Universität Karlsruhe
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Algorithmik I

Algorithmen zur Visualisierung von Graphen
Sommer 2007

2. Übungsblatt

Ausgabe:	8. Mai 2007
Besprechung:	22. Mai 2007

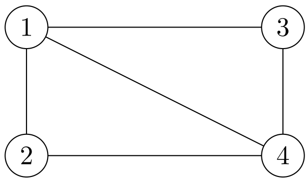
1. Aufgabe

(a) Betrachten Sie den Graphen G aus dem Handout zum Matrix-Gerüst-Satz. Berechnen Sie mit Hilfe des Matrix-Gerüst-Satzes die Anzahl $t(G)$ der Spannbäume von G.
Tipp: *Die Determinante einer* 3×3-*Matrix kann man leicht nach der* Regel von Sarrus *berechnen:*

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}$$

(b) Geben Sie alle Spannbäume von G an. Geben Sie dabei im Kontext des Beweises des Matrix-Gerüst-Satzes an, zu welcher Kantenkontraktion bzw. Kantenentfernung die einzelnen Bäume korrespondieren.

(c) Betrachten Sie den folgenden Graphen H:



Geben Sie zu H die Laplacematrix an und berechnen sie mit Hilfe des Matrix-Gerüst-Satzes $L(G^{2,2})$, und dann mit der Regel von Sarrus $t(H)$.
Gehen Sie nun schrittweise vor um zu dem selben Ergebnis zu gelangen (siehe Beweis von 3.3 oder Handout): Betrachten Sie dazu die Bedeutung von $t(g) = t(G/\{2,4\}) + t(G-\{2,4\})$ sowohl in Form der Matrixschreibweise als auch in Form der entsprechenden Graphen.

2. Aufgabe

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter und zusammenhängender Graph und A die zugehörige Adjazenzmatrix definiert durch:

$$A[u,v] := \begin{cases} 1 & \text{, falls } \{u,v\} \in E \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases} .$$

Sei λ_i mit $1 \leq i \leq n$ die Eigenwerte von A. Geben Sie 'anschauliche' Formel für $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^j$ an, für $j = 0, 1, 2, 3$. Tipp: *Folgt der heißen Spur!*

3. Aufgabe

Sei G ein beliebiger ungerichteter, ungewichteter und einfacher Graph und L die zugehörige Laplace Matrix.

(a) Zeigen Sie, die Vielfachheit des Eigenwert 0 von L ist genau die Anzahl der Zusammenhangskomponenten.

(b) Zeigen Sie, dass $\lambda_2 \leq 1/2(\deg(u) + \deg(v))$ für zwei unverbundene Knoten ist.

(c) Zeigen Sie dass gilt: $\lambda_2 \leq \max_{v \in V} \deg(v)$

4. Aufgabe Sei G ein planarer Graph mit einer kreuzungsfreien Einbettung in die Ebene, die f Facetten enthält. Für $1 \leq i \leq f$ sei a_i die Anzahl der zur Facette i inzidenten Kanten von G, wobei die Facetten so numeriert seien, daß die Folge $(a_1, a_2, \ldots, a_f)$ nichtabsteigend sortiert ist.
Kann es zu einem planaren Graphen G zwei Einbettungen in die Ebene geben, so daß die zugehörigen Zahlenfolgen unterschiedlich sind?

5. Aufgabe Zwei Einbettungen $\mathcal{E}_1$ und $\mathcal{E}_2$ mit Facettenmengen F_1 und F_2 eines einfachen planaren Graphen $G = (V, E)$ sind *äquivalent*, wenn es eine Bijektion $\varphi : F_1 \to F_2$ gibt, so dass für jede Facette $f \in F_1$ und für jede Kante $\{u, v\} \in E$ gilt: $\{u, v\}$ ist zu f inzident g.d.w. $\{u, v\}$ zu $\varphi(f)$ inzident ist.

Zeigen Sie: Alle Einbettungen eines 3-fach zusammenhängenden, einfachen planaren Graphen sind äquivalent. Tipp: *Betrachten Sie den induzierten Subgraphen einer Facette.*

6. Aufgabe Beweisen Sie den Satz von Euler (Satz 4.2 im Skript).