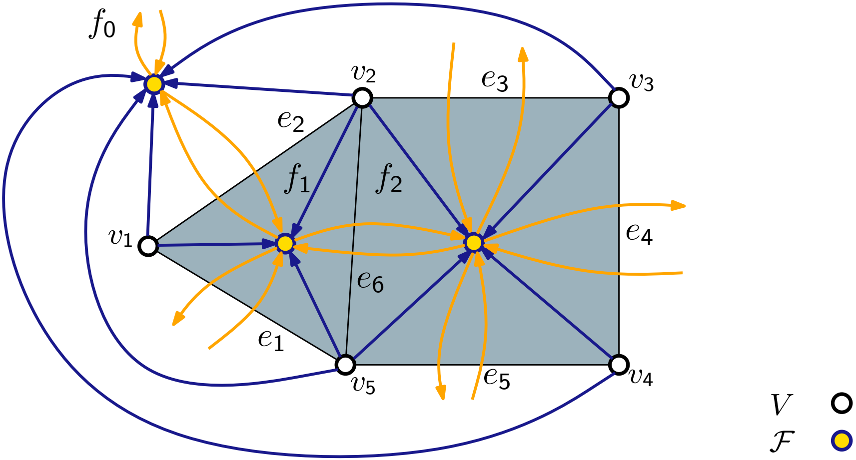
Beispiel Flussnetzwerk



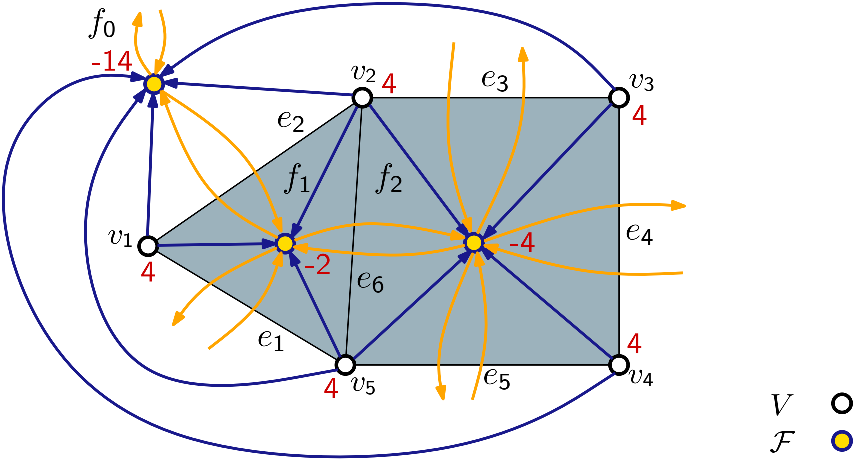
Beispiel Flussnetzwerk



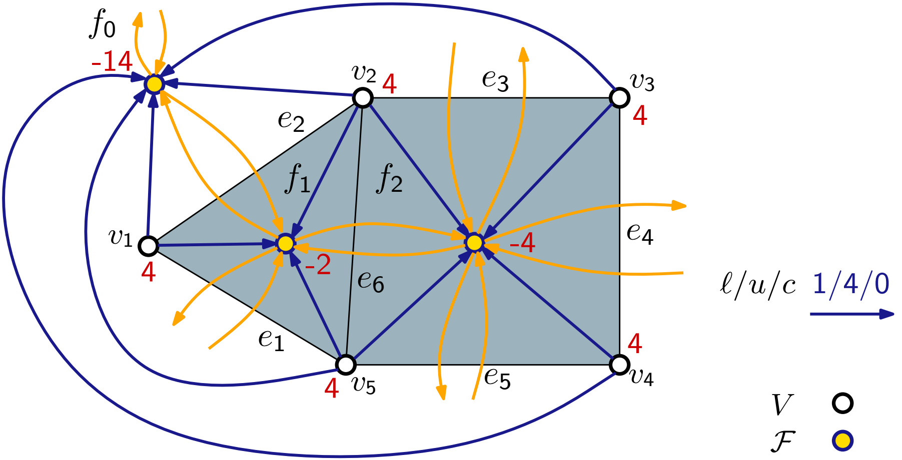
Beispiel Flussnetzwerk



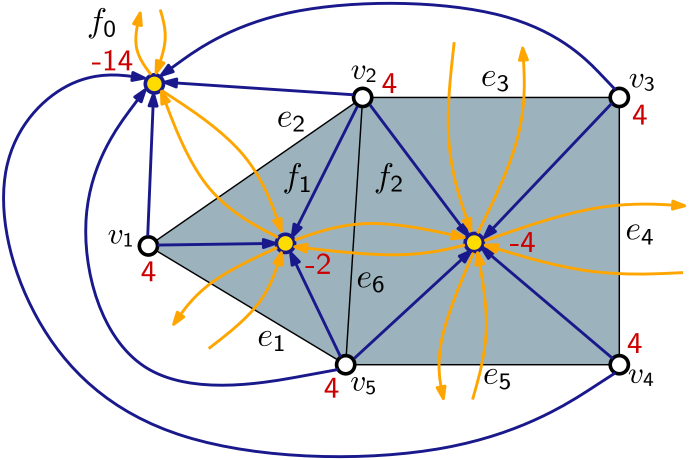
Beispiel Flussnetzwerk



Beispiel Flussnetzwerk



Beispiel Flussnetzwerk



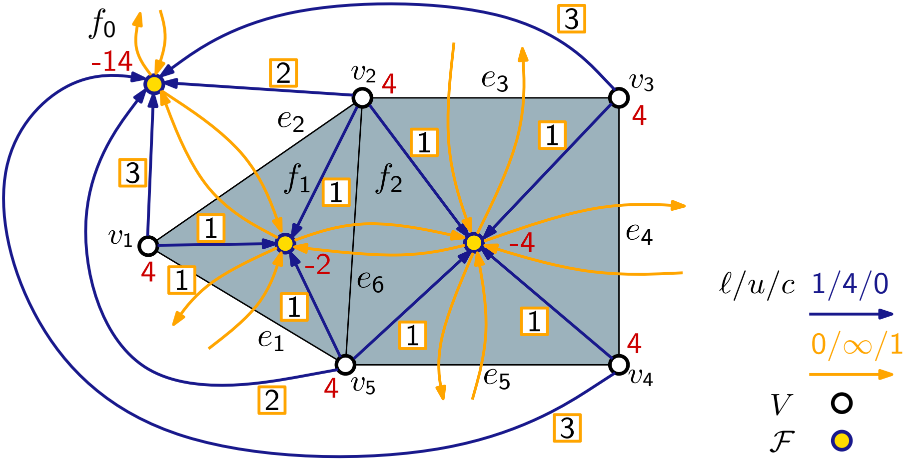
$\ell/u/c$ 1/4/0

0/∞/1

V

$\mathcal{F}$

Beispiel Flussnetzwerk



Korrektheit

Satz:

Zu einem planar eingebetteten Graphen $(G, \mathcal{F}, f_0)$ existiert genau dann eine zulässige orthogonale Beschreibung $H(G)$ mit k Knicken, wenn es im Flussnetzwerk $N(G)$ einen Fluss x mit Kosten k gibt.

Erinnerung: Korrektheit orthogonale Beschreibung

(H1) $H(G)$ entspricht $\mathcal{F}, f_0$

(H2) für gemeinsame Randkante $\{u, v\}$ zweier Facetten f und g mit $((u, v), \delta_1, \alpha_1) \in H(f)$ und $((v, u), \delta_2, \alpha_2) \in H(g)$ gilt δ_1 ist invertierte und umgedrehte Folge δ_2

