

Universität Karlsruhe (TH)

## **Seminar Algorithmen für Ad-hoc- und Sensor-Netze**

*An Optimal Bound for the MST Algorithm to  
Compute Energy Efficient Broadcast Trees in  
Wireless Networks*

Simon Friedberger

1. September 2007

### **Zusammenfassung**

Diese Arbeit basiert auf der Veröffentlichung „An Optimal Bound for the MST Algorithm to Compute Energy Efficient Broadcast Trees in Wireless Networks“ [1] von Christoph Ambühl. Sie behandelt eines der prominentesten Probleme im Zusammenhang mit Funknetzwerken: Eine Verteilung der Sendeleistungen zu finden, die einer bestimmten Station ermöglicht einen Broadcast zu senden. Für Stationen in der euklidischen Ebene existiert ein Approximationsalgorithmus der auf Berechnung eines euklidischen minimalen Spannbaumes beruht. Es wird gezeigt, dass dies ein 6-Approximationsalgorithmus ist.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Rückblick</b>	<b>6</b>
2.1	Obere Schranke . . . . .	6
2.2	Untere Schranke . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Beweis von Satz 1.1</b>	<b>7</b>
3.1	Notation . . . . .	7
3.2	Hilfssätze . . . . .	8
3.3	Beweis . . . . .	9
<b>4</b>	<b>Beweis von Lemma 3.1</b>	<b>10</b>

# 1 Einleitung

Funk- und Ad-Hoc-Netze gewinnen, wegen ihrer Flexibilität zunehmend an Popularität. Sie brauchen keine festen Kabelverbindungen, da die Kommunikationsteilnehmer, eine Menge von Funkstationen, mit anderen Stationen in ihrer Reichweite Daten einfach über Funk austauschen. Dabei ergeben sich neue Herausforderungen, zum Beispiel ist die Reichweite einer Station durch Regulierung der Sendeleistung wählbar. Maximale Leistung ist aber oft aufgrund des Energieverbrauchs oder wegen der resultierenden Störungen der Stationen untereinander nicht optimal. Bevor diese Probleme vertieft werden, soll die Übertragung zwischen zwei Stationen  $s$  und  $t$  beschrieben werden. Sie wird durch die Formel,

$$\frac{P_s}{\text{dist}(s, t)^\alpha} > \gamma$$

modelliert. Mit folgenden Definitionen:

- $P_s$ : zum senden benötigte Energie
- $\text{dist}(s, t)$ : Distanzfunktion die den Abstand von  $s$  zu  $t$  angibt
- $\gamma \geq 1$ : die Übertragungsqualität
- $\alpha \geq 1$ : der Distanz-Energie-Gradient, eine umgebungsabhängige Konstante

In idealer Umgebung (z.B. leerer Raum) wäre  $\alpha = 2$ , kann aber in der Praxis von 1 bis 6 variieren [20]. Wählt man in dieser Formel  $P_s$  und stellt sie nach  $\text{dist}(s, t)$  um so lässt sich damit die maximale Reichweite einer Station bestimmen. Damit wird dann der *Übertragungsgraph*  $G = (S, A)$  definiert. Wobei die Knoten  $S$  den Stationen entsprechen und eine Kante von  $s$  nach  $t$  in  $A$  ist, falls  $t$  in Reichweite von  $s$  ist.

Ist umgekehrt ein Übertragungsgraph gegeben, und ist  $\Gamma_G(i)$  eine Menge von empfangenden Nachbarn zu einem Knoten  $i$ , so lässt sich die benötigte Reichweite wie folgt charakterisieren:

$$r_G(i) := \max_{j \in \Gamma_G(i)} \text{dist}(i, j).$$

Woraus mit der ersten Formel sofort die benötigte Energie des gesamten Graphen berechnet werden kann.

$$\text{power}(G) := \sum_{i \in V} \gamma \cdot r_G(i)^\alpha$$

Da  $\gamma$  vor die Summe gezogen werden kann, und somit die relative Güte einer Lösung nicht beeinflusst, wird für den Rest dieser Arbeit  $\gamma = 1$  angenommen. Mit den gegebenen Grundlagen lässt sich die Klasse der sogenannten „RANGE ASSIGNMENT PROBLEMS“ definieren.

**Problem 1.1** (RANGE ASSIGNMENT PROBLEMS). *Sei eine Menge von Stationen  $S$  im  $d$ -dimensionalen euklidischen Raum und eine Konnektivitätsbedingung  $\Pi$  gegeben. Gesucht wird zu jeder Station  $s \in S$  eine Reichweite, so dass der entstehende Übertragungsgraph  $G$  die Bedingung  $\Pi$  erfüllt und  $\text{power}(G)$  minimiert wird.*

Die beiden typischen Konnektivitätsbedingungen, die hierbei betrachtet werden sind folgende. Zum einen *Starker Zusammenhang* (eng. strong connectivity,  $\Pi = SC$ ), die verlangt, dass der Übertragungsgraph stark zusammenhängend ist. Sie erlaubt es jeder Station mit jeder anderen zu kommunizieren. Zum Zweiten die Bedingung *Broadcast* ( $\Pi = Bro$ ) die besagt, dass der Übertragungsgraph zu einer gegebenen Quelle  $s$  einen gerichteten Spannbaum mit Wurzel  $s$  enthalten soll. Dadurch ist wenigstens  $s$  in der Lage eine Nachricht an alle anderen Stationen zu senden. Das hier betrachtete Problem ist ein *Broadcast*-Problem beschränkt auf die Ebene.

