

# Seminar Parametrisierte Algorithmen für $\mathcal{NP}$ -schwere Probleme

Reinhard Bauer, Marcus Krug, Ignaz Rutter

Lehrstuhl für Algorithmik I  
Institut für Theoretische Informatik  
Universität Karlsruhe (TH)

24. April 2009



# Motivation

## *Klassische Komplexitätstheorie*

»  $\mathcal{P}$  vs.  $\mathcal{NP}$ -schwer

## *Lösungsstrategien für $\mathcal{NP}$ -schwere Probleme*

- » Relaxierung der Optimalität
  - » Approximationsalgorithmen
  - » Heuristiken
- » Exakte Algorithmen möglichst schnell machen
  - » Laufzeiten von  $1.2^n$ ,  $2^{\sqrt{n}}$  statt  $2^n$
- » Instanzen identifizieren, die effizient lösbar sind
  - » Bäume, serien-parallele Graphen,  $k$ -außenplanare Graphen
  - » Parametrisierung
  - » ...



# Motivation

## *Klassische Komplexitätstheorie*

»  $\mathcal{P}$  vs.  $\mathcal{NP}$ -schwer

## *Lösungsstrategien für $\mathcal{NP}$ -schwere Probleme*

- » Relaxierung der Optimalität
  - » Approximationsalgorithmen
  - » Heuristiken
- » Exakte Algorithmen möglichst schnell machen
  - » Laufzeiten von  $1.2^n$ ,  $2^{\sqrt{n}}$  statt  $2^n$
- » Instanzen identifizieren, die effizient lösbar sind
  - » Bäume, serien-parallele Graphen,  $k$ -außenplanare Graphen
  - » Parametrisierung
  - » ...



# Motivation

## *Klassische Komplexitätstheorie*

»  $\mathcal{P}$  vs.  $\mathcal{NP}$ -schwer

## *Lösungsstrategien für $\mathcal{NP}$ -schwere Probleme*

- » Relaxierung der Optimalität
  - » Approximationsalgorithmen
  - » Heuristiken
- » Exakte Algorithmen möglichst schnell machen
  - » Laufzeiten von  $1.2^n$ ,  $2^{\sqrt{n}}$  statt  $2^n$
- » Instanzen identifizieren, die effizient lösbar sind
  - » Bäume, serien-parallele Graphen,  $k$ -außenplanare Graphen
  - » Parametrisierung
  - » ...



# Motivation

## *Klassische Komplexitätstheorie*

»  $\mathcal{P}$  vs.  $\mathcal{NP}$ -schwer

## *Lösungsstrategien für $\mathcal{NP}$ -schwere Probleme*

- » Relaxierung der Optimalität
  - » Approximationsalgorithmen
  - » Heuristiken
- » Exakte Algorithmen möglichst schnell machen
  - » Laufzeiten von  $1.2^n$ ,  $2^{\sqrt{n}}$  statt  $2^n$
- » Instanzen identifizieren, die effizient lösbar sind
  - » Bäume, serien-parallele Graphen, k-außenplanare Graphen
  - » Parametrisierung
  - » ...



# Parametrisierung

## *Beobachtung*

- klassische Komplexitätstheorie betrachtet nur Größe der Instanz
- Instanzen vieler Probleme haben komplexe Struktur und werden durch viele Parameter beschrieben
- ↪ betrachte zusätzlichen Parameter



# Beispiel: Parametrisiertes Vertex-Cover

## *Vertex Cover*

Gegeben: Graph  $G = (V, E)$ ,  $k \in \mathbb{N}$

Frage: Existiert  $V' \subseteq V$  mit  $|V'| \leq k$ , so dass jede Kante zu einem Knoten in  $V'$  inzident ist?



# Beispiel: Parametrisiertes Vertex-Cover

## *p-Vertex Cover*

Gegeben: Graph  $G = (V, E)$ ,  $k \in \mathbb{N}$

Parameter:  $k$

Frage: Existiert  $V' \subseteq V$  mit  $|V'| \leq k$ , so dass jede Kante zu einem Knoten in  $V'$  inzident ist?





