Multi(way) Cut

Martin Nöllenburg

Seminar Approximationsalgorithmen

12.07.2008

Outline

- ≫ Multiway Cut
- ≫ Multicut

Problemdefinition

Multiway Cut

geg: Graph $G = (V, E)$, Gewichte $c : E \to \mathbb{R}^+$,
Terminale $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_k\} \subseteq V$

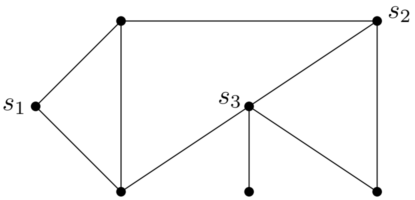
ges: Multiway Cut $C \subseteq E$, so dass für alle $1 \leq i < j \leq k$ gilt:
s_i und s_j in $G' = (V, C)$ separiert und $c(C)$ minimal

Problemdefinition

Multiway Cut

geg: Graph $G = (V, E)$, Gewichte $c : E \to \mathbb{R}^+$,
Terminale $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_k\} \subseteq V$

ges: Multiway Cut $C \subseteq E$, so dass für alle $1 \leq i < j \leq k$ gilt:
s_i und s_j in $G' = (V, C)$ separiert und $c(C)$ minimal

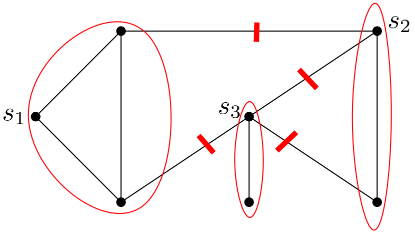


Problemdefinition

Multiway Cut

geg: Graph $G = (V, E)$, Gewichte $c : E \to \mathbb{R}^+$,
Terminale $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_k\} \subseteq V$

ges: Multiway Cut $C \subseteq E$, so dass für alle $1 \leq i < j \leq k$ gilt:
s_i und s_j in $G' = (V, C)$ separiert und $c(C)$ minimal



Problemdefinition

Multiway Cut

geg: Graph $G = (V, E)$, Gewichte $c : E \to \mathbb{R}^+$,
Terminale $S = \{s_1, s_2, \dots, s_k\} \subseteq V$

ges: Multiway Cut $C \subseteq E$, so dass für alle $1 \leq i < j \leq k$ gilt:
s_i und s_j in $G' = (V, C)$ separiert und $c(C)$ minimal

NP-schwer schon für $k = 3$

LP-Formulierung

- $\Delta_k = \{x \in \mathbb{R}^k \mid x \geq 0, \sum_{i=1}^{k} x_i = 1\}$ (($k-1$)-dim. Simplex)

LP-Formulierung

- $\Delta_k = \{x \in \mathbb{R}^k \mid x \geq 0, \sum_{i=1}^k x_i = 1\}$ (($k-1$)-dim. Simplex)

minimiere $\sum_{uv \in E} c(uv) \cdot d(uv)$

so dass:

$$\begin{array}{rcll} d(uv) & = & \frac{1}{2}\sum_{i=1}^k |x_u^i - x_v^i| & \forall uv \in E \\ \sum_{i=1}^k x_v^i & = & 1 & \forall v \in V \qquad // \; x \in \Delta_k \\ x_{s_i} & = & e_i & \forall s_i \in S \end{array}$$

LP-Formulierung

- $\Delta_k = \{x \in \mathbb{R}^k \mid x \geq 0, \sum_{i=1}^k x_i = 1\}$ (($k-1$)-dim. Simplex)

minimiere $\sum_{uv \in E} c(uv) \cdot d(uv)$
so dass:

$$\begin{array}{rcll} d(uv) & = & \frac{1}{2}\sum_{i=1}^k |x_u^i - x_v^i| & \forall uv \in E \\ \sum_{i=1}^k x_v^i & = & 1 & \forall v \in V \qquad // \; x \in \Delta_k \\ x_{s_i} & = & e_i & \forall s_i \in S \end{array}$$

- als ILP werden nur die Ecken von Δ_k belegt
- Kanten haben Länge 0 oder 1
- $C = \{e \in E \mid d(e) = 1\}$

Ein Lemma

Lemma

Ohne Einschränkung gilt in einer optimalen Lösung x_{OPT}:
x_u und x_v für $uv \in E$ unterscheiden sich an höchstens zwei Stellen

Beweisskizze siehe Tafel

Algorithmus mittels randomisiertem Runden

- $E_i = \{uv \in E \mid x_u^i \neq x_v^i\}$
- $W_i = \sum_{e \in E_i} c(e)d(e)$; oBdA: $W_k = \max_i W_i$
- $B(s_i, \rho) = \{v \in V \mid x_v^i \geq \rho\}$ für $\rho \in (0,1)$