**Problem 1.2** (ENERGY EFFICIENT BROADCAST TREE (EEBT)). *Sei  $S$  eine Menge von Stationen, dargestellt durch Punkte in der euklidischen Ebene. Sei insbesondere  $dist(u, v)$  der euklidische Abstand von  $u$  und  $v$ . Eine der Stationen sei die Quellstation  $s$ . Finde einen Graphen  $G$ , der  $power(G)$  minimiert und einen gerichteten Spannbaum mit Wurzel  $s$  enthält.*

Das EEBT Problem ist NP-schwer [5, 4]. Es wurde außerdem schon gezeigt, dass es für beliebige Distanzfunktionen keinen logarithmischen Approximationsfaktor gibt, es sei denn  $P = NP$  [11]. Es folgt der beste bekannte Approximationsalgorithmus für das EEBT Problem.

**Algorithmus 1.1** (MSTALG). *Gegeben sei eine Menge von Punkten in der euklidischen Ebene, die die Stationen darstellen, sowie eine markierte Quellstation. Der Algorithmus berechnet zuerst einen euklidischen minimalen Spannbaum (EMST) der gegebenen Punkte aus  $S$ . Dann wird der EMST gerichtet, so dass von der Quellstation aus alle anderen Stationen erreicht werden können.*

**Satz 1.1.** *Sei  $S$  eine Menge von Punkten auf dem Einheitskreis die den Ursprung enthält. Seien  $e_1, e_2, \dots, e_{|S|-1}$  die Kanten des EMST von  $S$ . Dann gilt*

$$\mu(S) := \sum_{i=1}^{|S|-1} |e_i|^2 \leq 6.$$

Satz 1.1 ist die zentrale Aussage dieser Arbeit. Zusammen mit dem folgenden Lemma 1.1 beweist sie, dass **MSTALG** ein 6-Approximationsalgorithmus ist.

**Lemma 1.1.** *Eine obere Schranke für  $\mu(S)$  impliziert die selbe Schranke für die Approximationsgüte von **MSTALG** für  $\alpha \geq 2$ .*

Dafür werden zunächst  $tot(G)$  und  $mst(S)$  definiert: Da  $power(G)$  als Summe über die längsten Kanten jeder Station definiert ist, stellt

$$tot(G) := \sum_{i \in S} \sum_{j \in \Gamma_G(i)} \|ij\|^\alpha$$

eine einfache obere Schranke für  $power(G)$  dar. Man summiert also über alle Kanten nicht nur über die Längsten um  $tot(G)$  zu erhalten. Nun wird zu einer Menge  $S$  von Stationen  $mst(S) := tot(G)$  definiert, wobei  $G$  der Graph ist den **MSTALG** für  $S$  liefert. Es gilt also für  $\alpha = 2$

$$mst(T) = tot(MSTALG(T)) = \mu(T).$$

Nun kann man die Approximationsgüte beschränken durch Finden einer Schranke für

$$\max_S \frac{mst(S)}{opt(S)}, \quad (1)$$

wenn  $opt(S)$  die optimale Reichweitzuweisung für die Menge  $S$  ist. Der Beweis wird über Konstruktion eines Spezialfalles geführt.

**Lemma 1.2.** *Eine der Mengen  $S$ , die Gleichung 1 maximieren, ist so verteilt, dass die Quellstation alle anderen Stationen abdeckt. Es haben also alle anderen Stationen Reichweite 0.*

*Beweis.* Sei  $S$  eine beliebige Instanz, die Gleichung 1 maximiert und sei  $\hat{G}$  der optimale Kommunikationsgraph für  $S$ , und  $\Gamma_{\hat{G}}(v)$  wieder die Nachbarschaft von  $v$  in  $\hat{G}$ , diesmal inklusive  $v$  selbst. Es gilt offenbar

$$mst(S) \leq \sum_{v \in S} mst(\Gamma_{\hat{G}}(v)),$$

da letzteres einen aufspannenden Graphen bildet und  $mst(S)$  der kleinste davon ist. Weiter gilt:

$$\frac{mst(S)}{opt(S)} = \frac{mst(S)}{power(\hat{G})} \leq \frac{\sum_{v \in S} mst(\Gamma_{\hat{G}}(v))}{\sum_{v \in S} r_{\hat{G}}(v)^\alpha} \leq \max_{v \in S} \frac{mst(\Gamma_{\hat{G}}(v))}{r_{\hat{G}}(v)^\alpha}$$

Eine Station  $\hat{v}$ , die den Bruch ganz rechts maximiert, ist natürlich auch eine Schranke für Gleichung 1. Außerdem sendet in der optimalen Lösung für  $\Gamma_{\hat{G}}(\hat{v})$  die Quelle direkt an alle anderen Stationen, schließlich wurde nur die Nachbarschaft von  $\hat{v}$  im - als optimal angenommenen -  $\hat{G}$  betrachtet.  $\square$

Damit zeigen wir nun Lemma 1.1.