# Beispiel: Parametrisiertes Vertex-Cover

## Vertex Cover

Gegeben: Graph  $G = (V, E)$ ,  $k \in \mathbb{N}$

Parameter:  $k$

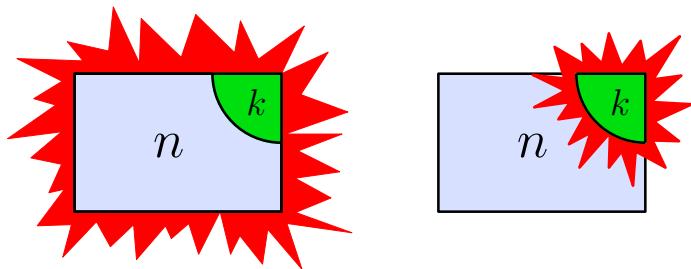
Frage: Existiert  $V' \subseteq V$  mit  $|V'| \leq k$ , so dass jede Kante zu einem Knoten in  $V'$  inzident ist?

## Ansätze

- Naiver Algorithmus hat Laufzeit  $\mathcal{O}(n^k \cdot m)$
- Branching-Ansatz hat Laufzeit  $\mathcal{O}(2^k \cdot (n + m))$
- Besserer Branching-Ansatz hat Laufzeit  $\mathcal{O}(1.2852^k + kn)$



## Beispiel: Parametrisiertes Vertex-Cover



### Ansätze

- » Naiver Algorithmus hat Laufzeit  $\mathcal{O}(n^k \cdot m)$
- » Branching-Ansatz hat Laufzeit  $\mathcal{O}(2^k \cdot (n + m))$
- » Besserer Branching-Ansatz hat Laufzeit  $\mathcal{O}(1.2852^k + kn)$

# Fixed-Parameter Tractability

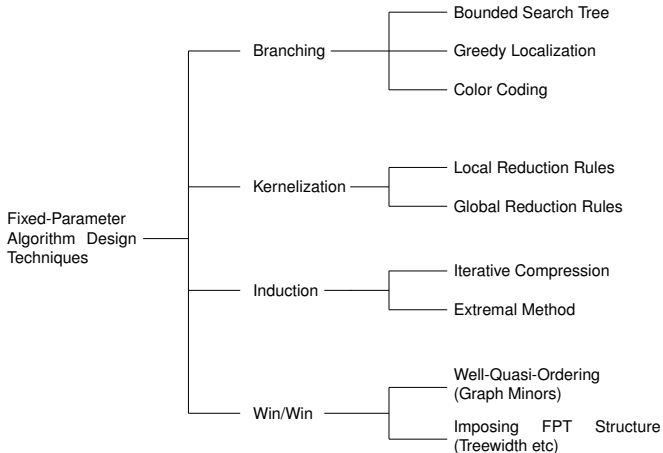
## Definition (Fixed-Parameter Tractable (FPT))

Problem  $L \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$  ist *fixed-parameter tractable*, falls es einen Algorithmus  $\mathcal{A}$  und eine berechenbare Funktion  $f$  gibt, so dass

- $\mathcal{A}$  entscheidet, ob  $(x, k) \in L$  ist
- die Laufzeit von  $\mathcal{A}$  beschränkt ist durch  $f(k) \cdot |x|^{\mathcal{O}(1)}$
  
- Die Klasse *FPT* ist die Klasse der Probleme, die fixed-parameter tractable sind



# Taxonomie von FPT-Techniken<sup>1</sup>



<sup>1</sup> C. Sloper, J.A. Telle, *An Overview of Techniques for Designing Parameterized Algorithms*, 2008



# Literatur

- » *An Invitation to Fixed-Parameter Algorithms*, R. Niedermeier, 2006
- » *Parameterized Complexity Theory*, J. Flum, M. Grohe, 2006
- » *Towards a Taxonomy of Techniques for Designing Parameterized Algorithms*, C. Sloper, J.A. Telle, 2006



# Ablauf

Event	Termin	Umfang
Einführung	in 2 Wochen	60-90 min, Marcus
Kurzvorträge	Anfang Juni	5-7 min
Hauptvorträge	Anfang Juli	45 min
Ausarbeitung	Ende Juli	8-10 Seiten, LaTeX-Vorlage