Algorithmus 1 : Randomisiertes Runden

bestimme optimale fraktionale Lsg. x_{OPT}
best. zufällig $\rho \in (0,1)$ und $\sigma \in \{(1,2,\dots,k-1,k),(k-1,\dots,2,1,k)\}$
for $i = 1, \dots, k-1$ **do**
  $V_{\sigma(i)} \leftarrow B(s_i, \rho) \setminus \cup_{j<i} V_{\sigma(j)}$
end
$V_k \leftarrow V \setminus \cup_{j<k} V_{\sigma(j)}$
$C = \{uv \in E \mid u \in V_i,\ v \in V_j,\ i \neq j\}$

Approximationsfaktor

Lemma

1. für $e \in E \setminus E_k$: $Pr[e \in C] \leq 3/2 \cdot d(e)$
2. für $e \in E_k$: $Pr[e \in C] \leq d(e)$

Approximationsfaktor

Lemma

1. für $e \in E \setminus E_k$: $Pr[e \in C] \leq 3/2 \cdot d(e)$
2. für $e \in E_k$: $Pr[e \in C] \leq d(e)$

Satz

Es gilt

$$\mathbf{E}[c(C)] \leq (3/2 - 1/k)\mathrm{OPT}_{\mathrm{frac}}.$$

Outline

≫ Multiway Cut

≫ Multicut

Problemdefinition

Multicut

geg: Graph $G = (V, E)$, Gewichte $c : E \to \mathbb{R}^+$,
Paare $S = \{(s_1, t_1), (s_2, t_2), \ldots, (s_k, t_k)\} \subseteq V^2$ $(s_i \neq t_i)$

ges: Multicut $C \subseteq E$, so dass für alle $1 \leq i \leq k$ gilt:
s_i und t_i in $G' = (V, E \setminus C)$ separiert und $c(C)$ minimal

Problemdefinition

Multicut

geg: Graph $G = (V, E)$, Gewichte $c : E \to \mathbb{R}^+$,
Paare $S = \{(s_1, t_1), (s_2, t_2), \ldots, (s_k, t_k)\} \subseteq V^2$ $(s_i \neq t_i)$

ges: Multicut $C \subseteq E$, so dass für alle $1 \leq i \leq k$ gilt:
s_i und t_i in $G' = (V, E \setminus C)$ separiert und $c(C)$ minimal

- Verallgemeinerung von Multiway Cut
  $\Rightarrow$ NP-schwer schon für $k = 3$

Problemdefinition

Multicut

geg: Graph $G = (V, E)$, Gewichte $c : E \to \mathbb{R}^+$,
Paare $S = \{(s_1, t_1), (s_2, t_2), \ldots, (s_k, t_k)\} \subseteq V^2$ $(s_i \neq t_i)$

ges: Multicut $C \subseteq E$, so dass für alle $1 \leq i \leq k$ gilt:
s_i und t_i in $G' = (V, E \setminus C)$ separiert und $c(C)$ minimal

- Verallgemeinerung von Multiway Cut
  $\Rightarrow$ NP-schwer schon für $k = 3$
- Hier: Spezialfall G ist ein Baum
  - eindeutiger Pfad p_i zwischen s_i und t_i
  - C muss eine Kante $e \in p_i$ enthalten

Problemdefinition

Multicut

geg: Graph $G = (V, E)$, Gewichte $c : E \to \mathbb{R}^+$,
Paare $S = \{(s_1, t_1), (s_2, t_2), \ldots, (s_k, t_k)\} \subseteq V^2$ $(s_i \neq t_i)$

ges: Multicut $C \subseteq E$, so dass für alle $1 \leq i \leq k$ gilt:
s_i und t_i in $G' = (V, E \setminus C)$ separiert und $c(C)$ minimal

- Verallgemeinerung von Multiway Cut
  $\Rightarrow$ NP-schwer schon für $k = 3$
- Hier: Spezialfall G ist ein Baum
  - eindeutiger Pfad p_i zwischen s_i und t_i
  - C muss eine Kante $e \in p_i$ enthalten
- Übung: Zeige NP-schwer schon für Höhe 1 und $c = 1$

LP-Formulierung

Primales LP

minimiere $\sum_{e \in E} c(e) \cdot d(e)$

so dass:

$$\begin{array}{rcll} \sum_{e \in p_i} d(e) & \geq & 1 & i = 1, \dots, k \\ d(e) & \in & \{0, 1\} & e \in E \end{array}$$

LP-Formulierung

Primales LP

minimiere $\sum_{e \in E} c(e) \cdot d(e)$

so dass:

$$\begin{array}{rcll} \sum_{e \in p_i} d(e) & \geq & 1 & i = 1, \ldots, k \\ d(e) & \geq & 0 & e \in E \end{array}$$

LP-Formulierung

Primales LP

minimiere $\sum_{e \in E} c(e) \cdot d(e)$

so dass:

$$\begin{array}{rcll} \sum_{e \in p_i} d(e) & \geq & 1 & i = 1, \ldots, k \\ d(e) & \geq & 0 & e \in E \end{array}$$