*Beweis.* Betrachtet man einen worst-case  $\Gamma_{\hat{G}}(\hat{v})$  wie in Lemma 1.2. Sei  $T$  eine Instanz, die man erhält, indem man  $\Gamma_{\hat{G}}(\hat{v})$  transformiert, sodass anschließend  $\hat{v}$  im Ursprung liegt und die am weitesten entfernte Station den Abstand 1 hat. Nun gilt zum einen  $opt(T) = 1$  und wie eingangs erwähnt für  $\alpha = 2$  auch  $mst(T) = \mu(T)$  und daraus folgt

$$\mu(T) = \frac{mst(T)}{opt(T)} = \frac{mst(\Gamma_{\hat{G}}(\hat{v}))}{opt(\Gamma_{\hat{G}}(\hat{v}))}.$$

Eine obere Schranke für  $\mu(T)$  bedeutet also tatsächlich eine obere Schranke für **MSTALG**. Für  $\alpha \geq 2$  gilt sogar  $\mu(T) \geq mst(T)/opt(T)$ , weil  $opt(T) = 1$  für alle  $\alpha$  gilt und  $mst(T)$  mit wachsendem  $\alpha$  abnimmt, da alle MST Kanten maximal die Länge 1 haben.  $\square$

Bereits bekannt aus [5] ist, dass **MSTALG** für  $\alpha < 2$  keine konstante Approximationsgüte hat.

## 2 Rückblick

### 2.1 Obere Schranke

Durch die Reduktion auf eine obere Schranke von  $\mu(S)$  können bereits Untersuchungsergebnisse von Gilbert und Pollack [10] von 1968 herangezogen werden, in denen eine Schranke von  $8\pi/\sqrt{3}$  gezeigt wurde. Seitdem wurden die Schranken mehrfach verbessert unter anderem in einem Artikel von Wan et al. [22]. In diesem Artikel wurde eine Schranke von 12.15 gezeigt, für die der Beweis nachfolgend kurz skizziert werden soll. Die Kosten für jede Kante  $e$  des MST werden durch eine Raute wie in Abbildung 1 links unten dargestellt. Jede Raute

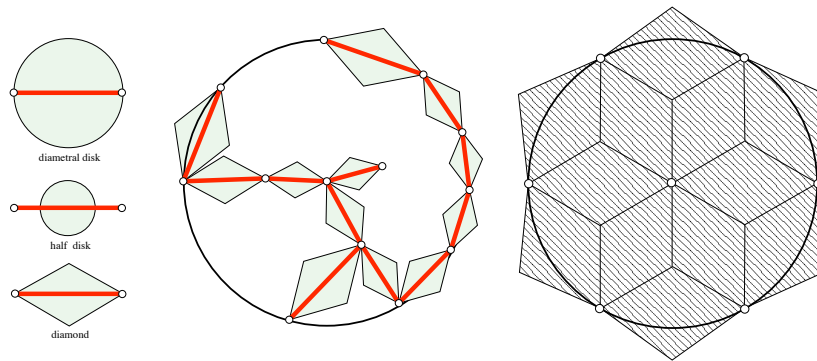


Abbildung 1: Skizze zu älteren Beweisen

besteht aus einem gleichseitigen Dreieck auf jeder Seite der Kante. Der Winkel in der Spitze der Dreiecke beträgt jeweils  $\frac{2}{3}\pi$ . Die Fläche einer Raute an einer Kante  $e$  ist demnach  $\lambda \cdot |e|^2$ , mit  $\lambda = \sqrt{3}/6$ . Es lässt sich leicht zeigen, dass sich die Raute nicht überschneiden, und dass die maximale Fläche durch die Figur in Abbildung 1 rechts gegeben ist. Diese Fläche beträgt genau  $12.15\lambda$ . Es folgt sofort  $\mu(S) \leq 12.15\lambda/\lambda = 12.15$ . Ein ähnlicher Beweis lässt sich mit den Figuren in Abbildung 1 links oben führen, die sich ergebenden Schranken sind allerdings schlechter. So ergibt sich für Kreise mit Durchmesser einer Kantenlänge, dass sich maximal 5 Kreise auf einmal schneiden und daraus eine Schranke von 40. Für Kreise mit halber Kantenlänge Durchmesser lässt sich zeigen, dass es keine Überschneidungen gibt, aber nur eine Schranke von 20 resultiert.

### 2.2 Untere Schranke

Folgendes Beispiel zeigt auch, dass  $\mu(S) \geq 6$ . Betrachtet man Abbildung 2 und nimmt an, dass die 6 Stationen auf dem inneren Kreis je einen Abstand von  $\epsilon$  zur Quelle im Zentrum haben und die Äußeren den maximalen Abstand von eins so ergibt sich folgendes. Der ideale Fall wäre wenn nur die Station im Zentrum sendet und die anderen nicht, das bedeutet  $opt(S) = 1$ . Durch den MST ergibt sich allerdings  $power(G) = \epsilon^2 + 6 \cdot (1 - \epsilon)^2$ . Für  $\epsilon \rightarrow 0$  geht das Verhältnis der beiden Werte gegen 6.

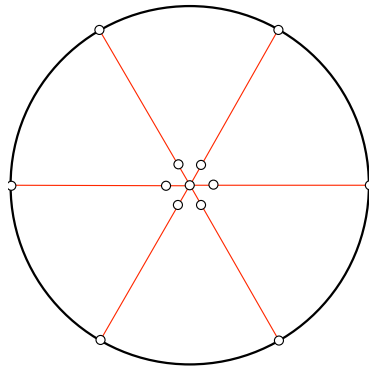


Abbildung 2: Gegenbeispiel für  $\mu(S) < 6$

### 3 Beweis von Satz 1.1

Für den Beweis von Satz 1.1 sollen die Kantenkosten nun durch zwei gleichseitige Dreiecke, wie in Abbildung 3 links repräsentiert werden. Anschließend wird gezeigt, dass diese Fläche durch die konvexe Hülle der Stationen plus eine Menge von gleichseitigen Dreiecken auf deren Rand (zu sehen in Abbildung 3 Mitte) beschränkt wird. Dann bleibt nur noch zu zeigen, dass diese Fläche durch die Figur in Abbildung 3 rechts maximiert wird und dass es sich dabei um  $6\lambda$  handelt.