## *Schein*

- » Kurzvortrag, Hauptvortrag
- » Ausarbeitung
- » Anwesenheit

# Was Ihr mitnehmen sollt

## *Hard Skills*

- » FPT-Konzept und FPT-Techniken
- » Algorithm Engineering
- » Grundlagen (Dynamische Programmierung, Reduktion)

## *Soft Skills*

- » Selbständiges Erarbeiten und Präsentieren eines nicht-trivialen Themas

## *Studium*

- » Schein



# Was Ihr mitnehmen sollt

## *Hard Skills*

- » FPT-Konzept und FPT-Techniken
- » Algorithm Engineering
- » Grundlagen (Dynamische Programmierung, Reduktion)

## *Soft Skills*

- » Selbständiges Erarbeiten und Präsentieren eines nicht-trivialen Themas

## *Studium*

- » Schein





# Was Ihr mitnehmen sollt

## *Hard Skills*

- » FPT-Konzept und FPT-Techniken
- » Algorithm Engineering
- » Grundlagen (Dynamische Programmierung, Reduktion)

## *Soft Skills*

- » Selbständiges Erarbeiten und Präsentieren eines nicht-trivialen Themas

## *Studium*

- » Schein



# Disclaimer

- » FPT-Techniken sind für viele praktische Problemstellungen relevant, da Parameter in der Praxis oft klein sind
- » hier eher grundlegende (abstrakte) Problemstellungen
- » FPT-Techniken und Algorithmen-Entwurf stehen im Vordergrund

## *Themenvergabe*

- » Vorschlag: mit Stift und Papier bewaffnen



# Disclaimer

- » FPT-Techniken sind für viele praktische Problemstellungen relevant, da Parameter in der Praxis oft klein sind
- » hier eher grundlegende (abstrakte) Problemstellungen
- » FPT-Techniken und Algorithmen-Entwurf stehen im Vordergrund

## *Themenvergabe*

- » Vorschlag: mit Stift und Papier bewaffnen



# Thema 1: An efficient fixed-parameter algorithm for 3-Hitting Set

## *3-Hitting Set*

Gegeben: Menge  $S$ ,  $\mathcal{C} \subseteq 2^S$ , mit  $|A| \leq 3$  für alle  $A \in \mathcal{C}$ ,  $k \in \mathbb{N}$

Parameter:  $k$

Frage: Existiert  $X \subseteq S$  mit  $X \cap A \neq \emptyset$  für alle  $A \in \mathcal{C}$ ?

## *Technik(en)*

- Kernbildung (lokal)
- beschränkter Suchbaum
- Interleaving



## Thema 2: Finding $k$ disjoint triangles in an arbitrary graph

### *Triangle Packing*

Gegeben: Graph  $G = (V, E)$ ,  $k \in \mathbb{N}$

Parameter:  $k$

Frage: Enthält  $G$  genau  $k$  disjunkte Dreiecke?

### *Technik(en)*

- » Kernbildung (lokal und global)
- » Crown-Reduction
- » Greedy Localization
- » Bounded Search Tree



# Thema 3: A fixed-parameter algorithm for the directed feedback vertex set problem

## *Directed Feedback Vertex Set*

Gegeben: Gerichteter Graph  $G = (V, E)$ ,  $k \in \mathbb{N}$

Parameter:  $k$

Frage: Existiert eine Teilmenge von Knoten  $X \subseteq V$ , so dass  $G - X$  azyklisch ist?

## *Technik(en)*

» Iterative Compression



# Thema 4: New FPT-techniques, an improved algorithm for Set-Splitting and a novel $2k$ kernelization for Vertex Cover

## *Set Splitting*

Gegeben: Menge  $S$ ,  $\mathcal{C} \subseteq 2^S$ ,  $k \in \mathbb{N}$

Parameter:  $k$

Frage: Existiert Teilmenge  $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$  und eine Partition  $S_0 \cup S_1$  von  $S$ , so dass  $|\mathcal{C}'| \geq k$  und  $A \cap S_0 \neq \emptyset \neq A \cap S_1$  für alle  $A \in \mathcal{C}'$