Duales LP

maximiere $\sum_{i=1}^{k} f_i$

so dass:

$$\begin{array}{rcll} \sum_{i: e \in p_i} f_i & \leq & c(e) & e \in E \\ f_i & \geq & 0 & i = 1, \ldots, k \end{array}$$

Interpretation des dualen LP

maximiere $\sum_{i=1}^{k} f_i$

so dass:

$$\begin{array}{rcll} \sum_{i: e \in p_i} f_i & \leq & c(e) & e \in E \\ f_i & \geq & 0 & i = 1, \ldots, k \end{array}$$

- Mehrfach-Güterflussproblem mit Gütern $i = 1, \ldots, k$
- f_i repräsentiert den Fluss von Gut i
- Kanten haben Kapazität $c(e)$

Interpretation des dualen LP

maximiere $\sum_{i=1}^{k} f_i$

so dass:

$$\begin{array}{rcll} \sum_{i: e \in p_i} f_i & \leq & c(e) & e \in E \\ f_i & \geq & 0 & i = 1, \ldots, k \end{array}$$

- Mehrfach-Güterflussproblem mit Gütern $i = 1, \ldots, k$
- f_i repräsentiert den Fluss von Gut i
- Kanten haben Kapazität $c(e)$

- Dualitätsätze:
  - zulässiger Fluss ist untere Schranke für minimalen Multicut
  - maximaler Fluss $=$ minimaler (fraktionaler) Multicut

Interpretation des dualen LP

maximiere $\sum_{i=1}^{k} f_i$

so dass:

$$\begin{array}{rcll} \sum_{i:e\in p_i} f_i & \leq & c(e) & e \in E \\ f_i & \geq & 0 & i = 1, \dots, k \end{array}$$

- Mehrfach-Güterflussproblem mit Gütern $i = 1, \dots, k$
- f_i repräsentiert den Fluss von Gut i
- Kanten haben Kapazität $c(e)$

- Dualitätsätze:
  - zulässiger Fluss ist untere Schranke für minimalen Multicut
  - maximaler Fluss $=$ minimaler (fraktionaler) Multicut

- Einschränkung: ganzzahliger Fluss und $c(e) \in \mathbb{Z}$

Primal-duales Schema

Primale Schlupfbedingung

$d(e) \neq 0 \Rightarrow \sum_{i:e \in p_i} f_i = c(e)$ $//\alpha = 1$

oder: jede Kante in C ist *gesättigt*

Duale relaxierte Schlupfbedingung

$f_i \neq 0 \Rightarrow \sum_{e \in p_i} d(e) \leq 2$ $//\beta = 2$

oder: auf jedem s_i-t_i Pfad mit Fluss > 0 sind max. zwei Kanten in C

Primal-duales Schema

Primale Schlupfbedingung

$d(e) \neq 0 \Rightarrow \sum_{i:e \in p_i} f_i = c(e)$ $\qquad //\alpha = 1$

oder: jede Kante in C ist *gesättigt*

Duale relaxierte Schlupfbedingung

$f_i \neq 0 \Rightarrow \sum_{e \in p_i} d(e) \leq 2$ $\qquad //\beta = 2$

oder: auf jedem s_i-t_i Pfad mit Fluss > 0 sind max. zwei Kanten in C

≫ Algorithmus verbessert gleichzeitig Optimalität des Flusses und Zulässigkeit des Multicuts

Primal-dualer Algorithmus

Algorithmus 2 : Multicut und Mehrfach-Güterfluss in Bäumen

wähle beliebigen Knoten als Wurzel von G
initialisiere $f \leftarrow 0$ und $C \leftarrow \emptyset$
for $v \in V$ *geordnet nach nichtabsteigender Tiefe* **do**
  für jedes Paar (s_i, t_i) mit $\text{lca}(s_i, t_i) = v$ erhöhe Fluss maximal
  $C \leftarrow C \cup$ gesättigte Kanten
end
for *Kanten* $e \in C$ *in umgekehrter Einfügereihenfolge* **do**
  falls $C \setminus \{e\}$ Multicut entferne e aus C
end
gib f und C aus

Approximationsfaktor

Lemma

Für (s_i, t_i) mit $f_i \neq 0$ und $lca(s_i, t_i) = v$ gilt:
es ist höchstens eine Kante von $s_i \rightsquigarrow v$ und $t_i \rightsquigarrow v$ in C.

Approximationsfaktor

Lemma

Für (s_i, t_i) mit $f_i \neq 0$ und $lca(s_i, t_i) = v$ gilt:
es ist höchstens eine Kante von $s_i \rightsquigarrow v$ und $t_i \rightsquigarrow v$ in C.

Satz

Der Algorithmus approximiert den minimalen Multicut mit Faktor 2 und den maximalen Mehrfach-Güterfluss mit Faktor $1/2$.

Zusammenfassung

Problem	**Technik**	**Approx.faktor**
Multiway Cut	randomisiertes Runden	$3/2$
Multicut	primal-duales Schema	2
Mehrfach-Güterfluss	primal-duales Schema	$1/2$