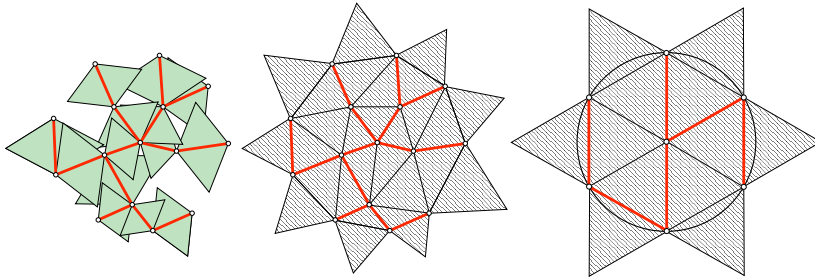


Abbildung 3: Beweisskizze für die Schranke von 6. Die Flächen der Figuren werden von links nach rechts größer.

#### 3.1 Notation

Zunächst müssen noch einige Bezeichnungen zur späteren Benutzung eingeführt werden.

**Definition 3.1** (Dreiecksfläche). *Die Fläche eines gleichseitigen Dreiecks mit Seitenlänge  $s$  wird durch  $\Delta(s)$  repräsentiert.  $\Delta(a, b, c)$  sei die Fläche eines Dreiecks mit Seitenlängen  $a$ ,  $b$  und  $c$ .*

**Definition 3.2** (Halbkanten). *Eine Kante lässt sich der Länge nach in zwei Halbkanten teilen. Von diesen Halbkanten ist jede nur zu einer Facette inzident aber die inzidenten Knoten sind dieselben.*



**Definition 3.3** (Hypothense). *Die längste Seite eines stumpfwinkligen Dreiecks nennen wir im weiteren Hypothense. Es sei darauf hingewiesen, dass dies nicht der üblichen Definition entspricht.*

**Definition 3.4** (Gegenüberliegender Winkel). *Betrachte die beiden zu einer Kante  $e$  inzidenten Dreiecke. Seien  $\alpha, \beta$  die beiden  $e$  gegenüberliegenden Winkel in den Dreiecken. Dann nennen wir  $\alpha$  den gegenüberliegenden Winkel von  $\beta$ .*

**Definition 3.5** (Tasche). *Betrachte die Delaunay-Triangulation von  $S$  und den MST von  $S$ . Es ist bekannt, dass die MST Kanten auch teil der Delaunay-Triangulation sind. Zu einer Kante  $e$  der Triangulation heißt der dadurch auf dem MST induzierte Kreis und sein Inneres Tasche. Die Triangulationsdreiecke in einer Tasche heißen Taschendreiecke. Die Taschenfläche sei die Summe der Flächen der Taschendreiecke. Die Kante  $e$  heißt Tür der Tasche. Die MST-Kanten des Kreises heißen Grenzkanten außerdem heißen Kanten im Inneren, „innere Kanten“. Ist  $e$  selbst Teil des MST, so bezeichnen wir die Tasche als „leer“. Ist das eindeutige Taschendreieck zu dem die Tür inzident ist stumpf, so nennen wir die Tasche „Stumpfe Tasche“, analog für spitzwinklige Taschen. Die MST-Dreiecke einer Tasche sind die gleichseitigen Dreiecke zu denjenigen Halbkanten, die zu Taschendreiecken inzident sind. Die MST-Fläche einer Tasche ist die Summe der Flächen der MST-Dreiecke in der Tasche.*

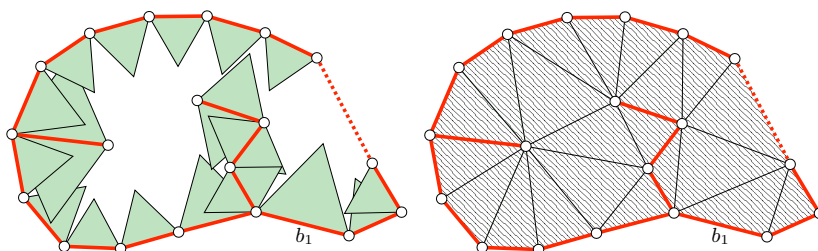


Abbildung 4: Eine Tasche, links mit MST-Dreiecken rechts mit Taschendreiecken.

Abbildung 4 zeigt eine Tasche. Die Tür ist die gestrichelte Kante. Die Grenze sind die Kanten des MST, die die beiden Enden der Tür verbinden. Die längste hiervon ist mit  $b_1$  bezeichnet. Es gibt 4 innere Kanten. Es ist zu beachten, dass die inneren Kanten jeweils zwei anliegende MST-Dreiecke haben, die Grenzkanten hingegen nur eines. Da  $b_1$  teil des MST ist, aber die Tür nicht kann  $b_1$  niemals länger sein als die Tür.