## *Technik(en)*

- » Greedy Localization
- » Iterative Compression
- » Modeled Crown-Reductions



# Thema 5: Improved matching and packing algorithms

## 3-Set Packing

Gegeben: Menge  $S, \mathcal{C} \subseteq 2^S$  mit  $|A| \leq 3$  für alle  $A \in \mathcal{C}$ ,  $k \in \mathbb{N}$

Parameter:  $k$

Frage: Existiert eine Menge  $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$  mit  $|\mathcal{C}'| \geq k$ , so dass für  $A \neq B \in \mathcal{C}'$  gilt  $A \cap B = \emptyset$ ?

## Technik(en)

- » Greedy Localization
- » Color Coding





# Thema 6: Tree decompositions of graphs

## *Planar Dominating Set*

Gegeben: planarer Graph  $G = (V, E)$ ,  $k \in \mathbb{N}$

Parameter: Baumbreite von  $G$

Frage: Existiert eine Menge  $V' \subseteq V$ , so dass für alle  $v \in V \setminus V'$  mindestens ein Nachbar in  $V'$  liegt?

## *Technik(en)*

» Baumbreitenzerlegung



# Thema 7: A structural view on parameterizing problems: Distance from Triviality

## *Ansatz*

- » identifiziere einfache Probleminstanzen
- » Parameter ist Abstandsfunktion zu einfachen Probleminstanzen

## *Case Studies*

- » Clique
- » Power Dominating Set
- » Weighted Set Cover
- » Longest Common Subsequence



# Thema 8: A new method for solving fixed-cardinality optimization problems

## *Subgraph Isomorphism in Degree-Bounded Graphs*

Gegeben: Graph  $G = (V, E)$  mit Maximalgrad  $d$ , Graph  $H$  mit  $k$  Knoten

Parameter:  $k$

Frage: Existiert ein induzierter  $H$ -Teilgraph in  $G$ ?

## *Technik(en)*

» Random Separation



# Thema 9: Algorithm engineering for Color Coding with applications to Signaling Pathway Detection

## *Minimum-Weight Path*

Gegeben: ungerichteter Graph  $G = (V, E)$  mit Kantengewicht  $w : E \rightarrow \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$

Parameter:  $k$

Problem: Finde Pfad der Länge  $k$  in  $G$ , der die Kantengewichte minimiert.

## *Technik(en)*

» Color-Coding



# Thema 10: On Parameterized Intractability: Hardness and Completeness

## *Weighted-CNF 3-SAT*

Gegeben: Instanz  $\varphi$  von 3-SAT (CNF),  $k \in \mathbb{N}$

Parameter:  $k$

Frage: Existiert eine erfüllende Belegung der Variablen von  $\varphi$ , so dass höchstens  $k$  Variablen wahr sind?

## *Weitverbreitete Vermutung*

➤ Weighted-CNF 3-SAT kann nicht in  $\mathcal{O}(f(k)n^c)$  entschieden werden, d.h. ist nicht FPT



# Thema 11: On Parameterized Approximability

## *Ansatz*

- Kombiniere klassische Approximierbarkeit mit FPT
- FPT-Approximationsalgorithmus
- Nicht-Approximierbarkeit



# Themen

- 1 An efficient fixed-parameter algorithm for 3-Hitting Set
- 2 Finding  $k$  disjoint triangles in an arbitrary graph
- 3 A fixed-parameter algorithm for the directed feedback vertex set problem
- 4 Greedy Localization, Iterative Compression and Modeled Crown-Reductions: New FPT-Techniques, an Improved Algorithm for Set-Splitting and a Novel  $2k$  Kernelization for Vertex Cover
- 5 Greedy Localization and Color Coding: Improved Matching and Packing Algorithms
- 6 Tree Decompositions of Graphs
- 7 A Structural View on Parameterizing Problems: Distance from Triviality
- 8 Random Separation: A New Method for Solving Fixed-Cardinality Optimization Problems
- 9 Algorithm Engineering for Color Coding with Applications to Signaling Pathway Detection
- 10 On Parameterized Intractability: Hardness and Completeness
- 11 On Parameterized Approximability