(H3) Sei $|\delta|_0$ (bzw. $|\delta|_1$) die Anzahl Nullen (bzw. Einsen) in δ und $r = (e, \delta, \alpha)$. Für $C(r) := |\delta|_0 - |\delta|_1 + 2 - 2\alpha/\pi$ gilt:
$$\sum_{r \in H(f)} C(r) = 4 \text{ für } f \neq f_0 \text{ und } \sum_{r \in H(f_0)} C(r) = -4$$

(H4) Für jeden Knoten v ist die Summe der anliegenden Winkel gleich 2π

Erinnerung: Flussnetzwerk $N(G)$

Definition Flussnetzwerk $N(G) = ((V \cup \mathcal{F}, A); l; u; b; \text{cost})$

- $A = \{(v, f) \in V \times \mathcal{F} \mid v \text{ inzident zu } f\} \cup$
  $\{(f, g) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F} \mid f, g \text{ adjazent via Kante } e\}$
- $b(v) = 4 \quad \forall v \in V$
- $b(f) = -2(d_G(f) - 2) \quad \forall f \in \mathcal{F} \setminus \{f_0\}$
- $b(f_0) = -2(d_G(f) + 2)$

Für Fluss $X : A \to \mathbb{R}_0^+$ muss gelten:

$$\forall (i,j) \in A \qquad l(i,j) \leq X(i,j) \leq u(i,j) \tag{1}$$

$$\forall i \in V \qquad \sum_{(i,j)\in A} X(i,j) - \sum_{(j,i)\in A} X(j,i) = b(i) \tag{2}$$