### 3.2 Hilfssätze

**Lemma 3.1.** *In einer spitzwinkligen Tasche mit längster Grenzkante  $b$  ist die Differenz zwischen MST-Fläche und Taschenfläche durch  $\Delta(|b|)$  beschränkt.*

Da der Beweis dieses Lemmas sehr komplex ist, wird nur in Abschnitt 4 eine Skizze angegeben.

Mit Lemma 3.1 lässt sich dann Lemma 3.2 zeigen, auch dieser Beweis sei hier weggelassen.

**Lemma 3.2.** *Betrachtet man eine zu einer Kante  $e$  gehörige Tasche, so gilt folgendes. Die MST-Fläche ist beschränkt durch die Taschenfläche plus die Fläche einer Menge von gleichseitigen Dreiecken deren Seitenlängen durch 1 beschränkt sind und sich zu  $|e|$  addieren.*

### 3.3 Beweis

Mit Lemma 3.2 lässt sich nun leicht Satz 1.1 zeigen. Betrachtet man die Taschen deren Türen die Kanten der konvexen Hülle einer Menge von Stationen  $S$  sind, so ist die Summe der MST-Fläche dieser Taschen die gesamte MST-Fläche von  $S$ . Aus Lemma 3.2 folgt dann direkt, dass die MST-Fläche durch die Fläche einer „Sonne“ beschränkt wird. Eine Sonne ist definiert durch eine konvexe Menge  $T$  auf dem Einheitskreis mit der zusätzlichen Einschränkung, dass die maximale Kantenlänge 1 beträgt. Die Fläche einer Sonne ist definiert als die konvexe Hülle von  $T$ , sowie für jede Kante  $e$  der konvexen Hülle, die Fläche eines gleichseitigen Dreiecks mit Seitenlänge  $|e|$  (siehe Abbildung 5).

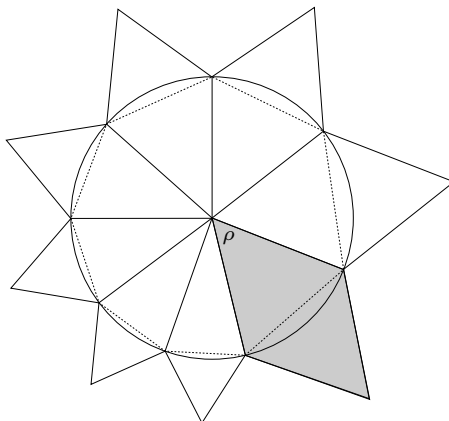


Abbildung 5: Eine „Sonne“

Da  $\mu(S)$  eine Summe von Quadraten über den Kanten des EMST ist und die MST-Fläche eine Summe von gleichseitigen Dreiecken gilt,  $\mu(S) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$  ist die MST-Fläche von  $S$ . Es bleibt also noch zu zeigen, dass die Fläche einer Sonne höchstens  $6 \frac{\sqrt{3}}{2}$  beträgt.

*Beweis.* Eine Punktmenge, die die Fläche einer Sonne maximiert, hat alle Punkte auf dem Einheitskreis, da man leicht sieht, dass die Fläche bei Bewegung eines Punktes zum Ursprung kleiner wird. Teilt man die Fläche einer Sonne ein wie in Abbildung 5, so erhält man verschiedene Teile die je aus einem Dreieck vom Ursprung zur konvexen Hülle und einem gleichseitigen Dreieck außen bestehen. Die Fläche eines Teiles in abhängigkeit des Winkels  $\rho$  am Ursprung ergibt sich zu

$$f(\rho) := \sin\left(\frac{\rho}{2}\right) \left( \cos\left(\frac{\rho}{2}\right) + 2 \cdot \sin\left(\frac{\rho}{2}\right) \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{1}{2} \sin(\rho) + \sqrt{3} \cdot \sin\left(\frac{\rho}{2}\right)^2$$

Aufgrund der Annahme, dass die Kanten der konvexen Hülle maximale Länge von 1 haben, ist  $\rho$  auf 0 bis  $\frac{\pi}{3}$  beschränkt. Wie man in Abbildung 6

sieht wird die Fläche der Sonne für  $\rho = \frac{\pi}{3}$  maximal. Bei diesem Winkel ergibt sich eine Gesamtfläche von genau  $6\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

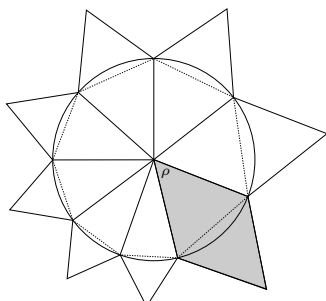


Figure 5(a): A sun.

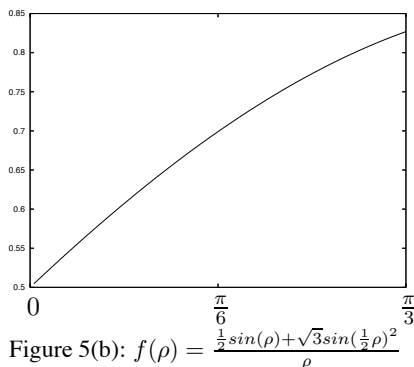


Figure 5(b):  $f(\rho) = \frac{\frac{1}{2}\sin(\rho) + \sqrt{3}\sin(\frac{1}{2}\rho)^2}{\rho}$

Abbildung 6: Eine Sonne und die grau unterlegte Fläche in Abhängigkeit vom markierten Winkel  $\rho$ .

□

## 4 Beweis von Lemma 3.1

**Lemma 4.1.** *Die MST-Dreiecke einer Tasche sind genau eines mehr als Taschendreiecke.*

*Beweis.* Seien  $n, e, b, t$  die Anzahl der Knoten, Kanten, Grenzkanten (ohne die Tür) und Taschendreiecke einer Tasche. Die MST-Kanten bilden einen Baum, ihre Anzahl beträgt also  $n - 1$ . An jeder Grenzkante hängt ein MST-Dreieck, an jedere inneren Kante zwei, insgesamt hat man also  $2n - 2 - b$ . Für die Taschendreiecke betrachten wir die Euler-Formel  $n + (t + 1) - e = 2$ , wobei die zusätzliche 1 für die äußere Facette steht. Zählt man die Kanten an jedem Dreieck und auf dem Rand kommt man auf  $2e = 3t + (b + 1)$ . Aufgelöst nach  $t$  ergibt das  $t = 2n - 2 - b - 1$ . □

**Definition 4.1** (Erweiterte Taschenfläche). *Die erweiterte Taschenfläche (ET) ist die Fläche der Taschendreiecke plus der Fläche eines gleichseitigen Dreiecks mit Seitenlänge  $b$ .  $b$  ist die Länge der längste Grenzkante. Dieses zusätzliche Dreieck heisst Türdreieck. Die Netto-Fläche einer Tasche ist definiert als die erweiterte Fläche minus die MST-Fläche.*

Mit dieser Definition lässt sich Lemma 3.1 nun neu formulieren:

**Lemma 3.1** (umformuliert). *Die Netto-Fläche einer spitzwinkligen Tasche ist nicht-negativ.*

Sei  $V \subseteq S$  die Menge der Knoten in bzw. an der Tasche,  $G = (V, E)$  der gewichtete Graph mit allen Kanten der Triangulation. Das Gewicht einer Kante  $e = uv$ ,  $u, v \in S$  bezeichne  $w(e)$  und es gelte  $w(e) = |uv|$ . Da die erweiterte Taschenfläche, MST-Fläche und Netto-Fläche nur Summen von Dreiecksflächen

sind können sie mit der heronischen Formel [23]

$$\Delta(a, b, c) = \frac{1}{4} \sqrt{-a^4 - b^4 - c^4 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2}$$

in Abhängigkeit des gewichteten Graphen  $G$  angegeben werden.

**Lemma 4.2.** *Sei  $G'$  ein Graph den man aus  $G$  erhält, indem man alle Gewichte auf denselben Wert setzt, dann ist die Netto-Fläche von  $G'$  gleich 0.*

*Beweis.* Sind alle Gewichte in  $G'$  gleich, dann sind alle Dreiecke gleichseitig und haben die selbe Seitenlänge. Nach Lemma 4.1 sind gleich viele Dreiecke in der erweiterten Taschenfläche und der MST-Fläche, die Fläche ist also gleich.  $\square$

Es soll nun ein Algorithmus definiert werden, der  $G$  in einen Graphen umwandelt, in dem alle Kanten das gleiche Gewicht haben, ohne die Struktur des Graphen zu verändern. Dabei soll die Netto-Fläche von  $G$  ständig abnehmen, was zusammen mit Lemma 4.2 beweist, dass die Netto-Fläche von  $G$  nicht-negativ ist.

Seien  $w_{min}$  und  $w_{max}$  die Länge der längsten bzw. kürzesten Kante in  $G$ . Der Algorithmus wird durch eine Menge von Graphen  $G(m)$ ,  $m \in \mathbb{R}$ ,  $w_{min} \leq m \leq w_{max}$  bestimmt. Er beginnt mit  $G(w_{max})$  und endet mit  $G(w_{min})$  in dem dann alle Gewichte  $w_{min}$  betragen.

Wegen der hohen Komplexität wird der Beweis hier nur für den Sonderfall, dass alle Taschen in  $G$  spitzwinklig sind, geführt. Der Algorithmus lässt sich dann folgendermaßen beschreiben: Seien  $w(e)$  und  $w_m(e)$  das Gewicht von  $e$  in  $G$  und  $G(m)$ , dann gilt  $w_m(e) = \min(m, w(e))$ . Es werden also in jedem Schritt die Gewichte der schwersten Kanten verringert bis alle Kanten das selbe Gewicht haben. Da nur die maximalen Gewichte verringert werden, bleibt der MST von  $G$  in allen  $G(m)$  gültig.

Um zu zeigen, dass die Netto-Fläche tatsächlich abnimmt, betrachten wir die folgend definierten *Ketten* (vgl. Abbildung 7). Betrachte einen Graphen  $G(m)$

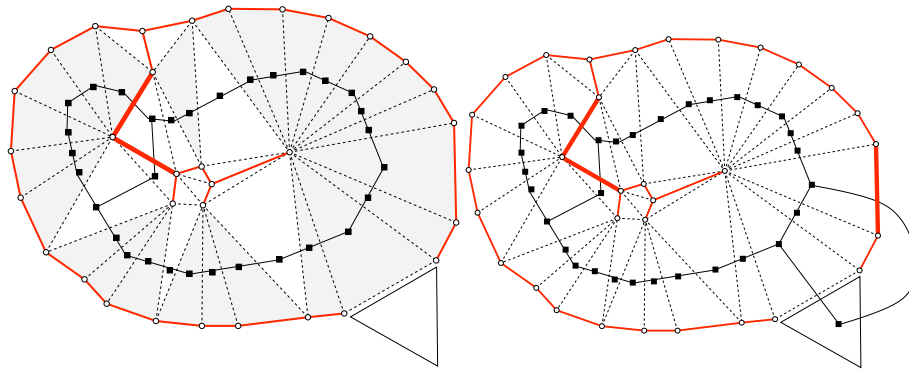


Abbildung 7: Zwei Beispiele für Ketten, links ohne verringerte Grenzkante und Türdreieck, rechts mit

für festes  $m$ . Eine *Kette* ist definiert über einen Graphen  $Q$ . Die Knoten in  $Q$  sind die Dreiecke in  $G(m)$  und das Türdreieck. Jede maximale MST-Kante  $e$  in  $G(m)$  führt zu folgenden Kanten in  $Q$ : Durch das Entfernen von  $e$  wird

der MST zweigeteilt. Sei  $R(e)$  der Ring aus Dreiecken der die beiden Bäume teilt. Zwischen alle adjazenten Dreiecke in  $R(e)$  fügen wir Kanten in  $Q$  ein. Ist  $e$  eine Grenzkante, so enthält  $R(e)$  das Türdreieck (vgl. Abbildung 7 rechts). Eine Kette ist nun definiert als Zusammenhangskomponente von  $Q$ .

Sei  $Q'$  eine Kette. Die Fläche von  $Q'$  ist definiert als Summe aller Dreiecke von  $Q'$ . Die MST-Fläche ist die Summe der MST-Dreiecke an den Halbkanten die, die Dreiecke von  $Q'$  begrenzen. Die Netto-Fläche von  $Q'$  ist wieder die Fläche ohne die MST-Fläche. Da die Netto-Fläche einer Tasche die Summe der Netto-Flächen ihrer Ketten ist, genügt es zu zeigen, dass die Netto-Flächen der Ketten ständig abnehmen. Da nur MST-Kanten maximalen Gewichts abnehmen, tun dies auch nur daran anliegende sog. *maximale* MST-Dreiecke. Im folgenden wird gezeigt, dass die Verringerung der Kettenfläche diese Abnahme ausgleicht.

Für Ketten mit nur einem Dreieck und ohne maximale MST-Dreiecke ist dies offensichtlich, für Ketten mit maximalen MST-Dreiecken betrachten wir zwei Fälle.

**1. Fall: Das Türdreieck ist kein Teil der Kette.** Die *Grenze von  $Q'$*  sei der Kreis in  $G$  mit der kleinsten Fläche der alle Dreiecke von  $Q'$  enthält. Dreiecke die zu einer Kante dieses Kreises inzident sind heißen *Grenzdreiecke* (grau unterlegt in Abbildung 7 links).

$Q'$  wird nun wie folgt verändert. Sei  $e$  eine maximale MST-Kante aus  $Q'$  mit inzidenten Dreiecken  $q_1$  und  $q_2$ . Es werden zwei neue Knoten  $h_1, h_2$  für die Halbkanten von  $e$  eingefügt. Die Kante  $q_1q_2$  wird durch zwei Kanten  $q_1h_1$  und  $q_2h_2$  ersetzt. Wendet man dies auf alle maximalen MST-Kanten an wird  $Q'$  zu einem Baum.

Sei  $d_i$  die Anzahl von Knoten mit Grad  $i$  in  $Q'$ ,  $n$  die Anzahl der Knoten und  $e$  die Anzahl der Kanten. Es gilt  $e = n - 1$  da  $Q'$  nun ein Baum ist. Außerdem ist klar  $n = d_1 + d_2 + d_3$ , da ein Dreieck zu maximal 3 anderen adjazent sein kann, sowie  $2e = 3d_3 + 2d_2 + d_1$  durch zählen. Durch Umformen erhält man daraus  $d_3 = d_1 - 2$ .

Die Knoten vom Grad 3 repräsentieren gleichseitige Dreiecke mit Seitenlänge  $m$  in  $G(m)$ . Sei diese Menge  $D_3$ . Knoten vom Grad 1 repräsentieren die maximalen MST-Halbkanten in  $G(m)$ . Sei die Menge der dazugehörigen MST-Dreiecke  $D_1$ . Die Flächen der Dreiecke in  $D_1$  und  $D_3$  nehmen gleichermaßen ab. Für alle, bis auf zwei Dreiecke aus  $D_1$  wird die Verminderung also durch  $D_3$  ausgeglichen. Es lässt sich zeigen, dass die Verminderung der übrigen beiden Dreiecke durch die Grenzdreiecke ausgeglichen wird. Aus Platzgründen wird dies hier nicht mehr bewiesen.

**2. Fall:  $Q'$  enthält das Türdreieck.** Die Kanten werden wie im vorhergehenden Fall in Halbkanten geteilt. Jetzt werden alle Blätter, die zu Knoten des Türdreiecks adjazent sind, entfernt. Mit derselben Methode wie im 1. Fall erhält man, für  $d_1$  wieder Anzahl der Blätter in  $Q'$ , insgesamt  $d_3 = d_1 - 2$  Knoten vom Grad 3. Jedoch ist jetzt eines der Blätter das Türdreieck, also ein gleichseitiges Dreieck mit Seitenlänge  $m$ . Es gibt also genausoviele Halbkanten wie gleichseitige Dreiecke. Wird also  $m$  verringert, so verringert sich die MST-Fläche der Kette mindestens so stark wie die Fläche der Kette.

## Literatur

- [1] C. Ambühl. An Optimal Bound for the MST Algorithm to Compute Energy Efficient Broadcast Trees in Wireless Networks, ICALP 2005.
- [2] R. Bar-Yehuda, O. Goldreich und A. Itai. On the Time Complexity of Broadcast Operations in Multi-Hop Radio Networks: An Exponential Gap Between Determinism and Randomization. *Journal of Computer and Systems Science*, 45:104-126, 1992.
- [3] R. Bar-Yehuda, A. Israeli und A. Itai. Multiple Communication in Multi-Hop Radio Networks. *SIAM Journal on Computing*, 22:875-887, 1993.
- [4] A. E. F. Clementi, P. Crescenzi, P. Penna, G. Rossi und P. Vocca. A Worst-case Analysis of an MST-based Heuristic to Construct Energy-Efficient Broadcast Trees in Wireless Networks. Technical Report 010 University of Rome „Tor Vergata“ , Mathematische Fakultät, 2001.
- [5] A. E. F. Clementi, P. Crescenzi, P. Penna, G. Rossi und P. Vocca. On the Complexity of Computing Minimum Energy Consumption Broadcast Subgraphs. In *Proceedings of the 18th Annual Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science (STACS)*, Seiten 121-131, 2001.
- [6] A. E. F. Clementi, G. Huiban, P. Penna, G. Rossi und Y. C. Verhoeven. Some Recent Theoretical Advances and Open Questions on Energy Consumption in Ad-Hoc Wireless Networks. In *Proceedings of the 3rd Workshop on Approximation and Randomization Algorithms in Communication Networks (ARACNE)*, Seiten 23-38, 2002.
- [7] A. E. F. Clementi, G. Huiban, P. Penna, G. Rossi und Y. C. Verhoeven. On the Approximation Ratio of the MST-based Heuristic for the Energy-Efficient Broadcast Problem in Static Ad-Hoc Wireless Networks. In *3rd Workshop on Wireless, Mobile and Ad-Hoc Networks (WMAN) in the Proceedings of the 17th International Parallel and Distributed Processing Symposium (IPDPS)*, 2003.
- [8] A. Ephremides, G. D. Nguyen und J. E. Wieselthier. On the Construction of Energy-Efficient Broadcast and Multicast Trees in Wireless Networks. In *Proceedings of the 19th Annual Joint Conference of the IEEE Computer and Communications Societies (INFOCOM)*, Seiten 585-594, 2000.
- [9] M. Flammini, R. Klasing, A. Navarra und S. Perennes. Improved approximation results for the minimum energy broadcasting problem. *Proceedings of the 2004 joint workshop on Foundations of mobile computing*, 2004.
- [10] E. N. Gilbert und H. O. Pollack. Steiner minimal trees. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 16(1): 1-29, 1968.
- [11] S. Guha und S. Khuller. Improved Methods for Approximating Node Weighted Steiner Trees and Connected Dominating Sets. *Information and Computation*, 150:57-74, 1999.
- [12] Z. Haas und S. Tabrizi. On Some Challenges and Design Choices in Ad-Hoc Communications. In *Proceedings of the IEEE Military Communication conference (MILCOM)*, 1998.

- [13] L. M. Kirousis, E. Karanakis, D. Krizanc und A. Pelc. Power Consumption in Packet Radio Networks. *Theoretical Computer Science*, 243:289-305, 2000.
- [14] R. Klasing, A. Navarra, A. Papadopoulos und S. Perennes. Adaptive broadcast consumption (abc), a new heuristic and new bounds for the minimum energy broadcast routing problem. Seiten 866-877, 2004.
- [15] G. S. Lauer. *Packet radio routing*, Kapitel 11 von *Routing in communication networks*, M. Streenstrup (Ed.), Seiten 351-396. Prentice-Hall, 1995.
- [16] A. Navarra, M. Flammini und S. Perennes. The „real“ approximation factor of the mst heuristic for the minimum energy broadcasting. Seiten 22-31, 2005.
- [17] R. Montemanni und L. M. Gambardella. Exact algorithms for the minimum power symmetric connectivity problem in wireless networks. *Computers and Operations Research*, to appear.
- [18] R. Montemanni und L. M. Gambardella und A. K. Das. Mathematical models and exact algorithms for the min-power symmetric connectivity problem: an overview. In *Handbook on Theoretical and Algorithmic Aspects of Sensor, Ad-Hoc Wireless and Peer-to-Peer Networks*. CRC Press.
- [19] A. Navarra. Tighter bounds for the minimum energy broadcasting problem. Seiten 313-322, 2005.
- [20] K. Pahlavan und A. Levesque. *Wireless Information Networks*. Wiley-Interscience, 1995.
- [21] J. M. Steele. Cost of sequential connection for points in space. *Operations Research Letters*, 8(3):137-142, 1989.
- [22] P. J. Wan, G. Călinescu, X. Y. Li und O. Frieder. Minimum-Energy Broadcast Routing in Static Ad Hoc Wireless Networks. In *Proceedings of the 20th Annual Joint Conference of the IEEE Computer and Communications Societies (INFOCOM)*, Seiten 1162-1171, 2001.
- [23] E. W. Weisstein. MathWorld-A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com>